ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAKHLOUF DERRIDJ

Sur un théorème de traces

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 2 (1972), p. 73-83
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_2_73_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 2 (1972), 73-83.

SUR UN THÉORÈME DE TRACES

par Maklouf DERRIDJ

1. Introduction.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ à frontière régulière. Soit $\{X_1, \ldots, X_r\}$ un système de champs de vecteurs à coefficients réels et de classe C^∞ dans un voisinage Ω' de $\overline{\Omega}$. Nous supposons que le $\{X_1, \ldots, X_r\}$ vérifie l'hypothèse de L. Hörmander [1] dans ce voisinage Ω'.

« L'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_r$ est de rang maximal dans Ω'. »

On suppose que la frontière Γ de Ω est une variété de dimension $(n-1)$ et de classe C^∞. Nous considérons l'espace $M(\Omega)$ défini par :

$$M(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) | u \in L^2(\Omega);\ X_j u \in L^2(\Omega);\ j = 1, \ldots, r\}.$$

On se pose le problème suivant : les fonctions de $M(\Omega)$ admettent-elles des traces sur Γ? Ce problème a été suggéré par l'inégalité de L. Hörmander, qui se généralise, sans modification notable, à L^p, c'est-à-dire que nous avons le :

THÉORÈME 0. — *Soit* $1 < p < +\infty$. *Pour tout compact* K *de* Ω' *il existe une constante* $C = C(K, p)$ *et un nombre* $\varepsilon = \varepsilon(K)$ *positif, indépendant de* p *tels que*

$$\|u\|_{W^{\varepsilon,p}} \leqslant C\Big(\|u\|_{L^p} + \sum_{j=1}^{r} \|X_j u\|_{L^p}\Big) \quad u \in C_0^\infty(K). \quad (1.1)$$

En particulier, il existe $\varepsilon = \varepsilon(\Omega) > 0$ *tel que* (ε *indépendant de* p)

$$\|u\|_{W^{\varepsilon,p}} \leqslant C\Big(\|u\|_{L^p} + \sum_{j=1}^{r} \|X_j u\|_{L^p}\Big) \quad u \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.2)$$

($W^{\varepsilon,p}$ est l'espace de Sobolev ε dans L^p).

Du théorème nous déduisons facilement la chose suivante : soit p tel que $\varepsilon > \frac{1}{p}$ (ce qu'on peut faire puisque ε est indépendant de p) ; de (1.2), nous tirons facilement :

$$\mathcal{M}_p(\Omega) \subset W_0^{\varepsilon, p}(P) \qquad (1.3)$$

où $\mathcal{M}_p(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $M_p(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) ; X_j u \in L^p(\Omega) ; j = 1, \dots, r\}$ muni de sa norme naturelle, et $W_0^{\varepsilon, p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $W^{\varepsilon, p}(\Omega)$. Nous savons que les fonctions de $W_0^{\varepsilon, p}(\Omega)$ admettent des traces nulles sur Γ ; il s'en suit que les fonctions de $\mathcal{M}_p(\Omega)$ admettent des traces nulles sur Γ.

Ce fait nous a amené à nous poser le problème soulevé précédemment. Nous pouvons aussi nous poser la question suivante, qui si elle admet une réponse positive, répond à la question précédente :

Le système $\{X_1, \dots, X_r\}$ est-il presque partout transversal à Γ, sous la condition de l'hypothèse de Hörmander dans Ω'? Sa réponse sera positive. Ceci nous permettra de définir des traces commes fonctions mesurables. Nous pourrons, quand même préciser les traces dans le cas de $\mathbf{R}^2$.

Un résumé de ce travail a été donné dans [2].

2. Transversalité à la frontière.

Dans cette partie, nous montrons que si la condition de L. Hörmander est vérifiée dans Ω', alors le système $\{X_1, \dots, X_r\}$ est presque partout transversal à Γ.

Définition. — *Soit* $x \in \Gamma$. *Nous dirons que le système de champs de vecteurs* $\{X_1, \dots, X_r\}$ *est transversal à* Γ *en* x, *si parmi tous les vecteurs* $X_1(x), \dots. X_r(x)$, *il en existe au moins un qui soit transversal à* Γ.

Théorème 1. — *Soit* $\{X_1, \dots, X_r\}$ *un système de champs de vecteurs vérifiant la condition de Hörmander dans un voisinage* Ω' *de* $\overline{\Omega}$. *Désignons par* E *l'ensemble des points* x *appartenant à* Γ *tels que tous les vecteurs* $X_1(x), \dots, X_r(x)$ *soient tangents à* Γ. *Alors* E *est un ensemble fermé de mesure nulle dans* Γ.

