Annales de l'institut Fourier

Szolem Mandelbrojt

Relations entre la convexité dans le complexe et le prolongement des propriétés dans le réel

Annales de l'institut Fourier, tome 22, n° 4 (1972), p. 13-46

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_4_13_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 4 (1972), 13-46.

RELATIONS ENTRE LA CONVEXITÉ DANS LE COMPLEXE ET LE PROLONGEMENT DES PROPRIÉTÉS DANS LE RÉEL

par S. MANDELBROJT

Les deux premiers chapitres de ce travail, tout en portant sur des sujets qui peuvent paraître, à première vue, très distincts, sont étroitement liés, surtout par leurs applications.

Si, en effet, le chapitre I met en évidence le fait que le logarithme du module d'une classe très large de fonctions entières (de type π) peut être borné sur *chaque* rayon issu de l'origine par la somme de $\pi|y|$ $(z = x + iy)$ et d'une fonction concave de $\log|z|$ qui est (à des constantes près) la même qui limite les logarithmes des modules des valeurs prises aux points entiers, une application (il est vrai, très particulière) de ce résultat conduit aux énoncés moins forts, mais semblables à quelques-uns des faits établis au Chapitre II. Dans ce dernier chapitre on démontre que, sous certaines conditions portant sur les coefficients de Fourier, quelques propriétés importantes de la fonction correspondante, valables *a priori* sur un segment partiel (arbitrairement petit), ont nécessairement lieu sur le segment $[-\pi, \pi]$ tout entier.

Le chapitre III indique la profonde parenté entre les méthodes utilisées dans notre théorie des séries adhérentes et celles employées dans nos travaux plus anciens concernant notre forme spécifique de la quasianalyticité. Ce sont, par exemple, les mêmes opérateurs qu'on utilise dans les deux cas.

Remarquons, d'ailleurs, qu'un résultat du Chapitre I, précisément une application du théorème II, porte le même caractère que quelques-unes des généralisations, fournies par plusieurs auteurs, de notre ancien théorème sur les fonctions « petites » au voisinage d'un point, et dont la série de Fourier est lacunaire (pour la bibliographie concernant de tels théorèmes, voir [3]).

CHAPITRE I

THÉORÈME I. — *Soient* $\omega(t)$, $\alpha(t)$, $C(t)$ $(t \geqslant 0)$ *des fonctions ayant les propriétés suivantes:*

$C(t)$ *est une fonction convexe de* $\log t$, $\omega(t)$ *ne décroît pas,* $\omega(t)/t$ *ne croît pas.*

$$\lim \frac{\omega(t)}{\log t} = \infty \tag{1}$$

$$\limsup \frac{\alpha(t)}{\omega(t)} < 1 \tag{2}$$

$$\alpha(t) = o(t) \tag{3}$$

$$\lim \frac{C(t)}{\log t} = \infty. \tag{4}$$

Soit $F(z)$ $(z = x + iy = re^{i\theta})$ *une fonction entière satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$|F(z)| \leqslant e^{\pi|y| + \alpha(r) - \omega(|y|)}, \tag{5}$$

et pour tout entier n*:*

$$\log|F(n)| \leqslant -C(|n|). \tag{6}$$

Conclusion. — *Aux fonctions* ω, α, C *et à tout couple de nombres* a, b, *avec* $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, *correspond un* $K = K(\omega, \alpha, C; a, b)$ *tel que pour tout* z*:*

$$|F(z)| \leqslant Ke^{\pi|y| - aC(br)}; \tag{7}$$

et, si l'on suppose, en plus, que $C(t)/t$ *ne croît pas, à* ω, α, C *et à tout* a *avec* $0 < a < 1$ *correspond un* $K_1 = K_1(\omega, \alpha, C; a)$ *tel que*

$$|F(z)| \leqslant K_1 e^{\pi|y| - aC(r)}. \tag{8}$$

Démonstration. — Posons

$$\text{(9)}\qquad \frac{F(z)}{\sin \pi z} - \frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n F(n)}{z-n} = Q(z).$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$ donné, désignons par D_ε l'ensemble complémentaire de la réunion des disques

$$|z-n| < \varepsilon(-\infty < n < \infty).$$

La série dans (9) converge uniformément dans D_ε, car, d'après (4) et (6) :

$$\Sigma|F(n)| < \infty.$$

Posons

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{\sin \pi z},$$

et désignons par $D_{\varepsilon,\delta}(0 < \delta < \pi/2)$ la partie de D_ε où

$$|\arg z \pm \pi/2| \leqslant \delta.$$

On a sur $D_{\varepsilon,\delta}$:

$$\text{(11)}\qquad |\Phi(z)| \leqslant Ae^{\alpha(r)-(\cos\delta)\omega(r)}$$

où A est une constante; car, d'une part, dans D_ε :

$$|\sin \pi z|^{-1} < ke^{-\pi|y|}$$

(k constante), et, d'autre part, de $\omega(t)\uparrow\infty$, $\omega(t)/t\downarrow$ résulte que

$$(\cos\delta)\omega(r) \leqslant \omega(\cos\delta . r).$$

Il résulte alors de (2) que la fonction Φ est bornée dans $D_{\varepsilon,\delta}$, si δ est suffisamment petit.

Les termes dont la différence, dans (9), définit $Q(z)$ ont les mêmes singularités, qui sont des pôles simples de mêmes résidus. Du fait que sur tout arc de rayon $r = n + \frac{1}{2}$ $(n \geqslant 0)$, compris dans l'angle $\left|\arg z \pm \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \delta$, on a, d'après (5)

$$\log|\Phi(z)| \leqslant \alpha(r) + L = o(r) \quad \text{(L constante)},$$

une telle relation ayant aussi lieu pour la somme intervenant dans (9), on voit que sur les mêmes arcs on a, quel que soit $n > 0$:

$$\log|Q(z)| \leqslant \alpha(r) + \text{const.} = o(r).$$

Mais si, δ est choisi suffisamment petit, $Q(z)$ tend, d'après (2) et (11) vers zéro lorsque z tend vers l'infini sur les droites $|\arg z \pm \pi/2| = \delta$. On en conclut, d'après le principe de Phragmèn-Lindelöf, en utilisant (3), que $Q(z)$ est une fonction bornée aussi dans l'angle $|\arg z \pm \pi/2| \geqslant \delta$.

Les considérations qu'on vient de développer conduisent à la constatation : $Q \equiv 0$.

On a donc :

$$\frac{F(z)}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi} \Sigma \frac{(-1)^n F(n)}{z-n}.$$

Il résulte d'ailleurs de (4) que, quel que soit le polynôme P, on a encore

$$\Sigma |F(n)P(n)| < \infty.$$

Et, en utilisant (1), on voit aussi que

$$\frac{F(z)P(z)}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi} \Sigma \frac{(-1)^n F(n)P(n)}{z-n} \tag{11}$$

(pour le démontrer, il suffit de remplacer dans les raisonnements précédents $F(z)$ par $F(z)P(z)$, et $\alpha(r)$ par

$$\alpha(r) + m \log r,$$

m étant le degré de P).

Posons $aC(e^x) = C_1(x)$. On a $C_1(x)/x \to \infty$, $C_1(x)$ étant une fonction convexe de x ; posons alors :

$$B(t) = \sup_x (xt - C_1(x)). \tag{12}$$

De la convexité de C_1 résulte que

$$C_1(x) = \sup_t (xt - B(t)), \tag{13}$$

et (4) conduit aussi à l'égalité (voir [3])

$$\lim_{t \to \infty} \frac{B(t)}{t} = \infty \tag{14}$$

($B(t)$ est, d'après la terminologie que j'ai introduite, la *fonction convexe associée* de $C_1(x)$).

$C_1(x)$ peut alors aussi être écrit sous la forme :

$$C_1(x) = \max (xt - B(t)) = xt_x - B(t_x), \tag{15}$$

avec $\lim\limits_{x \to \infty} t_x = \infty$. La fonction $B(t)$ est évidemment non décroissante.

