ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JOSEPH GRIFONE

Structure presque tangente et connexions II

Annales de l'institut Fourier, tome 22, n^o 3 (1972), p. 291-338

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_3_291_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22,3 (1972), 291-338

STRUCTURE PRESQUE TANGENTE ET CONNECTIONS — II.[1]

par Joseph GRIFONE

Introduction.

Dans un article précédent [6] nous avons introduit un nouveau formalisme qui permet de traiter aisément au point de vue algébrique la théorie des connexions non linéaires sur une variété M. Ce formalisme permet d'établir l'existence et l'unicité d'une connexion, sur une variété finslerienne, qui généralise la connexion de Levi-Civita du cas riemannien (connexion canonique).

Dans cet article nous nous proposons d'appliquer ces résultats à l'étude des connexions de vecteurs et de directions, qui, d'après le point de vue d'E. Cartan, jouent un rôle important en géométrie finslerienne.

La notion de connexion de directions n'est pas très simple, bien que la dérivée covariante se manie assez bien avec le formalisme de P. Dazord [3], comme J.G. Diaz l'a montré [4] ; c'est pourquoi nous nous proposons tout d'abord d'interpréter les connexions de directions régulières comme des connexions linéaires sur le fibré TTM → TM, c'est-à-dire comme des connexions linéaires sur la variété TM. Ce point de vue a été déjà adopté par M. Matsumoto [9], mais nous donnons ici intrinsèquement les conditions qu'une connexion linéaire sur TM doit satisfaire pour qu'elle soit le prolongement d'une connexion de vecteurs ou de directions régulière. Ainsi prolongées, les connexions de directions régulières sont très maniables. Le problème d'associer à une connexion de directions une connexion non linéaire sur M, et, réciproquement, de "relever" les connexions non linéaires sur M en connexions de directions, devient

([1]) La première partie a paru dans le tome 22,1 de cette même revue.

assez facile, avec le formalisme que nous avons introduit. Les connexions finsleriennes de Berwald et de Cartan sont ainsi interprétées comme des relèvements particuliers de la connexion canonique de la variété finslerienne.

Une connexion de vecteurs sur TM peut être définie comme une loi de dérivation D sur le module des sections du fibré vertical tangent à TM, $V(TM) \to TM$. Une connexion de vecteurs sur $\mathcal{T}M = TM - (0)$ est appelée connexion de directions si elle satisfait à certaines conditions d'homogénéité (définition III,1) (cf [3]). On se propose de résoudre le problème suivant : étant donné une connexion de vecteurs (resp. de directions), comment trouver une connexion linéaire sur le fibré $TTM \to TM$, qui, restreinte au sous-fibré $V(TM) \to TM$, donne la connexion de vecteurs (resp: de directions) de laquelle on était parti.

Nous répondrons à cette question dans le cas où D est *régulière,* c'est-à-dire dans le cas où la 1-forme vectorielle DC (C étant le champ canonique) établit un isomorphisme de V(TM). Plus précisément on montre les résultats suivants :

1) Il existe un prolongement canonique d'une connexion de vecteurs régulière en une connexion linéaire sur la variété TM (Théorème de prolongement III,12).

2) Une connexion linéaire D sur la variété TM est le prolongement d'une connexion de vecteurs régulière si et seulement si :

A. $DJ = 0$, J étant la structure presque-tangente.

B. Soit $\widetilde{\varphi} : \underset{X}{TTM} \underset{\mapsto}{\to} \underset{D_X C}{V(TM)}$; $\varphi = \widetilde{\varphi}|_{V(TM)}$ est un isomorphisme

C. $D\Gamma = 0$, ou $\Gamma = I - 2\,\varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}$.

D est dite connexion *réductible*.

En vertu des axiomes A et B, Γ est une connexion sur M, dite *connexion induite* par D sur M.

3) Une connexion linéaire D sur la variété $\mathcal{T}M$ est le prolongement d'une connexion de directions régulière si et seulement si :

1. D est réductible.
2. $[C, DJX] = D[C, JX]$
3. $D_C JX = J[C, X]$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M)$

Nous nous intéressons ensuite à un type particulier de connexions réductibles, les connexions *presque-projetables.* On dira qu'une connexion réductible est presque-projetable si $D_{JX}C = JX$, pour tout $X \in TTM$. La connexion induite est alors appelée *projection* de D. On peut montrer la propriété suivante (propositions III,28 et III,29) :

Une courbe f sur M est une "géodésique" de la projection de D sur M si et seulement si son relevé f' est une géodésique de D.

Il est facile de vérifier qu'une connexion de directions est presque-projetable si et seulement si $\mathbb{T}(C, JX) = 0$(²), pour tout $X \in TTM$ $\mathbb{T}$ étant la torsion classique de D.

La dernière partie du chapitre est consacrée à l'étude des relèvements sur TM des connexions Γ sur M, c'est-à-dire aux connexions linéaires réductibles qui se projettent sur une connexion Γ donnée. Nous mettons en évidence deux types particuliers de relèvements : le *relèvement normal* et le *relèvement métrique.* Dans le cas où Γ est une connexion homogène de degré 1, il existe un relèvement normal canonique, dit *relèvement de Berwald.*

Le relèvement métrique de Γ est défini lorsque l'on se donne une structure semi-finslerienne sur la variété (cf [6]). Si g_Γ est la métrique riemannienne sur TM définie par cette structure et par Γ (cf. [6] II,1), le relèvement de Γ est dit métrique si $Dg_\Gamma = 0$.

On montre les théorèmes suivants :

1) Une condition nécessaire pour qu'il existe un relèvement métrique d'une connexion simple conservative Γ, est que l'énergie soit la somme d'une fonction homogène de degré 2 et d'une fonction homogène de degré 1.

2) Si Γ est la connexion canonique cette condition est aussi suffisante. De plus D est unique si l'on impose des conditions convenables sur la torsion.

(²) Je dois cette remarque, et tant d'autres, à M. Grangier. J. Vilms [11] a démontré récemment cette propriété dans le cas plus général des fibrés vectoriels quelconques.

Dans le cas finslerien, en relevant ainsi la connexion canonique on obtient le prolongement, au sens de (III,12), de la connexion de Cartan [2] ; dans le cas d'un système dynamique homogène on obtient le prolongement de la connexion dite "S-finslerienne" de J. Klein [7].

Enfin, en Appendice comme exemple d'application du formalisme introduit, nous résumons les résultats les plus importants pour les connexions qui interviennent en géométrie finslerienne.

Dans tout cet article on utilisera les résultats et les notations de [6].

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE III

PROLONGEMENTS, PROJECTIONS ET RELEVEMENTS DE CONNEXIONS

PARTIE I – PROLONGEMENTS

0. Rappels sur les connexions de vecteurs et de directions.

Une connexion linéaire sur le fibré $TTM \xrightarrow{p} TM$, c'est-à-dire une connexion linéaire sur la variété TM, peut être définie comme une loi de dérivation D sur le $\mathfrak{F}(TM)$-module $\mathfrak{X}(TM)$ (définition classique de J.L. Koszul (cf. [8]). Dans la suite les connexions linéaires sur la variété TM seront étudiées toujours sous ce point de vue, tandis que les connexions sur M seront caractérisées à l'aide de la structure presque-produit Γ qui leur est associée (cf. [6] chapitre I). Ceci nous permettra de nous servir uniquement de l'algèbre tensorielle construite sur TM.

DÉFINITION III,1. – *On appelle connexion de vecteurs sur* TM *une loi de dérivation* $\widetilde{D}$ *sur le* $\mathfrak{F}(TM)$*-module* $\underline{TM \times_M TM}$ *des sections du fibré* $TM \times_M TM \xrightarrow{pr_1} TM$.

Une connexion de vecteurs sur M *est dite connexion de directions si elle satisfait à la condition d'homogénéité :*

$$\widetilde{D}_{h_\lambda^T . X . h_{\lambda^{-1}}} (\hat{h}_\lambda . \widetilde{Y} . h_{\lambda^{-1}}) = \hat{h}_\lambda . \widetilde{D}_X \widetilde{Y} . h_{\lambda^{-1}}$$

où $\lambda : M \to \mathbf{R}^+ - (0)$ *est* C^∞ ; $h_\lambda : TM \to TM$ *est l'homothétie dans les fibres de rapport* λ, $\hat{h}_\lambda = (h_\lambda , \mathrm{Id})$; $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{C}M)$ et $\widetilde{Y} \in \underline{\mathcal{C}M \times_M TM}$. (cf. [3]).

Comme $i : TM \times_M TM \to V(TM)$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels au dessus de TM, on identifiera toujours une connexion de vecteurs avec une connexion sur le fibré $V(TM) \xrightarrow{p} TM$, c'est-à-dire on identifiera $\widetilde{D}$ avec $\overline{D}$ définie par :

$$\bar{D}_X Y = i\,\tilde{D}_X(i^{-1}Y)$$

avec $X \in T\mathcal{C}M$ et $Y \in \underline{V(\mathcal{C}M)}$.

Nous nous proposons de prolonger canoniquement une connexion de vecteurs en une connexion linéaire sur le fibré TTM → TM. On résoudra ce problème dans le cas où $\bar{D}$ est régulière (cf. [1], [3]), c'est-à-dire dans le cas où $\bar{D}C$, C étant le champ canonique, définit un isomorphisme de V(TM) fibre par fibre.

1. Connexions linéaires sur TM régulières.

DÉFINITION III,2. – *Soit* D *une connexion linéaire sur la variété* TM. *On dira que* D *est régulière si :*

A. $DJ = 0$

B. *L'application* $\varphi : \begin{array}{l} V(TM) \to V(TM) \\ U \mapsto {}^{\bullet}D_U C \end{array}$ *est un isomorphisme de* V(TM)

Remarque. – φ peut être considérée comme la restriction à V(TM) d'une application $\tilde{\varphi}$ de TTM dans V(TM). En effet pout tout $X \in TTM$, on peut poser $\tilde{\varphi}(X) = D_X C$ et $\tilde{\varphi}(X)$ est vertical en vertu de l'axiome A ; on a :

$$\tilde{\varphi} \circ J = \varphi \circ J$$

PROPOSITION III,3. – *Soit* D *une connexion linéaire régulière sur* TM *; alors*

$$\Gamma = I - 2\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$$

est une connexion sur M, *dite connexion induite par* D *sur* M.

La démonstration est immédiate. On a :

$$J\Gamma = J - 2J \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} = J$$

car $J \circ \varphi^{-1} = 0$, φ étant un isomorphisme du fibré vertical tangent. D'autre part :

$$\Gamma J = J - 2\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} \circ J = J - 2\varphi^{-1} \circ \varphi \circ J = -J$$

c.q.f.d.

PROPOSITION III,4. — *La connexion induite sur* M *par une connexion régulière* D *sur* $\mathcal{T}$M *est homogène de degré 1 si et seulement si :*

$$[C, DC] = 0$$

Démonstration. — Soit D une connexion régulière telle que $[C, DC] = 0$ et Γ la connexion induite sur M par D. On a :

$$H = \frac{1}{2}[C, \Gamma] = -[C, \varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}] = -[C, \varphi^{-1}] \circ \widetilde{\varphi} - \varphi^{-1} \circ [C, \widetilde{\varphi}]$$

Or $[C, \widetilde{\varphi}] = [C, DC] = 0$; donc : $H = -[C, \varphi^{-1}] \circ \widetilde{\varphi}$

D'autre part :

$$0 = \varphi^{-1}[C, \widetilde{\varphi}]\varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi} X = \varphi^{-1}[C, \widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi} X] - \varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}[C, \varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi} X]$$

Or $\widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}|_{V(TM)} = \varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}|_{V(TM)} = Id_{V(TM)}$ et comme $\widetilde{\varphi}(X)$ et $[C, \varphi^{-1}\widetilde{\varphi} X]$ sont verticaux, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi^{-1} \circ [C, \widetilde{\varphi} X] - [C, \varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi} X] \\ &= \varphi^{-1}[C, \widetilde{\varphi} X] - [C, \varphi^{-1}]\widetilde{\varphi} X - \varphi^{-1}[C, \widetilde{\varphi} X] = HX \end{aligned}$$

Donc : H est nul.

La réciproque se démontre d'une façon analogue.

Expression en coordonnées locales.

