

LOUIS NÉEL

**Influence de la subdivision en domaines élémentaires  
sur la perméabilité en haute fréquence des corps  
ferromagnétiques conducteurs**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 3 (1951), p. 301-319

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1951\\_\\_3\\_\\_301\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1951__3__301_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**INFLUENCE DE LA SUBDIVISION  
EN DOMAINES ÉLÉMENTAIRES  
SUR LA PERMÉABILITÉ EN HAUTE FRÉQUENCE  
DES CORPS FERROMAGNÉTIQUES CONDUCTEURS,**

par **Louis NÉEL** (Grenoble).

---

**Sommaire.**

Après avoir fait la critique des travaux antérieurs sur la question, l'auteur reprend la théorie de l'influence de la subdivision en domaines élémentaires sur la perméabilité en haute fréquence des corps ferromagnétiques conducteurs. Il suppose que, dans les régions superficielles, les domaines sont formés de feuillets plans parallèles, d'épaisseur  $d$ , perpendiculaires à la surface, et il donne la solution rigoureuse du problème dans le cas où les parois de Bloch sont infiniment souples et extensibles sans dépense d'énergie. Il calcule les valeurs des composantes réelle et imaginaire de la perméabilité en fonction d'une fréquence réduite  $a$ , qui dépend de  $d$ .

Dans le cas où  $d$  est très petit, l'auteur donne ensuite la théorie des phénomènes lorsqu'on fait entrer en ligne de compte la tension superficielle de paroi. Il en déduit que, lorsque  $d$  est supérieur à quelques microns, l'influence de la tension superficielle est négligeable : il est donc généralement justifié de négliger l'énergie de paroi.

**1. — INTRODUCTION**

L'expérience montre que, dans des champs très faibles et en haute fréquence, la perméabilité  $\mu$  d'un corps ferromagnétique est une grandeur complexe :

$$\mu = \mu_1 - j\mu_2, \quad (1)$$

qui présente une forte dispersion avec la fréquence. Pour un corps conducteur, tel que le fer doux, la partie réelle  $\mu_1$ , d'abord égale aux basses fréquences à la perméabilité initiale statique  $\mu_0$ , décroît sensiblement à partir de 10 Mc/sec, est réduite à  $\mu_0/5$  vers 500 Mc/sec pour tendre finalement vers l'unité. La partie imaginaire  $\mu_2$ , d'abord sensiblement nulle aux basses fréquences, croît avec la fréquence, passe par un maximum qui est de l'ordre de  $\mu_0/3$  aux environs de 500 Mc/sec et tend ensuite vers zéro.

Ce phénomène est en partie attribuable à une cause banale : l'inhomogénéité essentielle d'un corps ferromagnétique à l'échelle microscopique, due à sa subdivision en domaines élémentaires. Dans les champs faibles, les variations d'aimantation proviennent en effet principalement des déplacements des parois de séparation entre les domaines élémentaires et sont ainsi localisées dans une fraction du volume total qui est de l'ordre du centième ou du millième. Ces déplacements sont donc accompagnés de micro-courants induits qui tendent à les freiner. Mais ces micro-courants ne suffisent pas à expliquer entièrement la dispersion de la perméabilité, car on sait que les ferromagnétiques isolants, tels que les ferrites, présentent aussi de la dispersion. Il existe donc des forces d'inertie et de quasi-frottement, d'origine plutôt atomique, qui s'opposent au déplacement des parois. C'est en somme une manifestation du fait que les moments atomiques ne peuvent pas suivre instantanément les variations du champ magnétique appliqué. L'étude de ces phénomènes de relaxation présente un très grand intérêt théorique, mais nous n'avons pas l'intention d'en parler davantage ici et nous renvoyons à ce sujet le lecteur à une excellente étude de C. Kittel présentée au Colloque International de Ferromagnétisme et d'Antiferromagnétisme de Grenoble, en 1950 [1].

Il serait donc très souhaitable d'avoir des renseignements précis sur l'effet des micro-courants induits afin de déterminer ce qui, dans les variations de  $\mu$ , revient à la dynamique propre des parois. Le rôle de ces micro-courants a été signalé pour la première fois par R. Becker [2] qui a calculé l'amortissement produit par des parois planes circulaires, normales à l'aimantation spontanée, se déplaçant à l'intérieur du corps. Les objections que l'on peut faire à cette théorie ne tiennent pas tant à la forme des domaines élémentaires envisagés, peu en accord avec ce que l'on sait aujourd'hui de leur forme et positions relatives, qu'au fait suivant : l'interprétation des mesures de perméabilité en haute fréquence est basée sur la théorie de l'effet

de peau. Il paraît donc indispensable de faire la théorie de l'effet de peau d'une substance non homogène, composée de domaines élémentaires, et ne pas se borner à l'étude de micro-courants créés à l'intérieur d'une substance massive par des variations idéales d'aimantation ne correspondant à aucune expérience possible. C. Kittel [3] a étudié cet effet de peau lorsque les domaines superficiels, de profondeur  $h$ , sont disposés comme l'indique la figure 1. Il suppose essentiellement que les parois de séparation  $aa'$ ,  $bb'$ , ... de ces domaines sont rigides, indéformables et se déplacent en bloc parallèlement à elles-mêmes, sur toute la profondeur  $h$ , au cours des variations d'aimantation. Cette hypothèse n'est guère soutenable et nous montrerons au contraire plus loin (§ 12) qu'il est plus correct de supposer les parois *infinitement souples*.

