ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SALAH BAOUENDI

CHARLES GOULAOUIC

Approximation polynomiale de fonctions C^∞ et analytiques

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 4 (1971), p. 149-173

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_4_149_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21, 4 (1971), 149-173.

APPROXIMATION POLYNOMIALE DE FONCTIONS C^∞ ET ANALYTIQUES

par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

Sur certains sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$, on caractérise les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et analytiques, ainsi que des classes du type Gevrey, par leurs distances aux polynômes dans L^p.

L'approximation des fonctions par des polynômes sur un intervalle de la droite réelle a été abondamment étudiée par Bernstein et d'autres auteurs (cf. [4] [10] [12] [13] [14] et leurs bibliographies). Récemment, des caractérisations des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et analytiques, par leur distance aux polynômes, ont été obtenues, dans le cas d'une boule fermée, par l'étude d'opérateurs dégénérés, dans [1] et [2]. La caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, a été obtenue plus généralement dans [13], sur l'adhérence d'un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ à bord lipschitzien.

Afin de rendre la lecture de cet article aussi aisée que possible, nous commençons dans les paragraphes I et II par redémontrer des résultats bien connus de Bernstein dans le cas du segment et du pavé de $\mathbf{R}^n$, par une technique reposant sur des opérateurs différentiels dégénérés.

La première partie du paragraphe III est consacrée à démontrer que toute fonction C^∞ ou analytique sur un compact de $\mathbf{R}^n$ est à « bonne » distance des polynômes. La réciproque est démontrée dans la deuxième partie de ce paragraphe, moyennant des hypothèses supplémentaires sur le compact. L'originalité de ces résultats réside essentiellement dans le cas analytique.

Dans le paragraphe IV, nous introduisons des classes de fonctions intermédiaires entre les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et analytiques, voisines des classes de Gevrey. Ces espaces sont caractérisés par leur distance aux polynômes et ont des propriétés d'interpolation. Ils ont été introduits, sur une variété analytique dans [2] (voir aussi [3]).

Nous remercions MM. J. M. Bony, L. Boutet de Monvel et M. Zerner pour les discussions fructueuses que nous avons eues avec eux.

Le plan est le suivant :

0. Notations.

Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E et f un vecteur de E. On appelle distance de f à F le nombre réel

$$d_{\mathrm{E}}(f, \mathrm{F}) = \inf_{g \in \mathrm{F}} \|f - g\|_{\mathrm{E}}.$$

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ et $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ [1] $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, on note

$$d_p(f, \mathfrak{L}_k) = d_{p,\Omega}(f, \mathfrak{L}_k) = d_{\mathrm{L}^p(\Omega)}(f, \mathfrak{L}_k)$$

où $\mathfrak{L}_k$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^p(\Omega)$ constitué par les polynômes de degré $\leqslant k$.

[1] $\mathrm{L}^p(\Omega)$ désigne l'espace de Lebesgue usuel sur Ω.

On désigne par $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ (respectivement $\mathcal{A}(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ (respectivement analytiques) dans Ω.

Si K est un compact de $\mathbf{R}^n$ on désigne par $\mathcal{C}^\infty(K)$ (respectivement $\mathcal{A}(K)$) l'espace des restrictions à K de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ (respectivement analytiques) définies au voisinage de K.

Enfin, si m est un entier $\geqslant 0$ on désigne par $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolef d'ordre m formé des fonctions u telles que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| \leqslant m$.

1. Le cas d'un intervalle.

1. *Résultats dans* L^2.

Soit I l'intervalle $]-1, +1[$. Notons $\mathcal{L}$ l'opérateur de Legendre sur I.