Soit U un voisinage de TM, de coordonnées locales naturelles (x^α, y^α). Posons :

$$\left\{ \begin{aligned} D_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} &= \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} + \Gamma^{\bar\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \\ D_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} &= \Gamma^\gamma_{\alpha\bar\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} + \Gamma^{\bar\gamma}_{\alpha\bar\beta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \\ D_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} &= \Gamma^\gamma_{\bar\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} + \Gamma^{\bar\gamma}_{\bar\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \\ D_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} &= \Gamma^\gamma_{\bar\alpha\bar\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} + \Gamma^{\bar\gamma}_{\bar\alpha\bar\beta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \end{aligned} \right.$$

En appliquant l'axiome A, on trouve :

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\bar\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\bar\alpha\bar\beta} = 0 \ , \quad \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\bar\gamma}_{\alpha\bar\beta} \ , \ \Gamma^{\gamma}_{\bar\alpha\beta} = \Gamma^{\bar\gamma}_{\bar\alpha\bar\beta}$$

On posera dans la suite

$$\Gamma^{\bar\gamma}_{\bar\alpha\bar\beta} = C^{\gamma}_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \Gamma^{\bar\gamma}_{\bar\alpha\beta} = C^{\bar\gamma}_{\alpha\beta}$$

D'après l'axiome B, si $X = X^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} + X^{\bar\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}$, on a :

$$D_X C = (X^{\bar\alpha} + X^{\bar\beta} y^{\gamma} C^{\alpha}_{\beta\gamma} + X^{\beta} y^{\gamma} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}) \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}$$

Donc :

$$D_{JX} C = X^{\beta} (\delta^{\alpha}_{\beta} + y^{\gamma} C^{\alpha}_{\beta\gamma}) \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} \tag{III,5}$$

Ainsi l'isomorphisme du fibré vertical est défini par :

$$\varphi^{\alpha}_{\beta}(x\,,y) = \delta^{\alpha}_{\beta} + y^{\gamma}\, C^{\alpha}_{\beta\gamma}\,(x\,,y) \tag{III,6}$$

Donc une connexion régulière est donnée en coordonnées locales par les expressions suivantes :

$$\text{(III,7)} \quad \left\{ \begin{aligned} D_{\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} &= \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\bar\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^{\gamma}} \\ D_{\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial y^{\beta}} &= \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^{\gamma}} \\ D_{\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} &= C^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} + C^{\bar\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^{\gamma}} \\ D_{\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial y^{\beta}} &= C^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^{\gamma}} \end{aligned} \right.$$

Pour la connexion Γ induite sur M, on a :

$$D_X C = (X^{\bar\beta} \varphi^{\alpha}_{\beta} + X^{\beta} y^{\gamma}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}) \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} \tag{III,8}$$

et donc les coefficients de Γ sont :

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta}(x\,,y) = y^{\gamma}\ \overset{\lambda}{\Gamma}_{\beta\gamma}(x\,,y)\ (\varphi^{-1})^{\alpha}_{\lambda}(x\,,y) \tag{III,9}$$

La semi-gerbe S sur M associée à Γ a les composantes (cf [6] I,40) :

$$G^{\alpha}(x\,,y) = \frac{1}{2}\, y^{\alpha}\, y^{\gamma}\ \overset{\lambda}{\Gamma}_{\beta\gamma}(x\,,y)\ (\varphi^{-1})^{\alpha}_{\lambda}(x\,,y) \tag{III,10}$$

2. Prolongement linéaire d'une connexion de vecteurs régulière. (Connexions réductibles)

Il est clair que la restriction au fibré vertical d'une connexion linéaire régulière est une connexion de vecteurs régulière. Soit maintenant $\overline{\mathrm{D}}$ une connexion de vecteurs régulière, au sens de § 0 ; nous nous proposons de construire d'une façon canonique une connexion linéaire régulière D dont la restriction au fibré vertical coïncide avec $\overline{\mathrm{D}}$, et de caractériser par un système d'axiomes de telles connexions linéaires.

DÉFINITION III,11. — *Soit* D *une connexion linéaire régulière sur* TM *et* Γ *la connexion induite sur* M. D *est dite connexion réductible si*

C. $\quad \mathrm{D}\Gamma = 0.$

La terminologie que nous employons est justifiée par le théorème suivant (cf aussi [9]) :

THÉOREME DE PROLONGEMENT (III,12). — *Soit* $\overline{\mathrm{D}}$ *une connexion de vecteurs régulière. Il existe une et une seule connexion réductible* D *dont la restriction au fibré vertical coïncide avec* $\overline{\mathrm{D}}$.

En outre, un champ $\mathrm{Y} \in \mathfrak{X}(\mathrm{TM})$ *est parallèle par rapport à* D *si et seulement si* JY *et* vY *sont parallèles par rapport à* $\overline{\mathrm{D}}$ (v *étant le projecteur vertical de la connexion induite par* D *sur* M).

Démonstration. — Soit $\widetilde{\varphi} = \overline{\mathrm{D}}\mathrm{C}$ et φ l'isomorphisme de V(TM) défini par la restriction de $\widetilde{\varphi}$ à V(TM) ; $\Gamma = \mathrm{I} - 2\varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}$ est évidemment une connexion sur M. On notera F la structure presque-complexe associée à Γ.

Posons :

$$D_X Y = FD_X JY + D_X JFY, \quad \text{pour tout } X, Y \in \mathfrak{X}(TM) \tag{III,13}$$

On peut montrer que D est la connexion cherchée.

Il est clair tout d'abord que si Y est vertical, $\bar{D}_X Y = \bar{D}_X Y$. En effet, soit $Y = JU$; on a :

$$D_X Y = D_X JU = \bar{D}_X JFJU = \bar{D}_X JhU = \bar{D}_X JU = \bar{D}_X Y.$$

Ceci montre que la restriction de D au fibré vertical V(TM) coïncide avec $\bar{D}$.

D'autre part D est bien une connexion linéaire qui satisfait aux axiomes A, B et C. La démonstration ne présente pas de difficultés. Par exemple pour l'axiome C, on a d'une part :

$$\begin{aligned} D_X \Gamma Y &= F\bar{D}_X J\Gamma Y + \bar{D}_X JF\Gamma Y = F\bar{D}_X JY + \bar{D}_X \nu\Gamma Y \\ &= F\bar{D}_X JY - \bar{D}_X \nu Y = F\bar{D}_X JY - \bar{D}_X JFY \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\Gamma D_X Y = \Gamma F\bar{D}_X JY + \bar{D}_X JFY.$$

Or $F\bar{D}_X JY$ est horizontal et $\bar{D}_X JFY$ vertical ; donc :

$$\Gamma D_X Y = F\bar{D}_X JY - \bar{D}_X JFY = D_X \Gamma Y.$$

Ceci prouve l'existence du prolongement.

Soit maintenant D' une autre connexion réductible, dont la restriction au fibré vertical coïncide avec $\bar{D}$; il s'agit de montrer que $D' = D$.

On a : $D'_X Y = h'D'_X Y + \nu' D'_X Y$, ou h' et ν' sont les projecteurs horizontal et vertical de la connexion induite par D' sur M. Mais $h' = h$ et $\nu' = \nu$, puisque la connexion induite par D' sur M coïncide avec la connexion induite par $\bar{D}$, donc avec la connexion induite par D.

D'autre part, $h = FJ$ et $\nu = JF$; donc :

$$D'_X Y = FJD'_X Y + \nu D'_X Y.$$

Or $D'J = 0$ et $D'\Gamma = 0$. D'où :

$$D'_X Y = F\overline{D}_X JY + \overline{D}_X JFY = D_X Y$$

et ceci montre l'unicité du prolongement.

La deuxième partie du théorème résulte du fait que $F\overline{D}_X JY$ est horizontal par rapport à la connexion Γ et $\overline{D}_X JFY$ est vertical. Donc $D_X Y = 0$ si et seulement si $\overline{D}_X JFY = 0$ et $F\overline{D}_X JY = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\overline{D}_X \nu Y = 0$ et $\overline{D}_X JY = 0$, car F est est un isomorphisme de $T_z TM$ pour tout $z \in TM$.

C.Q.F.D.

Remarque. — Les connexions régulières de vecteurs peuvent donc être considérées comme des connexions linéaires sur la variété TM, vérifiant les conditions : A. B. et C. (connexions réductibles). Donc dans la suite elles seront toujours étudiées en les regardant sous ce point de vue.

La relation (III,13) permet de vérifier facilement :

COROLLAIRE III,14. — *Soit* D *une connexion linéaire sur* TM, *réductible, et* F *la structure presque-complexe associée à la connexion induite sur* M. *On a*

$$DF = 0.$$

Expression en coordonnées locales d'une connexion réductible.

Sur un voisinage U de coordonnées locales naturelles (x^α , y^α), une connexion régulière a l'expression (III,7). Imposons maintenant l'axiome C. : $D\Gamma = 0$, ou, ce qui revient au même, $Dh = 0$. On a, d'une part :

$$h\, D_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} - \Gamma^\lambda_\gamma \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \right) = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \Gamma^\lambda_\gamma \frac{\partial}{\partial y^\lambda}$$

avec
$$\Gamma^\lambda_\gamma = y^\alpha\, \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} \cdot (\varphi^{-1})^\lambda_\mu$$

D'autre part :

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} h \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} + \bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} - \Gamma^\lambda_\beta\, \Gamma^\gamma_{\alpha\lambda} \frac{\partial}{\partial y^\gamma}$$

En imposant $h\,D_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = D_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} h \frac{\partial}{\partial x^\beta}$, on trouve :

$$\Gamma^{\bar{\gamma}}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\beta}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\beta}\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\gamma}_{\lambda}\,\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \tag{III,15}$$

De même, en imposant $hD_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = D_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} h \frac{\partial}{\partial x^\beta}$, un calcul analogue donne :

$$\Gamma^{\bar{\gamma}}_{\alpha\bar{\beta}} = C^{\bar{\gamma}}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\beta}}{\partial y^\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\beta}\,C^{\gamma}_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\gamma}_{\lambda}\,C^{\lambda}_{\alpha\beta} \tag{III,16}$$

Les relations (III,15) et (III,16) permettent de déterminer tous les coefficients de D en fonction des coefficients $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ et $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ de la restriction $\bar{D}$ de D au fibré vertical, ce qui fournit une autre démonstration de la première partie du théorème.

3. Prolongement linéaire d'une connexion de directions régulière. (Connexions de directions prolongées).

Le but de ce paragraphe est de définir une connexion linéaire sur le fibré $T\mathcal{C}M \overset{p_0}{\to} \mathcal{C}M$ (c'est-à-dire une connexion linéaire sur la variété $\mathcal{C}M$) qui puisse être considérée comme le prolongement, au sens de (III,12), d'une connexion de directions régulière.

THÉORÈME III,17. — *Une connexion linéaire* D *sur la variété* $\mathcal{C}M$ *est le prolongement (au sens de (III,12)) d'une connexion de direction régulière si et seulement si :*

1) D *est réductible*

2) $[C, DJX] = D[C, JX]$

3) $D_C JX = J[C, X]$ *pour tout* $X \in \mathcal{X}(\mathcal{C}M)$

Remarque. — La condition 3. a un sens En effet, si $JX' = JX$, $X - X'$ est vertical et donc $J[C, X - X'] = 0$, car le crochet de deux champs verticaux est vertical. D'où : $J[C, X] = J[C, X']$.

La démonstration ne présente pas de difficultés en coordonnées locales. Il est bien connu (cf. par ex. [1]) qu'une connexion de vecteurs est une connexion de directions si et seulement si :

a) les fonctions $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(x, y)$ et $C^{\lambda}_{\alpha\beta}(x, y)$ sont respectivement, h.(0) et h.(−1).

b) $y^{\alpha}\, C^{\gamma}_{\alpha\beta}(x, y) = 0$.

D'après le théorème de prolongement, puisque D est réductible, elle est le prolongement d'une connexion de vecteurs régulière $\bar{D}$. Or $\bar{D}$ vérifie les relations a) et b) si et seulement si respectivement les axiomes 2. et 3. sont satisfaits, comme on le vérifie facilement dans un système de coordonnées locales.

DEFINITION III,18. – *On appellera connexion de directions prolongée une connexion linéaire sur $\mathcal{C}M$ vérifiant les conditions 1.2. et 3.*

PROPOSITION III,19. – *La connexion induite sur* M *par une connexion de directions prolongée est à tension nulle (c'est-à-dire homogène de degré 1).*

En effet, en vertu de l'axiome 2. on a : $[C, DC] = D[C, C] = 0$ ce qui, d'après (III,4) démontre la propriété.