Posons, pour $n \geqslant 0$:

$$c_n = e^{-B(2n)}.$$

Il résulte de (13) que

$$c_n r^{2n} \leqslant e^{C_1(\log r)} = e^{aC(r)} \quad (n \geqslant 0,\ r > 0).$$

Si $2p$ est le plus petit entier pair positif supérieur à t_x (ou supérieur à la plus petite valeur t_x vérifiant l'égalité (15)), on voit, à partir de (13), que pour r assez grand :

$$e^{aC(r)} = e^{C_1(\log r)} \leqslant c_{p-1} r^{2p}.$$

Il résulte aussi de (14) que :

$$\lim c_n^{1/n} = 0.$$

La série

$$\varphi(z) = \sum_{n \geqslant 1} b^{2n} c_n z^{2n} \tag{16}$$

représente donc une fonction entière paire, quelle que soit la constante b. Si $0 < b < 1$, cette fonction satisfait, pour r assez grand, à l'inégalité

$$\begin{aligned}(br)^{-2} e^{aC(br)} \leqslant \sum_{n \geqslant 1} b^{2n} c_n r^{2n} &= \varphi(r) = \max_{|z|=r} |\varphi(z)| \\ &\leqslant \left[\max_{n \geqslant 1} (c_n r^{2n})\right] \sum_{n \geqslant 1} b^{2n} \leqslant \frac{b^2}{1 - b^2} e^{aC(r)}.\end{aligned} \tag{17}$$

Posons, pour m entier quelconque :

$$S_m(z) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant m} b^{2n} c_n z^{2n}.$$

En appliquant (11), avec $P(z) = S_m(e^{-i\theta} z)$, où $0 \leqslant \theta < 2\pi$, on obtient :

$$F(z) S_m(e^{-i\theta} z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum \frac{(-1)^n S_m(e^{-i\theta} n)(Fn)}{z - n}. \tag{18}$$

Et comme $S_m(e^{-i\theta} z)$ tend uniformément sur tout compact vers $\varphi(e^{-i\theta} z)$, et qu'il existe une constante P indépendante de m et de n, telle que :

$$|F(n) S_m(e^{-i\theta} n)| \leqslant P e^{-C(|n|) + aC(|n|)}, \tag{19}$$

on en conclut que pour tout θ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$:

$$F(z)\varphi(e^{-i\theta}z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \Sigma \frac{(-1)^n F(n)\varphi(e^{-i\theta}n)}{z-n}.$$

Il résulte aussi de (18) et (19) que pour tout z:

$$|F(z)\varphi(e^{-i\theta}z)| \leqslant Se^{\pi|y|} \quad (S \quad \text{constante})$$

(car, pour tout entier n et tout z: $|\sin \pi z/\pi(z-n)| \leqslant e^{\pi|y|}$).

On obtient (avec $z = re^{i\theta}$)

$$|F(z)|\varphi(r) \leqslant Se^{\pi|y|},$$

et (17) nous permet d'écrire, pour r suffisamment grand, P_1 étant une constante,

$$(20) \qquad |F(z)| \leqslant P_1(br)^2 e^{\pi|y| - aC(br)},$$

ce qui prouve (7).

Comme $C(t)$ est une fonction convexe de $\log t$, la relation (4) montre qu'elle croît pour t suffisamment grand, et si l'on suppose, en plus, que $C(t)/t$ ne croît pas, (8) résulte immédiatement de (7).

La démonstration du théorème I est ainsi achevée.

Théorème II. — *Supposons que les fonctions* $\omega(t)$, $\alpha(t)$, $C(t)$ $(t \geqslant 0)$ *satisfassent aux conditions suivantes:*

$\omega(t)$ *ne décroît pas,* $\omega(t)/t$ *ne croît pas,* $C(t)$ *est une fonction convexe de* $\log t$, *les relations* (1), (3) *et* (4) *sont satisfaites ;*

$$(21) \qquad \limsup \frac{\alpha(t)}{\omega(t)} < \frac{1}{2},$$

et, en posant

$$\alpha^*(t) = \sup_{t-1 \leqslant \tau \leqslant t+1} \alpha(\tau),$$

$$(22) \qquad \limsup \frac{\alpha^*(t)}{C(t)} = d < 1.$$

Soit $F(z)$ *une fonction entière satisfaisant aux conditions suivantes :*

pour $y \geqslant 0$:

$$(23) \qquad |F(z)| \leqslant e^{\pi y - \omega(y) + \alpha(r)},$$

pour $y < 0$:

$$(24) \qquad |F(z)| \leqslant e^{-\pi y + \alpha(r)},$$

pour n *entier quelconque :*

$$(25) \qquad \log |F(n)| < -C(|n|).$$

Conclusion. — Aux fonctions ω, α, C *et à tout couple* a, b, *avec* $0 < a < 1 - d$, $0 < b < 1$, *correspond un* $K_2 = K_2(\omega, \alpha, C; a, b)$ *tel que*

$$(26) \qquad |F(z)F(-z)| \leqslant K_2 e^{2\pi|y| - aC(br)}.$$

Et si l'on suppose, en outre, que $C(t)/t$ *ne croît pas ; à* ω, α, C *et à* a, *avec* $0 < a < 1 - d$, *correspond un* $K_3 = K_3(\omega, \alpha, C; a)$ *tel que*

$$(27) \qquad |F(z)F(-z)| \leqslant K_3 e^{2\pi|y| - aC(r)}.$$

Démonstration. — Considérons la fonction

$$(28) \qquad F_1(z) = F(z)F(-z).$$

La fonction $F_1(z)$ satisfait à l'inégalité

$$(29) \qquad |F_1(z)| \leqslant e^{2\pi|y| - \omega(|y|) + 2\alpha(r)}.$$

On a

$$(30) \qquad F_1'(z) = F'(z)F(-z) - F'(-z)F(z) ;$$

on peut aussi écrire

$$(31) \qquad |F'(n) < \max_{|z-n|=1} |F(z)|.$$

Quel que soit d' avec $d' > d$, (22), (23) et (31) permettent d'écrire pour $|n|$ assez grand

$$(32) \qquad |F'(n)| \leqslant e^{\pi - \omega(0) + \alpha^*(|n|)} \leqslant e^{\pi - \omega(0) + d'C(|n|)},$$

et, d'après (25) et (31), si l'on choisit $d < d' < 1$:

$$(33) \qquad |F_1'(n)| \leqslant Ae^{-(1-d')C(|n|)};$$

et les inégalités (4) et (33) permettent d'affirmer que les séries

$$(34) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(n)}{(z-n)^2}, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1'(n)}{z-n}$$

convergent uniformément sur tout compact ne contenant aucun entier.

Considérons alors la fonction

$$(35) \qquad Q(z) = \frac{F_1(z)}{(\sin \pi z)^2} - \frac{1}{\pi^2}\left[\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{F_1'(n)}{z-n} + \frac{F_1(n)}{(z-n)^2}\right)\right]$$

$Q(z)$ est encore une fonction entière, car le premier terme du second membre de cette égalité n'a pas d'autres singularités que des pôles du second ordre dont les parties principales sont les mêmes que celles des pôles (d'affixes n) du second terme. On continue alors à utiliser le même raisonnement que celui qu'on a employé dans la démonstration du théorème I, pour démontrer que $Q(z) \equiv 0$.

Il suffit maintenant de construire la fonction φ intervenant dans la démonstration du théorème I (voir (16)), en utilisant une constante a telle que $a < 1 - d'$, de remplacer dans (35), $F_1(z)$ par $F_1(z)S_m(e^{i\theta}z)$ et de passer à la limite pour obtenir une inégalité, qui, comme dans la démonstration du théorème I, conduit au résultat voulu.

Démontrons maintenant les lemmes suivants.

Lemme I. — *Soit* $\{n_j\}$ *une suite d'entiers positifs croissants, mesurable, de densité* D, *c'est-à-dire*

$$(36) \qquad \lim \frac{j}{n_j} = D.$$

$\Lambda(z)$ *étant le produit canonique correspondant à* $\{n_j\}$, *c'est-à-dire*

$$(37) \qquad \Lambda(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{n_j^2}\right),$$

il existe une fonction $\alpha(r)$ *avec*

$$(38) \qquad \alpha(r) = o(r),$$

telle que

$$(39) \qquad \log|\Lambda(z)| \leqslant \pi D|y| + \alpha(r).$$

Désignons par $E = E(\Lambda)$ l'ensemble de toutes les fonctions

$\alpha(r)$ non négatives satisfaisant à (39) et soit, pour $r > 0$:

$$(40) \qquad e(z) = \underset{\alpha \in E}{\text{borne inf}}\, \alpha(r).$$

La fonction $e(r)$ sera appelée l'*excédent* (de la mesure) de la suite (mesurable) $\{n_j\}$. On a évidemment $e(r) = o(r)$.

Démonstration du lemme I. — Cette démonstration est largement basée sur le théorème suivant de V. Bernstein ([1], page 271):

« Si $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$ sont deux suites mesurables de densité $D > 0$, et si l'on pose

$$C(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \qquad K(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right),$$

alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut lui faire correspondre un R_ε tel qu'on ait:

$$\left|\frac{K(z)}{C(z)}\right| < e^{\varepsilon|z|}$$

pour tout $|z| \geqslant R_\varepsilon$, $x \geqslant 0$, qui n'appartient pas à un ensemble $Q = Q(q; \{\lambda_n\})$ ». Il résulte, d'ailleurs, de quelques remarques de V. Bernstein que si $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h > 0$ $(n \geqslant 1)$, l'ensemble Q peut être choisi de la manière suivante (voir [1] pp. 256, 259, 271): autour de chaque λ_n on construit le carré défini par

$$|x - \lambda_n| < q < \frac{h}{2}$$
$$|y| < q$$

Q est la réunion de ces carrés.

Il résulte de ce théorème que, si

$$\lambda_n = \frac{n}{D},$$

c'est-à-dire, si $C(z) = \sin \pi Dz / \pi Dz$, et si $\{\mu_n\}$ est de densité D, on a, à l'extérieur de Q:

$$\pi D r \left|\frac{K(z)}{\sin \pi D z}\right| \leqslant e^{\alpha(r)},$$

avec $\alpha(r) = o(r)$. Et comme

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leqslant e^{|y|},$$

on en tire

$$|K(z)| \leqslant e^{\pi D|y|+\alpha(r)}.$$

Si on remplace dans la dernière inégalité $K(z)$ par $\Lambda(z)$ ($\{\mu_n\}$ par $\{n_j\}$), on obtient le résultat voulu pour $D > 0$.