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}$$

et

$$\mathcal{A} = \mathcal{L} + 1.$$

Nous pouvons montrer aisément, que $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $D(\mathcal{A})$ sur $L^2(I)$, où $D(\mathcal{A})$ désigne l'espace des fonctions u de $H^1(I)$ et telles que $(1-x^2)u \in H^2(I)$. Nous avons aussi :

$$D(\mathcal{A}^k) \subset H^k(I) \quad \text{pour } k \text{ entier positif}$$

et

$$\bigcap_{k\in\mathbf{N}} D(\mathcal{A}^k) = \mathcal{C}^\infty(\bar{I}).$$

Notons enfin P_n le n-ième polynôme de Legendre, vérifiant

$$\mathcal{L}P_n = n(n+1)P_n \quad \text{et} \quad \|P_n\|_{L^2(I)} = 1.$$

Il résulte alors facilement de ce qui précède (cf. [1]) :

Proposition 1. — *Soit f une fonction de* $L^2(I)$; *on a l'équivalence des deux propriétés suivantes :*

i) $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{I})$.

ii) *La suite* $k \longmapsto d_2(f, \mathcal{L}_k)$ *est dans l'espace* $\mathcal{S}$ *des* *suites à décroissance rapide* (*i.e. pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *la suite* $k \longmapsto k^n d_2(f, \mathcal{L}_k)$ *est bornée*).

Donnons maintenant une caractérisation semblable pour les fonctions analytiques sur $\bar{\mathrm{I}}$.

PROPOSITION 2. — *Soit* $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{I})$; *on a l'équivalence des deux propriétés suivantes :*

i) $f \in \mathcal{A}(\bar{\mathrm{I}})$.

ii) *Il existe deux constantes* $\mathrm{L} > 0$ *et* $a \in]0, 1[$ *telles que l'on ait pour tout* $k \in \mathbf{N}$,

$$d_2(f, \mathcal{L}_k) \leqslant \mathrm{L}a^k.$$

Démonstration. — Nous commençons d'abord par vérifier que la condition i) est équivalente à la condition iii) suivante :

iii) Il existe une constante L_1 telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\|\mathcal{L}^k f\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{I})} \leqslant \mathrm{L}_1^{k+1}\,(2k)\,!$$

La démonstration de l'équivalence de i) et iii) se trouve, dans un cadre plus général dans [2]. Nous pouvons en donner dans ce cas, une démonstration plus directe.

Nous considérons, pour cela, la sphère unité S de $\mathbf{R}^3$. Les fonctions définies sur S, invariantes par rotation autour d'un diamètre sont en bijection, par projection sur ce diamètre, avec les fonctions définies sur l'intervalle $[-1, +1]$. Le laplacien sur S devient, par cette projection, l'opérateur de Legendre $\mathcal{L}$. L'équivalence de i) et iii) résulte, alors, d'un théorème sur les itérés d'un opérateur elliptique sur une variété analytique compacte sans bord (cf. [8] et aussi [9]), en remarquant que les fonctions analytiques sur la sphère, invariantes par rotation, donnent, par projection, des fonctions analytiques sur $[-1, +1]$.

Montrons maintenant l'équivalence de ii) et iii). Développons, pour cela, la fonction f sur les polynômes de Legendre :

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \mathrm{P}_j.$$

Nous avons

$$d_2(f, \mathcal{L}_k) = \Big(\sum_{j>k} |f_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

La condition ii) s'exprime donc de la manière suivante : il existe deux constantes $L_2 > 0$ et $b \in]0, 1[$ telles que l'on ait pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$(1) \qquad |f_j| \leqslant L_2 b^j.$$

La condition iii) s'écrit en fonction des coefficients de Fourier de f :

$$(2) \qquad \begin{cases} \text{il existe } t > 0 \text{ tel que l'on ait} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|f_j|^2(j(j+1))^{2k} t^{2k}}{(2k\,!)^2} < +\infty. \end{cases}$$

Pour démontrer que (1) est équivalente à (2), il suffit de remarquer que pour tout $t > 0$, il existe des constantes strictement positives t_1, t_2 (tendant vers 0 quand t tend vers 0), M_1 et M_2 telles que l'on ait pour tout $\lambda \geqslant 0$,

$$M_1 \exp(t_1\sqrt{\lambda}) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}\lambda^{2k}}{(2k\,!)^2} \leqslant M_2 \exp(t_2\sqrt{\lambda}).$$

2. *Résultats dans* L^p.