PARTIE II : PROJECTIONS ET RELEVEMENTS

1. Connexions linéaires presque-projetables.

Nous avons vu qu'à toute connexion linéaire régulière D sur TM on peut associer canoniquement une connexion Γ sur M, dite connexion induite. Aucune relation n'a encore été établie entre les géodésiques de D et les chemins de Γ.

Nous allons maintenant nous intéresser à un type particulier de connexions régulières, qui jouissent de la "propriété faible de la projection des géodésiques" (corollaire III,48).

DÉFINITION III,20. — *Une connexion linéaire* D *sur* TM *est dite presque-projetable si elle satisfait aux conditions suivantes :*

A. $DJ = 0$

$B^*\ D_{JX}C = JX$ *pour tout* $X \in TTM$.

Elle est dite presque-projetable normale si l'axiome B* *est remplacé par l'axiome plus fort*

$B^{**}.D_{JX}JY = [J\,,\,JY]X.$

Remarques. —

1) L'axiome B** a un sens. En effet si $JX = JX'$, $X - X'$ est vertical et, comme $[J\,,JY]$ est une forme semi-basique, on a

$$[J\,,JY]\,(X - X') = 0 \quad \text{d'où} \quad [J\,,JY]\,X = [J\,,JY]X'.$$

2)B** *entraîne* B*. En effet si Y = S est une semi-gerbe, d'après, B** on a : $D_{JX}C = [J\,,C]X = JX.$

3) *Les connexions presque-projetables sont régulières.* En effet B* exprime le fait que $\varphi = \mathrm{Id}_{V(TM)}$ donc l'axiome B, (déf. (III,2)) est satisfait.

La connexion Γ induite sur M par une connexion presque projetable sera dite *projection* de D ; on dira aussi que D *se projette* (resp : *se projette normalement*) sur Γ.

Expression en coordonnées locales.

La condition B* s'exprime par :

$$y^\beta\, C^\gamma_{\alpha\beta}\,(x\,,y) = 0 \tag{III,21}$$

comme le montre immédiatement (III,5). Par conséquent :

$$\varphi^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta \tag{III,22}$$

et la connexion induite a l'expression

$$\Gamma^\lambda_\beta\,(x\,,y) = y^\gamma\ \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}\,(x\,,y) \tag{III,23}$$

Pour ce qui concerne l'axiome B**, on a

$$D_{JX} JY = \left(X^{\alpha} \frac{\partial y^{\gamma}}{\partial y^{\alpha}} + X^{\alpha} Y^{\beta} C^{\gamma}_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial}{\partial y^{\gamma}} \quad \text{et} \quad [J , JY]X = X^{\alpha} \frac{\partial Y^{\gamma}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^{\gamma}}$$

L'axiome B** s'exprime donc localement par les relations :

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} (x , y) = 0 \tag{III,24}$$

Interprétation géométrique.

Les propositions suivantes, qui peuvent se montrer par un calcul direct, fournissent une caractérisation des notions de connexion presque-projetable et presque-projetable normale.

PROPOSITION III,25. – *Soit* D *une connexion régulière sur* TM, *et* $\hat{D}$ *l'opérateur de dérivation covariante associé à la connexion induite par* D *sur* M. *Alors* D *est presque-projetable si et seulement si*

$$\pi^T (D_Y X)_{\pi^T X} = \hat{D}_{\pi^T Y} (\pi^T X)$$

pour tous X , Y $\in \mathfrak{X}$(TM), *projetables.*

PROPOSITION III,26. – *Soit* g *une courbe différentiable sur* TM *et* X *la restriction d'une semi-gerbe de* M *à* g. *Si* D *est presque-projetable, alors*

$$\pi^T (D_{\frac{d}{dt}} X) = \hat{D}_{\frac{d}{dt}} (\pi^T X)$$

PROPOSITION III,27. – *Une connexion régulière* D *sur* TM *est presque-projetable normale si et seulement si*

$$\pi^T (D_U X) = 0$$

pour tout X $\in \mathfrak{X}$ (TM) *projetable et tout* U $\in$ V(TM).

Par exemple, pour montrer (III,26), considérons la courbe $g : t \to (x^{\alpha}(t), y^{\alpha}(t))$ et le champ X le long de g :

$$X = (x^{\alpha}(t) \; , \; y^{\alpha}(t) \; , \; y^{\alpha}(t) \; , \; -2G^{\alpha}(t)).$$

On a :

$$D_{\frac{d}{dt}} X = \left[\frac{dy^\beta}{dt} + y^\gamma(t)\, \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\, (x(t)\,,\, y(t))\, \frac{dx^\alpha}{dt} \right.$$
$$\left. + \, y^\gamma(t)\, C^\beta_{\alpha\gamma}\, (x(t)\,,\, y(t))\, \frac{dy^\alpha}{dt} \right] \frac{\partial}{\partial x^\beta} + \ldots$$

$+ \ldots$ (termes en $\dfrac{\partial}{\partial y^\beta}$ qui sont appliqués en zéro par π^T).

Si D est presque-projetable, d'après (III,21) et (III,23) :

$$D_{\frac{d}{dt}} X = \left[\frac{dy^\beta}{dt} + \Gamma^\beta_\alpha\, (x(t)\,,\, y(t)) \right] \frac{\partial}{\partial x^\beta} + \ldots . \left(\text{termes en } \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)$$

donc :

$$\pi^T\, D_{\frac{d}{dt}} X = \hat{D}_{\frac{d}{dt}} (\pi^T X)$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE (III,28). – *Propriété "faible" de la projection des géodésiques.*

Soit D *une connexion linéaire sur* TM *presque-projetable et* Γ *la connexion induite par* D *sur* M. *Les géodésiques de* D, *qui sont des relevés de courbes de* M, *se projettent sur des chemins de* Γ.

En effet, soit f une courbe de M, telle que $g = f'$ soit une géodésique de D. Il faut montrer que $\pi \circ g = f$ est un chemin de Γ. g' est la restriction d'une semi-gerbe de M à g. En effet $P \circ g' = g = f'$ et $\pi^T \circ g' = (\pi \circ g)' = f'$. Par conséquent

$$\hat{D}_{\frac{d}{dt}} f' = \hat{D}_{\frac{d}{dt}} (\pi \circ g)' = \hat{D}_{\frac{d}{dt}} (\pi^T \circ g') = \pi^T (D_{\frac{d}{dt}}\, g') = 0$$

car g est une géodésique de D.

C.Q.F.D.

Pour les connexions presque-projetables qui sont aussi réductibles on a une réciproque de ce corollaire.

PROPOSITION III,29. – *Propriété du relèvement des chemins.*

Soit D *une connexion linéaire sur* TM, *presque-projetable et réductible, et soit* Γ *la connexion induite sur* M. *Les relevés des chemins de* Γ *sont des géodésiques de* D.

En effet, soit f un chemin de Γ et soit $g = f'$ le relevé de f ; g est une courbe horizontale sur TM (cf. [6] I,26) telle que $\pi \circ g = f$. Comme f est un chemin de Γ, on a :

$$0 = \hat{D}_{\frac{d}{dt}} f' = \hat{D}_{\frac{d}{dt}} (\pi \circ g)' = \hat{D}_{\frac{d}{dt}} (\pi^T \circ g') = \pi' (D_{\frac{d}{dt}} g')_{\pi^T \circ g},$$

Mais $\pi^T \circ g' = (\pi \circ g)' = f' = g$. Donc $\pi^T (D_{\frac{d}{dt}} g') = 0$, c'est-à-dire $D_{\frac{d}{dt}} g'$ est vertical. D'autre part g' est horizontal et, comme D est réductible ($Dh = 0$), $D_{\frac{d}{dt}} g'$ est horizontal ; donc $D_{\frac{d}{dt}} g' = 0$, c'est-à-dire g est une géodésique de D.

C.Q.F.D.

PROPOSITION III,30. – *Une connexion de directions prolongée est presque-projetable si et seulement si* $\mathbb{T}(C, JX) = 0$ *pour tout* $X \in T\mathcal{C}M$.

En effet

$$\mathbb{T}(C, JX) = D_C JX - D_{JX} C - [C, JX] = J[C, X] - D_{JX} C - [C, JX]$$

Mais

$$J[C, X] - [C, JX] = JX \quad \text{car} \quad [C, J] = -J.$$

Donc $\mathbb{T}(C, JX) = JX - D_{JX} C$; par conséquent, D est projetable si et seulement si $\mathbb{T}(C, JX) = 0$.

C.Q.F.D.

2. Relèvement normal d'une connexion.

DEFINITION III,31. — *Soit* Γ *une connexion sur* M. *On appelle relèvement de* Γ *une connexion linéaire* D *sur* TM *qui se projette sur* Γ. *Le relèvement de* Γ *sera dit normal si* D *est normale.*

Le théorème suivant exprime le fait que l'ensemble des relèvements normaux de Γ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des 2-formes vectorielles semi-basiques (non forcément antisymétriques)"en équilibre" avec la tension H de Γ.

THEOREME DE RELEVEMENT NORMAL III,32. — *Soit* Γ *une connexion sur* M *et* $\mathcal{H}$ *une 2-forme vectorielle sur* TM *semi-basique (non forcément antisymétrique), en équilibre avec la tension de* H *de* Γ, *c'est-à-dire telle que* $\mathcal{H}^{\circ} + H = 0$. *Il existe une et une seule connexion linéaire sur* TM, *réductible, presque-projetable normalement sur* Γ *dont la torsion (classique) vérifie :*

$$\mathbb{T}(JX, Y) = \mathcal{H}(X, Y) \qquad \text{pour tous} \qquad X, Y \in TTM$$

Remarque. — Si Γ est h.(1), sa tension est nulle. Il existe donc pour les connexions h.(1) un relèvement canonique caractérisé par $\mathbb{T}(JX, Y) = 0$ quels que soient X, $Y \in T\mathcal{T}M$. Ce relèvement sera dit *relèvement de Berwald* de la connexion Γ.

Démonstration. Existence. — Soient Γ une connexion sur M et $\mathcal{H}$ une 2-forme vectorielle semi-basique dont le potentiel est équilibré par la tension de Γ, c'est-à-dire une forme $\mathcal{H}$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$\mathcal{H}(JX, Y) = \mathcal{H}(X, JY) = J\mathcal{H}(X, Y) = 0$$

$$\mathcal{H}^{\circ}(X) = \mathcal{H}(S, X) = -HX.$$

Posons

$$D_X Y = (h[JY, F] + J[\nu Y, F])X - F\mathcal{H}(Y, X) - \mathcal{H}(FY, X) \quad \text{(III,33)}$$

où F est la structure presque-complexe associée à Γ et ν le projecteur vertical de Γ. Des calculs qui ne présentent pas de difficulté majeure prouvent que D est une connexion réductible qui se projette normalement sur Γ et dont la torsion vérifie $\mathbb{T}(JX, Y) = \mathcal{H}(X, Y)$.

Par exemple pour montrer que la connexion induite par D sur M est Γ, il faut montrer que $DC = \nu$. On a :

$$D_X C = J[C, F]X - \mathcal{H}(FC, X) = J[C, F]X - \mathcal{H}(S, X) = J[C, F]X + HX$$

Or $J[C, F] = \nu - H$. En effet :

$$J[C, F]JX = J[C, hX] - \nu[C, JX] = -\nu[C, J]hX = \nu JhX = JX$$

et

$$J[C, F]hX = J[C, -JX] - \nu[C, hX] = -\nu[C, hX] = -\nu[C, h]X$$
$$= -\nu HX = -HX.$$

Par conséquent :

$$J[C, F]X = J[C, F](JFX + hX) = JFX - HX = (\nu - H)X.$$

On a donc :

$$D_X C = \nu - H + H = \nu$$

Ceci prouve l'existence.