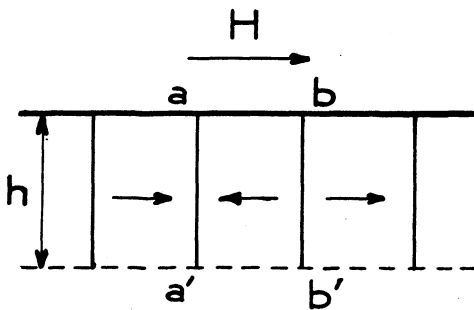


FIG. 1.

Nous reprendrons donc la théorie en supposant avoir affaire à des domaines élémentaires formés de feuillets plans, d'épaisseur  $d$ , empilés les uns sur les autres comme les pages d'un livre et aimantés alternativement en sens inverses. Les phénomènes dépendent de l'orientation du plan des feuillets par rapport à la surface du corps : il convient de distinguer deux positions principales, la première où le plan des feuillets est perpendiculaire à la surface et la seconde où les feuillets sont parallèles à la surface. Nous nous limiterons dans le présent mémoire à l'étude de la première position.

## 2. — Position du problème.

Soit trois axes rectangulaires  $Oxyz$  :  $Oxz$  la surface du corps,  $Oyz$  parallèle au plan des parois des domaines. Les traces des parois sur le plan  $Oxy$  sont représentées en  $aa'$ ,  $bb'$ , ... sur la figure 2. Les domaines d'ordre impair, I, III, ... sont aimantés suivant la direction positive de  $Oz$ , les domaines d'ordre pair, II, IV, ... en sens inverse. Le système est soumis à un champ extérieur  $H_e$ , parallèle à  $Oz$  :

$$H_e = H_0 e^{j\omega t} \quad (2)$$

de fréquence circulaire  $\omega$  suffisante pour que l'épaisseur de la couche de peau soit petite à côté de l'épaisseur de l'échantillon étudié et de la hauteur des domaines, comptée parallèlement à  $Oy$ .

Nous négligerons l'inertie des parois et les forces liées à la relaxation des moments atomiques. Nous supposons pour le

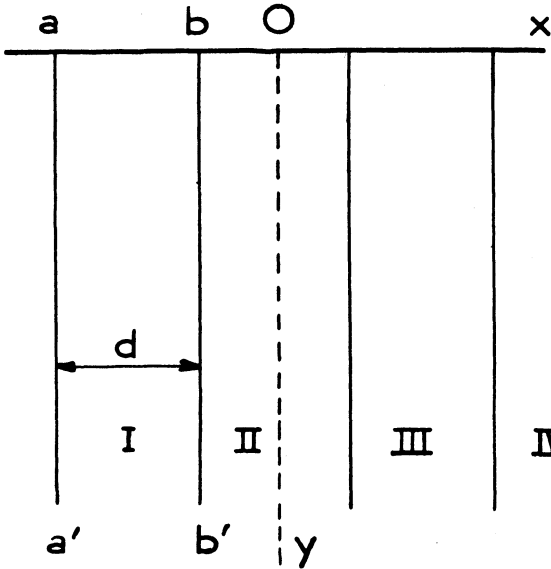


FIG. 2.

moment les parois infiniment souples et nous admettons que les seules pressions qui déterminent leur mouvement sont, d'une part, la pression magnétique  $2HJ_s$ , où  $J_s$  est l'aimantation spontanée et  $H$  la composante du champ magnétique suivant  $Oz$ , et, d'autre part, une pression de rappel à la position d'équilibre. En désignant par  $\chi_0$  la susceptibilité initiale statique de la substance suivant  $Oz$ , tout se

passé au cours d'une variation lente d'aimantation comme si les parois possédaient une susceptibilité superficielle égale à  $\chi_0 d$ , le reste de la substance ayant une susceptibilité nulle, c'est-à-dire une perméabilité égale à l'unité.

En particulier, lorsqu'on se borne à l'action des champs très faibles, pour lesquels les déplacements des parois sont petits vis-à-vis de la distance  $d$  qui sépare deux parois voisines, on peut sans erreur sensible supposer *fixes* les parois, tout en leur attribuant une susceptibilité superficielle égale à  $\chi_0 d$  par centimètre carré.

### 3. — Équations du problème et conditions aux limites.

Il s'agit d'un problème cylindrique. En désignant par  $\rho$  la résistivité, par  $i_x$  et  $i_y$  les composantes de la densité de courant, par  $H_z$

le champ magnétique, parallèle à Oz, les équations de Maxwell, en unités électromagnétiques c. g. s. se réduisent à

$$\begin{aligned} 4\pi i_x &= -\frac{\partial H_t}{\partial y}, \\ 4\pi i_y &= \frac{\partial H_t}{\partial x}, \\ \rho \left( \frac{\partial i_x}{\partial y} - \frac{\partial i_y}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial H_t}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3)$$

puisque la perméabilité est égale à l'unité. Nous cherchons une solution de la forme

$$H_t = H e^{j\omega t}, \quad (4)$$

qui, substituée dans le système (3) d'équations, montre que H est une fonction de  $x$  et de  $y$  indépendante du temps satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{4\pi j\omega}{\rho} H. \quad (5)$$

Il s'agit de trouver une solution périodique  $H(x+d, y) = H(x, y)$ , égale à  $H_0$  pour  $y=0$ , nulle pour  $y$  infini et satisfaisant sur les parois, situées par exemple à  $x = \frac{1}{2}d$  et  $x = -\frac{1}{2}d$ , à une condition aux limites que nous allons déterminer.

