ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PATRICE ASSOUAD

Applications sommantes et radonifiantes

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 3 (1972), p. 81-93
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_3_81_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22,3 (1972), 81-93

APPLICATIONS SOMMANTES ET RADONIFIANTES

par P. ASSOUAD

On se propose de généraliser (et de présenter sous un mode uniforme) les résultats de L. Schwartz sur les applications p-sommantes et p-radonifiantes, $0 \leqslant p < \infty$ (voir [1]). On retrouve comme cas particulier la factorisation des applications 0-radonifiantes établie par Sunyack (dans [1]). D'autre part, on voit que l'hypothèse de convexité faite dans [2] n'est pas utile. On trouve des précisions sur les espaces d'Orlicz dans [3], [4], [5], [6], mais ce travail a suggéré sur ce sujet de nouvelles méthodes d'étude et quelques résultats nouveaux qui seront l'objet d'un travail ultérieur.

1. Définitions.

On dit que $\Phi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ est une *fonction de Young* si Φ est croissante, $\Phi(0) = 0$, Φ est continue à l'origine, Φ n'est pas identiquement nulle. Soit $\mathcal{Y}$ le cône des fonctions de Young. Soient $\Phi, \Psi \in \mathcal{Y}$ telles que $k_1 \Phi(r_1 t) \leqslant \Psi(t) \leqslant k_2 \Phi(r_2 t)$ pour t assez grand ; on dit alors que Φ et Ψ sont *équivalentes*. Toutes les notions données dans la suite ne dépendent en fait que de la classe de Φ.

Soient $\Phi, \Psi \in \mathcal{Y}$; Φ est choisie continue (ce qui n'est pas une restriction). Soient E, F des espaces de Banach, B la boule unité fermée du dual E$'$ de E et $T : E \to F$ une application linéaire continue. Enfin, soit $\mathcal{J}$ une topologie d'e.v.t. séparé sur F telle que l'application $x \mapsto \|x\|$ soit universellement mesurable (en pratique on prend F muni soit de sa topologie forte, soit si $F = G'$ de la topologie faible $\sigma(G', G)$). On note $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé de Radon et l'on utilise la notation $E[X] = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega)$.

On a alors les notions suivantes :

a) $L_\Psi(\Omega ; F, \mathcal{J})$ (on omet F si F = **R**) est l'espace des v.a. P-mesurables au sens de Lusin $X : \Omega \to (F, \mathcal{J})$ telles que :

$$\exists a > 0 \quad \text{tel que} \quad E\left[\Psi \left\| \frac{X}{a} \right\|\right] < +\infty .$$

Alors L_Ψ est un espace vectoriel et on définit une base de voisinages de 0 pour une structure d'e.v.t. sur L_Ψ en prenant :

$$\forall a > 0 \; , \; b > 0 \qquad V_\Psi(a, b) = \left\{ X \,\middle|\, E\left[\Psi \left\| \frac{X}{a} \right\|\right] \leqslant b \right\} .$$

Muni de cette structure, L_Ψ est un e.v.t. métrisable complet.

Exemples.

1) si $\Psi(t) = 1 \wedge t$ ou $I_{]1,\infty[}(t)$, on obtient L_0 (espace des v.a. avec la convergence en probabilité) ;

2) si $\Psi(t) = t^p$, $0 < p < +\infty$, on obtient L_p ;

3) si Ψ est convexe, L_Ψ est l'espace d'Orlicz (normé) associé à Ψ.