Unicité. – Considérons une connexion réductible D′ presque-projetable normalement sur Γ et dont la torsion vérifie

$$\mathbb{T}(JX, Y) = \mathcal{H}(X, Y)$$

De l'axiome B** (définition III,20) et du corollaire au théorème de prolongement (III,14) on obtient d'une part

$$D'_{JY} hX = FD'_{JY} JX = h[JY, X],$$

d'autre part

$$D'_{JY} \nu X = D'_{JY} JFX = J[JY, FX] ;$$

d'où

$$D'_{JY} X = h[JY, X] + J[JY, FX].$$

Or $\mathbb{T}(X, JY) = -\mathcal{H}(Y, X)$, c'est-à-dire, après quelques calculs :

$$D_X JY = J[JY, F]X - \mathcal{H}(Y, X).$$

Or, d'après le théorème de prolongement, une connexion réductible est déterminée par sa restriction au fibré vertical. De (III,23) on déduit donc :

$$D'_X Y = (h[JY\,,F] + J[\nu Y\,,F])X - F\mathcal{H}(Y\,,X) - \mathcal{H}(FY\,,X) = D_X Y.$$

C.Q.F.D.

Expression en coordonnées locales.

Il suffira de calculer l'expression de $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$, car on sait que $C^\lambda_{\alpha\beta} = 0$, (cf. III,24), D étant normale. On a :

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} = J\left[\frac{\partial}{\partial y^\beta}, F\right]\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \mathcal{H}\left(h\,\frac{\partial}{\partial x^\beta}, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$$

$$= J\left[\frac{\partial}{\partial y^\beta}, F\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right] - \mathcal{H}^\lambda_{\beta\alpha}\,\frac{\partial}{\partial y^\lambda}$$

si $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\lambda_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial y^\lambda}$. Or

$$F\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\lambda_\alpha\,\frac{\partial}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\lambda_\mu\,\Gamma^\mu_\alpha\,\frac{\partial}{\partial y^\lambda} - \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

En effectuant les calculs on trouve

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} = \left(\frac{\partial\Gamma^\lambda_\alpha}{\partial y^\beta} - \mathcal{H}^\lambda_{\beta\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial y^\lambda}$$

c'est-à-dire

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^\lambda_\alpha}{\partial y^\beta} - \mathcal{H}^\lambda_{\beta\alpha}$$

Remarque. – Dans le cas où Γ est h.(1) et où l'on choisit $\mathcal{H} = 0$, le relèvement normal de Γ coïncide avec le prolongement linéaire au sens de (III,12) de la *connexion de Berwald* habituelle. Ceci justifie la terminologie que nous avons employée.

PROPOSITION III,35. – *Le relèvement de Berwald d'une connexion* h.(1) *est une connexion de directions prolongée.*

En effet l'axiome 1. est trivialement vérifié car le relèvement de Berwald est par définition réductible. D'autre part, puisqu'il est normal, la condition 3. est aussi vérifiée.

D'après (III,33)

$$[C\,,\mathrm{DJX}] = [C\,,J[\nu X\,,F]] = [C\,,J]\,.\,[\nu X\,,F] - J\,[C\,,[\nu X\,,F]]$$

$$= -\,J\,[\nu X\,,F] - J\,[C\,,[\nu X\,,F]].$$

D'après l'identité de Jacobi :

$$[C\,,[\nu X\,,F]] = [\nu X\,,[C\,,F]] - [F\,,[C\,,\nu X]]$$

Mais $[C\,,F] = \nu - H = \nu$ et $[C\,,\nu X] = \nu[C\,,X]$ car $H = 0$. Donc :

$$[C\,,[\nu X\,,F]] = [\nu X\,,\nu] - [F\,,\nu[C\,,X]]$$

c'est-à-dire :

$$[C\,,\mathrm{DJX}] = -\,J\,[\nu X\,,F] - J([\nu X\,,\nu] - [F\,,\nu\,[C\,,X]])$$

$$= -\,J\,[\nu X\,,F] + J[F\,,\nu\,[C\,,X]]$$

car $[\nu X\,,\nu]$ est semi-basique. D'autre part $[C\,,JX] = J[C\,,X] - JX$ puisque $[C\,,J] = -\,J$, donc :

$$D\,[C\,,JX] = DJ\,([C\,,X] - X) = J\,[\nu\,[C\,,X] - \nu X\,,F]$$

d'où :

$$[C\,,\mathrm{DJX}] = D\,[C\,,JX]$$

et l'axiome 2. est satisfait.

C.Q.F.D.

3. La torsion et la courbure des relèvements normaux de Γ.

Torsion.

Par définition $\mathbb{T}(X\,,Y) = D_X Y - D_Y X - [X\,,Y]$. On a :

$$\mathbb{T}(X\,,Y) = \mathbb{T}(hX\,,hY) + \mathbb{T}(hX\,,JFY) + \mathbb{T}(JFX\,,hY),$$

car $\mathbb{T}(\nu X, \nu Y) = \mathscr{H}(FX, \nu Y) = 0, \mathscr{H}$ étant semi-basique. Or :

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(hX, hY) = {} & F[hX, JY] + J[hX, JY] + F[JX, hY] + J[JX, hY] \\ & - [hX, hY] + F(\mathscr{H}(X, Y) - \mathscr{H}(Y, X)) = F[hX, JY] \\ & + J[X, JY] + F[JX, hY] + J[JX, Y] - [hX, hY] \\ & + F(\mathscr{H}(X, Y) - \mathscr{H}(Y, X)) = F[hX, JY] + F[JX, hY] \\ & + [JX, JY] - [hX, hY] + F(\mathscr{H}(X, Y) - \mathscr{H}(Y, X)).\end{aligned}$$

Mais on a (cf. [6] : démonstration de la proposition I,65) :

$$\frac{1}{2}[F, F](hX, hY) = [JX, JY] - [hX, hY] + F[JX, hY] + F[hX, JY]$$

donc :

$$\mathbb{T}(hX, hY) = \frac{1}{2} h^*[F, F](X, Y) + F(\mathscr{H}(X, Y) - \mathscr{H}(Y, X))$$

D'autre part :

$$\mathbb{T}(hX, \nu Y) = -\mathscr{H}(FY, X) \quad \text{et} \quad \mathbb{T}(\nu X, hY) = \mathscr{H}(FX, Y)$$

Donc, puisque $\frac{1}{2} h^*[F, F] = F \circ t + R$ (cf [6] : I,66)), t et R désignant respectivement la torsion faible et la courbure de Γ, on déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(X, Y) = (F \circ t + R)(X, Y) + F(\mathscr{H}(X, Y) - \mathscr{H}(Y, X)) \\ + \mathscr{H}(FX, Y) - \mathscr{H}(X, FY) \quad \text{(III,36)}\end{aligned}$$

COROLLAIRE III,37. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un relèvement normal symétrique d'une connexion Γ est que Γ soit "fortement plate" (c'est-à-dire à courbure et torsion forte nulle).*

Démonstration. — Supposons qu'il existe un relèvement normal de Γ tel que $\mathbb{T} = 0$. On a :

$$\mathscr{H}(X, Y) = \mathbb{T}(JX, Y) = 0, \text{ d'où : } H = -\mathscr{H}^\circ = 0 \text{ ; } \Gamma \text{ est donc h.(1).}$$

D'autre part, puisque $\mathscr{H} = 0$:

$$0 = \mathbb{T}(hX, hY) = F \circ t + R$$

Or $F \circ t$ est à valeurs horizontales et R à valeurs verticales, donc : $t = 0$ et $R = 0$. Enfin, comme $H = 0$ et $t = 0$, la torsion forte est nulle.

Réciproquement, si Γ est fortement plate, le relèvement de Berwald de Γ est évidemment symétrique.

C.Q.F.D.

Courbure. – Soit Γ une connexion sur M et D son relèvement normal correspondant à la 2-forme vectorielle $\mathcal{H}$. On a :

$$D_{JX} JY = J[JX, Y]$$

$$D_{hX} JY = v[hX, JY] - \mathcal{H}(Y, X)$$

La courbure **K** de D est déterminée par les trois tenseurs semi-basiques :

$$R(X, Y)Z = K(hX, hY)JZ$$

$$P(X, Y)Z = K(hX, JY)JZ$$

$$Q(X, Y)Z = K(JX, JY)JZ$$

En effet D est réductible et l'on a : $DF = 0$, d'où

$$FK(hX, hY)JZ = K(hX, hY)FJZ = K(hX, hY)hZ, \text{ etc.}$$

PROPOSITION III,38. – $$Q = 0$$

Cette propriété se montre par un calcul très simple.

Soit maintenant L une ℓ-forme vectorielle semi-basique. On vérifie facilement que la $(\ell + 1)$-forme vectorielle $\theta_J L$ définie par :

$$(\theta_J L)(X, X_1, X_2, \ldots, X_\ell) = J[JX, FL](X_1, \ldots, X_\ell) \quad \text{(III,39)}$$

(où F est la structure presque-complexe associée à une connexion Γ arbitraire) a bien un caractère tensoriel par rapport à X, ne dépend pas du choix de Γ et est semi-basique. Un calcul facile donne les propriétés suivantes :

$$[J, L](X_1, \ldots, X_\ell) = (-1)^{i+1} (\theta_J L)(X_i, X_1, \ldots X_i \ldots X_{\ell+1}) \quad \text{(III,40)}$$

$$(\theta_J L)^{\circ} = L + [C, L]$$

En coordonnées locales naturelles, on trouve :

$$\theta_J L = \frac{\partial L^{\gamma}_{\beta_1 \ldots \beta_\ell}}{\partial y^\alpha} \, dx^\alpha \otimes dx^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\beta_\ell} \otimes \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \tag{III,41}$$

Proposition III,42. –

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(X, Y)Z = {} & (\theta_J R)(Z, X, Y) - \mathcal{H}(Z, Ft(X, Y)) + (D_{hY}\mathcal{H})(Z, X) \\ & - (D_{hX}\mathcal{H})(Z, Y) + \mathcal{H}(F\mathcal{H}(Z, X), Y) - \mathcal{H}(F\mathcal{H}(Z,Y), X)\end{aligned}$$

où R est la courbure de la projection de D.

Démonstration. –

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(X, Y)Z &= D_{hX} D_{hY} JZ - D_{hY} D_{hX} JZ - D_{[hX, hY]} JZ \\ &= \nu[hX, \nu[hY, JZ]] - \mathcal{H}(F[hY, JZ], X) - D_{hX}\, \mathcal{H}(Z, Y)) \\ &\quad - \nu[hY, \nu[hX, JZ]] + \mathcal{H}(F[hX, JZ], Y) + D_{hY}\, \mathcal{H}(Z, X)) \\ &\quad - \nu[h[hX, hY], JZ] + \mathcal{H}(Z, h[hX, hY]) \\ &\quad + [J, JZ](FR(X, Y)) = J[JZ, FR(X, Y)] + R(X, [hY, JZ]) \\ &\quad - R(Y, [hX, JZ]) - \mathcal{H}(D_{hY} Z + F\mathcal{H}(Z, Y), X) - D_{hX}\mathcal{H}(Z, Y)) \\ &\quad + \mathcal{H}(D_{hX} Z + F\mathcal{H}(Z, X), Y) + D_{hY}\, \mathcal{H}(Z, X)) \\ &\quad + \mathcal{H}(Z, h[hX, hY]).\end{aligned}$$

En imposant : $F[J, h] = Ft$ on déduit facilement

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(Z, h[hX, hY]) = {} & \mathcal{H}(Z, F[hX, JY]) - \mathcal{H}(Z, F[hY, JX]) \\ & - \mathcal{H}(Z, Ft(X, Y))\end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir immédiatement la relation à démontrer.

Corollaire III,43. – *Si* D *est le relèvement de Berwald d'une connexion* h.(1), *alors* $\mathbf{R} = 0$ *si et seulement si* $R = 0$.

En effet dans ce cas : $\mathbf{R}(X, Y)Z = (\theta_J R)(Z, X, Y)$; donc si $R = 0$ on a $\mathbf{R} = 0$.

Réciproquement, supposons $\mathbf{R} = 0$. On a :

$$0 = \mathbf{R}(X, Y)S = (\theta_J R)^\circ (X, Y) = (R + [C, R])(X, Y).$$

Mais $[C, R] = 0$ (cf. (6) : I,62), d'où $\mathbf{R} = 0$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION III,44. — *Expression de* $\mathbf{P}$ *en coordonnées locales*

$$\mathbf{P}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x^\gamma} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}^\lambda_{\gamma\alpha}}{\partial y^\beta} - \frac{\partial^2 \Gamma^\lambda_\alpha}{\partial y^\beta\, \partial y^\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial y^\lambda}$$

La démonstration est immédiate, en tenant compte de (III,34)

On a ainsi le résultat bien connu :

COROLLAIRE III,45. — *Soit* Γ *une connexion* h.(1) *et* D *le relèvement de Berwald de* Γ. *Alors* Γ *est linéaire si et seulement si* $\mathbf{P} = 0$.