Soit une paroi P (*fig. 3*) soumise à un champ variable  $H_t$ , perpendiculaire au plan de la figure et dirigé positivement d'avant en arrière. Le flux correspondant à 1 centimètre de paroi est égal à  $4\pi\chi_0 d H_t$ , de sorte qu'un petit élément de circuit  $abcd$ , de section  $\delta s$ , est soumis par centimètre à une force électromotrice  $-4\pi\chi_0 d \frac{\partial H_t}{\partial t}$  donnant naissance à un courant d'intensité

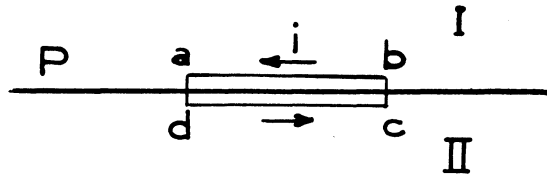


FIG. 3.

$$i = \frac{\delta s}{2\rho} \cdot 4\pi\chi_0 d \frac{\partial H_t}{\partial t}, \quad (6)$$

dirigé positivement dans le sens des flèches. Si  $i_{i_1}$  et  $i_{i_2}$  sont les composantes tangentielles de la densité de courant, de part et d'autre de P, on devra donc écrire :

$$i_{i_1} - i_{i_2} = \frac{4\pi\gamma_0 d \partial H_t}{\rho} \quad (7)$$

Dans le cas qui nous intéresse, compte tenu des équations (3) et (4) et du fait que par symétrie  $i_y(x) = -i_y(-x)$ , cette condition (7) s'écrit, pour  $x = \frac{1}{2}d$  :

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{4\pi\gamma_0 j \omega d}{\rho} H. \quad (8)$$

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous poserons d'une part

$$a = \frac{4\pi^2 \gamma_0 d^2 \omega}{\rho}, \quad (9)$$

et d'autre part

$$r^2 = ja. \quad (10)$$

La quantité  $a$  est un nombre réel proportionnel à la fréquence ;  $r^2$  est une quantité imaginaire pure.

#### 4. — Solution du problème.

Nous cherchons une solution de la forme

$$H = H_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos p_n x e^{-q_n y}, \quad (11)$$

où chaque terme de la somme doit satisfaire aux équations (5) et (8), ce qui donne, d'une part la relation

$$q_n^2 - p_n^2 = \frac{P^2}{\pi\gamma_0 d^2}, \quad (12)$$

qui définit  $q_n$  en fonction de  $p_n$  et, d'autre part, la relation

$$p_n \sin \frac{p_n d}{2} = \frac{2r^2}{d} \cos \frac{p_n d}{2}. \quad (13)$$

Si nous désignons par  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  les racines successives de l'équation transcendante complexe

$$\varphi \operatorname{tg} \varphi = r^2, \quad (14)$$

les  $p_n$  sont alors donnés par

$$p_n = \frac{2\varphi_n}{d}. \quad (15)$$

Il reste à exprimer que  $H$  est égal à  $H_0$  pour  $y=0$ . Il faut pour cela que la série de Fourier  $\sum c_n \cos p_n x$  soit égale à 1 dans l'intervalle  $0 < x < \frac{1}{2}d$ . Nous admettrons que les fonctions  $\cos p_n x$  forment un système orthogonal et complet : on sait qu'il en est ainsi lorsque  $r^2$  est réel. On peut d'ailleurs vérifier l'orthogonalité. On a en effet :

$$\begin{aligned} Q_{nm} &= \int_0^{\frac{d}{2}} \cos p_m x \cos p_n x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{d}{2}} [\cos (p_n + p_m)x + \cos (p_n - p_m)x] dx, \quad (16) \end{aligned}$$

d'où

$$2Q_{nm} = \frac{p_n \sin \frac{p_n d}{2} \cos \frac{p_m d}{2} - p_m \sin \frac{p_m d}{2} \cos \frac{p_n d}{2}}{p_n^2 - p_m^2} \quad (17)$$

Mais, comme  $p_n$  et  $p_m$  vérifient l'équation (13), il en résulte que  $Q_{nm}$  est nul lorsque  $n$  est différent de  $m$ . Quand  $n$  est égal à  $m$ ,

$$Q_{nn} = \int_0^{\frac{d}{2}} \cos^2 p_n x dx = \frac{4}{d} + \frac{\sin p_n d}{4p_n}, \quad (18)$$

on a d'où compte tenu des équations (13) et (16) :

$$Q_{nm} = \frac{d}{4} \left( 1 + \frac{\sin 2\varphi_n}{2\varphi_n} \right) = \frac{d}{4} \left( 1 + \frac{\sin^2 \varphi_n}{r^2} \right) \quad (19)$$

Les coefficients  $c_n$  du développement en série de Fourier d'une fonction  $Y \equiv \sum c_n \cos p_n x$  s'obtiennent alors de la manière habituelle



en multipliant les deux membres de cette identité par  $\cos p_n x$  et en intégrant entre 0 et  $\frac{1}{2}d$ . Pour  $Y=1$ , on obtient ainsi

$$c_n = \frac{2 \sin \varphi_n}{\varphi_n \left( 1 + \frac{\sin^2 \varphi_n}{r^2} \right)}. \quad (20)$$

La fonction  $H$  est donc maintenant entièrement définie.

### 5. — Calcul du flux.

Du point de vue physique, la grandeur qui nous intéresse particulièrement est le flux magnétique  $\Phi$  qui traverse la substance, rapporté à l'unité de longueur d'une section droite, normale au champ extérieur. Ce flux est composé de deux termes  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  correspondant le premier au flux du champ  $H$  à l'intérieur des domaines élémentaires et le second à l'aimantation provenant de la susceptibilité superficielle attribuée aux parois.