Lemme 1. — *Soient deux champs de vecteurs* X *et* Y *à coefficients réels et de classe* C^1 *dans* $\mathbf{R}^n$. *Soit* F *l'ensemble des points* $x \in \Gamma$ *tels que*

i) *les vecteurs* $X(x)$ *et* $Y(x)$ *sont tangents à* Γ *en* X.

ii) *le vecteur* $[X, Y](x)$ *est transversal à* Γ *en* X, *alors* F *est de mesure nulle dans* Γ.

Remarque. — Les ensembles négligeables étant invariants et la transversalité étant conservée par difféomorphisme, nous pouvons nous restreindre à travailler dans $\mathbf{R}^n_+$, en prenant pour Γ l'hyperplan $\{y = 0\}$, tout point de $\mathbf{R}^n_+$, étant noté (x, y), $x \in \mathrm{R}^{n-1}$, $y \in \mathbf{R}_+$.

Comme Ω est un ouvert borné, nous pouvons supposer que ce sont les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_r$ et leurs crochets d'ordre au plus k ($k \in \mathbf{N}$) qui engendrent $\mathbf{R}^n$. Donc il nous suffit de démontrer le théorème 1 et le lemme 1 dans ces conditions.

Démonstration du lemme 1 (cas $\mathbf{R}^n_+$).

Écrivons l'expression des champs de vecteurs X et Y

$$\begin{cases} X = a \dfrac{\partial}{\partial y} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \\ Y = b \dfrac{\partial}{\partial y} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \end{cases}$$

a, b, a_i, b_i, sont des fonctions réelles de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^n$. Nous allons chercher une condition équivalente aux conditions (i) et (ii) portant sur les fonctions a, b, a_i, b_i. Il est immédiat que la condition (i) est équivalente à $a(x, 0) = 0$, $b(b, 0) = 0$.

Pour traduire la condition (ii) nous calculons le coefficient de l'opérateur normal $\dfrac{\partial}{\partial y}$ dans l'expression du champ $[X, Y]$.

Un calcul élémentaire donne ce coefficient égal à :

$$a \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial a}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial b}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \frac{\partial a}{\partial x_i}$$

Dire que $[X, Y]$ $(x, 0)$ est transversal à Γ est équivalent à

$$a \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial a}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial b}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \neq 0, \quad \text{en} \quad (x, 0).$$

Finalement nous avons l'équivalence :

$$x \in \mathrm{F} \Longleftrightarrow \begin{cases} a(x, 0) = 0 \\ b(x, 0) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_i \dfrac{\partial b}{\partial x_i} - b_i \dfrac{\partial a}{\partial x_i} \right) (x, 0) \neq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

soit x fixé dans F. La troisième condition contenue dans (1.1) nous montre que :

$$\left\{ \text{il existe un indice } j \text{ ou un indice } k \text{ tel que } \frac{\partial a}{\partial x_j}(x, 0) \neq 0 \right.$$

$$\text{ou} \qquad \left. \frac{\partial b}{\partial x_k}(x, 0) \neq 0 \right\}. \tag{2.2}$$

Il est immédiat que F est un ensemble mesurable. Nous allons montrer que (2.1) entraîne que F est contenu dans un ensemble de mesure nulle. Pour cela introduisons les ensembles suivants :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{J}_i &= \left\{ x \in \Gamma \,|\, a(x, 0) = 0;\ \frac{\partial a}{\partial x_i}(x, 0) \neq 0 \right\} \\ \mathrm{K}_i &= \left\{ x \in \Gamma \,|\, b(x, 0) = 0;\ \frac{\partial b}{\partial x_i}(x, 0) \neq 0 \right\} \end{aligned}\right\} \quad i = 1, \ldots, n-1$$

alors (2.1) entraîne l'inclusion

$$\mathrm{F} \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{J}_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{K}_i \right). \tag{2.3}$$

Les ensembles J_i et K_i sont mesurables. Montrons qu'ils sont de mesure nulle. Montrons-le pour J_1 par exemple.

Lemme 2. — *L'ensemble* J_1 *des points* $(x, 0) \in \mathbf{R}^{n-1}$ *tels que* $a(x, 0) = 0$ *et* $\dfrac{\partial a}{\partial x_1}(x, 0) \neq 0$ *a une mesure nulle dans* $\mathbf{R}^{n-1}$.