La démonstration du lemme pour $D = 0$ résulte immédiatement du fait que le type de la fonction entière $\Lambda(z)$ est au plus égal à πD; si donc, $D = 0$, on obtient, quel que soit $\varepsilon > 0$, pour $r > r_\varepsilon$:

$$|\Lambda(r)| \leqslant e^{\varepsilon r}.$$

Le lemme est ainsi démontré dans tous les cas.

Lemme II. — *Si $\{n_j\}$ est une suite d'entiers positifs croissants, et si $N(t) = \sum_{n_j<t} 1$, on a pour $r > 0$:*

$$\text{(41)} \qquad \log \Lambda(ir) = 2\int_0^\infty \frac{N(rt)\,dt}{t(1+t^2)}.$$

On sait en effet que [5]:

$$\log \Lambda(ir) = \log \Pi\left(1 + \frac{r^2}{n_j^2}\right) = 2r^2 \int_0^\infty \frac{N(\tau)\,d\tau}{\tau(\tau^2 + r^2)}.$$

Un changement de variable $\tau = rt$ donne le résultat voulu.

Remarque. — Il résulte de ce lemme que *si $\{n_j\}$ est mesurable, de densité $D = 0$, l'excédent $e(r)$ de cette suite satisfait à l'égalité*

$$e(r) = 2\int_0^\infty \frac{N(rt)\,dt}{t(1+t^2)}$$

Théorème III. — *Soit $f \in L[-\pi, \pi]$, et supposons que*

$$\text{(42)} \qquad f(x) \sim \sum_{n\geqslant 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Soient $\{n_j\}$ et $\{m_k\}$ deux suites complémentaires de la suite d'entiers positifs, la suite $\{n_j\}$ étant mesurable de densité

$D < 1$, *c'est-à-dire* :

$$\lim \frac{j}{n_j} = D < 1, \tag{43}$$

la suite $\{m_k\}$ *étant telle qu'il existe une fonction* $\gamma(t)$, *non négative, convexe de* $\log t$ *pour laquelle*

$$\frac{\log |a_{m_k}|}{\log |b_{m_k}|} < -\gamma(m_k). \tag{44}$$

Supposons que $f(x) = 0$ *dans les intervalles*

$$]-\pi, -\pi + \pi D[, \qquad]\pi - \pi D, \pi[,$$

et posons pour $\pi D < h \leqslant 2\pi - \pi D$:

$$I(h) = -\log \int_{-\pi}^{-\pi+h} |f(x)|\, dx. \tag{45}$$

Soit $\mathfrak{I}(h)$ *une fonction (prenant des valeurs finies) qui croît vers l'infini lorsque* h *décroît vers* πD *et telle que*

$$\mathfrak{I}(h) \leqslant I(h), \tag{46}$$

et désignons par $\omega(r)$ *la fonction définie, pour* r *assez grand, par*

$$\mathfrak{I}(h) = \omega\left(\frac{\mathfrak{I}(h)}{h - \pi D}\right). \tag{47}$$

Si, $e(t)$ *étant l'excédent de* $\{n_j\}$, *les relations suivantes sont satisfaites, en posant* $e^\star(t) = \sup\limits_{t-1 \leqslant \tau \leqslant t+1} e(\tau)$:

$$\limsup \frac{e^\star(t)}{\gamma(t)} = p < 1 \tag{48}$$

$$\limsup \frac{e(t)}{\omega(t)} < \frac{1}{2}; \tag{49}$$

et si

$$\lim \frac{\omega(t)}{\log t} = \infty, \tag{50}$$

$$\int^{\infty} \frac{\gamma(t)}{t^2}\, dt = \infty, \tag{51}$$

la fonction f *est nulle presque partout.*

Démonstration. — Posons

$$(52) \qquad \Phi(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{itz}\, dt.$$

Lorsque $h \in]\pi D, 2\pi - \pi D[$ on peut écrire pour $y > 0$

$$(53) \quad |\Phi(z)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| e^{-ty}\, dt$$

$$\leqslant e^{-\mathfrak{J}(h)+\pi(1-D)y} + \int_{-\pi+h}^{\pi} |f(t)|dt \,.\, e^{(\pi-h)y}$$

$$\leqslant ce^{\pi(1-D)y}\left(e^{-\mathfrak{J}(h)} + e^{-(h-\pi D)y}\right),$$

où c est une constante. Si $y > 0$ est assez grand on peut choisir h de sorte que

$$y = \frac{\mathfrak{J}(h)}{h - 2\pi D},$$

ce qui permet d'écrire pour $y \geqslant 0$:

$$(54) \qquad |\Phi(z)| \leqslant Ae^{\pi y - \pi D y - \omega(y)},$$

où A est une constante.

Il est évident, d'autre part, que pour $y < 0$:

$$(55) \qquad |\Phi(z)| < Ae^{-\pi y + \pi D y}$$

(nous avons choisi la même constante A dans (54) et (55)).

Avec $e(t)$ étant l'excédent de $\{n_j\}$, on a, en posant

$$(56) \qquad \Lambda(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{n_j^2}\right),$$

l'inégalité

$$(57) \qquad \log|\Lambda(z)| \leqslant \pi D|y| + e(r),$$

où

$$(58) \qquad e(r) = o(r).$$

Considérons alors la fonction

$$(59) \qquad F(z) = \Phi(z)\Lambda(z).$$

On a, d'après (54), pour $y \geqslant 0$:

$$(60) \qquad |F(z)| \leqslant Ae^{\pi y - \omega(y) + e(r)},$$

et pour $y < 0$:

(61) $$|F(z)| \leqslant Ae^{-\pi y + e(r)}.$$

On a, d'autre part, d'après (52), (57), (59), (42), (44), (48) quel que soit p' avec $p < p' < 1$, pour k suffisamment grand:

(62) $$\begin{aligned}\log|F(m_k)| &= \log|\Phi(m_k)| + \log|\Lambda(m_k)| \\ &= \log|a_{m_k} + ib_{m_k}| + \log|\Lambda(m_k)| + \log\pi \\ &\leqslant -\gamma(m_k) + e(m_k) + \log\pi + \log 2 \\ &\leqslant -\gamma(m_k) + e^*(m_k) + \log\pi + \log 2 \\ &\leqslant -(1-p')\gamma(m_k) + \log\pi + \log 2.\end{aligned}$$

Comme $F(n_j) = 0$, il existe une constante $A = A(p')$ telle que pour tout entier m:

(63) $$\log|F(m)| \leqslant A - (1-p')\gamma(|m|).$$

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème II (avec $C(t)$ remplacé par $(1-p')\gamma(r)$) pour voir que la fonction $F(z)$ définie par (59) vérifie l'inégalité

(64) $$|F(z)F(-z)| \leqslant Le^{\pi|y| - a(1-p')\gamma(br)},$$

quelles que soient les quantités a et b telles que

$$0 < a < 1 - p', \qquad 0 < b < 1, \qquad L = L(\omega, e, \gamma; a, b).$$

Comme $e(r) = o(r)$, on voit, d'après (60) et (61), que $F(z)F(-z)$ est une fonction entière de type exponentiel; en tenant alors compte de (64) pour $z = x$, réel, et en appliquant la relation (51), on voit, d'après la solution classique du problème de Watson, que $F(z)F(-z) \equiv 0$; en définitive, $\Phi(z)$ est identiquement nulle, donc $f(x) \equiv 0$ p.p., et le théorème est démontré.

Théorème IV. — *Soit* $f \in [-\pi, \pi]$, *et posons* (42). $\{n_j\}$ *et* $\{m_k\}$ *étant deux suites complémentaires d'entiers positifs, supposons qu'il existe un* σ, *avec* $0 < \sigma < 1$, *tel que*

(65) $$\Sigma \frac{1}{n_j^\sigma} < \infty,$$

et, $\gamma(t)$ *étant une fonction non négative, convexe de* $\log t$, *supposons que* (44) *et* (51) *aient lieu.* $I(h)$ *étant défini pour*

$0 < h \leqslant 2\pi$ *par* (45), *définissons* $\mathfrak{I}(h)$ *comme dans le théorème III (dans l'énoncé actuel on a évidemment* $D = 0$), *et désignons par* $\omega(r)$ (*pour* r *assez grand*) *la fonction définie par*

$$\mathfrak{I}(h) = \omega\left(\frac{\mathfrak{I}(h)}{h}\right). \tag{66}$$

Supposons que (50) *ait lieu et que pour un* $\sigma_1 > \sigma$ *on ait pour* t *suffisamment grand:*

$$\gamma(t) > t^{\sigma_1} \tag{67}$$

$$\omega(t) > t^{\sigma_1}. \tag{68}$$

Dans ces conditions $f(x) \equiv 0$ *presque partout.*

Démonstration. — On voit facilement que ce théorème est un cas particulier du théorème III, car, avec les notations du lemme II, on a pour tout σ_2, avec $\sigma < \sigma_2 < 1$:

$$N(t) < t^{\sigma_2},$$

pour t suffisamment grand, et ce même lemme permet donc d'affirmer que (ici $D = 0$) $e(t) < Rt^{\sigma_2}$ ($t > 1$), où R est une constante. La suite de la démonstration (simple application du Théorème III) est évidente.