Le premier résulte d'une double intégration de  $H$  par rapport à  $x$  et à  $y$  ce qui donne :

$$\Phi_1 = \frac{2H_0}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{\infty} c_n \cos p_n x e^{-q_n y} dx dy, \quad (21)$$

soit

$$\Phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_0 c_n \sin \varphi_n}{q_n \varphi_n} \quad (22)$$

Quant au flux de paroi, il s'écrit

$$\Phi_2 = 4\pi\chi_0 d \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_0}{d} \int_0^{\frac{d}{2}} c_n \cos \frac{p_n d}{2} e^{-q_n y} dy, \quad (23)$$

ou encore

$$\Phi_2 = 4\pi H_0 \chi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \cos \varphi_n}{q_n}. \quad (24)$$

Au total, on obtient :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\pi H_0 \chi_0 d^2}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n q_n \sin \varphi_n}{\varphi_n} \quad (25)$$

En simplifiant cette expression, compte tenu des équations (12), (13), (14), et (15), on aboutit finalement à

$$\Phi = \frac{2\pi\chi_0 d H_0 A}{r} \quad (26)$$

après avoir posé

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2r^3 \left(1 + \frac{r^2}{4\pi\chi_0 \varphi_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\varphi_n (\varphi_n^2 + r^2 + r^4)} \quad (27)$$

Le problème est ainsi ramené à la détermination des racines de l'équation transcendante (14) où  $r^2$  est un nombre imaginaire pur.

#### 6. — Calcul de la perméabilité complexe.

Le calcul classique de l'effet de peau, pour un corps ferromagnétique homogène, donne l'expression du flux superficiel  $\Phi$ , en fonction de la perméabilité  $\mu$  et de l'amplitude  $H_0$  du champ alternatif appliqué. On trouve ainsi

$$\Phi = \left(\frac{\rho\mu}{4\pi j\omega}\right)^{\frac{1}{2}} H_0, \quad (28)$$

ou encore, en utilisant les notations définies par les relations (9) et (10):

$$\Phi = (4\pi\chi_0\mu)^{\frac{1}{2}} \frac{H_0 d}{2r}. \quad (29)$$

Si nous comparons maintenant les équations (26) et (29), nous constatons que, macroscopiquement, tout se passe, pour une substance à domaines superficiels, comme si nous avions affaire à une substance homogène de perméabilité complexe  $\mu$  donnée par :

$$\mu = \mu_1 - j\mu_2 = 4\pi\chi_0 A^2. \quad (30)$$

C'est naturellement cette perméabilité que donne l'application de la théorie classique de l'effet de peau à l'interprétation des données expérimentales.

### 7. — Calcul de $\mu_L$ et de $\mu_R$ .

Certains auteurs utilisent une autre méthode pour interpréter leurs expériences. En ce qui concerne la partie du flux qui est en phase avec le champ, c'est-à-dire sa partie réelle, on peut aussi la considérer comme celle d'une substance possédant une perméabilité fictive *réelle*  $\mu_L$ . De même, la partie du flux magnétique qui est en quadrature avec le champ, c'est-à-dire sa partie imaginaire, peut être considérée comme appartenant à une substance possédant une perméabilité fictive  $\mu_R$ , toujours réelle mais différant de la valeur précédente.

Comme  $r$  est égal au produit d'une quantité réelle par  $(1 - j)$ ,  $\mu_L$  et  $\mu_R$  sont définis dans ces conditions par :

$$\sqrt{\mu_L} - j\sqrt{\mu_R} = (1 - j)A\sqrt{4\pi\chi_0}, \quad (31)$$

et en comparant cette équation à l'équation (30), on en déduit les relations suivantes

$$\mu_1 = \sqrt{\mu_R\mu_L}; \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(\mu_R - \mu_L). \quad (32)$$

### 8. — Calcul de $A$ aux basses fréquences ( $a \ll 1$ ).

On peut alors développer en série les racines de l'équation (14) suivant les puissances croissantes de  $r$ . On trouve ainsi pour la première racine

$$\varphi_1 = r - \frac{r^3}{6} + \frac{r^5}{72} + \dots, \quad (33)$$

et pour les suivantes :

$$\varphi_{n+1} = n\pi + \frac{r^2}{n\pi} - \frac{r^4}{n^3\pi^3} + \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

En introduisant les valeurs de ces racines dans l'équation (27) qui définit  $A$ , en développant à nouveau en série suivant les puissances croissances de  $r$ , on trouve finalement

$$A = (1 - 0,167 r^2 + 0,078 r^3 + \dots) \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi\chi_0}}. \quad (35)$$

On peut vérifier sur cette expression, jointe à la relation (30), que  $\mu$  tend vers  $\mu_0 = 1 + 4\pi\chi_0$  quand  $r$  tend vers zéro.

9. — Calcul de A aux moyennes fréquences ( $a < 10$ ).