Démonstration. — Pour tout $(n-2)$-uple $(x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ fixé, associons l'ensemble

$$\mathrm{J}_1(x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0) = \{x_1 \in \mathbf{R} \,|\, x = (x_1, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0) \in \mathrm{J}_1\}$$

$J_1(x_0^2, \ldots, x_{n-1}^0)$ n'est autre qu'une section de J_1. Notre but est de montrer que pour tout $(n-2)$-uple $(x_2^0, \ldots, X_{n-1}^0)$, l'ensemble $J_1(x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ qui est un sous-ensemble mesurable de R est de mesure nulle, ce qui donnera le résultat cherché.

Définissons la fonction d'une variable $\tilde{a}(x_1)$ par

$$\tilde{a}(x_1) = a(x_1, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0, 0);$$

il est immédiat que

$$J_1(x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0) = \{x_1 \in \mathbf{R} | \tilde{a}(x_1) = 0; \tilde{a}'(x_1) \neq 0\} \quad (2.4)$$

manifestement $J_1(x_0^2, \ldots, x_{n-1}^0)$ est de mesure nulle (il est dénombrable).

Démonstration du théorème.

a) Cas où les crochets d'ordre $\leqslant 2$ *engendrent* $\mathbf{R}^n$.

Si I est un multi-indice $I = (i_1, \ldots, i_k)$ avec $i_j \in \{1, \ldots, r\}$ nous notons X_I le champ de vecteurs

$$[X_{i_1}, [\ldots [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \ldots],$$

et $|I| = k =$ longueur du crochet $=$ nombre de champs X_{ij} figurant dans le crochet X_I.

Plaçons-nous donc maintenant dans le cas où les crochets X_I avec $|I| \leqslant 2$, engendrent en tout point x un espace vectoriel de dimension n. Soit x_0 un point de E. Si nous désignons par $E_{i,j}$ l'ensemble des points tels que

α) les vecteurs $X_i(x)$ et $X_j(x)$ sont tangents à Γ en x;

β) le vecteur $[X_i, x_j](x)$ est transversal à Γ en x, alors, il existe un couple (i, j) tel que $x_0 \in E_{i,j}$. En effet si ce n'était pas le cas tous les vecteurs $X_i(x)$ et $[X_i, X_j](x)$ seraient tangents à Γ en x_0, donc n'engendreraient pas en x_0 un espace vectoriel de dimension n, ce qui est contraire à l'hypothèse du cas *a*).

Donc nous avons

$$E \subset \bigcup_{i,j=1}^{r} E_{i,j}. \quad (2.5)$$

Les ensembles $E_{i,j}$ étant de mesure nulle d'après le lemme 1, il s'en suit que E est un ensemble fermé de mesure nulle.

b) *Cas général.*

Nous savons qu'il existe un entier k tel que les champs X_I avec $|I| \leqslant k$ engendrent en tout point un espace vectoriel de dimension n. Divisons E en les ensembles suivants :

$E_1 = \{x \in E|$ il existe I avec $|I| = 1$ tel que $X_I(x)$ soit transversal à Γ en $x\}$

$\vdots$

$E_j = \{x \in E| X_I(x)$ tangent à Γ pour tout I tel que $|I| \leqslant j - 1$ et il existe I_0 tel que $|I_0| = j$ et $X_{I_0}(x)$ transversal à $\Gamma\}$.

$\vdots$

$E_k = \{x \in E| X_I(x)$ tangent à Γ pour tout I tel que $|I| \leqslant k - 1$ et il existe I_0 tel que $|I_0| = k$ et $X_{I_0}(x)$ transversal à $\Gamma\}$.

Il est immédiat que nous avons

$$E = \bigcup_1^k E_j. \tag{2.6}$$

Il nous suffit alors de montrer que E_j, $j = 1, \ldots, k$, est de mesure nulle. Pour tout multi-indice I tel que $|I| \leqslant j - 1$, les vecteurs $X_I(x)$ sont tangents à Γ en X pour $x \in E_j$. Il y a un nombre fini de tels champs de vecteurs : renumérotons-les et appelons-les $Y_1, \ldots, Y_p$, $p \in \mathbf{N}$. Comme les crochets d'ordre j des champs $X_1, \ldots, X_r$, sont les crochets d'ordre inférieur ou égal à un des champs $Y_1, \ldots, Y_p$, nous voyons d'après la définition de E_j, qu'en tout point x de E_j, un crochet d'ordre 1 des champs $Y_1, \ldots, Y_p$ est transversal à Γ. Nous sommes ainsi ramenés au cas *a*). Donc E_j est de mesure nulle dans Γ.