4. Relèvement métrique d'une connexion simple conservative.

Soit (M, E, π) une variété semi-finslerienne (cf [6] : II,4), $\Omega = dd_J E + \pi$ la 2-forme fondamentale, $\bar{g}$ la métrique semi-finslerienne associée à (M, E, π) :

$$\bar{g}(JX, JY) = \Omega(JX, Y) \qquad \text{pour tous} \qquad X, Y \in TTM$$

Si Γ est une connexion sur M, on notera g_Γ (ou plus simplement g, s'il n'y a pas de confusion possible) le prolongement riemannian de $\bar{g}$ suivant Γ :

$$g_\Gamma(X, Y) = \bar{g}(JX, JY) + \bar{g}(\nu X, \nu Y) = \Omega(X, FY)$$

DÉFINITION III,46. — *Un relèvement métrique de* Γ *est une connexion linéaire* D *sur* TM, *réductible qui se projette sur* Γ *et telle que :*

$$Dg_\Gamma = 0.$$

Dans ce paragraphe nous nous intéressons aux relèvements métriques des connexions simples conservatives, c'est-à-dire (cf. [6] : II,11)) des connexions vérifiant :

$$i_\Gamma \Omega = 0 \qquad \text{et} \qquad d_h(E + q) = 0 \qquad \text{où} \qquad q = \theta_c E - 2E$$

Pour ces connexions : $\Omega(X, Y) = g_\Gamma(X, JY) - g_\Gamma(JX, Y)$ et la semi-gerbe de Γ est la semi-gerbe canonique :

$$i_S\Omega = -d(E + q)$$

Nous allons démontrer les théorèmes suivants :

THEOREME D'EXISTENCE III,47. –

a) *Une condition nécessaire pour qu'il existe un relèvement métrique d'une connexion simple conservative est que l'énergie soit "poly-homogène réduite"* (cf. [6] II §5), *c'est-à-dire somme d'une fonction* h.(2) *et d'une fonction* h.(1).

b) *Si Γ est la connexion canonique de la variété semi-finslerienne, cette condition est aussi suffisante.*

THEOREME D'EXISTENCE ET UNICITE (III,48). – *Soit* (M, E, π) *une variété semi-finslerienne dont l'énergie soit poly-homogène réduite, et soit Γ la connexion canonique. Il existe un et un seul relèvement métrique de Γ tel que :*

1) $$g(\mathbb{T}(JX, JY), JZ) = i_{JZ}\, \frac{d_J(E+q) \wedge dd_J q}{4\, g(C, C)}\,(X, Y)$$

2) $$J\mathbb{T}(hX, hY) = \frac{d_t(E + q) \otimes C}{g(C, C)}\,(X, Y)$$

où $\mathbb{T}(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$ est la torsion (classique) de D et t la torsion faible de Γ.

On en déduit les corollaires suivants :

COROLLAIRES III,49. –

1) THEOREME DE E. CARTAN. – $(q = 0,\ \pi = 0)$.

Il existe un et un seul relèvement métrique de la connexion canonique d'une variété finslerienne, tel que :

1. $\mathbb{T}(JX, JY) = 0$
2. $J\mathbb{T}(hX, hY) = 0$.

On peut vérifier que cette connexion est le prolongement, au sens de (III,12) de la connexion de E. Cartan (cf. [2]).

2) THEOREME DE J. KLEIN. — $(q = 0 \quad , \pi\, \mathrm{h}.(1))$

Il existe un et un seul relèvement métrique de la connexion dynamique tel que :

1. $\mathbb{T}(JX, JY) = 0$

2. $J\mathbb{T}(hX, hY) = -\dfrac{\pi \otimes C}{g(C, C)}(X, Y)$.

On peut vérifier qu'il s'agit du prolongement au sens de (III,12) de la connexion "S-finslerienne" de J. Klein (cf. [7]).

Démonstration. — On démontrera les deux théorèmes à la fois par un raisonnement qui comporte les étapes suivantes :

LEMME 1. — *Soit* Γ *une connexion simple et conservative sur* M. *Il existe une connexion linéaire* D *sur* $\mathscr{C}$M *telle que*

a) $Dg_\Gamma = 0$

b) $DJ = 0$

c) $D\Gamma = 0$

et elle est parfaitement déterminée lorsqu'on se donne $\mathbb{T}(JX, JY)$ et $J\mathbb{T}(hX, hY)$ pour tout $X, Y \in TTM$. C'est-à-dire qu'elle est parfaitement déterminée par les conditions supplémentaires

$$\mathbb{T}(JX, JY) = L(X, Y) \quad \text{et} \quad J\mathbb{T}(hX, hY) = M(X, Y)$$

où L et M sont deux 2-formes vectorielles semi-basiques arbitrairement prefixées.

Il s'agit ensuite de voir dans quelles conditions D est presque-projetable et la condition induite sur M est Γ. Nous avons :

LEMME 2. — D *est presque-projetable et la connexion induite sur* M *est* Γ *si et seulement si* L *et* M *vérifient le système suivant :*

$$(*)\quad \begin{cases} \text{A. } g(\mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y}),\mathrm{C}) = 0 \\ \text{B. } dd_{\mathrm{J}}q(\mathrm{JX},\mathrm{Y}) = 2g(\mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{S}),\mathrm{JY}) + 2g(\mathrm{L}(\mathrm{Y},\mathrm{S}),\mathrm{JX}) \\ \text{C. } g(\mathrm{TX},\mathrm{JY}) = -i_{\mathrm{S}}d\pi(\mathrm{JX},\mathrm{Y}) + g(\mathrm{M}(\mathrm{S},\mathrm{X}),\mathrm{JY}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + g(\mathrm{M}(\mathrm{S},\mathrm{Y}),\mathrm{JX}) \\ \text{D. } g(\mathrm{M}(\mathrm{X},\mathrm{Y}),\mathrm{C}) = d_t(\mathrm{E}+q)(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \end{cases}$$

où T *est la torsion forte de* Γ et t *la torsion faible.*

Le lemme 3 prouve la première partie du théorème d'existence :

LEMME 3. — *Une condition nécessaire pour que les équations* A. et B. *puissent être satisfaites est que* E *soit poly-homogène réduite.*

Enfin le lemme 4 complète la démonstration des deux théorèmes :

LEMME 4. — *Soit* E *poly-homogène réduite et* Γ *la connexion canonique. Alors* L *et* M *définies par :*

$$\mathrm{M} = \frac{d_t(\mathrm{E}+q)\otimes \mathrm{C}}{g(\mathrm{C},\mathrm{C})}$$

$$g(\mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y}),\mathrm{JZ}) = i_{\mathrm{JZ}}\,\frac{d_{\mathrm{J}}(\mathrm{E}+q)\wedge dd_{\mathrm{J}}q}{4g(\mathrm{C},\mathrm{C})}\,(\mathrm{X},\mathrm{Y})$$

sont une solution du système (*).

La démonstration des lemmes 1 et 4 présente beaucoup de calculs. Nous nous limitons à donner quelques indications, en renvoyant pour les détails à [5].

Démonstration du lemme 1.

Existence. — On pose

$$g(\mathrm{D_X Y},\mathrm{Z}) = \bar{g}(\mathrm{D_X JY},\mathrm{JZ}) + \bar{g}(\mathrm{D_X}\nu\mathrm{Y},\nu\mathrm{Z})$$

et

$$\begin{aligned} 2g(\mathrm{D_X JY},\mathrm{JZ}) = {} & \mathrm{X}.g(\mathrm{JY},\mathrm{JZ}) + g(\mathrm{JX},\mathrm{J}[\mathrm{Y},\mathrm{Z}]) + \theta_{h\mathrm{Y}}(\mathrm{J}^*g)(\mathrm{X},\mathrm{Z}) \\ & - \theta_{h\mathrm{Z}}(\mathrm{J}^*g)(\mathrm{X},\mathrm{Y}) + 2g(\mathrm{L}(\mathrm{Y},\mathrm{FX}),\mathrm{JZ}) + 2g(\mathrm{L}(\mathrm{FX},\mathrm{Z}),\mathrm{JY}) \\ & + 2g(\mathrm{L}(\mathrm{Y},\mathrm{Z}),\nu\mathrm{X}) + g(\mathrm{M}(\mathrm{X},\mathrm{Y}),\mathrm{JZ}) + g(\mathrm{M}(\mathrm{Z},\mathrm{X}),\mathrm{JY}) \\ & + g(\mathrm{M}(\mathrm{Z},\mathrm{Y}),\mathrm{JX}). \end{aligned}$$

On vérifie que D ainsi définie satisfait bien aux conditions du lemme.

Unicité. – Soit D une connexion linéaire sur M satisfaisant aux conditions du lemme. Puisque DJ = 0, on a :

$$\text{(i)}\ g(JT(X,Y),JZ) = g(D_{\nu X}JY,JZ) - g(D_{\nu Y}JX,JZ) - g(J[X,\nu Y],JZ) - g(J[\nu X,Y],JZ) + g(M(X,Y),JZ),$$

Or $Dg(JX, JY, JZ) = 0$; on en déduit :

$$JZ.g(JX,JY) - JY.g(JX,JZ) + JX.g(JY,JZ) = g(D_{JZ}JY - D_{JY}JZ, JX) + g(JZ, D_{JX}JY - D_{JY}JX) + g(JY, D_{JZ}JX + D_{JX}JZ)$$

d'où, en tenant compte du fait que $d_J\Omega(Z, Y, JX) = 0$, car Ω est semi-basique, on déduit facilement :

$$\text{(ii)}\ g(D_{JX}JZ,JY) - g(D_{JX}JY,JZ) = g(J[JX,Z],JY) - g(J[JX,Y],JZ) + 2g(L(X,Z),JY) + 2g(L(Y,X),JZ) + 2g(L(Y,Z),JX)$$

Or $Dg(\nu X, JY, JZ) = 0$; on en tire :

$$\theta_{\nu X}(J^*g)(Y,Z) = g(D_{\nu X}JY,JZ) + g(JY,D_{\nu X}JZ) - g(J[\nu X,Y],JZ) - g(JY,J[\nu X,Z])$$

et, en utilisant (ii) :

$$\theta_{\nu X}(J^*g)(Y,Z) = 2g(D_{\nu X}JY,JZ) - 2g(J[\nu X,Y],JZ) - 2g(L(Y,FX),JZ) - 2g(L(Y,Z),\nu X) - 2g(L(FX,Z),JY)$$

d'où, en remplaçant dans (i) on obtient :

$$\text{(iii)}\ g(JT(X,Y),JZ) = \frac{1}{2}(\theta_{\nu X}(J^*g)(Y,Z) - \theta_{\nu Y}(J^*g)(X,Z)) + g(L(Y,FX),JZ) + g(L(Y,Z),\nu X) + g(L(FX,Z),JY) - g(L(X,FY),JZ) - g(L(X,Z),\nu Y) - g(L(FY,Z),JX) + g(M(X,Y),JZ)$$

Il s'agit maintenant de calculer $g(D_X JY, JZ)$.

En imposant $Dg(X, JY, JZ) = 0$ et les relations analogues obtenues par permutation cyclique de X, Y et Z, un calcul classique donne :

$$X.g(JY,JZ) + Y.g(JX,JZ) - Z.g(JX,JY) = g(D_X JY + D_Y JX, JZ)$$
$$+ g(D_X JZ - D_Z JX, JY) + g(D_Y JZ - D_Z JY, JX)$$

et, en utilisant pour $\mathbb{T}$ l'expression trouvée, on obtient, après quelques calculs :

$$2g(D_X JY, JZ) = X.g(JY, JZ) + g(JX, J[Y, Z]) + \theta_{hY}(J^*g)(X,Z)$$
$$- \theta_{hZ}(J^*g)(X, Y) + 2g(L(Y, FX), JZ) + 2g(L(FX, Z), JY)$$
$$+ 2g(L(Y,Z), \nu X) + g(M(X,Y),JZ) + g(M(Z,X),JY) + g(M(Z,Y),JX)$$

Or cette expression détermine bien la connexion. En effet, en imposant les axiomes $DJ = 0$ et $D\Gamma = 0$, et en utilisant le fait que g est le prolongement riemannien de $\bar{g}$ suivant Γ, on trouve :

$$\text{(iv)}\quad \bar{g}(D_X JY, JZ) + \bar{g}(D_X JFY, JFZ) = \bar{g}(JD_X Y, JZ)$$
$$+ \bar{g}(\nu D_X Y, \nu Z) = g(D_X Y, Z)$$

C.Q.F.D.