Pour passer du cas $p = 2$ à p quelconque, nous avons besoin de certaines inégalités sur les polynômes, du type « inégalités de Markov ». Nous avons :

LEMME 1. — *Pour tout* p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *il existe deux constantes* C *et* α *telles que l'on ait pour tout polynôme* Q *de degré* n :

$$\|Q'\|_{L^p(I)} \leqslant Cn^\alpha \|Q\|_{L^p(I)}.$$

Démonstration.

1^{er} *cas* $p = 2$.

Commençons par montrer que l'on a, pour tout polynôme Q de degré n,

$$(3) \qquad \|\mathfrak{L}Q\|_{L^2(I)} \leqslant (n(n+1))\|Q\|_{L^2(I)}.$$

Nous avons, en effet, pour tout polynôme de Legendre P_i

$$\mathfrak{L}P_i = i(i+1)P_i.$$

Nous écrivons

$$Q = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i.$$

Nous avons

$$\|\mathcal{L}Q\|^2_{L^2(I)} = \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2(i(i+1))^2$$

ou encore

$$\|\mathcal{L}Q\|_{L^2(I)} \leqslant n(n+1)\left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = n(n+1)\|Q\|_{L^2(I)}.$$

Le lemme résulte, alors, dans le cas $p = 2$, de l'inégalité (3) et de l'injection continue de $D(\mathcal{A})$ dans $H^1(I)$. Nous avons ici $\alpha = 2$.

2e *cas* $p = \infty$.

Nous utilisons le théorème de Sobolef sous la forme

$$\|u'\|_{L^\infty(I)} \leqslant C_1(\|u''\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(I)}\|u\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)})$$

pour $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{I})$.

En appliquant la partie 1° (cas $p = 2$) pour majorer $\|Q''\|_{L^2(I)}$, nous en déduisons :

$$(4) \qquad \|Q'\|_{L^\infty(I)} \leqslant C_2 n^3\|Q\|_{L^2(I)}.$$

Comme on a

$$\|Q\|_{L^2(I)} \leqslant \sqrt{2}\|Q\|_{L^\infty(I)},$$

nous obtenons à partir de (4)

$$(5) \qquad \|Q'\|_{L^\infty(I)} \leqslant C_4 n^3\|Q\|_{L^\infty(I)}.$$

3e *cas* p *quelconque.*

Il suffit de démontrer une inégalité de la forme

$$(6) \qquad \|Q'\|_{L^\infty(I)} \leqslant C_5 n^{\alpha_1}\|Q\|_{L^1(I)}.$$

Pour cela, nous allons partir de l'inégalité (5) et trouver une majoration de $\|Q\|_{L^\infty(I)}$ par $\|Q\|_{L^1(I)}$.

Nous utilisons l'inégalité suivante, immédiate pour $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{I})$:

$$(7) \qquad \|u\|_{L^\infty(I)} \leqslant \sqrt{2}\|u'\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(I)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(I)} + \frac{1}{2}\|u\|_{L^1(I)}.$$

Compte tenu de (5), il vient alors :

$$\|Q\|_{L^\infty(I)} \leqslant \sqrt{2}\, C_4^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}}\|Q\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(I)}\|Q\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(I)} + \frac{1}{2}\|Q\|_{L^1(I)},$$

ou encore

$$(8) \qquad \|Q\|_{L^\infty(I)} \leqslant C_6 n^3 \|Q\|_{L^1(I)}.$$

Des inégalités (5) et (8), résulte immédiatement l'inégalité (6) avec $\alpha_1 = 6$.

Remarque 1. — On n'a pas cherché, dans la démonstration de ce lemme 1, les meilleures constantes C et α. L'inégalité de Markov classique (que nous n'avons pas utilisée)

$$\|Q'\|_{L^\infty(I)} \leqslant n^2 \|Q\|_{L^\infty}$$

est évidemment plus précise que notre inégalité (5). Ce lemme est suffisant pour la suite; nous avons préféré en donner une démonstration assez simple et complète. (Pour des constantes plus précises voir [14], [7].)

Nous avons maintenant l'analogue des propositions 2 et 3 dans le cas L^p.