Dans ce cas, nous avons calculé séparément les trois premiers termes de la somme A, correspondant aux trois premières racines, calculées exactement, de l'équation (14) et nous avons remplacé la somme des termes suivants par une intégrale en admettant comme

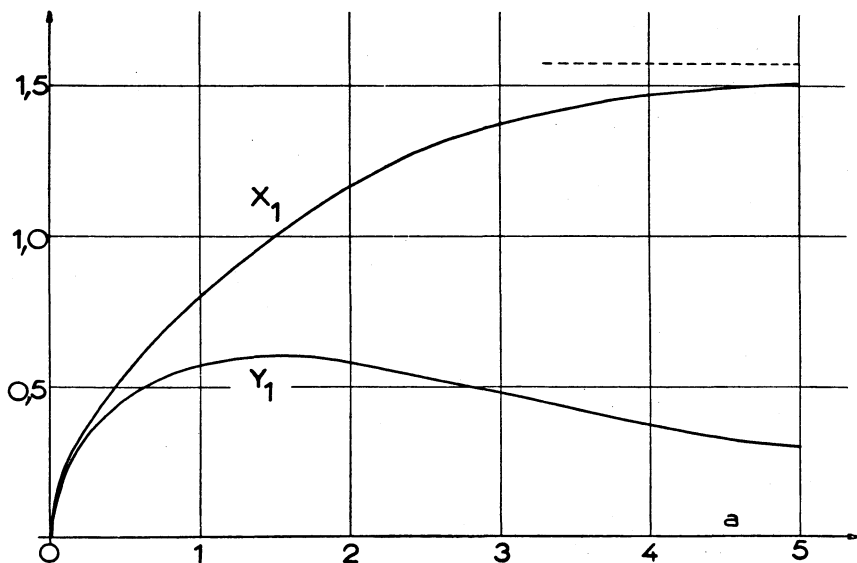


FIG. 4. — Valeurs de la composante réelle  $x_1$  et de la composante imaginaire  $y_1$  de la première racine de l'équation transcendante (14), en fonction de  $a$ .

expression des racines correspondantes le développement (34) limité à ses deux premiers termes. Tous ces calculs sont très fastidieux.

Les figures 4 et 5 donnent la partie réelle  $x_n$  et la partie imaginaire  $y_n$  des racines  $\varphi_n$ , pour  $n = 1, 2$  et  $3$ , en fonction du paramètre  $a$  défini par l'équation (9). Nous avons également indiqué sur la figure 5 les valeurs asymptotiques de  $x_n$  et  $y_n$  quand  $n$  tend vers l'infini. Toutes ces valeurs ont été calculées par approximations successives, à partir des tables de Kennelly des fonctions hyperboliques complexes.

Notons enfin ici que lorsque  $a$  est grand devant  $n\pi$  l'expression

asymptotique de la racine  $\varphi_{n+1}$  s'écrit

$$\varphi_{n+1} = u - \frac{u}{1+r^2} + \frac{r^2 u^3}{3(1+r^2)^4} \quad \text{avec} \quad u = \frac{\pi}{2} \pm n\pi \quad (36)$$

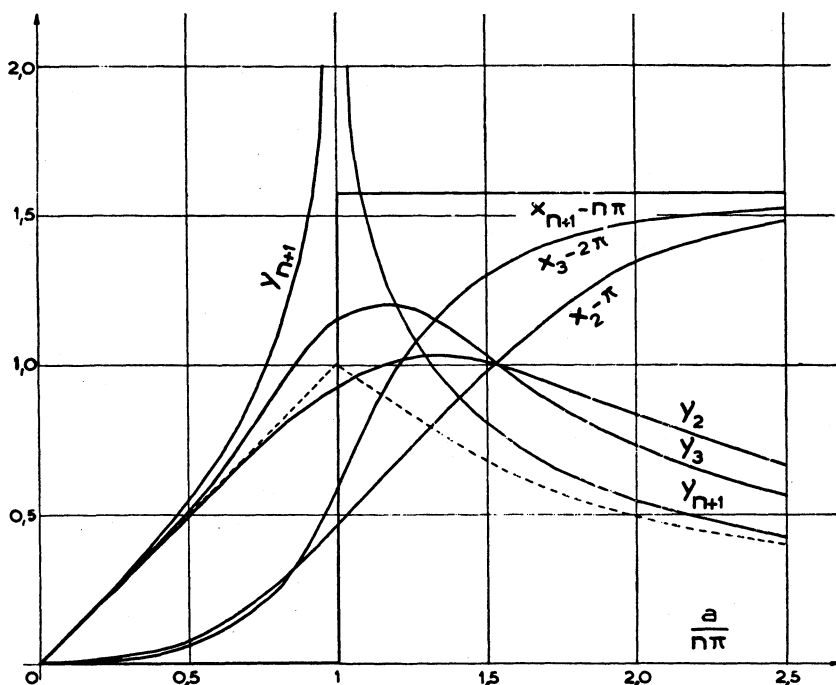


FIG. 5. — Valeurs de la composante réelle et de la composante imaginaire des deuxième, troisième et  $(n+1)^{\text{ème}}$  racine de l'équation transcendante (14), pour  $n$  très grand, en fonction de  $a/\pi$ .

à la condition que  $n$  soit au moins égal à 2. En effet, l'expression asymptotique de la première racine, pour  $a \gg 1$ , est donnée par :

$$\varphi_1 = \frac{\pi r^3}{2(1+r^2)} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{12(1+r^2)^2} + \dots \right] \quad (37)$$

#### 10. — Calcul de A aux très hautes fréquences ( $a \gg 10$ ).

Une méthode possible consiste à remplacer la somme A par deux intégrales prises avec  $n$  comme variable, la première correspondant à l'intervalle  $\frac{1}{2} < n < \frac{a}{\pi}$ , la seconde à l'intervalle  $\frac{a}{\pi} < n < \infty$ .

Pour la première intégrale, on adopte comme valeur approchée

des racines  $\varphi_{n+1} = \frac{\pi}{2} + n\pi \left(1 + \frac{j}{a}\right)$  dans la seconde, on prend  $\varphi_{n+1} = n\pi + \frac{ja}{n\pi}$  et on néglige  $1/a$  devant l'unité.