Démonstration du lemme 2.

En posant $Y = S$ dans l'expression (iv) et en utilisant les relations

$$\theta_S \Omega = i_S d\pi \qquad \text{et} \qquad \Omega(X, Y) = g(X, JY) - g(JX, Y)$$

on peut montrer que :

$$2g(D_X C, JZ) = g(JZ, [S, JX] - J[S,X]) + C.g(JZ,\nu X) + g([X, C], JZ)$$
$$+ g([C, hZ], JX) - g(J[C, hZ], \nu X) + i_S d\pi(JX, Z) + d\pi(X, C, hZ)$$

En employant maintenant la propriété $\theta_C \Omega = \Omega + dd_J q + \pi^*$(cf. [6]), (II,22), on peut établir, après quelques calculs que :

$$2g(D_X C, JZ) = 2g(\nu X, JZ) + g(TX, JZ) - i_H \Omega(X, Z) + dd_J q(\nu X, Z)$$
$$+ i_S d\pi(JX, Z) - \theta_C \pi(X, Z) + 2g(L(S, FX), JZ) + 2g(L(FX, Z), C)$$
$$+ 2g(L(S,Z), \nu X) + g(M(X,S),JZ) + g(M(Z,X),C) + g(M(Z,S), JX)$$

Or, par définition, D est presque-projetable et la connexion induite sur M est Γ si et seulement si $D_X C = \nu X$, c'est-à-dire $D_{JX} C = JX$ et $D_{hX} C = 0$.

La condition $D_{JX}C = JX$ donne :

$$dd_J q(JX, Z) = 2g(L(X, S), JZ) + 2g(L(Z, X), C) + 2g(L(Z,S), JX)$$

Comme $i_J dd_J q = 0$, c'est-à-dire ; $dd_J q(JX, Z) = dd_J q(JZ, X)$, on en déduit, par des raisons de symétrie :

A. $g(L(Z, X), C) = 0$

B. $dd_J q(JX, Z) = 2g(L(X, S), JZ) + 2g(L(Z, S), JX)$

La condition $D_{hX}C = 0$ donne :

C. $g(TX, JZ) = -i_S d\pi(JX, Z) + g(M(S, X), JZ)$
$+ g(M(S, Z), JX)$

et : $i_H \Omega(X, Z) + (\theta_C \pi)(X, Z) = -g(M(X,Z), C)$

c'est-à-dire, d'après ([5], IV,34),

D. $d_t(E + q)(X, Z) = g(M(X, Z), C)$

C.Q.F.D.

Démonstration du lemme 3.

Il faut montrer que $dq* = 0$, où $q* = \theta_C q - q$

De B, avec $X = S$, on tire :

$$dd_J q(C, Z) = 2g(L(Z,S), C)$$

et, grâce à A : $dd_J q(C, Z) = 0$, c'est-à-dire : $i_C dd_J q = 0$.

Or $d_J q$ est semi-basique ; On en déduit $\theta_C d_J q = 0$

Mais $\theta_C d_J q = d_J \theta_C q - d_J q = d_J q*$. Les conditions A et B imposent donc :

$$d_J q^* = 0$$

D'autre part, de C, en faisant $X = Z = S$, on tire :

$$g(-S^*, C) = 0$$

Or $g(S^*, C) = -\theta_S q*$ (cf. [6] II,26) ; on a donc :

$$\theta_S q* = 0$$

Mais, puisque $d_J q^* = 0$, q^* est une fonction constante sur les fibres ; par conséquent $\theta_S q^* = 0$ équivaut à $\theta_z q^* = 0$ pour tout $z \in \mathcal{C}M$; c'est-à-dire $dq^*(z) = 0$ pour tout $z \in$ M et donc $dq^* = 0$

C.Q.F.D.

Démonstration du lemme 4.

On a :

$$g(L(X,Y),JZ) = \frac{1}{4}\,\frac{g(JY,C).\,dd_J q(JX,Z) - g(JX,C)\,.\,dd_J q(JY,Z)}{g(C\,,C)}$$

puisque $d_J(E + q) = i_C \Omega$.

Donc :

$$2g(L(X\,,S)\,,JZ) + 2g(L(Z\,,S)\,,JX) = \frac{1}{2}\,dd_J q\,(JX\,,Z)$$

$$+ \frac{1}{2}\,dd_J q(JZ\,,X) = dd_J q(JX\,,Z)$$

ce qui montre que B est satisfaite.

D'autre part :

$$g(L(X\,,Y)\,,C) = \frac{g(JY\,,C)\,.\,dd_J q(JX\,,C) - g(JX\,,C)\,.\,dd_J q(JX,C)}{4g(C\,,C)}$$

car $i_C dd_J q = 0$; A est donc satisfaite.

Considérons C et D. On a :

$$g(M(X\,,Z)\,,C) = \frac{d_t(E + q)\,(X\,,Z)\,.\,g(C\,,C)}{g(C\,,C)} = d_t(E + q)\,(X,Z)$$

ce qui montre que D est vérifiée.

Enfin :

$$g(M(S,X),JZ) + g(M(S,Z),JX) = -\frac{[(\theta_C \pi)(S,X) + i_H \Omega(S,X)]\,.\,g(C,JZ)}{g(C\,,C)}$$

$$-\frac{[(\theta_C \pi)\,(S,Z) + i_H \Omega(S,Z)]\,.\,g(C,JX)}{g(C\,,C)}$$

$$= \frac{[i_S d\pi(C\,,X) - g(S^*,JX) + g(C\,,HX)]\,g(C\,,JZ)}{g(C,C)}$$

$$+ \frac{[i_S d\pi\,(C\,,Z) - g(S^*,JZ) + g(C\,,HZ)]\,g(C\,,JX)}{g\,(C\,,C)}$$

Mais $g(C, HX) = 0$ (cf. [5] : IV,34) ; donc :

$$g(M(S, X), JZ) + g(M(S, Z), JX) = \frac{[i_S d\pi(C,X) - g(S^*, JX)].\, g(C, JZ)}{g(C, C)}$$

$$+ \frac{[i_S d\pi(C, Z) - g(S^*, JZ)]\, g(C, JX)}{g(C, C)} = g(TX, JZ) + i_S d\pi(JX, Z)$$

(cf. (6) : II,37), ce qui montre que C est vérifiée.

C.Q.F.D.

1. $\overset{\circ}{D}J = 0$
2. $\overset{\circ}{D}C = \nu$ où ν est le projecteur vertical de la connexion canonique Γ.
3. $\overset{\circ}{D}\Gamma = 0$
4. $\overset{\circ}{D}_{JX} JY = [J, JY]X$
5. $\overset{\circ}{T}(JX, Y) = 0$

Expression explicite de $\overset{\circ}{D}$ (cf. III,33).

En vertu des axiomes 1 et 3, D est parfiatement définie par :

$$\text{(A.5)} \qquad \begin{cases} \overset{\circ}{D}_{hX} JY = [h, JY]X \\ \overset{\circ}{D}_{JX} JY = [J, JY]X \end{cases}$$

ou aussi par :

$$\overset{\circ}{D}_X JY = J[JY, F]X$$

Tosion de $\overset{\circ}{D}$. D'après (III,36), puisque la torsion faible de Γ est nulle, on a :

$$\text{(A.6)} \qquad \overset{\circ}{T} = R$$

R étant la courbure de la connexion canonique.

Courbure de $\overset{\circ}{D}$.

La courbure $\overset{\circ}{K}$ de $\overset{\circ}{D}$ est déterminée par les trois tenseurs semi-basiques :

$$\overset{\circ}{R}(X, Y)Z = \overset{\circ}{K}(hX, hY)JZ$$

$$\overset{\circ}{P}(X, Y)Z = \overset{\circ}{K}(hX, JY)JZ$$

$$\overset{\circ}{Q}(X, Y)Z = \overset{\circ}{K}(JX, JY)JZ$$

On a (cf. III,38 à 40) :

$$(A.7)\quad \begin{cases} \overset{\circ}{\mathbf{Q}} = 0 \\ \overset{\circ}{\mathbf{R}} = \theta_{\mathrm{J}}\mathrm{R} \\ \overset{\circ}{\mathbf{P}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}, \dfrac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\dfrac{\partial}{\partial x^\gamma} = -\dfrac{\partial^2\,\Gamma_\alpha^\lambda}{\partial y^\beta\,\partial y^\gamma}\dfrac{\partial}{\partial y^\lambda} \end{cases}$$

APPENDICE

LES CONNEXIONS DANS LES ESPACES DE FINSLER

On transcrit dans le formalisme précédemment introduit les résultats principaux sur les connexions en géométrie finslerienne.

1. Les connexions associées à la structure finslerienne.

A. LA CONNEXION CANONIQUE.

Rappelons d'abord les résultats et les définitions suivants :

DEFINITION (A,1) (cf. [6] II,4). – *On appelle variété finslerienne un couple* (M , E), *où* M *est une variété différentiable et* E *une application de* $\mathcal{T}$M *dans* $\mathbf{R}^+$, *avec* E(0) = 0, $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathcal{T}$M, $\mathcal{C}^1$ *sur la section nulle, telle que :*

1) $\theta_C E = 2E$

2) La forme $\Omega = dd_J E$ définit une structure symplectique sur TM.

La variété est dite *riemannienne* si E est de classe $\mathcal{C}^2$ (et donc quadratique).

DEFINITION (A,2) (cf. [6] : II,31). – *Une connexion* Γ *sur* (M , E) *est dite conservative si* $d_h E = 0$, *h étant le projecteur horizontal de* Γ.

Cette définition exprime le fait que l'énergie d'un vecteur de M se conserve par transport parallèle. On a le théorème suivant :

THEOREME (A,3) (cf. [6] II,33). – *Sur une variété finslerienne il existe une et une seule connexion conservative à torsion forte nulle.*

Elle est donnée par

$$\Gamma = [J , S]$$

où S *est la gerbe canonique, définie par*

$$i_S \Omega = -dE.$$

La connexion de Berwald est une *connexion de directions* (proposition (III,35), c'est-à-dire on a :

$$[C, \overset{\circ}{D}JX] = \overset{\circ}{D}[C, JX]$$

et

$$\overset{\circ}{D}_C JX = J[C, X]$$

On a enfin :

$$\overset{\circ}{D}F = 0$$

F étant la structure presque-complexe associée à Γ (cf. (III,14)

C. LA CONNEXION DE CARTAN

THEOREME (A.8) (cf. III,49, 1). – *Il existe un et un seul relèvement métrique de la connexion canonique, tel que*

a) $J\mathbb{T}(hX, hY) = 0$

b) $\mathbb{T}(JX, JY). = 0$ *pour tous* $X, Y \in TTM$.

En d'autres termes il existe une et une seule connexion linéaire D sur $\mathcal{C}$M, telle que :

1) $DJ = 0$

2) $DC = 0$

3) $D\Gamma = 0$

4) $Dg = 0$

et vérifiant les axiomes a) et b).

Il s'agit du prolongement (au sens de III,12) de la *connexion de Cartan.*

De même que la connexion de Berwald, D est une connexion de directions et satisfait à la relation : $DF = 0$

2. Expression explicite de la connexion de Cartan. (*)

PROPOSITION (A.9). – *La connexion de Cartan est déterminée par les relations suivantes :*

(*) Cf aussi [4] qu'utilise le formalisme de Dazord.