Remarque. — *Il suffit de supposer* (65), (67) *et* (44), $\gamma(t)$ *étant non négative, convexe de* $\log t$, *satisfaisant à* (51), *et de supposer que*

$$\liminf_{h \downarrow 0} \frac{\log I(h)}{-\log h} > \frac{\sigma}{1-\sigma} \tag{69}$$

pour conclure que $f(x) \equiv 0$ (p.p.).

En effet, on voit facilement que ces conditions impliquent celles du théorème IV, la condition (69) entraînant une inégalité de la forme (68).

La démonstration du théorème suivant est une synthèse facile des démonstrations des théorèmes I et III.

Théorème V. — *Soit* $F(z)$ *une fonction entière satisfaisant à l'inégalité*

$$|F(z)| \leqslant e^{\pi(1-D)|y|+\alpha(r)-\omega(|y|)}, \tag{70}$$

où $0 \leqslant D \leqslant 1$, $\omega(t)$ *étant une fonction non décroissante satis-*

faisant à (1), $\omega(t)/t$ *étant une fonction non croissante,* $\alpha(t)$ *satisfaisant à* (3).

Les suites $\{n_j\}$ *et* $\{m_k\}$ *étant complémentaires de la suite d'entiers positifs, avec* $\{n_j\}$ *mesurable de densité* D *et d'excédent* $e(t)$, *supposons que*

$$\limsup \frac{\alpha(t)+e(t)}{\omega(t)} < 1. \tag{71}$$

$C(t)$ $(t \geqslant 0)$ *étant une fonction convexe de* $\log t$, *supposons que*

$$\lim \frac{C(t)}{\log t} = \infty \tag{72}$$

$$\limsup \frac{e(t)}{C(t)} = d < 1 \tag{73}$$

$$\log|F(\pm m_k)| \leqslant -C(m_k). \tag{74}$$

Soit, enfin, $\Lambda(x)$ *le produit canonique de* $\{n_j\}$ (*défini par* (56)).

Aux fonctions ω, α, C, *à la suite* $\{n_j\}$ *et aux quantités* a *et* b *quelconques, avec* $0 < a < 1-d$, $0 < b < 1$, *correspond un* K, *tel que*

$$|F(z)\Lambda(z)| \leqslant Ke^{\pi|y|-aC(br)}. \tag{75}$$

En revenant au produit canonique Λ de $\{n_j\}$ (défini par (56)), on voit à partir du lemme I, que si $\{n_j\}$ est mesurable, de densité D, à tout $\varepsilon > 0$ correspond un r_ε tel que

$$\left|\frac{\sin(\pi/D)z}{\Lambda(z)}\right| < e^{\varepsilon r} \tag{76}$$

pour $r > r_\varepsilon$, z variant dans le domaine $R_q\left(0 < q < \frac{1}{2}\right)$ qui est le complémentaire à la réunion des carrés $|x \pm n_j| < q$, $|y| < q$,

$$(R_q = \{z|z \notin (|x \pm n_j| < q, |y| < q)\}).$$

Posons

$$|\Lambda(z)| \geqslant e^{(\pi/D)|y|-\beta(r)} \quad (z \in R_q) \tag{77}$$

et soit pour chaque $r > 0$:

$$d_q(r) = \operatorname{Inf} \beta(r)$$

le Inf étant pris par rapport à tous les β satisfaisant à (77).

La fonction $d_q(r)$ sera appelée *fonction de défaut de la suite mesurable* $\{n_j\}$, dans R_q. On a évidemment $d_q^+(r) = o(r)$, ($d_q^+(r) = 0$ lorsque $d_q(r) \leqslant 0$ et $d_q^+(r) = d_q(r)$ si $d_q(r) > 0$).

En se rapportant alors au théorème V, on démontre facilement le théorème suivant :

Théorème VI. — *Si les conditions* (70), (71), (72), (73), (74) *du théorème V sont satisfaites, on peut affirmer qu'il existe une constante* $T = T_q$ *telle que, lorsque* $z \in R_q$ (*voir la démonstration du théorème* V *pour la définition de* R_q), *on a*

$$(78) \qquad |F(z)| \leqslant Te^{\pi(1-D)|y|-aC(br)+d_q(r)},$$

où $d_q(r)$ *est la fonction de défaut de* $\{n_j\}$ *dans* R_q, *a et b étant définis comme dans l'énoncé du théorème* V.

CHAPITRE II

Des théorèmes concernant les fonctions réelles appartenant à $L[-\pi, \pi]$ de nature semblable à celle du théorème III, mais bien généraux, peuvent être établis en partant d'un tout autre point de vue. En réalité, tout ce qui précède a été entrepris à partir des nouvelles démonstrations qu'on a cherché à donner aux faits établis par l'auteur concernant particulièrement la nouvelle notion de quasianalyticité, portant sur les séries de Fourier, que nous avons introduite avec un théorème dont la Remarque sur la page 29 donne une certaine idée.

Notre but, en définitive, est de traiter le problème général suivant. (A) désignant une certaine propriété, qui peut être par exemple, la dérivabilité finie ou indéfinie, le fait que les dérivées successives vérifient certaines inégalités dont — l'analyticité ou la quasianalyticité peut être un cas particulier — indiquer des conditions portant sur les coefficients de Fourier d'une fonction f appartenant à $L[-\pi, \pi]$ pour que du fait que f possède la propriété (A) sur une partie I de $[-\pi, \pi]$ résulte que cette fonction possède la même propriété (ou une propriété semblable) sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ tout entier. Autrement dit, nous cherchons des propriétés des coefficients de Fourier d'une fonction appartenant à $L[-\pi, \pi]$ permettant d'affirmer que la propriété (A) puisse être « prolongée » de $I \subset [-\pi, \pi]$ à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ tout entier (1).

Commençons par un lemme qui nous servira souvent dans la suite.

Lemme III. — *Si la suite d'entiers positifs* $\{n_j\}$ *est telle que*

$$\Sigma \frac{1}{n_j} < \infty,$$

(1) J'ai posé ce problème pour la première fois et donné quelques réponses dans un Mémoire déjà ancien [9].

et si $\Lambda(z)$ *est le produit canonique de* $\{n_j\}$

$$(79) \qquad \Lambda(z) = \Pi\left(1 - \frac{z^2}{n_j^2}\right) = \Sigma\,(-1)^n c_n z^{2n},$$

on a $c_0 = 1$, $c_n > 0$ $(n \geqslant 1)$, $-\log c_n$ *est une fonction convexe de* n *et*

$$\Sigma\left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Démonstration. — On peut écrire pour $m \geqslant 1$:

$$c_m = \Sigma\left(\frac{1}{n_{j_1} n_{j_2} \ldots n_{j_m}}\right)^2 \quad (j_k \neq j_p \ \text{ pour } \ k \neq p).$$

On peut donc dire que dans chaque somme définissant c_{m+1} interviennent les mêmes facteurs que dans c_m, en ajoutant à chacun un $n^2_{j_{m+1}}$ distincts de tous les termes $n^2_{j_p}$ $(p = 1, 2, \ldots, m)$ intervenant dans c_m. Aussi bien dans $c_m c_{m+2}$, que dans c^2_{m+1} interviennent, dans les sommes qui les forment, des produits de $2m + 2$ termes, chacun étant de la forme $n^2_{j_k}$; mais, tandis que tous les produits de la forme $n^2_{j_1} n^2_{j_2} \ldots n^2_{j_{m+1}} n^2_{j_{m+2}} \ldots n^2_{j_{2m+2}}$ où interviennent $m + 1$ couples $n^2_{j_p} n^2_{j_q}$ avec $p = q$ (chacun intervenant, bien entendu, au plus une fois) peuvent se présenter dans c^2_{m+1}, chaque produit qui intervient dans $c_m c_{m+2}$ contient *au plus* m couples $n^2_{j_p} n^2_{j_q}$ avec $p = q$. Autrement dit, la somme définissant c^2_{m+1} contient tous les termes que contient $c_m c_{m+2}$ et d'autres termes positifs.

Donc

$$c^2_{m+1} \geqslant c_m c_{m+2},$$

ce qui prouve que $-2 \log c_{m+1} \leqslant -(\log c_m + \log c_{m+2})$, et la convexité de $-\log c_n$ est établie.

Nous avons démontré, d'autre part dans [4], qu'en posant

$$\beta_n = \sup_{h \geqslant 0} c_{n+h}^{\frac{1}{2(n+h)}},$$

on a

$$(80) \qquad \Sigma\beta_n < \infty.$$

La convexité de $-\log c_n$, ensemble avec (80), permet alors d'affirmer (voir [5]) que

$$\Sigma\left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{81}$$

et le lemme est ainsi démontré.