(N.B. : On notera 0 la classe des fonctions bornées et p la classe de t^p ; on peut le faire sans risque de confusion car $\mathcal{Y}$ ne contient pas de constante).

b) $\check{L}_\Phi(\Omega ; E)$ est l'espace des applications linéaires continues $f : E' \to L_\Phi(\Omega)$. Pour que $f : E' \to L_0(\Omega)$ appartienne à L_Φ, il faut et il suffit que :

$$\forall b > 0 \quad \exists a > 0 \quad \sup_{\xi \in B} E\left[\Phi \left| \frac{f(\xi)}{a} \right|\right] \leqslant b .$$

On munit $\check{L}_\Phi$ de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E'. On définit donc une base de voisinages de 0 en prenant :

$$\forall a > 0 \quad , \quad b > 0 \qquad W_\Phi(a, b) = \left\{ f \,\middle|\, \sup_{\xi \in B} E\left[\Phi \left| \frac{f(\xi)}{a} \right|\right] \leqslant b \right\} .$$

$\check{L}_\Phi$ est un e.v.t. métrisable complet, car $L_\Phi(\Omega)$ est métrisable complet. Posant $f_X(\xi) = \langle X , \xi \rangle$, l'application $X \mapsto f_X$ est une injection continue de $L_\Psi(\Omega ; F, \mathcal{J})$ dans $\check{L}_\Psi(\Omega ; F)$.

c) μ est une *mesure d'ordre* Ψ sur $(\mathrm{F}, \mathfrak{J})$ si μ est proportionnelle à la loi d'un élément d'un espace $\mathrm{L}_\Psi(\Omega ; \mathrm{F}, \mathfrak{J})$ (pour Ω convenable), c'est-à-dire si μ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ bornée sur $(\mathrm{F}, \mathfrak{J})$; et si :

$$\exists a > 0 \quad , \quad b > 0 \quad \int_{\mathrm{F}} \Psi\left(\left\| \frac{y}{a} \right\|\right) \mu(dy) \leqslant b \cdot \mu(1) .$$

d) λ est une *mesure de type* Φ *sur* E si λ est proportionnelle à la loi d'un élément d'un espace $\check{\mathrm{L}}_\Phi(\Omega ; \mathrm{E})$, c'est-à-dire si λ est une mesure cylindrique $\geqslant 0$ finie sur E et si

$$\forall b > 0 \quad , \quad \exists a > 0 \quad \sup_{\xi \in \mathrm{B}} \int_{\mathbf{R}} \Phi\left(\left| \frac{t}{a} \right|\right) \ \xi(\lambda)\ (dt) \leqslant b \cdot \lambda(1).$$

e) λ est une *mesure de cotype* Φ *sur* E si λ est une mesure cylindrique $\geqslant 0$ finie sur E et si

$$\forall a > 0 \quad , \quad \exists b > 0 \quad \inf_{\xi \notin \mathrm{B}} \int_{\mathbf{R}} \Phi\left(\left| \frac{t}{a} \right|\right) \ \xi(\lambda)\ (dt) > b \cdot \lambda(1).$$

Soit f une fonction aléatoire linéaire de loi λ sur E ; la condition précédente signifie que :

$$f(\xi_n) \xrightarrow[\mathrm{L}_\Phi]{} 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_n \xrightarrow[\mathrm{E}']{} 0$$

pour toute suite (ξ_n) dans E'.

f) T est $\Phi - \Psi$ *radonifiante de* E *dans* $(\mathrm{F}, \mathfrak{J})$ si

$$\forall a > 0 \quad , \quad b > 0 \qquad \exists c > 0 \quad , \quad d > 0 \qquad \text{tels que}$$

λ mesure de type Φ sur E et $\sup_{\xi \in \mathrm{B}} \int_{\mathbf{R}} \Phi\left(\left| \frac{t}{c} \right|\right) \xi(\lambda)\,(dt) \leqslant \mathrm{d} \cdot \lambda(1) \Rightarrow \mathrm{T}\lambda$

mesure d'ordre Ψ sur $(\mathrm{F}, \mathfrak{J})$ et $\int_{\mathrm{F}} \Psi\left(\left\| \frac{y}{a} \right\|\right) \ \mathrm{T}\lambda\,(dy) \leqslant b \cdot \lambda(1).$