Nous avons ainsi obtenu

$$A = \frac{1}{\pi r} \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi\chi_0} \{ \text{Log}(4,90 a^2) + 3,95 j \}}, \quad (38)$$

mais il n'est pas possible de garantir la valeur de cette approximation et de préciser la valeur de  $a$  à partir de laquelle elle est acceptable : en effet, lorsque  $n$  est grand, la figure 5 montre que les racines  $\varphi_n$  sont très mal représentées, dans le voisinage de  $a = n\pi$ , par les formules asymptotiques données plus haut.

### 11. — Résultats du calcul.

La figure 6 résume les résultats du calcul effectué en supposant  $\mu_0$  grand devant l'unité, égal au moins à 50, pour fixer les idées, et

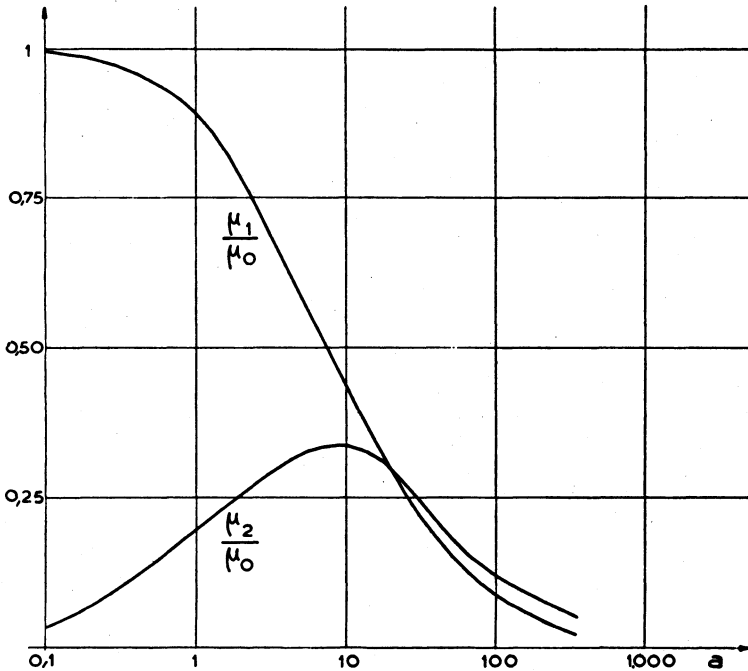


FIG. 6. — Valeurs des composantes réelle et imaginaire de la perméabilité apparente complexe, en fonction du paramètre  $a$  défini par la relation (9).

en utilisant les méthodes décrites dans les trois paragraphes précédents. Nous avons représenté  $\mu_1/\mu_0$  et  $\mu_2/\mu_0$  en fonction de  $a$ .

En ce qui concerne le calcul de  $\mu_1$ , le raccord entre les éléments de courbe calculés d'après les différentes méthodes s'effectue d'une manière satisfaisante. Il n'en est pas de même pour le calcul de  $\mu_2$  : l'approximation du paragraphe 10 semble en effet assez peu convergente. Nous avons donc jugé nécessaire de préciser les valeurs de  $\mu_2$ , lorsque  $a$  est compris entre 10 et 50, en utilisant les valeurs de  $\mu_1$  qui paraissent plus précises, au moyen des formules de Kramers-Kronig [4] qui relient les composantes de susceptibilité magnétique complexe  $\chi = \chi_1 - j\chi_2$  et qui paraissent applicables ici. On doit avoir en particulier

$$\chi_2(\omega) = -\frac{2''}{\pi} \int_0^\infty \frac{\chi_1(\omega') - \chi_1(\infty)}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (39)$$

## 12. — Influence de la tension superficielle des parois.

Dans les calculs précédents, nous avons complètement négligé la tension superficielle des parois. Or, comme l'amplitude des oscillations de la paroi diminue avec la profondeur, la paroi ne reste pas plane, elle se déforme et sa surface augmente. Pour apprécier l'erreur ainsi commise, nous supposerons que la structure des domaines superficiels est la même que celle qui a été décrite au commencement du paragraphe 2, mais en supposant désormais que l'épaisseur  $d$  des domaines élémentaires est assez petite pour que le champ magnétique  $H_t$ , parallèle à  $Oz$ , qui règne à l'intérieur du corps ferromagnétique, soit pratiquement indépendant de  $x$ , et pour que les équations de propagation du champ électromagnétique se ramènent à la forme

$$\frac{\partial^2 H_t}{\partial y^2} = \frac{4\pi}{\rho} \frac{\partial B_t}{\partial t}, \quad (40)$$

où  $B_t$  désigne une induction moyenne, indépendante de  $x$ .