3. Existence de traces.

Le théorème 1 nous donne le

THÉORÈME 2. — *Supposons les hypothèses du théorème* 1 *vérifiées. Alors les fonctions de*

$$\mathbf{M}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)| X_j u \in L^2(\Omega) j = 1, \ldots, r\}$$

admettent des traces sur $\partial\Omega = \Gamma$, *qui sont des fonctions mesurables dans* Γ.

Démonstration. — La démonstration est simple. Donnons-la très succintement, le raisonnement que nous donnerons, se retrouvant dans de nombreux ouvrages.

Par utilisation de cartes locales, on peut considérer que Γ est un compact de $\mathbf{R}^{n-1}$, par exemple la boule unité de $\mathbf{R}^{n-1}$. Soit $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut. Il existe un ensemble Γ_ε fermé, donc compact, dans Γ tel que $m(\Gamma - \Gamma_\varepsilon) < \varepsilon$ et tel que le système $\{X_1, \ldots, X_2)$ soit transversal à Γ_ε en tout point de Γ_ε. Par difféomorphisme, on se ramène alors au cas où

$$\begin{cases} u \in L^2(\mathbf{R}^n_+) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\mathbf{R}^n_+). \end{cases}$$

De telles fonctions admettant des traces sur $\mathbf{R}^{n-1}$, [4], qui sont dans $L^2(\mathbf{R}^{n-1})$, on obtient en revenant à notre situation que les fonctions de $M(\Omega)$ admettent sur Γ_ε des traces qui sont dans $L^2(\Gamma_\varepsilon)$. Comme ε est aussi petit que l'on veut, on obtient le résultat.

Remarque. — Cette notion de traces prolonge celle de traces des fonctions appartenant à des espaces de Sobolev. Nous savons que dans ces cas les traces appartiennent à des espaces bien précis définis sur Γ. Nous verrons que dans le cas $\mathbf{R}^2$, nous pouvons préciser l'espace dans lequel se trouvent les traces; pour cela nous étudierons dans ce cas, plus en détail les champs de vecteurs X_j.

4. Cas de l'espace de dimension 2.

Nous commençons par remarquer que dans ce cas, il découle de la démonstration du lemme 1, que l'ensemble des points de Γ où $\{X_1, \ldots, X_r\}$ n'est pas transversal à Γ est fini. Notons

$$X_j = a_j \frac{\partial}{\partial y} + b_j \frac{\partial}{\partial x}$$

Nous avons le

LEMME. — *Le coefficient de* $\frac{\partial}{\partial y}$ *dans l'expression de tout crochet* X_I *avec* $|I| \leqslant p$ *est de la forme :*

$$A_I = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{r} \alpha_{i,j}(x, y) \frac{\partial^i a_j}{\partial x_i}(x, y). \tag{4.1}$$

Démonstration.

a) si $p = 0$, les champs X_I sont les champs X_i et (4.1) est immédiate

b) supposons (4.1) vraie pour $(p - 1)$ montrons-le pour p. Tout crochet X_I avec $|I| = p$ s'obtient en faisant le crochet d'un X_j, $j = 1, \ldots, r$, et d'un champ X_J avec $|J| = p - 1$. Si

$$X_j = a_j \frac{\partial}{\partial y} + b_j \frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_J = a_J \frac{\partial}{\partial y} + b_J \frac{\partial}{\partial x}$$

le coefficient de $\frac{\partial}{\partial y}$ dans le développement du champ $X_I = [X_j, X_j]$ est égal à

$$A_I = A_J \frac{\partial a_j}{\partial y} - a_j \frac{\partial A_J}{dy} + B_J \frac{\partial a_j}{dx} - b_j \frac{\partial A_J}{\partial x}$$

d'après l'hypothèse de récurrence nous avons

$$A_J = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{r} \beta_{i,k}(x, y) \frac{\partial^i a_k}{\partial x_i}(x, y)$$

d'où nous obtenons :

$$A_I = \left(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{r} \beta_{i,k}(x, y) \frac{\partial^i a_k}{\partial x_i}(x, y)\right) \frac{\partial a_j}{\partial y} - a_j \frac{\partial A_J}{\partial y} + B_J \frac{\partial a_j}{\partial x} - b_j \frac{\partial A_J}{\partial x}$$

ce qui donne bien, en remplaçant A_J et $\frac{\partial A_J}{\partial x}$ par leurs expressions, que A_I s'écrit bien sous la forme annoncée.

Corollaire. — *Il existe un entier* $n \leqslant k$ *et un indice* $j \in \{1, \ldots, r\}$ *tels que* $\dfrac{\partial^n a_j}{\partial x}(0, 0) \neq 0$.