(La composée de T à droite ou à gauche avec une application continue est encore $\Phi - \Psi$ radonifiante).

g) T est $\Phi - \Psi$ *sommante de* E *dans* F si :

$$\forall a > 0 \quad , \quad b > 0 \qquad \exists c > 0 \quad , \quad d > 0 \qquad \text{tels que}$$

$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0 \quad , \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{E}$

$$\sup_{\xi \in B} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \Phi\left(\left| \frac{<x_i , \xi>}{c} \right|\right) \leqslant d \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \Psi\left(\left\| \frac{Tx_i}{a} \right\|\right) \leqslant b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, .$$

Il s'agit de la restriction de la définition précédente aux mesures de Radon à support fini. (La composée de T à droite ou à gauche avec une application continue est encore $\Phi - \Psi$ sommante).

Remarque. – Soit f un élément de $\check{L}_\Psi(\Omega\,;F)$ dont la loi est une mesure de Radon sur $(F\,,\mathcal{J})$. En général, on ne peut pas trouver $X \in L_\Psi(\Omega\,;F\,,\mathcal{J})$ de même loi que f. C'est possible (voir [1]) si les parties compactes de $(F\,,\mathcal{J})$ sont métrisables. On pourra donc considérer dans ce cas qu'une application $\Phi - \Psi$ radonifiante de E dans $(F\,,\mathcal{J})$ induit une application linéaire continue de $\check{L}_\Phi(\Omega\,;E)$ dans $L_\Psi(\Omega\,;F\,,\mathcal{J})$.

2. Deux résultats auxiliaires.

On démontre d'abord deux lemmes (qui ont des réciproques évidentes) :

LEMME 1. – (Cartier) *Soient* K *un espace compact et* $\mathcal{C}$ *un cône convexe contenu dans* C(K) (*espace des fonctions continues sur* K). *On suppose que si* $g \in \mathcal{C}$, *il existe* $\xi \in K$ *tel que* $g(\xi) \geqslant 0$. *Alors il existe une probabilité de Radon* μ *sur* K *telle que* $\mu(g) \geqslant 0$ *pour tout* $g \in \mathcal{C}$.

Démonstration. – Soit $C^-(K)$ l'ensemble des fonctions continues sur K qui sont négatives et non nulles. Comme $C^-(K)$ est un cône convexe ouvert qui ne rencontre pas $\mathcal{C}$, il existe un hyperplan fermé H passant par 0 et séparant $C^-(K)$ et $\mathcal{C}$. L'hyperplan H est défini par une mesure μ qui prend des valeurs positives sur $\mathcal{C}$ et négatives sur $C^-(K)$; on peut normaliser μ par $\mu(-1) = -1$, et c'est alors la probabilité de Radon cherchée.

LEMME 2. – *Soient* X *un espace vectoriel,* $Y \subset X$ *un cône convexe, u et v deux formes linéaires sur* X. *On suppose qu'il existe* x_0 *dans* Y *avec* $u(x_0) < 0$ *et que pour tout x dans* Y, *la relation* $u(x) < 0$ *entraîne* $v(x) \leqslant 0$. *Alors, il existe* $\alpha \geqslant 0$ *tel que* $v(x) \leqslant \alpha \cdot u(x)$ *pour tout x dans* Y.

Démonstration. – Tout se passe en fait dans le plan R^2. Soient C_1 l'ensemble des couples de la forme $(u(x), v(x))$ pour x parcourant Y, et soit C_2 l'ensemble des couples (a, b) de nombres réels avec $a < 0$ et $b > 0$. Alors C_1 et C_2 sont des cônes convexes disjoints dans R^2 et C_2 est ouvert. On peut donc séparer C_1 et C_2 par une droite D dont l'équation est de la forme $\alpha a = \beta b$ avec $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$; comme il existe $x_0 \in Y$ avec $u(x_0) < 0$, on a $\beta \neq 0$ et l'on peut se ramener au cas où $\beta = 1$. On a alors $\alpha a \geqslant b$ pour (a, b) dans C_1, d'où le résultat cherché.