Corollaire. — *Il résulte du lemme* III *que, si les conditions et les notations de celui-ci sont conservées, il existe une suite positive* $\{\gamma_n\}$ $(n \geqslant 0)$ *avec* $\lim\limits_{n=\infty} \gamma_n^{1/n} = 0$, *telle qu'on ait encore*

$$\Sigma\left(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{82}$$

En désignant, en effet, par $\{N_p\}$ une suite d'entiers positifs strictement croissants tels que

$$\sum_{n \geqslant N_p}\left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^{\frac{1}{2}} < L_p,$$

où L_p tend vers zéro en décroissant, il suffit de poser pour $N_p \leqslant n < N_{p+1}$ $(p \geqslant 1)$

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = L_p$$

et de choisir convenablement $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{N_1}$ pour aboutir au résultat.

Une telle suite $\{\gamma_n\}$ $(\gamma_n > 0,\ \lim \gamma_n^{1/n} = 0,\ (82)$ satisfait) sera appelée *suite liée à la suite* $\{n_j\}$ (elle n'existe que si $\Sigma n_j^{-1} < \infty$; nous verrons d'ailleurs (voir page 39) que la série (81), elle-même, diverge lorsque $\Sigma n_j^{-1} = \infty$). La fonction

$$\psi(z) = \Sigma \gamma_n z^{2n} \tag{83}$$

sera appelée *fonction (qui correspond à* $\{\gamma_n\}$*) liée à la suite* $\{n_j\}$.

Le produit (qui converge)

$$\prod_{k \neq j}\left(1 - \frac{n_k^2}{n_j^2}\right) = N_k^{-1} \tag{84}$$

fournit la suite $\{N_k\}$ appelée *suite associée à la suite* $\{n_k\}$ (toute suite $\{\lambda_n\}$ avec $\lim\sup n/\lambda_n = D^\bullet < \infty$ admet, comme on le voit dans [5] une suite $\{\Lambda_n\}$ associée).

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant

THÉORÈME III. — *Soit* $f \in L[-\pi, \pi]$, *et supposons que*

$$f(x) \sim \Sigma(a_j \cos n_j x + b_j \sin n_j x) \tag{85}$$

avec

$$\Sigma \frac{1}{n_j} < \infty. \tag{86}$$

Soit $I = [\alpha_0 - \pi\alpha, \alpha_0 + \pi\alpha] \subset [-\pi, \pi]$, *et supposons que* f *est* p *fois dérivable sur* I *avec*

$$\operatorname*{Max}_{x \in I} |f^{(p)}(x)| = \mathcal{M}_p. \tag{87}$$

Quelle que soit la fonction ψ *liée à la suite* $\{n_j\}$, *il existe deux constantes* $\lambda > 0$, $A > 0$, *ne dépendant que de* ψ *telles que*

$$n_j^p(|a_j| + |b_j|) \leqslant A\mathcal{M}_p\psi\left(\frac{\lambda n_j}{\alpha}\right)N_j \quad (j \geqslant 1) \tag{88}$$

$\{N_j\}$ *étant la suite associée à la suite* $\{n_j\}$.

Il suffit de démontrer le théorème pour le cas $\alpha_0 = 0$. En suivant un raisonnement décrit dans [5] (page 102) (ou dans [6], page 86), on voit, d'après (82) qu'en posant

$$M_{2p} = \frac{\gamma_n}{c_n}, \ M_{2n+1} = \left(\frac{\gamma_{n+1}}{c_{n+1}} \cdot \frac{\gamma_n}{c_n}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (n \geqslant 1), \ M_0 = 1, \tag{89}$$

où les γ_n sont définis par (83), et, en posant

$$\Sigma \frac{M_n}{M_{n+1}} = \frac{\omega}{4}, \tag{90}$$

on peut construire une fonction $\varphi(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes : $\varphi(x)$ est une fonction paire, indéfiniment dérivable, de support $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$; $\varphi(x) = 1$ pour $|x| \leqslant \frac{1}{4}$;

$$|\varphi^{(n)}(x)| < \omega^n M_n \quad (n \geqslant 0) \tag{91}$$

$$\varphi^{(n)}\left(-\frac{3}{4}\right) = \varphi^{(n)}\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \quad (n \geqslant 0). \tag{92}$$

Soit $p_1 = p + 3$, et en choisissant $\delta_j > 0$ $(j = 1, 2, ..., p_1)$ tels que

$$\sum_1^{p_1} \delta_j < \frac{1}{8},$$

posons

$$(93) \quad \delta(x) = \frac{1}{2^{p_1}\delta_1\delta_2 \ldots \delta_{p_1}} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} dt_1 \int_{-\delta_2}^{\delta_2} dt_2 \cdots \int_{-\delta_{p_1}}^{\delta_{p_1}} \varphi(x + t_1 + \cdots + t_{p_1})\, dt_{p_1}.$$

On peut évidemment écrire pour $q \geqslant 0$, et $r \geqslant 0$:

$$(94) \quad \delta^{(r+q)}(x) = \frac{1}{2^{p_1}\delta_1\delta_2 \ldots \delta_{p_1}} \left[\int_{-\delta_1}^{\delta_1} dt_1 \int_{-\delta_2}^{\delta_2} dt_2 \cdots \int_{-\delta_{p_1}}^{\delta_{p_1}} \varphi^{(r)}(x + t_1 + \cdots + t_{p_1})\, d_{p_1}\right]^{q}.$$

D'autre part, si $q = 1$, on peut aussi écrire:

$$(95) \quad \delta^{(r+1)}(x) = \frac{1}{2^{p_1-1}\delta_1\delta_2 \ldots \delta_{p_1}} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} dt_2 \ldots \int_{-\delta_{p_1}}^{\delta_{p_1}} \frac{1}{2} [\varphi^{(r)}(x + \delta_1 + t_2 + \cdots + t_{p_1}) - \varphi^{(r)}(x - \delta_1 + t_2 + \cdots + t_{p_1})]\, dt_{p_1};$$

en opérant par induction, à partir de (95), on a, pour

$$0 \leqslant q \leqslant p_1:$$

$$(96) \qquad |\delta^{(r+q)}(x)| \leqslant \frac{\omega^r M_r}{2^{p_1-q}\delta_1\delta_2 \ldots \delta_{p_1}}.$$

Ainsi, $\delta(x)$ est une fonction paire, indéfiniment dérivable, de support contenu dans $|x| < 1$ $\left(\text{sur } \left[-\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right]\right)$, égale à 1 sur $\left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$ et satisfaisant aux inégalités (96) pour tout $r \geqslant 1$ et tout q, avec $0 \leqslant q \leqslant p_1$.

Posons maintenant:

$$(97) \quad \delta_{\alpha,k}(x) = \delta\left(\frac{x}{\pi\alpha}\right) \cos n_k x = \Sigma d_m^{(\alpha,k)} \cos mx.$$

La fonction $\delta_{\alpha,k}(x)$ est encore paire, indéfiniment dérivable, et son support est contenu dans $]-\pi\alpha, \pi\alpha[$. Sur cet intervalle $\delta_{\alpha,k}(x)\cos n_k x \geqslant 0$, et $\delta_{\alpha,k}(x) = \cos n_k x$ pour $|x| \leqslant \frac{\pi\alpha}{8}$.

On a aussi

$$(98) \quad d_{n_k}^{(\alpha,k)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta_{\alpha,k}(x)\cos n_k x\,dx \geqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi\alpha/8}^{\pi\alpha/8} \cos^2 n_k x\,dx$$
$$\geqslant \frac{1}{\pi n_k}\int_{-[\alpha n_k/8]\pi}^{[\alpha n_k/8]\pi} \cos^2 y\,dy = \frac{1}{\pi n_k}\left[\frac{\alpha n_k}{8}\right]\pi \geqslant \left(\frac{\alpha}{8} - \frac{1}{n_k}\right)$$

($[a]$) désigne la partie entière de a).

Posons :

$$(99) \qquad \Lambda_k(z) = \prod_{j\neq k}\left(1 - \frac{z^2}{n_j^2}\right) = \Sigma(-1)^n c_n^{(k)} z^{2n},$$

et désignons par $\Lambda_k^*(f)$ l'opérateur

$$(100) \qquad \Lambda_k^*(f) = \Sigma c_n^{(k)} f^{(2n)}$$

(si f est indéfiniment dérivable, et si la somme converge). Considérons alors l'expression

$$(101) \qquad \Lambda_k^*(\delta_{\alpha,k}(x)) = \mathrm{F}_k(x) = \Sigma c_n^{(k)}\delta_{\alpha,k}^{(2n)}(x).$$

Remarquons qu'on a

$$(102) \qquad \lim \mathrm{M}_n^{1/n} = \infty,$$

car, dans le cas contraire, la classe $\mathrm{C}\{\mathrm{M}_n\}$ serait quasianalytique et les deux relations (91) et (92) donneraient $\varphi \equiv 0$, contrairement à l'affirmation que $\varphi(x) = 1$ sur $|x| \leqslant \frac{1}{4}$. On peut donc remplacer dans (91) (voir [5], page 227) M_n par $2\mathrm{M}_n^c$, où $\log \mathrm{M}_n^c$ est la régularisée convexe de $\log \mathrm{M}_n$; comme on a aussi $\lim \mathrm{M}_n^c = \infty$, la convexité de $\log \mathrm{M}_n^c$ permet d'affirmer que M_n^c tend vers l'infini *en croissant* à partir de $n \geqslant n_0$.