En coordonnées locales on trouve :

$$\Gamma_\alpha^\beta = y^\lambda \gamma_{\alpha\lambda}^\beta - \frac{1}{2} y^\mu y^\lambda C_{\alpha\nu}^\beta \gamma_{\mu\lambda}^\nu$$

où

$$\gamma_{\mu\lambda}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\bar{\alpha}\bar{\lambda}}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\bar{\alpha}\bar{\mu}}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\bar{\mu}\bar{\lambda}}}{\partial x^\alpha} \right) \quad \text{et} \quad C_{\alpha\nu}^\beta = g^{\beta\lambda} \frac{\partial^3 E}{\partial y^\alpha \partial y^\nu \partial y^\lambda}$$

Le *tenseur de courbure* R *de* Γ est donné par

$$R = -\frac{1}{2}[h, h]$$

et satisfait aux identités de Bianchi :

$$[J, R] = 0 \qquad \text{et} \qquad [h, R] = 0$$

Les principales propriétés de S, Γ, Ω et de la métrique riemannienne g sur TM associée à la structure finslerienne, sont résumées dans le tableau suivant :

$[C,S] = S$	$i_S\Omega = -dE$	$\theta_S\Omega = 0$	$g(X, Y) = \Omega(X, FY)$
$\Gamma = [J,S]$	$i_C\Omega = d_J E$	$\theta_C\Omega = 0$	$\Omega(X,Y) = g(X, JY) - g(JX, Y)$
$[J, \Gamma] = 0$	$i_J\Omega = 0$	$\theta_S E = 0$	$E = \frac{1}{2} g(C, C)$
$[C, \Gamma] = 0$	$i_\Gamma\Omega = 0$		

B. LA CONNEXION DE BERWALD.

THEOREME (A.4) (cf. III,32). – *Il existe un et un seul relèvement normal (noté* $\overset{\circ}{D}$*) de la connexion canonique, tel que :*

$$\overset{\circ}{T}(JX, Y) = 0 \quad \textit{pour tous} \quad X, Y \in TTM$$

où $\overset{\circ}{T}$ *est la torsion (classique) de la connexion* $\overset{\circ}{D}$.

$\overset{\circ}{D}$ *est dite connexion de Berwald*

En d'autres termes, il existe une et une seule connexion linéaire $\overset{\circ}{D}$ sur $\mathcal{C}$M, telle que :

1. $D_{JX} JY = [J, JY]X + \mathcal{C}(X, Y)$
2. $D_{hX} JY = [h, JY]X + \mathcal{C}'(X, Y)$
3. $DF = 0$

où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux 2-formes vectorielles définies par :

$$\Omega(\mathcal{C}(X, Y), Z) = 1/2\ \theta_{JX}(J^*g)(Y, Z)$$
$$\Omega(\mathcal{C}'(X, Y), Z) = 1/2\ (\theta_{hX} g)(JY, JZ)$$

En effet il est facile de vérifier que les conditions précédentes définissent bien une connexion linéaire sur $\mathcal{T}M$, qui satisfait aux axiomes : $DJ = 0$, $DC = \nu$, $D\Gamma = 0$, $\mathbb{T}(JX, JY) = 0$, $J\mathbb{T}(hX, hY) = 0$ et $Dg = 0$. Par exemple, montrons que $Dg = 0$. On a :

$$(D_X g)(Y, Z) = X.g(Y, Z) - g(D_X Y, Z) - g(Y, D_X Z) = X.g(JY, JZ)$$
$$X.g(\nu Y, \nu Z) - g(D_X JY, JZ) - g(D_X \nu Y, \nu Z) - g(JY, D_X JZ)$$
$$- g(\nu Y, D_X \nu Z) = (D_X g)(JY, JZ) + (D_X g)(\nu Y, \nu Z).$$

Donc, pour montrer que $Dg = 0$, il suffira de montrer que

$$(D_X g)(JY, JZ) = 0 \quad \text{pour tous} \quad X, Y, Z \in TTM,$$

c'est-à-dire que :

$$(D_{JX} g)(JY, JZ) = 0 \qquad \text{et} \qquad (D_{hX} g)(JY, JZ) = 0.$$

On a :

$$(D_{JX} g)(JY, JZ) = JX.g(JY, JZ) - g([J, JY]X, JZ)$$
$$- g(\mathcal{C}(X,Y), JZ) = g([J, JZ]X, JY) - g(\mathcal{C}(X,Z), JY)$$

En se servant de la relation : $(d_J\Omega)(X, JY, Z) = 0$, on trouve que la forme

$$\mathcal{C}_\flat(X, Y, Z) = g(\mathcal{C}(X, Y), JZ)$$

est symétrique en X, Y et Z ; d'où :

$$(D_{JX} g)(JY, JZ) = JX.g(JY, JZ) - g(J[JX.Y], JZ) - g(JY, J[JX, Z])$$
$$- 2g(\mathcal{C}(X, Y), JZ) = 2g(\mathcal{C}(X, Y), JZ) - 2g(\mathcal{C}(X, Y), JZ) = 0$$

$$- \Omega(\mathcal{C}([S,hX],Y),Z) - \Omega(\mathcal{C}(X,[S,hY]),Z) = \frac{1}{2}\,\theta_S(\theta_{JX}\,J^*g)(hY\,,hZ)$$

$$- \Omega(\mathcal{C}([S,hX]\,,Y)\,,Z) = \frac{1}{2}\,\theta_{JX}\,(\theta_S\,J^*g)\,(hY\,,hZ)$$

$$+ \frac{1}{2}\,\theta_{[S,JX]}\,(J^*g)\,(hY\,,hZ) - \Omega(\mathcal{C}([S\,,hX]\,,Y)\,,Z)$$

$$= \frac{1}{2}\,(\theta_{JX}\,\Theta)\,(hY\,,hZ) - \frac{1}{2}\,(\theta_{hX}\,J^*g)(hY\,,hZ)$$

$$= \frac{1}{2}[JX\,.\,\Theta(hX.\,hZ) - \Theta([JX\,,hY]\,,hZ) - \Theta(hY\,,[JX\,,hZ])$$

$$- hX.\,g(JY\,,JZ) + g(J\,[hX\,,hY],JZ) + g(JY\,,J\,[hX\,,hZ])$$

Enfin en utilisant le fait que $[J\,,h]\,(hX\,,hY) = 0$ on trouve :

$g([JX\,,hY] - J\,[hX\,,hY]\,,JZ) = g([hX\,,JY]\,,JZ)$ pour tous $X\,,Y\,,Z$.

On en déduit facilement :

$$\Omega((D_S\,\mathcal{C})(X,Y)\,,Z) = -\frac{1}{2}(\theta_{hX}\,g)\,(JY\,,JZ) = \Omega(-\mathcal{C}'(X\,,Y)\,,Z)$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE (A.13). – *Les connexions de Berwald et de Cartan coïncident si et seulement si la variété M est riemannienne.*

En effet si la variété est riemannienne, on a $\mathcal{C} = 0$ et donc aussi $\mathcal{C}' = 0$. De (A.6) et (A.9) on déduit : $D = \overset{\circ}{D}$. Réciproquement si $D = \overset{\circ}{D}$, on a $\mathcal{C} = 0$ et donc la variété est riemannienne.

3. Torsion et courbure de la connexion de Cartan.

Torsion.

On a :

$$\text{(A.14)}\quad \begin{cases} \mathbb{T}(hX\,,hY) = R(X\,,Y) \\ \mathbb{T}(hX\,,JY) = (\mathcal{C}' - F\mathcal{C})(X,Y) \\ \mathbb{T}(JX\,,JY) = 0 \end{cases}$$

Analoguement, $(d_h\Omega)(X, JY, Z) = 0$ entraîne que la forme

$$\mathcal{C}'_\flat(X, Y, Z) = g(\mathcal{C}'(X, Y), JZ)$$

est symétrique. On en déduit, par un calcul très simple que :

$$(D_{hX}g)(JY, JZ) = 0$$

D'après le théorème d'unicité, la connexion ainsi définie coïncide avec la connexion de Cartan.

PROPRIETES DE $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

PROPOSITION (A.10). – *Les tenseurs* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *vérifient les propriétés suivantes :*

1) $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *sont semi-basiques*

2) $\mathcal{C}_\flat(X, Y, Z) = g(\mathcal{C}(X, Y), JZ)$ *et* $\mathcal{C}'_\flat(X, Y, Z) = g(\mathcal{C}'(X, Y), JZ)$ *sont symétriques*

3) $\mathcal{C}^\circ = 0$ et $\mathcal{C}'^\circ = 0$.

Pour la propriété 2., cf la démonstration de la proposition (A.9). Pour 1 et 3 on se sert des axiomes de définition de D. Par exemple, pour montrer la propriété 3 on utilise l'axiome $DC = v$, c'est-à-dire : $D_{JX}C = JX$ et $D_{hX}C = 0$. On a :

$$D_{JX}C = [J, C]X + \mathcal{C}(X, S) = JX + \mathcal{C}^\circ(X)$$

d'où $\mathcal{C}^\circ(X) = 0$

$$D_{hX}C = [h, C]X + \mathcal{C}'^\circ(X, S) = C'^\circ(X),$$

car $[C, h] = 0$, d'où $\mathcal{C}'^\circ(X) = 0$

Expression de $\mathcal{C}$ *en coordonnées locales naturelles.*

$$g\left(\mathcal{C}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right), \frac{\partial}{\partial y^\gamma}\right) = \frac{1}{2}\theta_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}(J^*g)\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}g_{\bar\beta\bar\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 E}{\partial y^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial y^\gamma}$$

on a ainsi le résultat bien connu :

Proposition (A.11). — *La variété est riemannienne si et seulement si* $\mathcal{C} = 0$

La propriété suivante montre que $\mathcal{C}'$ s'exprime en fonction de $\mathcal{C}$ et ainsi il est nul si la variété est riemannienne.

Proposition (A.12). — $$\mathcal{C}' = -D_S\,\mathcal{C}$$

où S *est la semi-gerbe canonique de la variété finslerienne.*

Lemme. — Soit $\Theta(X, Y) = g(X, JY) + g(JX, Y)$; on a

$$\theta_S\,(J * g)\,(X, Y) = \Theta(X, Y).$$

En effet, un simple calcul donne :

$$\theta_S\,(J*g)(X, Y) = (\theta_S g)(JX, JY) + \Theta(X,Y)$$

D'autre part, on vérifie immédiatement que

$$(\theta_S g)(JX, JY) = (D_S g)(JX, JY)$$

et donc, puisque $Dg = 0$, on en déduit le lemme.

Démonstration de la proposition.

On a tout d'abord : $(D_S\mathcal{C})\,(X, Y) = \nu(\theta_S\mathcal{C})\,(hX, hY)$, comme on le vérifie immédiatement. Donc :

$$\Omega((D_S\mathcal{C})(X, Y), Z) = \Omega(\nu(\theta_S\,\mathcal{C})(hX, hY), Z)$$

$$= \Omega((\theta_S\mathcal{C})\,(hX, hY), hZ) = \Omega\Big([S, \mathcal{C}(hX, hY)] - \mathcal{C}\,([S, hX]), hY) - \mathcal{C}(X, [S, hY]), hZ\Big)$$

Or : $(\theta_S\Omega)\,(\mathcal{C}(hX, hY), hZ) = 0$; on en déduit :

$$\Omega([S, \mathcal{C}(hX, hY), hZ) = S\,.\,\Omega(\mathcal{C}(X, Y), Z) - \Omega(\mathcal{C}(X, Y), [S, hZ]).$$

On a ainsi :

$$\Omega((D_S\,\mathcal{C})\,(X, Y), Z) = S\,.\,\Omega(\mathcal{C}(X, Y), Z) - \Omega(\mathcal{C}(X, Y), [S, hZ]).$$
$$- \Omega(\mathcal{C}([S, hX], Y), Z) - \Omega(\mathcal{C}(X, [S, hY]), Z)$$

$$= \frac{1}{2}\,[(\theta_S\theta_{JX}\,J*g)\,(hY, hZ) + (\theta_{JX}\,J*g)([S, hY], hZ)$$

$$+ (\theta_{JX}\,J*g)\,(hY, [S, hZ])] - \Omega(\mathcal{C}(X, Y), [S, hZ])$$

En effet

$$\mathbb{T}(hX, hY) = D_{hX} hY - D_{hY} hX - [hX, hY] = FD_{hX} JY - FD_{hY} JX$$
$$- [hX, hY] = F\mathring{D}_{hX} JY + F\, \mathcal{C}'(X, Y) - F\mathring{D}_{hY} JX - F\, \mathcal{C}'(Y, X)$$
$$- [hX, hY] = \mathring{\mathbb{T}}(hX, hY) = R(X, Y)$$

Un calcul analogue donne :

$$\mathbb{T}(hX, JY) = (\mathcal{C}' - F\mathcal{C})(X, Y)$$

Enfin, on a $\mathbb{T}(JX, JY) = 0$ d'après les axiomes de définition.

Courbure.

Le tenseur de courbure a été étudié par plusieurs auteurs. J.G. Diaz [4], en suivant le point de vue de Dazord, en a fait une étude globale très complète. Entre autre chose, il a établi intrinsèquement les formules les plus importantes, que nous allons donner ici, en suivant le point de vue que nous avons adopté.