Remarque. – Il est indispensable dans le lemme 2 qu'il existe $x_0 \in Y$ tel que $u(x_0) < 0$. Sinon, le lemme est faux en général : prendre par exemple $Y = \{x \mid u(x) \geqslant 0 \ , \ v(x) \geqslant 0\}$.

3. Caractérisation des applications sommantes.

PROPOSITION 1. – *Soient* E, F *des espaces de Banach,* $T : E \to F$ *une application linéaire continue, et* $\Phi, \Psi \in \mathcal{Y}$. *Pour que* T *soit* $\Phi - \Psi$ *sommante, il faut et il suffit que :*

$$\forall a > 0 \ , \ \forall b > 0 \qquad \exists c > 0 \ , \ d > 0 \ , \ \alpha > 0 \ ,$$

μ probabilité de Radon sur B *tels que*

$$\forall x \in E \quad \Psi \left\| \frac{Tx}{a} \right\| - b \leqslant \alpha \left[\int_B \Phi \left| \frac{< x , \xi >}{c} \right| \mu(d\xi) - d \right] .$$

Démonstration. – La condition est nécessaire : en effet, soit $a > 0$, $b > 0$ donnés. Soit $c > 0$, $d > 0$ les nombres associés à a, b exprimant que T est $\Phi - \Psi$ sommante. On applique d'abord le lemme 1 en prenant K = B, $\mathcal{C}$ est le cône des fonctions

$$\xi \mapsto \sum_i \lambda_i \, \Phi \left| \frac{<x_i \, , \xi>}{c} \right| - d \sum_i \lambda_i$$

telles que

$$\sum_i \lambda_i \, \Psi \left\| \frac{\mathrm{T}x_i}{a} \right\| > b \sum_i \lambda_i \, .$$

Il existe donc une probabilité de Radon μ sur B telle que :

$$\forall \lambda_1 , \ldots , \lambda_n \geqslant 0 \qquad \forall x_1 , \ldots , x_n \in \mathrm{E}$$

$$\sum_i \lambda_i \int_{\mathrm{B}} \Phi \left| \frac{<x_i \, , \xi>}{c} \right| \mu(d\xi) - d \sum_i \lambda_i < 0 \Rightarrow$$

$$\sum_i \lambda_i \Psi \left\| \frac{\mathrm{T}x_i}{a} \right\| - b \sum_i \lambda_i \leqslant 0 \, .$$

On applique alors le lemme 2 en prenant pour X l'espace vectoriel librement engendré par l'ensemble E.

De plus $\alpha \neq 0$, dès qu'on a pris b assez petit (ce qui n'est pas une restriction). D'où le résultat. La réciproque est évidente.

PROPOSITION 2. – *Soit* E , F *des espaces de Banach,* T : E → F *une application linéaire continue et* $\Phi \in \mathcal{Y}$.

Pour que T *soit* $\Phi - 0$ *sommante, il faut et il suffit qu'on ait la factorisation suivante* :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E} \arrow[rr, "\mathrm{T}"] \arrow[d] \arrow[dr] & & \mathrm{F} \\
\mathrm{C(K)} \arrow[d] & \mathrm{S} \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
\mathrm{L}_{\Phi}(\mathrm{K}, \nu) & &
\end{tikzcd}$$

où K *est un espace compact muni d'une probabilité de Radon* ν, *où* S *est un sous-espace vectoriel fermé de* $\mathrm{L}_{\Phi}(\mathrm{K} , \nu)$ *et où* $\mathrm{C(K)} \to \mathrm{L}_{\Phi}(\mathrm{K} , \nu)$ *et* $\mathrm{S} \to \mathrm{L}_{\Phi}(\mathrm{K} , \nu)$ *sont les injections évidentes.*