D'après la définition (97) de $\delta_{\alpha,k}$, on a

$$(103) \quad \delta_{\alpha,k}^{(2n)}(x) = \frac{1}{(\pi\alpha)^{2n}}\delta^{(2n)}\left(\frac{x}{\pi\alpha}\right)\cos n_k x$$
$$- \mathrm{C}_{2n}^1 \frac{n_k}{(\pi\alpha)^{2n-1}}\delta^{(2n-1)}\left(\frac{x}{\pi\alpha}\right)\sin n_k x$$
$$+ \cdots + (-1)^n n_k^{2n}\delta\left(\frac{x}{\pi\alpha}\right)\cos n_k x.$$

Il existe donc une constante A, ne dépendant que de ψ, telle que (il est évident que $\alpha \leqslant 1$) :

$$(104)\qquad |\delta_{\alpha,k}^{(2n)}(x)| \leqslant A\left(\frac{2\omega n_k}{\alpha}\right)^{2n} M_{2n}.$$

Comme $c_n^{(k)} < c_n (n \geqslant 1)$ $(c_0^{(k)} = c_0 = 1)$, on voit, d'après (89), la définition de la fonction ψ, fonction liée à $\{n_j\}$, (et (83)) que (101) a un sens (la série converge absolument et uniformément sur **R**) et que

$$(105)\qquad |F_k(x)| = |\Lambda_n^*(\delta_{\alpha,k})| \leqslant A \sum_n \gamma_n \left(\frac{2\omega n_k}{\alpha}\right)^{2n} = A\psi\left(\frac{\lambda n_k}{\alpha}\right).$$

(Nous avons posé ici $\lambda = 2\omega$).

En utilisant (96) on voit, d'ailleurs, que $F_k(x)$ est p fois dérivable. Le support de $F_k(x)$ est celui de $\delta_{\alpha,k}(x)$, c'est-à-dire $\left[-\frac{7\alpha}{8}, \frac{7\alpha}{8}\right]$ et on a, en particulier, d'après (93) :

$$(106)\qquad |F_k'(x)| \leqslant \frac{A}{2^{p+2}\delta_1 \ldots \delta_{p+3}} \psi\left(\frac{\lambda n_k}{\alpha}\right).$$

En tenant compte de (99) et (97), on peut écrire

$$(107)\qquad F_k(x) = \sum_m l_m \cos mx = \sum_n c_n^{(k)} \sum_\nu (-1)^n d_\nu^{(\alpha,k)} \nu^{2n} \cos \nu x$$
$$= \sum_\nu d_\nu^{(\alpha,k)} \left(\sum_n (-1)^n c_n^k \nu^{2n}\right) \cos \nu x = \Sigma\, d_\nu^{(\alpha,k)} \Lambda_k(\nu) \cos \nu x;$$

tout en rappelant que, d'après (99), $\Lambda_k(n_j) = 0$ lorsque $j \neq k$, et que, par contre, $\Lambda_k(n_k) = N_k^{-1}$, $\{N_k\}$ étant la suite associée à la suite $\{n_k\}$.

Rappelons maintenant le théorème de Young : si f_1 et f_2 appartiennent à $L[-\pi, \pi]$, avec

$$f_1(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$f_2(x) \sim \frac{d_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} (d_n \cos nx + g_n \sin nx),$$

où la série écrite au second membre de cette égalité converge uniformément, alors

$$(108)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\, f_2\,(x)\, dx = \frac{a_0 d_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} (a_n d_n + b_n g_n).$$

La fonction f_1 étant la fonction f de l'énoncé et la fonction f_2 étant la fonction $F_k^{(l)}$, où $l = p$ si p est pair, et $l = p + 1$ si p est impair, on a, en vertu du théorème de Young (le support de F_k étant sur $[-\pi\alpha, \pi\alpha]$),

$$(109) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_k^{(l)}(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} f(x)F_k^{(l)}(x)\,dx$$
$$= \Sigma a_{n_j}\Lambda_k(n_j)(-1)^{\frac{l}{2}}\,.\,n_j^l d_j^{(\alpha,k)}.$$

$\Big($La série $\sum\limits_n \Lambda_k(n_j)n_j^l d_j^{(\alpha,k)}$ étant absolument convergente du fait que, $F_k^{(l)}(x)$ est au moins $l+2$ fois dérivable$\Big)$.

Or, d'après (99), $\Lambda_k(n_j) = 0$ pour $j \neq k$, et $\Lambda_k(n_k) = N_k^{-1}$. En intégrant alors par parties p fois le second membre de (109) on obtient :

$$(110) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} f^{(p)}(x)F_k^{(l-p)}(x)\,dx = a_{nk}N_k^{-1}(-1)^{l/2}n_k^l d_k^{(\alpha,k)}.$$

Dans cette égalité $l = p$ si p est pair, et $l = p + 1$ si p est impair.

En utilisant alors (105), ou (106), selon la parité de p, d'une part, et (98), d'autre part, on obtient l'inégalité (88) (lorsque $\alpha_0 = 0$), et le théorème est ainsi démontré.

On écrira $f \in \mathrm{HL}$, si $f \in L[-\pi, \pi]$, et si

$$(111) \qquad f(x) \sim \Sigma(a_j \cos n_j x + b_j \sin n_j x),$$

la suite $\{n_j\}$ étant telle qu'il existe un $\Delta > 1$ pour lequel

$$(112) \qquad \frac{n_{j+1}}{n_j} \geqslant \Delta \quad (j \geqslant 1).$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant.

Théorème VIII. — *Soit* $f \in \mathrm{HL}$, *avec* (111) *et* (112) *satisfaits ; supposons que, sur*

$$I = [\alpha_0 - \pi\alpha, \alpha_0 + \pi\alpha] \subset [-\pi, \pi], f \in C\{M_n\}.$$

En posant

$$(113) \qquad T(t) = \sup_{n\geqslant 1}\frac{r^n}{M_n},$$

supposons que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

1° $T(r) = \infty$ pour r *suffisamment grand* ;

2° *Il existe deux constantes* $\gamma > 0$, $\delta > 0$, *telles que pour* r *suffisamment grand*

$$\log T(\delta r) - \log T(r) > r^{\gamma}. \tag{114}$$

On peut alors affirmer que $f \in C\{M_{n+1}\}$ *sur* $[-\pi, \pi]$.

Démonstration. — Remarquons que de (112) résulte que la suite $\{N_k\}$, associée à la suite $\{n_j\}$, satisfait à l'inégalité :

$$N_k^{-1} \geqslant (\Delta^2 - 1)^{k-1} e^{-\frac{1}{\Delta^2-1}}. \tag{115}$$

On a, en effet,

$$\frac{n_k}{n_p} > \Delta^{k-p} (1 \leqslant p < k), \qquad \frac{n_k}{n_p} < \frac{1}{\Delta^{p-k}} \quad (p > k).$$

Donc

$$- \log N_k = \log\left(\prod_{p<k}\left(\frac{n_k^2}{n_p^2} - 1\right) \cdot \prod_{p>k}\left(1 - \frac{n_k^2}{n_p^2}\right)\right) \geqslant (k-1) \log (\Delta^2 - 1)$$
$$- \sum_{r \geqslant 1} \frac{1}{\Delta^{2r}} = (k-1) \log (\Delta^2 - 1) - \frac{1}{\Delta^2 - 1}.$$

On voit, d'autre part, que si les c_n sont définis par (79), quel que soit $\omega > 2$, la suite $\gamma_n = n^{\omega n} c_n (n \geqslant 1)$ est *une suite liée à la suite* $\{n_j\}$ (pour la définition, voir page 20), la fonction

$$\psi(z) = \Sigma n^{\omega n} c_n z^{2n} \tag{116}$$

étant alors une *fonction liée* à $\{n_j\}$. Il résulte, en effet, de $n_k \geqslant \Delta^{k-1} n_1$ $(k \geqslant 1)$ que, quel que soit $\sigma > 0$, la série $\Sigma n_k^{-\sigma}$ converge ; la fonction $\Lambda(z)$ (définie par (79)) est donc une fonction entière d'ordre zéro, et, quel que soit $\delta_1 > 0$, on a pour n suffisamment grand : $0 < c_n < n^{-\delta_1 n}$. La suite $\{\gamma_n\}$, qu'on vient de définir, satisfait donc, quel que soit $l > 0$, pour n suffisamment grand, à l'inégalité :

$$\gamma_n < n^{-ln}. \tag{117}$$

Donc, la fonction ψ, définie par (116) est une fonction entière d'ordre zéro. On a aussi

$$(118) \qquad \Sigma \left(\frac{c_n}{\gamma_n}\right)^{1/2n} < \infty.$$

Mais $\log\left(\frac{\gamma_n}{c_n}\right) = \omega n \log n$ est une fonction convexe de n, on peut donc tirer de (118) (voir [5]) la conclusion que

$$(119) \qquad \Sigma \left(\frac{\gamma_n}{c_n} \cdot \frac{c_{n+1}}{\gamma_{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

La suite $\{\gamma_n\}$ et la fonction ψ qu'on vient de définir sont donc bien respectivement une suite et la fonction correspondante, *liées* à $\{n_j\}$.