Démonstration. — D'après la condition de Hörmander, il existe un champ X_I, avec $|I| \leqslant k$, transversal à Γ, ce qui veut dire $A_I(0, 0) \neq 0$. Remplaçant A_I par son expression donnée dans le lemme, on obtient le corollaire.

Étude des traces. — Nous allons montrer que les traces des fonctions u telles que :

$$\begin{cases} u \in L^2(\mathbf{R}^2_+) \\ X_j u \in L^2(\mathbf{R}^2_+) ; \ j = 1, \ldots, r \end{cases} \tag{4.2}$$

qui ont été jusqu'ici définies comme fonctions mesurables, peuvent être mieux précisées. Travaillons au voisinage de l'origine.

Nous savons que nous pouvons supposer qu'un des champs de vecteurs est le champ $\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot$ Par suite à l'origine la courbe Γ, que nous pouvons supposer d'équation $\varphi(x, y) = 0$, est tangente à l'axe des x.

Considérons donc le champ

$$X_j = a_j \frac{\partial}{\partial y} + b_j \frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{tel que} \qquad \frac{\partial^n a_j}{\partial x^n}(0, 0) \neq 0$$

pour un certain n.

Comme $\dfrac{\partial u}{\partial x} \in L^2$, on obtient

$$\begin{cases} a_j \dfrac{\partial u}{\partial y} \in L^2 \\ u \in L^2 \\ \dfrac{\partial^n a_j}{\partial x^n}(0, 0) \neq 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Considérons maintenant le changement de variables

$$(x, y) \to (x, \varphi).$$

C'est un difféomorphisme, puisque $\varphi'_y(0, 0) \neq 0$.

Dans ce changement de variables, u se transforme en une fonction v telle que

$$\begin{cases} \alpha_j \dfrac{\partial v}{\partial y} \in L^2 \\ v \in L^2 \end{cases}$$

avec $\dfrac{\partial^n \alpha_j}{\partial x^n}(0, 0) \neq 0$.

A ce stade, il est aisé de voir que la trace $v(x, 0)$ de v sur $\varphi = 0$ vérifie

$$\underline{\underline{x^n v(x, 0) \in L^2(\Gamma).}}$$

Remarque. — *a*) un cas particulier a été étudié par Baouendi et Grisvard [3]. Dans ce cas particulier ils obtiennent un résultat précis. Il nous semble difficile ici de trouver un résultat précis, puisque il est difficile de tenir compte de tous les champs de vecteurs qui entrent en jeu, et d'exprimer avec précision dans les calculs l'hypothèse de L. Hörmander.

5. Application.

Considérons l'opérateur $P = \Sigma X_j^2 + c$, où les champs X_j vérifient l'hypothèse de Hörmander dans un ouvert Ω' voisinage du compact $\overline{\Omega}$, où Ω est un ouvert à frontière Γ régulière. Alors, moyennant une hypothèse naturelle sur la fonction c on peut résoudre le problème de Dirichlet.

$$\begin{aligned} Pu &= f \\ u/\Gamma &= g \end{aligned}$$

où f, g sont des fonctions convenables données sur Ω et Γ.

En effet, il suffit de remarquer que, moyennant cette hypothèse naturelle sur c, P est un isomorphisme entre $\mathcal{M}(\Omega)$ et son dual, où $\mathcal{M}(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $M(\Omega)$.

Remarque. — Soit Γ_0 l'ouvert de Γ, tel que le système $\{X_1, \ldots, X_r\}$ soit transversal à Γ_0; on sait que la mesure de Lebesgue de $(\Gamma - \Gamma_0)$ est nulle. D'après [2], si f est dans $C^\infty(\overline{\Omega})$ et $g \in C^\infty(\Gamma)$, alors la solution u est dans $C^\infty(\Omega \cup \Gamma_0)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math*, Uppsala 1967.
[2] M. Derridj, Un problème aux limites pour une classe d'opérateurs du second ordre hypoelliptiques, *Ann. Inst. Fourier* (1971), XXI, 4.
[3] M. S. Baouendi et P. Grisvard, Sur une équation d'évolution changeant de type, *Journal of Funtionnal Analysis*, 1968.
[4] J. L. Lions, Séminaire de Mathématiques supérieures, Montréal, 1966.

Manuscrit reçu le 12 mai 1971.

Maklouf Derridj,
Université de Paris-Sud,
Centre d'Orsay,
Mathématiques,
Bâtiment 425,
91-Orsay.