Démonstration. – a) On prend pour représentant de la classe 0 la fonction $\Psi(t) = \mathrm{I}_{]1,\infty[}(t)$. Une forme équivalente de la condition de la Proposition 1 est alors :

i) $\exists a_1 > 0 , b_1 > 0$, μ probabilité de Radon sur B tels que :

$$\int_{\mathrm{B}} \Phi \left| \frac{<x \, , \xi>}{a_1} \right| \mu(d\xi) \leqslant b_1 \Rightarrow \|\mathrm{T}x\| \leqslant 1$$

(qui en est une conséquence évidente). Supposons en effet qu'on ait i) et soit $a > 0, b > 0$; on retrouve l'inégalité de la Proposition 1 pour :

$$c = aa_1 \quad , \quad d = bb_1 \quad , \quad \alpha = \frac{1}{b_1},$$

d'où le résultat. On a démontré de plus que : (sous l'hypothèse $\Psi = 0$) :

1/ il suffit dans la proposition 1 d'avoir l'inégalité pour un $a > 0$ et un $b > 0$ assez petit ;

2/ la probabilité μ ne dépend pas de a, b.

b) *La condition est nécessaire* : on prend $\mathrm{K} = \mathrm{B}$ et $\nu = \mu$. T se factorise donc par : $x \mapsto \langle x, . \rangle \mapsto \mathrm{T}x$. Or $\langle x, . \rangle \in \mathrm{C(K)}$ et i) exprime que $\langle x, . \rangle \mapsto \mathrm{T}x$ est continue de $\mathrm{L}_\Phi(\mathrm{K}, \nu)$ dans F, d'où le résultat avec S = fermeture des $\langle x, . \rangle$ dans $\mathrm{L}_\Phi(\mathrm{K}, \nu)$.

c) *La condition est suffisante* : soit u l'application $\mathrm{E} \to \mathrm{C(K)}$ de la factorisation. On a donc : $\exists a > 0$, $b > 0$ tels que

$$\int_{\mathrm{K}} \Phi \left| \frac{ux(t)}{a} \right| \nu(dt) \leqslant b \Rightarrow \|\mathrm{T}x\| \leqslant 1.$$

Soit $r > 0$ tel que $r^{-1} \cdot {}^t u(\epsilon_t) \in \mathrm{B} \quad \forall t \in \mathrm{K}$ et soit μ l'image de ν par l'application $t \to r^{-1} \cdot {}^t u(\epsilon_t)$. Donc :

$$\int_{\mathrm{B}} \Phi \left| \frac{\langle x, \xi \rangle r}{a} \right| \mu(d\xi) \leqslant b \Rightarrow \|\mathrm{T}x\| \leqslant 1$$

c'est-à-dire i). D'où le résultat.

Remarques. – 1) On peut remplacer la factorisation de la Proposition 2 par :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr] & & \mathrm{F} \\
\mathrm{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}) \arrow[d] & \mathrm{S} \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
\mathrm{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}) & &
\end{tikzcd}$$

où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ est un espace de probabilité, où S est un s.e.v. fermé de L_Φ et où $\mathrm{L}_\infty \to \mathrm{L}_\Phi$ et $\mathrm{S} \to \mathrm{L}_\Phi$ sont les injections canoniques.

Soit K l'ensemble des caractères de l'algèbre L_∞ Muni de la topologie faible, c'est un compact. La transformation de Guelfand $f \mapsto \hat{f}$ est une isométrie et un homomorphisme d'algèbres de L_∞ dans C(K). On peut supposer Φ continue, on a alors : $[\Phi(f)]^\wedge = \Phi(\hat{f})$. L'application continue $\hat{f} \mapsto \int_\Omega f(\omega)\, P(d\omega)$ se prolonge en une probabilité de Radon ν sur K. Donc $L_\Phi(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $L_\Phi(K, \nu)$ ont même trace sur $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$. D'où le résultat.