D'après le théorème VII, il existe alors deux constantes A et λ, dépendant uniquement de ψ, telles que pour deux entiers $j > 0$ et $p > 0$ quelconques, on a, en supposant que sur $\mathrm{I} : |f^{(n)}(x)| \leqslant k^n \mathrm{M}_n$ $(n \geqslant 1)$:

$$(120) \qquad n_j^p(|a_j| + |b_j|) \leqslant \mathrm{A} k^p \mathrm{M}_p \psi\left(\frac{\lambda n_j}{\alpha}\right) \mathrm{N}_j.$$

Comme ψ est une fonction entière d'ordre zéro, on a, quel que soit $\rho > 0$, pour x assez grand, $x > x_\rho$:

$$(121) \qquad |\psi(x)| \geqslant e^{x\rho}.$$

Ainsi, d'après (115), (120) et (121), il existe une constante B tels que

$$(122) \qquad (|a_j| + b_j) \leqslant \mathrm{B} \frac{k^p \mathrm{M}_p}{n_j^p} (\Delta^2 - 1)^{-j} e^{\left(\frac{\lambda n_j}{\alpha}\right)^\rho} \qquad (j > 0,\ p > 0)$$

(B étant indépendante de j et de p).

En posant $\log(\Delta^2 - 1) = -\mathrm{L}$, on peut écrire

$$(123) \qquad |a_j| + |b_j| \leqslant \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{T}\left(\frac{n_j}{k}\right)} e^{\left(\frac{\lambda n_j}{\alpha}\right)^\rho + j\mathrm{L}} \qquad (j \geqslant 1).$$

Mais $\lim \frac{j}{n_j} = 0$, il suffit donc de choisir $\rho < \gamma$ pour voir, à partir de (123), que si l'hypothèse 2° de l'énoncé du théorème est satisfaite, il existe une constante C, indépendante de j, telle que

$$(124) \qquad |a_j| + |b_j| \leqslant \frac{Ce^{\left(\frac{n_j}{k\delta}\right)^\gamma}}{T\left(\frac{n_j}{k\delta}\right)} < \frac{C}{T\left(\frac{n_j}{k\delta}\right)} \qquad (j \geqslant 1).$$

Si, par contre, l'hypothèse 1° de l'énoncé est satisfaite, la conclusion du théorème résulte immédiatement de (123), car f est alors un polynôme trigonométrique.
Il résulte de (124) que pour $j \geqslant 1$, $p \geqslant 0$:

$$(125) \qquad n_j^p(|a_j| + |b_j|) < Ck\delta(k\delta)^p \frac{M_{p+1}}{n_j}.$$

La série Σn_j^{-1} étant convergente, on voit que sur $[-\pi, \pi]$:

$$|f^{(p)}(x)| \leqslant \sum_j n_j^p(|a_j| + |b_j|) < C_1(k\delta)^p M_{p+1} \quad (p \geqslant 0),$$

où C_1 est une constante.
Le théorème est ainsi complètement démontré.
Rappelons qu'une classe $C\{M_n\}$ est dite dérivable sur **R** si la relation $f \in C\{M_n\}$ sur **R**, implique $f' \in C\{M_n\}$ sur **R**.

Corollaire du théorème VIII. — *Si* $C\{M_n\}$ *est dérivable sur* **R**, *la conclusion du théorème peut être remplacée par*

$$f \in C\{M_n\}$$

sur $[-\pi, \pi]$.
Si $\lim M_n^{1/n} = \infty$, $\log M_n^c$ étant la régularisée convexe de $\log M_n$, chacune des conditions équivalentes suivantes

$$(126) \qquad (M_{n+1}^c)^{1/n} = O(M_n^{1/n}),$$
$$(127) \qquad \log M_n^c = O(n^2)$$

est nécessaire et suffisante pour que $C\{M_n\}$ soit dérivable sur **R**.
Si $\liminf M_n^{1/n} < \infty$, la classe est évidemment aussi dérivable.
Ce corollaire peut donc aussi être énoncé de la façon suivante :
Si on ajoute aux hypothèses du théorème VIII, *la condition* 1° *de l'énoncé* VIII *a lieu, ou* $\lim M_n^{1/n} = \infty$ *avec* (126), (*ou*

son équivalent (127)) *a lieu, on peut affirmer que* $f \in C\{M_n\}$ *sur* $[-\pi, \pi]$.

Remarque. — Il est important de noter qu'avec les hypothèses du théorème VII on peut remplacer dans l'inégalité (88), qui constitue la conclusion du théorème, la quantité $\mathcal{M}_p$ ($= \max |f^{(p)}(x)|$ sur I) par $M_p = \int_I |f^{(p)}(x)|\, dx$.

Les dernières lignes de la démonstration du théorème justifient facilement cette remarque.

Nous pouvons alors démontrer le théorème suivant :

Théorème IX. — *Soit* $f \in L[-\pi, \pi]$, *avec les conditions* (85), (86) *satisfaites. Soit* $\{I_n\}$ *une suite d'intervalles contenus dans* $[-\pi, \pi]$, *la longueur* α_n *de* I_n *tendant vers zéro.*

Si, quelle que soit la constante $c > 0$, *on a pour une fonction* ψ *liée à* $\{n_j\}$:

$$\lim_{n \to \infty} \psi\left(\frac{c}{\alpha_n}\right) \int_{I_n} |f(x)|\, dx = 0, \tag{128}$$

la fonction f *est identiquement nulle* (p.p.).

La démonstration de ce théorème est immédiate en partant de (110), avec $l = p = 0$ et (105).

Corollaire du théorème IX. — *Soit* $f \in [-\pi, \pi]$. *Supposons* (85) *avec*

$$\Sigma \frac{1}{n_j^\sigma} < \infty \tag{129}$$

pour un σ *tel que* $0 \leqslant \sigma < 1$.

Définissons $I(h)$ *par* (45), *et supposons que*

$$\rho = \limsup_{h \to 0} \frac{\log I(h)}{-\log h} > \frac{\sigma}{1-\sigma}. \tag{130}$$

Dans ces conditions f *est identiquement nulle* (p.p.).

Cet énoncé constitue mon ancien énoncé dont j'ai parlé plus haut, et qui a été repris par plusieurs auteurs, pour être généralisé. Il est intéressant — et important — de le comparer, par exemple, à la remarque de la page 15, où dans la formule (69) intervient *lim inf*, tandis que dans l'inégalité semblable (130), qui intervient dans le corollaire qu'on vient d'énoncer, intervient *lim sup*, ce qui constitue, étant donné le sens de l'inégalité, une condition bien moins restrictive.

Pour démontrer le Corollaire du théorème IX, il suffit de faire les remarques suivantes : $\Lambda(z)$ désignant le produit canonique de $\{n_j\}$ correspondant, avec

$$\Lambda(z) = \Sigma(-1)^n c_n z^{2n},$$

on a, quel que soit $\eta_1 > 0$:

$$(131) \qquad |c_n| < A_1 \left(\frac{1}{n}\right)^{2n\left(\frac{1}{\sigma}-\eta_1\right)} \qquad (n \geqslant 1)$$

où A_1 est une constante, dépendant de η_1. Si l'on choisit les constantes η_1, η_2, η_3 de sorte que $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, $\eta_3 > 0$, $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = \gamma < (1-\sigma)/\sigma - \rho^{-1}$, on voit, qu'en posant $\gamma_n = c_n(n^{1+\eta_2})^{2n}$, on a, d'après (131)

$$(132) \qquad \gamma_n < A_1 n^{-2n\left(\frac{1-\sigma}{\sigma}-\eta_1-\eta_2\right)}.$$

Il en résulte immédiatement que $\{\gamma_n\}$ est une *suite liée* à $\{n_j\}$, que la fonction $\psi(z) = \Sigma\gamma_n z^{2n}$ est, ainsi, une *fonction liée* à $\{n_j\}$, et que, pour k *donné* :

$$(133) \qquad \left|\psi\left(\frac{n_k}{\alpha}\right)\right| \leqslant A_2 e^{A_3(n_k/\alpha)^{\frac{1}{(1-\sigma)/\sigma-\gamma}}}$$

A_2 et A_3 étant des constantes indépendantes de α.

En choisissant maintenant une suite $\{h_n\}$ tendant vers zéro en décroissant pour laquelle

$$(134) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{I(h_n)}{-\log h_n} = \rho,$$

et en posant $I_n = [-\pi, -\pi + h_n]$, on voit, d'après (133) et (134), que, pour tout k fixe :

$$\lim_{n\to\infty} \psi\left(\frac{n_k}{h_n}\right) \int_{I_n} |f(x)|\, dx = 0,$$

ce qui suffit, d'après le théorème IX, de démontrer le corollaire énoncé.