En l'absence de champ, les parois prennent une position d'équilibre, parallèle au plan  $Oyz$ . Sous l'action d'un champ  $H_t$ , variable avec  $t$ , elles s'écartent de leur position d'équilibre d'une quantité  $X_t$ , qui dépend de  $t$  et de  $y$ . A grande profondeur  $X_t = 0$ . La variation du moment magnétique, liée au déplacement d'une paroi unique,

entre les ordonnées  $y$  et  $y + dy$ , est égale à  $2J_s X_t dy$ , de sorte que l'induction moyenne  $B_t$ , à la profondeur  $y$ , s'écrit :

$$B_t = H_t + \frac{8\pi J_s X_t}{d} \quad (41)$$

Étudions maintenant les conditions d'équilibre d'un élément de paroi de hauteur  $dy$ . Il est soumis aux forces suivantes :

a) une force magnétique, parallèle en première approximation à  $Ox$  et égale à  $2H_t J_s dy$  ;

b) une force de rappel  $-kX_t dy$  qui tend à ramener la paroi dans sa position d'équilibre en l'absence de champ. Cette force est parallèle à  $Ox$  et on en obtient l'intensité en écrivant que la susceptibilité du système, dans un champ statique, est égale à la susceptibilité initiale statique. On obtient de cette manière

$$k = \frac{4J_s^2}{d\chi_0} ; \quad (42)$$

c) les forces de tension superficielle de paroi. Elles sont égales à  $\gamma$ , tangentes à la section de la paroi par le plan  $Oxy$  et appliquées aux deux extrémités de l'élément  $dy$ . Leurs projections suivant  $Ox$  sont respectivement égales à  $-\gamma \frac{\partial X_t}{\partial y}$  et à  $\gamma \left( \frac{\partial X_t}{\partial y} + \frac{\partial^2 X_t}{\partial y^2} dy \right)$ .

Finalement l'équation d'équilibre de l'élément de paroi considéré s'écrit :

$$2H_t J_s = \frac{4J_s^2}{d\chi_0} X_t - \gamma \frac{\partial^2 X_t}{\partial y^2} \quad (43)$$

Il s'agit donc finalement de résoudre le système des équations (40), (41) et (43), donnant la solution générale du problème posé. Si nous supposons que le champ extérieur  $H_e$  est donné par l'équation (2), nous avons à trouver une solution de la forme :

$$B_t = B e^{j\omega t} ; \quad H_t = H e^{j\omega t} ; \quad X_t = X e^{j\omega t} \quad (44)$$

où  $B$ ,  $H$  et  $X$  sont des fonctions indépendantes de  $t$  qui satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{4\pi j\omega}{\rho} B \quad (45)$$

et aux équations (41) et (43) dans lesquelles on fait abstraction de l'indice  $t$ . En éliminant  $B$  et  $H$  de ces équations, on trouve finale-



ment que  $X$  est solution de l'équation différentielle du quatrième ordre suivante

$$\frac{\partial^4 X}{\partial y^4} - S \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + P = 0 \quad (46)$$

où les quantités  $S$  et  $P$  sont définies comme il suit.

$$S = \frac{4J_s^2}{\gamma d \lambda_0} + \frac{4\pi j \omega}{\rho},$$

$$P = \frac{64\pi^2 J_s^2 j \omega}{\gamma \rho d} \left( \frac{1}{4\pi \lambda_0} + 1 \right).$$

La solution est de la forme :

$$X = C' e^{-m'y} + C'' e^{-m''y} \quad (48)$$

où  $m'$  et  $m''$  sont les deux racines à partie réelle positive de l'équation caractéristique :

$$m^4 - S m^2 + P = 0. \quad (49)$$

On détermine les deux coefficients  $C'$  et  $C''$  d'après les conditions aux limites.

On constate d'abord que les parois doivent toujours aboutir normalement à la surface du corps, comme le montre la figure 7 en (a). En effet, si cette condition n'était pas réalisée et si, par exemple, la paroi occupait la position (b), la composante tangente à la surface de la force  $\vec{\gamma}$  de tension superficielle, appliquée à l'extrémité

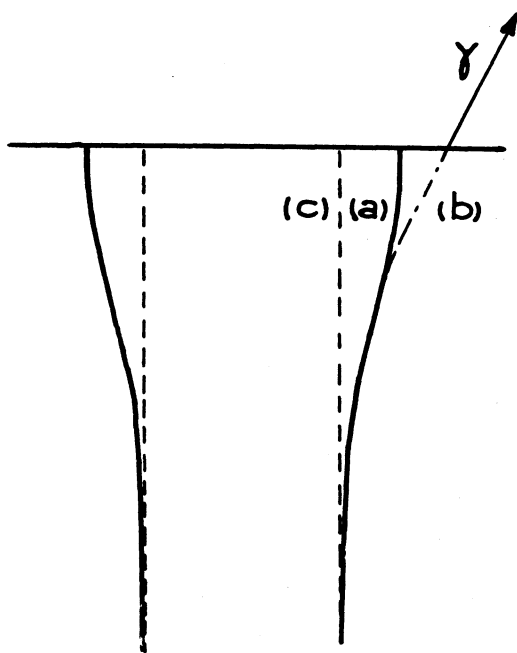


FIG. 7.

de la paroi, ne pourrait pas être équilibrée. Il faut donc écrire qu'à la surface, pour  $y = 0$ , la dérivée  $\frac{\partial X}{\partial y}$  est nulle ce qui donne

$$m' C' + m'' C'' = 0. \quad (50)$$

Il faut également exprimer que, pour  $y = 0$ , le champ magnétique  $H$ , donné en fonction de  $X$  par l'équation (43), est égal au champ extérieur appliqué  $H_0$ . On obtient ainsi une deuxième relation entre  $C'$  et  $C''$  :

$$2H_0J_s = \frac{4J_s^2}{\chi_0 d} (C' + C'') - \gamma(C'm'^2 + C''m''^2). \quad (51)$$

### 13. — Calcul du flux magnétique.

Du point de vue physique, la quantité importante est le flux magnétique  $\Phi$  qui traverse le corps, rapporté à une section droite de 1 cm, c'est-à-dire

$$\Phi = \int_0^\infty B dy. \quad (52)$$

On peut tirer  $B$  de l'équation (45) et intégrer : on obtient ainsi

$$\Phi = -\frac{\gamma \rho}{8\pi J_s j \omega} (C'm'^3 + C''m''^3). \quad (53)$$