2) (*Théorème de Dualité*).

Soient E , F des espaces de Banach, T : E → F une application linéaire continue, $\Phi, \Psi, \theta \in \mathcal{Y}$. Soit γ une probabilité de cotype Ψ sur F', telle que ${}^t T\gamma$ soit une probabilité de Radon d'ordre θ sur $\sigma(E', E)$.

On suppose que $\Phi(s)\,\theta(t) \geq \Psi(st) \quad \forall s, t \geq 0$. Alors T est $\Phi - 0$ sommante.

En effet $\|Tx\| > 1 \Rightarrow \int_R \Psi\left(\left|\frac{t}{a}\right|\right) Tx(\gamma)(dt) > b\gamma(1)$ où a et b interviennent dans la condition de cotype de γ. Posant $\mu = \frac{1}{\gamma(1)}\, {}^t T\gamma$ on trouve :

$$\text{ii)} \qquad \int_{E'} \Psi\left|\frac{<x, \xi>}{a}\right| \mu(d\xi) \leq b \Rightarrow \|Tx\| \leq 1.$$

Soit d tel que

$$\int_{E'} \theta\left\|\frac{\xi}{d}\right\| \mu(d\xi) \leq 1.$$

On pose

$$\nu(d\xi) = \theta\left\|\frac{\xi}{d}\right\| \mu(d\xi).$$

On a alors :

$$\int_{E'} \Phi\left|\frac{<x, \xi> d}{\|\xi\| a}\right| \nu(d\xi) \leq b \Rightarrow \|Tx\| \leq 1,$$

d'où le résultat.

3) On obtient un résultat analogue si $\Phi = \Psi = \theta = I_{]1,\infty[}$ mais de manière différente : en effet, on trouve de même ii). Soit alors λ tel que $\mu(\lambda B) \geqslant 1 - \frac{b}{2}$. On a alors :

$$\int_{\lambda B} \Phi \left| \frac{<x , \xi>}{a} \right| \mu(d\xi) \leqslant \frac{b}{2} \Rightarrow \|Tx\| \leqslant 1$$

d'où le résultat.

4) Soit K un espace compact. On suppose que $E = C(K)$ et que Φ est convexe. On peut alors remplacer B par K dans la proposition 1.

En effet, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ et $f_1, \ldots, f_n$ dans $C(K)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Psi\left(\left\| \frac{Tf_i}{a} \right\|\right) - b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0.$$

Il existe alors une mesure de Radon μ sur K telle que

$$|\mu|(K) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi\left(\left|\int_K \frac{|f_i(t)|}{c} \mu(dt)\right|\right) \geqslant d \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Quitte à remplacer μ par $|\mu|(K)$, on peut supposer que μ est une probabilité sur K. On a alors

$$\sum_{i=1} \lambda_i \int_K \Phi\left(\left|\frac{f_i(t)}{c}\right|\right) \mu(dt) \geqslant d \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

et il existe donc t tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi\left(\left|\frac{f_i(t)}{c}\right|\right) \geqslant d \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

On peut donc prendre pour μ une mesure de Dirac ϵ_t, d'où le résultat. On trouve de plus que S est égal à $L_\Phi^0(K_0 , \mu)$ fermeture de $L_\infty(K_0 , \mu)$ dans $L_\Phi(K_0 , \mu)$. La factorisation de la proposition 2 prend donc la forme :

$$C(K_0) \longrightarrow L_\Phi^0(K_0 , \mu) \longrightarrow F .$$

4. Le théorème fondamental.

On rappelle la notion suivante (cf. [1]) : soit E un espace de Banach. On dit que le couple (E , E′) vérifie la propriété d'approximation métrique si l'application identique de E′ est limite simple d'applications linéaires de rang fini, de norme $\leqslant 1$, continues sur $\sigma(E', E)$.

En pratique, cette condition n'est jamais mise en défaut.