Avant de terminer ce chapitre, nous allons indiquer quelques cas simples du théorème VIII.

Lorsque $M_n = \Gamma(\beta n)$ $(\beta > 0)$, on a $\log T(r) \sim r^{1/\beta}$ (pour la définition de $T(r)$ voir (113)).

Ainsi, pour une classe de Gevray quelconque $C\{\Gamma(\beta n)\}$, $\beta > 0$, la condition 2° du théorème VIII est satisfaite; ceci a donc, en particulier, lieu pour la classe des fonctions analytiques sur un intervalle $(\beta = 1)$.

Ainsi, d'après le théorème VIII, si $f \in HL$, et si f appartient à $C\{\Gamma(\beta n)\}$ sur un intervalle partiel de $[-\pi, \pi]$, f appartient à cette classe sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ tout entier; et, en particulier, si f est analytique sur $I \subset [-\pi, \pi]$, cette fonction est analytique sur $[-\pi, \pi]$. Ce dernier fait — l'analyticité de f sur un intervalle partiel I entraînant son analyticité sur $[-\pi, \pi]$ — peut évidemment être considéré comme une version du célèbre théorème d'Hadamard sur les séries lacunaires (*à la Hadamard*) admettant le cercle de convergence comme coupure.

Faisons une dernière remarque concernant les séries de Fourier de la forme (85) satisfaisant à la condition (86). Cette condition est fondamentale, du moins pour pouvoir appliquer la partie essentielle de notre méthode.

En effet, si (86) n'est pas satisfait, les quantités c_n, définies par (79), et qui sont par conséquent données par

$$c_m = \Sigma \left(\frac{1}{n_{j_1} n_{j_2} \dots n_{j_m}}\right)^2$$

(les j_k intervenant dans le même terme étant tous distincts entre eux) satisfont à l'inégalité

$$c_m > \frac{1}{(n_1 n_2 \dots n_m)^2} > \frac{1}{n_m^{2m}}.$$

Autrement dit, si la condition (86) n'est pas satisfaite, on a

$$\Sigma\, c_n^{1/2n} = \infty,$$

et comme $-\log c_n$ est une fonction convexe de n, cette relation est équivalente à

$$\Sigma \frac{c_{n+1}}{c_n} = \infty.$$

Il n'existe donc, dans ces conditions, aucune suite $\{\gamma_n\}$ *liée* à $\{n_j\}$; les fonctions possédant les propriétés (91) et (92) n'existent, évidemment pas, non plus.

CHAPITRE III

Ce chapitre porte un caractère plutôt heuristique. Nous désirons comparer deux méthodes de démonstration utilisées dans mes différentes publications — dont celle-ci — portant sur des branches d'analyse essentiellement différentes, mais qui, en réalité, relèvent, comme on s'en rend compte, après une étude approfondie, du même principe.

Dans la théorie des séries adhérentes, ou tout simplement dans celle des séries de Dirichlet admettant une abscisse de convergence absolue, on opère d'une façon qu'on peut résumer ainsi : une suite de nombres positifs strictement croissant vers l'infini $\{\lambda_n\}$, admettant une densité supérieure finie

$$\limsup \frac{n}{\lambda_n} = D^{\bullet} < \infty,$$

et la série de Dirichlet

$$f(s) = \Sigma d_n e^{-\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it) \tag{135}$$

admettant une abscisse de convergence absolue σ_a, étant données, on considère un domaine de la forme

$$B_R = \bigcup_{\sigma \geqslant \sigma_0} \overline{C(\sigma, \pi R)},$$

(la réunion de disques fermés) avec $R > D^{\bullet}$, où la fonction $f(s)$ peut être prolongée analytiquement. On peut évaluer $|d_k|$ $(k \geqslant 1)$ à partir du maximum de $|f(s)|$ sur $\overline{C(\sigma_0, \pi R)}$. Pour le faire on utilise l'opérateur défini par (99), cet opérateur étant défini, cette fois-ci, par

$$\Lambda_k(z) = \prod_{j \neq k} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_j^2}\right) = \Sigma\, (-1)^n c_n^{(k)} z^{2n}, \tag{136}$$

et on l'applique, lorsque $s \in C(\sigma_0, \pi R)$, sur le prolongement analytique f de la série (135). Autrement dit, on considère la fonction

$$(137) \qquad F_k(s) = \Lambda_k^*(f) = \Sigma(-1)^n c_{2n}^{(k)} f^{(2n)}(s).$$

Cette série converge uniformément et absolument sur tout compact contenu dans

$$(138) \qquad B_r = \bigcup_{\sigma \geqslant \sigma_0} C(\sigma, \pi r),$$

où $\sigma < r < R - D^\bullet$. En raisonnant d'une manière tout à fait analogue à celle utilisée dans la démonstration du théorème VIII, on trouve que si $\sigma' - \pi R > \sigma_a$, on peut écrire, lorsque $s \in \overline{C(\sigma', \pi r)}$:

$$(139) \quad F_k(s) = \sum_n (-1)^n c_n^{(k)} f^{(2n)}(s)$$
$$= \sum_n (-1)^n c_n^{(k)} \sum_j d_j \lambda_j^{2n} e^{-\lambda_j s}$$
$$= \sum_j d_j e^{-\lambda_j s} \sum_n (-1)^n c_n^{(k)} \lambda_j^{2n} = \sum_j d_j \Lambda_k(\lambda_j) e^{-\lambda_j s} = d_k \Lambda_k(\lambda_k) e^{-\lambda_k s}$$

Cette égalité est aussi valable dans B_r et, en particulier :

$$(140) \qquad F_k(\sigma_0) = d_k \Lambda_k(\lambda_k) e^{-\lambda_k \sigma_0}.$$

$\{\Lambda_n\}$ étant la suite associée à $\{\lambda_n\}$, on peut aussi écrire

$$(141) \quad d_k e^{-\lambda_k \sigma_0} = \Lambda_k F_k(\sigma_0) = \Lambda_k \sum_n (-1)^n c_n^{(k)} f^{(2n)}(\sigma_0)$$
$$= \Lambda_k \sum_n (-1)^n c_n^{(k)} \frac{(2n)!}{2\pi i} \int_{|z-\sigma_0|=\pi R} \frac{f(z)\, dz}{(z-\sigma_0)^{2n+1}}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \Lambda_k \int_{|z-\sigma_0|=\pi R} \left\{ f(z) \sum_n (-1)^n c_n^{(k)} \frac{\partial^{2n}}{\partial \sigma_0^{2n}} \left(\frac{1}{z-\sigma_0} \right) \right\} dz.$$

Cette égalité est semblable, et joue exactement le même rôle que l'égalité (110) (avec $p = l = 0$). F_k de (110) est remplacé ici par

$$(142) \qquad \sum_n (-1)^n c_n^{(k)} \frac{\partial^{2n}}{\partial \sigma_0^{2n}} \left(\frac{1}{z-\sigma_0} \right),$$

la fonction analytique simple, $\dfrac{1}{z-\sigma_0}$ remplissant ici le rôle de la fonction (appartenant à une classe non quasianalytique) $\delta_{\alpha, k}\left(\dfrac{x}{\pi\alpha}\right)$ du chapitre II.

Pour obtenir l'inégalité cherchée pour $|d_k|$ il suffit de remarquer que (142) n'est autre chose que $L(z - \sigma_0)/(z - \sigma_0)$, où $L(\zeta)$ est la transformée de Laplace de $\Sigma(-1)^n c_n^{(k)} \zeta^{2n}$. Remarquons, d'ailleurs, que les opérations précédentes sont valables, car $\Sigma(-1)^n c_n^{(k)} z^{2n}$ est, dans les conditions envisagées, une fonction entière de type au plus égal à πD^* (voir [5]), la série (142) converge donc uniformément et absolument pour $|z - \sigma_0| > \pi D^*$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[2] S. Mandelbrojt, *C.R. de l'Académie des Sciences*, 209, 1939, p. 977.

[3] S. Mandelbrojt, Quasi-analyticity and properties of flatness of entire functions, *Duke Math. Journal*, vol. 9, n° 4, 1942.

[4] S. Mandelbrojt, Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions. Gauthier-Villars, Paris, 1935.

[5] S. Mandelbrojt, Séries adhérentes, régularisation des suites, applications, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[6] S. Mandelbrojt, Fonctions entières et transformées de Fourier, applications, Publications of the Mathematical Society of Japan, 1967.

[7] S. Mandelbrojt, *Comptes-Rendus*, 272, série A, 1971, p. 1041.

[8] S. Mandelbrojt, *Comptes-Rendus*, 272, série A, 1971, p. 975.

[9] S. Mandelbrojt, *École Polytechnique*, 2e série, C. n° 32, 1934, p. 327

Manuscrit reçu le 24 janvier 1972
accepté par M. Brelot.

S. Mandelbrojt

Collège de France,
Chaire de Mathématiques
et Mécanique,
11, place Marcellin-Berthelot,
75-Paris 5e.