En éliminant  $C'$  et  $C''$  des trois équations (50), (51) et (53) ; en remplaçant  $m'^2 + m''^2$  et  $m'^2 m''^2$  par leurs valeurs  $S$  et  $P$ , déduites des relations entre les racines de l'équation (49), on trouve finalement

$$\Phi^2 = \frac{\rho^2 \mu_0 H_0^2}{4\pi j \omega} A', \quad (54)$$

en posant 
$$A' = \frac{1 + \frac{j a'}{\mu_0} + 2\sqrt{j a'}}{(1 + \sqrt{j a'})^2}, \quad (55)$$

et 
$$a' = \frac{\gamma d \mu_0^2 \omega}{4\rho J_s^2}. \quad (56)$$

Tout se passe ainsi comme si la perméabilité initiale statique  $\mu_0 = 1 + 4\pi\chi_0$  était multiplié par  $A'$  : la perméabilité apparente  $\mu$  est donc égale à  $\mu_0 A'$ . Le coefficient  $A'$  ne dépend que du seul paramètre  $a'$ , proportionnel à la fréquence. Le tableau suivant donne la valeur de la partie réelle  $Re(A')$  et de la partie imaginaire  $Im(A')$  de  $A'$ , pour quelques valeurs de  $a'$ .

TABLEAU

$a'$	0,1	0,3	1,0	3	10	30	100	300	1000
$Re(A')$	0,98	0,92	0,78	0,60	0,40	0,24	0,14	0,08	0,04
$Im(A')$	0,19	0,20	0,36	0,35	0,27	0,19	0,12	0,07	0,04

## 14. — Discussion.

Nous sommes donc en possession de deux théories, l'une relative à des domaines de grande épaisseur  $d$ , où on néglige l'énergie  $\gamma$  de paroi et où le flux est donné par l'expression (26), l'autre relative à des domaines de faible épaisseur, où le flux est donné par l'expression (54).

Dans les deux cas, l'allure de la variation de la composante réelle de la perméabilité, en fonction de  $\log a$  ou de  $\log a'$ , sont assez voisines et se déduisent en gros l'une de l'autre par une simple translation, parallèle à l'axe des fréquences, telle que  $a = 1,35 a'$ . Ainsi, les deux théories donnent à peu près les mêmes valeurs de  $\nu_1$  en fonction de  $\omega$ , lorsque  $a$  est égal à  $1,35 a'$ , c'est-à-dire, en admettant que  $\gamma$  soit égal à  $1,4$  ergs/cm<sup>2</sup>,  $\nu_0$  à 100 et  $J_s$  à 1700, lorsque l'épaisseur  $d$  des domaines est égale à  $5,2 \cdot 10^{-6}$  cm. Cette valeur, très petite, est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur des parois de Bloch : l'épaisseur des domaines est toujours nettement plus grande, une dizaine de fois au moins, pour fixer les idées. *Il est donc légitime de négliger en première approximation l'énergie de paroi, quitte à évaluer ensuite l'erreur ainsi commise.*

A titre d'exemple, supposons que la diminution apparente avec la fréquence de la perméabilité du fer doux recuit, utilisé par R. Millership et F. V. Webster dans leurs expériences [5], provienne exclusivement de la subdivision en domaines élémentaires. La partie réelle de la perméabilité étant alors divisée par 2 à 340 Mc/sec, correspondant à une valeur de  $a$  égale à 7,2, on trouve que l'épaisseur des domaines doit avoir la très raisonnable valeur de  $d = 3,3 \cdot 10^{-4}$  cm (on a pris les valeurs numériques indiquées plus haut et  $\rho = 10^4$  u. é. m.).

En adoptant cette valeur de  $d$ , on trouve  $a' = 0,085$ . En se reportant au tableau précédent, on constate que les corrections à apporter aux valeurs de  $\nu_1$ , calculées d'après la formule (26), pour tenir compte de l'énergie de paroi, sont inférieures à 2"/<sub>0</sub>, dans la région où la perméabilité a déjà diminué de moitié, par suite de l'existence même des domaines. Il est donc légitime de supposer infiniment souples les parois de Bloch.

Il serait intéressant d'éprouver la validité de la formule (26) avec du fer doux traité de manière à contenir de grands domaines élémen-

taires, d'épaisseur supérieure à 10 microns par exemple. Il est à peu près certain que dans ce cas la diminution de la perméabilité apparente proviendrait exclusivement de la subdivision en domaines élémentaires et serait justiciable de la théorie proposée ici.

Je remercie M. Pauthenet de l'aide qu'il m'a apportée dans l'exécution des figures de ce mémoire.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. KITTEL, *J. de Phys.*, 1951, **12**, 291.
- [2] R. BECKER, *Phys. Z.*, 1938, **39**, 856; *Ann. Phys. Lpz.*, 1939, **36**, 340.
- [3] C. KITTEL, *Phys. Rev.*, 1946, **70**, 281.
- [4] R. DE KRONIG, *Z. techn. Phys.*, 1938, **19**, 509; *Phys. Z.*, 1938, **39**, 823.
- [5] R. MILLERSHIP et F. V. WEBSTER, *Proc. Phys. Soc.*, B, 1950, **63**, 783.

(Laboratoire d'Électrostatique et de Physique du Métal, Grenoble.)

(Manuscrit reçu le 5 mars 1952.)

---