PROPOSITION 3. — *Soient* E , F *des espaces de Banach ; on suppose que* (E , E′) *vérifie la propriété d'approximation métrique. Soient* $T : E \to F$ *une application linéaire continue et* $\Phi, \Psi \in \mathcal{Y}$. *On a alors* :

T *est* $\Phi - \Psi$ *sommante* $\Leftrightarrow$ T *est* $\Phi - \Psi$ *radonifiante de* E *dans* $\sigma(F'', F')$.

Démonstration. — $\Leftarrow$ est évident.

Donc, soient T une application $\Phi - \Psi$ sommante et λ une mesure de type Φ sur E. Soient $d > 0$ et $c(d) > 0$ tels que

$$\sup_{\xi \in B} \int_{\mathbf{R}} \Phi \left| \frac{t}{c(d)} \right| \xi(\lambda)\,(dt) \leqslant d\lambda(1).$$

Soit π_i ($i \in I$ ensemble filtrant) une approximation de l'identité de $E' \cdot {}^t\pi_i$ est de rang fini, donc $\lambda_i = {}^t\pi_i\,\lambda$ est une mesure de Radon sur E. De plus, on a

$$\sup_{\xi \in B} \int_{\mathbf{R}} \Phi \left| \frac{t}{c(d)} \right| \xi(\lambda_i)\,(dt) \leqslant d\lambda_i\,(1).$$

On intègre l'inégalité de la Proposition 1 pour $\lambda_i\,(dx)$. Inversant les intégrations (théorème de Fubini), on trouve alors :

$$\forall b > 0 \quad \exists a(b) > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall i \in I$$

$$\int_F \Psi \left\| \frac{y}{a(b)} \right\| T\lambda_i\,(dy) \leqslant b\,\lambda(1).$$

Les mesures $T\lambda_i$ appartiennent donc à un sous-ensemble compact de $\mathfrak{M}(\sigma(F'', F'))$ pour la topologie étroite (critère de Prokhorov).

Soit μ une valeur d'adhérence dans $\mathfrak{M}(\sigma(F'', F'))$ de la famille filtrante $(T\lambda_i)_{i \in I}$; alors μ est une mesure de Radon sur $\sigma(F'', F')$. Soit f une fonction aléatoire linéaire de loi λ. Alors, pour tout η dans F', la mesure $\eta(T\lambda_i)$ est la loi de la variable aléatoire réelle $f(\pi_i({}^tT\eta))$. Comme λ est de type Φ, on voit que $f(\pi_i({}^tT\eta))$ tend vers $f({}^tT\eta)$ dans l'espace L_Φ, donc aussi dans L_0. Donc $\eta(T\lambda_i)$ converge étroitement vers $\eta(T\lambda)$(1). On a finalement $\eta(T\lambda) = \eta(\mu)$ pour tout η dans F', d'où $T\lambda = \mu$. On a donc montré que $T\lambda$ est une mesure de Radon sur $\sigma(F'', F')$.

COROLLAIRES : (cf. [1]).

Remarques. – 1) Si $F = G'$, ou G est un espace de Banach, T est $\Phi - \Psi$ radonifiante de E dans $\sigma(F, G)$. Si de plus F est séparable (donc F est un espace polonais) T est $\Phi - \Psi$ radonifiante de E dans F.

2) Si F est réflexif, alors $\sigma(F'', F') = \sigma(F, F')$. Or le théorème de Phillips assure que toute mesure de Radon sur $\sigma(F, F')$ est une mesure de Radon sur F. Donc T est $\Phi - \Psi$ radonifiante de E dans F.

3) Si Φ est convexe, l'hypothèse que E vérifie la propriété d'approximation métrique peut être omise. En effet, soit λ une mesure cylindrique de type Φ sur E. Comme C(K) vérifie la propriété d'approximation métrique, l'image de λ par l'application

$$E \to C(K) \to L_\Phi(K, \nu)$$

de la proposition 2 est une mesure de Radon sur $\sigma(L''_\Phi, L'_\Phi)$. Il est facile de montrer que cette mesure est portée par $\sigma(S'', S')$, d'où le résultat.

4) Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue telle que : λ mesure de type Φ sur E $\Rightarrow$ $T\lambda$ mesure d'ordre Ψ sur $\sigma(F'', F')$. Alors T est $\Phi - \Psi$ radonifiante de E dans $\sigma(F'', F')$ cf [1]). En effet, si F' est séparable, T envoie $\check{L}_\Phi(\Omega, E)$ dans $L_\Psi[\Omega, \sigma(F'', F')]$ et le résultat est une conséquence du théorème du graphe fermé.

(1) On utilise ici le résultat à peu près classique suivant : la convergence en probabilité définit sur L_0 la topologie d'espace vectoriel topologique la moins fine qui rende continue l'application de L_0 dans $\mathbf{P}(R)$ (avec la topologie étroite) associant à chaque variable aléatoire sa loi. Il s'agit là de la généralisation du lemme suivant : la suite (X_n) de variables aléatoires converge en probabilité vers X si et seulement si la suite $(X_n - X)$ tend vers 0 en loi.

Sinon, on se ramène au cas séparable en se restreignant à une suite d'éléments de $\check{L}_\Phi(\Omega , E)$ dont les lois soient de support fini.

Remarques. – Le cadre où l'on s'est placé, celui des espaces d'Orlicz et des applications linéaires entre espaces de Banach, est celui qui correspond aux situations usuelles. Cependant, il est clair que les démonstrations s'adaptent à des situations plus générales. De manière plus précise :

1) La proposition 1 peut se démontrer sous les hypothèses suivantes : E est un ensemble, B un espace compact, $x \mapsto \Psi(\|T(x)\|)$ une fonction numérique sur E et $(x , \xi) \mapsto \langle x , \xi \rangle$ une fonction numérique sur E x B, mesurable par rapport à la seconde variable. La partie a) de la démonstration de la proposition 2 utilise en plus l'homogénéité de $\|Tx\|$ et de $\langle x , \xi \rangle$ par rapport à x.

2) En particulier, la proposition 1 et la partie a) de la démonstration de la proposition 2 ne supposent pas que Φ et Ψ appartiennent à Y. Par exemple, en prenant $\Phi(t) = \Psi(t) = - t^{-p}$ avec $p > 0$, on retrouve un résultat de [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Séminaire L. SCHWARTZ, Applications radonifiantes. Ecole Polytechnique, 1969-70.

[2] P. ASSOUAD, Les applications Φ-0-sommantes et Φ-0-radonifiantes. *Comptes-Rendus Acad. Sci. Paris,* séance du 20 juillet 1970, t. 271 (série A), 157 - 158.

[3] R. O'NEIL, Integraltransforms and tensor products on Orlicz spaces and $L(p , q)$ spaces. *Journ. Anal. Math.* 21 (1968), p. 4-276.

[4] M.A. KRASNOSEL'SKII et Ya.B. RUTICKII, Convex functions and Orlicz spaces. P. Nordhoff (1961).

[5] W. ORLICZ, Uber Raüme L^M. Bull. Acad. Polonaise des Sci. (1936), 93-107.

[6] W. MATUSZEWSKA, On generalized Orlicz spaces. Bull. Acad. Polonaise des Sci. 8 (1960), p. 349-353.

[7] B. MAUREY, Applications p-sommantes pour p réel quelconque, *Comptes-Rendus Acad. Sci. Paris,* séance du 1er février 1971, t. 272 (série A), p. 376-378.

Manuscrit reçu le 1er juillet 1971
accepté par J. NEVEU

P. ASSOUAD
Institut de Recherche Mathématique Avancée
rue René Descartes
67 - Strasbourg