La courbure K est déterminée par les trois tenseurs semi-basiques :

$$R(X, Y)Z = K(hX, hY)JZ$$
$$P(X, Y)Z = K(hX, JY)JZ$$
$$Q(X, Y)Z = K(JX, JY)JZ$$

Proposition (A.15). – *Expression de* K *en fonction de* $\mathring{K}$.

1) $R(X, Y)Z = \mathring{R}(X, Y)Z + (D_{hX}\mathcal{C}')(Y, Z) - (D_{hY}\mathcal{C}')(X, Z) + \mathcal{C}'(F\mathcal{C}'(X, Z), Y) - \mathcal{C}'(X, F\mathcal{C}'(Y, Z)) + \mathcal{C}(FR(X, Y), Z)$

2) $P(X, Y)Z = \mathring{P}(X, Y)Z + (D_{hX}\mathcal{C})(Y, Z) - (D_{JY}\mathcal{C}')(X, Z) + \mathcal{C}(F\mathcal{C}'(X, Y), Z) - \mathcal{C}'(X, F\mathcal{C}(Y, Z)) + \mathcal{C}(Y, F\mathcal{C}'(X, Z)$

3) $Q(X, Y)Z = \mathcal{C}(F\mathcal{C}(X, Z), Y) - \mathcal{C}(X, F\mathcal{C}(Y, Z))$.

Démonstration

1) $R(X, Y)Z = \mathring{D}_{hX} D_{hY} JZ + \mathcal{C}'(X, D_{hY} Z) - \mathring{D}_{hY} D_{hX} JZ$
$\qquad - \mathcal{C}'(Y, D_{hX}Z) - \mathring{D}_{[hX, hY]} JZ - \mathcal{C}'([hX, hY], Z)$

$$- \mathcal{C}(F[hX, hY], Z) = \overset{\circ}{R}(X, Y)Z + D_{hX}(\mathcal{C}'(Y,Z))$$
$$- \mathcal{C}'(X, F\mathcal{C}'(Y,Z)) + \mathcal{C}'(X, D_{hY}Z) - D_{hY}(\mathcal{C}'(X, Z))$$
$$+ \mathcal{C}'(Y, F\mathcal{C}'(X,Z)) - \mathcal{C}'(Y, D_{hX}Z) - \mathcal{C}'(h[hX, hY], Z)$$
$$+ \mathcal{C}(FR(X, Y), Z)$$

Or $F[J, h](hX, hY) = 0$; on en déduit

$$\mathcal{C}'(h[hX, hY], Z) = \mathcal{C}'(F[hX, JY], Z) - \mathcal{C}'(F[hY, JX], Z)$$
$$= \mathcal{C}'(\overset{\circ}{D}_{hX}Y - \overset{\circ}{D}_{hY}X, Z) = \mathcal{C}'(D_{hX}Y - D_{hY}X, Z)$$

d'où l'expression de **R**.

D'une façon analogue on démontre les relations 2 et 3.

Remarque. – Pour démontrer la relation 3 on a besoin de l'identité suivante :

$$\text{(A.16)} \qquad (D_{JX}\mathcal{C})(Y, Z) = (D_{JY}\mathcal{C})(X, Z)$$

Démonstration. – Puisque $Dg = 0$, on a :

$$g((D_{JX}\mathcal{C})(Y, Z), JW) = (D_{JX}\mathcal{C}_\flat)(Y, Z, W) = (\overset{\circ}{D}_{JX}\mathcal{C}_\flat)(Y, Z, W)$$
$$- \mathcal{C}_\flat(F\mathcal{C}(X, Y), Z, W) - \mathcal{C}_\flat(Y, F\mathcal{C}(X, Z), W) - \mathcal{C}_\flat(Y, Z, F\mathcal{C}(X, W))$$

d'où :

$$g\Big(D_{JX}\mathcal{C})(Y, Z) - (D_{JY}C)(X, Z), JW\Big) = (\overset{\circ}{D}_{JX}\mathcal{C}_\flat)(Y, Z, W)$$
$$- (\overset{\circ}{D}_{JY}\mathcal{C}_\flat)(X, Z, W) - \mathcal{C}_\flat(Y, F\mathcal{C}(X, Z), W)$$
$$+ \mathcal{C}_\flat(X, F\mathcal{C}(Y, Z), W) - \mathcal{C}_\flat(X, Z, F\mathcal{C}(Y, W) - \mathcal{C}_\flat(Y, Z, F\mathcal{C}(X, W)).$$

Or $(\overset{\circ}{D}_{JX}\mathcal{C}_\flat)(Y, Z, W)$ est symétrique en X, Y, Z et W, comme on le voit immédiatement en coordonnées locales, par exemple. Ainsi :

$$g((D_{JX}\mathcal{C})(Y, Z) - (D_{JY}\mathcal{C})(X, Z), JW) = g(\mathcal{C}(X, W), \mathcal{C}(Y, Z))$$
$$- g(\mathcal{C}(Y, W), \mathcal{C}(X, Z)) + g(\mathcal{C}(Y, Z), \mathcal{C}(X, W)) - g(\mathcal{C}(X, Z), \mathcal{C}(Y, W)) = 0$$

C.Q.F.D.

De ces relations et des définitions de **R**, **P** et **Q**, on tire les propriétés suivantes :

PROPRIETES (A.17). –

1) $\mathbf{R}(X, Y)S = R(X, Y)$
2) $\mathbf{P}(X, Y)S = \mathcal{C}'(X, Y)$
3) $\mathbf{P}(S, X)Y = \mathbf{P}(X, S)Y = 0$
4) $\mathbf{Q}(S, X)Y = \mathbf{Q}(X, S)Y = \mathbf{Q}(X, Y)S = 0.$

Démonstration.

1) $\mathbf{R}(X, Y)S = D_{hX}D_{hY}C - D_{hY}D_{hX}C - D_{[hX, hY]}C$

or $DC = \nu$, donc :

$$\mathbf{R}(X, Y)S = -\nu[hX, hY] = R(X, Y).$$

2) s'obtient d'une façon analogue.

3) s'obtient immédiatement en exprimant que D est une connexion de directions, c'est-à-dire en utilisant les relations :

$$D[C, JX] = [C, DJX] \quad \text{et} \quad D_C JX = J[C, X]$$

4) De (A.15), en posant $X = S$, on tire :

$$\mathbf{P}(S, Y)Z = (D_S\mathcal{C})(Y,Z) + \mathcal{C}'(X,Y) = 0$$

d'après (A.12).

5) Ces relations s'obtiennent immédiatement de l'expression de $\mathbf{Q}$ (A.15,3).

PROPRIETES (A.19). –

1) $D_C\mathcal{C} = -\mathcal{C}$

2) $D_C\mathcal{C}' = 0$

1) s'obtient de (A.16) en posant $X = S$

2) s'obtient de (A.15,2) pour $Y = S$, en tenant compte du fait que $\mathbf{P}(X, S)Y = 0$.

IDENTITES DE BIANCHI.

Comme pour toutes les connexions linéaires, les identités de Bianchi s'écrivent :

$$\text{I.}\quad \underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} K(X,Y)Z = \underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} [(\mathbb{T}(\mathbb{T}(X,Y),Z) + (D_X\mathbb{T})(Y,Z))]$$

$$\text{II.}\quad \underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} [K(\mathbb{T}(X,Y)Z + (D_X K)(Y,Z)] = 0$$

où $\underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}}$ désigne la somme effectuée sur une permutation cyclique de X, Y, Z.

En écrivant la première identité de Bianchi pour hX, hY et hZ, on trouve, en identifiant respectivement les parties horizontales et verticales :

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y =$$
$$= \mathcal{C}(FR(X,Y),Z) + \mathcal{C}(FR(Y,Z),X) + \mathcal{C}(FR(Z,X),Y) \quad (A.20)$$

et

$$(D_{hX}R)(Y,Z) + (D_{hY}R)(Z,X) + (D_{hZ}R)(X,Y)$$
$$= \mathcal{C}'(FR(X,Y),Z) + \mathcal{C}'(FR(Y,Z),X) + \mathcal{C}'(FR(Z,X),Y) \quad (A.21)$$

En effectuant le calcul pour hX, hY et JZ, l'identification des parties verticales donne :

$$\mathcal{C}(FR(X,Y),Z) = R(F\mathcal{C}(X,Z),Y) - R(X,F\mathcal{C}(Y,Z)) \quad (A.22)$$

L'identification des parties horizontales, donne une conséquence triviale de (A.15), de même que le calcul analogue pour hX, JY, JZ. Enfin pour JX, JY, JZ on trouve

$$Q(X,Y)Z + Q(Y,Z)X + Q(Z,X)Y = 0 \quad (A.23)$$

La seconde identité de Bianchi donne, pour hX, hY, hZ :

$$(D_{hX}R)(Y,Z) + (D_{hY}R)(X,Z) + (D_{hZ}R)(X,Y)$$
$$= P(X,FR(Y,Z)) + P(Y,FR(Z,X)) + P(Z,FR(X,Y)) \quad (A.24)$$

Pour hX, hY, JZ on obtient :

$$(D_{hX}P)(Y,Z) - (D_{hY}P)(X,Z) + (D_{JZ}R)(X,Y) = P(X,F\mathcal{C}'(Y,Z)$$
$$- P(Y,F\mathcal{C}'(X,Z)) - R(X,F\mathcal{C}(Y,Z)) + R(Y,F\mathcal{C}(X,Z))$$
$$- Q(FR(X,Y),Z) \quad (A.25)$$

En effectuant le calcul pour hX , JY , JZ on a :

$$(D_{hX}Q)(Y,Z) - (D_{JY}P)(X,Z) + (D_{JZ}P)(X,Y) = P(F\mathcal{C}(X,Y),Z)$$
$$- P(F\mathcal{C}(Z,X),Y) - Q(F\mathcal{C}'(X,Y),Z) + Q(F\mathcal{C}'(Z,X),Y) \quad \text{(A.26)}$$

Enfin pour JX , JY , JZ on obtient :

$$(D_{JX}Q)(Y,Z) + (D_{JY}Q)(Z,X) + (D_{JZ}Q)(X,Y) = 0 \quad \text{(A.27)}$$

De ces relations on tire :

PROPRIETES (A.28). – $D_C R = 0$, $D_C P = -P$, $D_C Q = -2Q$.

La première s'obtient de (A.25), en posant Z = S ; la seconde de (A.26) en posant Y = S ; enfin la troisième s'obtient de (A.27) pour X = S.

Remarque. – Classiquement (A.21), (A.24), (A.27), (A.25) et (A.26) sont dites respectivement I, II, III, IV, et V identité de Bianchi (cf. par exemple [1]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKBAR-ZADEH, *Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisations, Ann. Ec. Norm. Sup.* 80, (1963), 1-79.

[2] E. CARTAN, *Les espaces de Finsler,* Hermann, 1934.

[3] P. DAZORD, *Propriétés globales des géodésiques des espaces de Finsler,* Thèse (575) Publ. Dép. Math. Lyon (1969).

[4] J.G. DIAZ, *Etude des tenseurs de courbure en géométrie finslerienne* Thèse IIIème cycle, Publ. Inst. Math. Lyon, (1972).

[5] J. GRIFONE, *Structure presque-tangente et connexions,* Thèse Publ. Inst. Math. Grenoble (1971).

[6] J. GRIFONE, *Structure presque tangente et connexions. Ann. Inst. Fourier,* Grenoble 22,1 (1972), p. 287-334.

[7] J. KLEIN, *Espaces variationnels et mécanique, Thèse, Ann. Inst. Fourier,* Grenoble 12(1962), 124.

[8] J.L. KOSZUL, *Lectures on fiber bundles and differential geometry,* Tata inst. Bombay.

[9] M. MATSUMOTO, *The theory of Finsler connextions* Publ. S.G.G. 5 (1970).

[10] H. RUND, *The differential geometry of Finsler spaces.* Springer Berlin (1959).

[11] J. VILMS, *Non linear and direction connections, Proc. of Am. Math. Soc.* (28), 2, (1971), 567-572.

Manuscrit reçu le 29 mai 1972
accepté, par J.L. KOSZUL

Joseph GRIFONE
Institut de Mathématiques Pures
B.P. 116
38 – St. Martin-d'Hères