PROPOSITION 3. — *Soit f une fonction de* $L^p(I)$, $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{I})$.

ii) *La suite* $k \longmapsto d_p(f, \mathcal{L}_k)$ *est dans* $\mathcal{S}$.

PROPOSITION 4. — *Soit f une fonction de* $L^p(I)$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $f \in \mathcal{A}(\bar{I})$.

ii) *Il existe deux constantes* $L > 0$ *et* $a \in]0, 1[$ *telles que l'on ait, pour tout* $k \in \mathbf{N}$,

$$d_p(f, \mathcal{L}_k) \leqslant L a^k.$$

Démonstration. — Nous démontrons simultanément les propositions 3 et 4.

1° i) *implique* ii).

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{I})$ et $P \in \mathcal{L}_k$ tel que

$$\|f - P\|_{L^2(I)} = d_2(f, \mathcal{L}_k).$$

En développant f sur les polynômes de Legendre nous voyons que nous avons

$$\|\mathcal{L}f - \mathcal{L}P\|_{L^2(I)} = d_2(\mathcal{L}f, \mathcal{L}_k).$$

L'injection de $D(\mathcal{A})$ dans $H^1(I)$ et le théorème de Sobolef montrent que l'on a

$$\|f - P\|_{L^\infty(I)} \leqslant C(\|\mathcal{L}f - \mathcal{L}P\|_{L^2(I)} + \|f - P\|_{L^2(I)})$$

où C est indépendante de f et P.

Il s'en suit l'inégalité suivante :

$$(9) \qquad d_\infty(f, \mathcal{P}_k) \leqslant C(d_2(\mathcal{L}f, \mathcal{P}_k) + d_2(f, \mathcal{P}_k)).$$

Nous avons d'autre part

$$(10) \qquad d_p(f, \mathcal{P}_k) \leqslant 2^{\frac{1}{p}} d_\infty(f, \mathcal{P}_k).$$

Des inégalités (9) et (10), et en utilisant les propositions 1 et 2, il résulte immédiatement que i) implique ii).

2° ii) *implique* i).

Soit $f \in L^p(I)$ et vérifiant la condition ii) de la proposition 3 (respectivement la proposition 4). Soit $Q_k \in \mathcal{P}_k$ tel que

$$\|f - Q_k\|_{L^p(I)} = d_p(f, \mathcal{P}_k).$$

Nous avons alors

$$(11) \qquad f = Q_0 + \sum_{i=0}^{\infty} (Q_{i+1} - Q_i)$$

la série convergeant dans $L^p(I)$.

Utilisons, maintenant, le lemme 1. Nous obtenons

$$\|Q'_{i+1} - Q'_i\|_{L^p(I)} \leqslant C(i+1)^\alpha \|Q_{i+1} - Q_i\|_{L^p(I)} \leqslant 2C(i+1)^\alpha d_p(f, \mathcal{P}_i).$$

La série des dérivées de la série (11) converge donc dans $L^p(I)$. La fonction f' est donc dans $L^p(I)$ et nous avons :

$$(12) \qquad \|f' - Q'_k\|_{L^p(I)} \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} \|Q'_{i+1} - Q'_i\|_{L^p(I)} \leqslant 2C \sum_{i=k+1}^{\infty} (i+1)^\alpha d_p(f, \mathcal{P}_i).$$

Nous voyons donc facilement que la suite :

$$(13) \qquad k \longmapsto \|f' - Q'_k\|_{L^p(I)} \text{ est à décroissance rapide}$$

(respectivement, il existe $L_1 > 0$, et $b \in]0, 1[$ tels que l'on ait pour $k \in \mathbf{N}$,

$$(13') \qquad \|f' - Q'_k\|_{L^p(I)} \leqslant L_1 b^k).$$

D'autre part, le théorème de Sobolef nous permet d'écrire

$$\|f - Q_k\|_{L^\infty(I)} \leqslant C'(\|f' - Q'_k\|_{L^p(I)} + \|f - Q_k\|_{L^p(I)}).$$

Nous en déduisons alors :

$$(14) \qquad d_2(f, \mathcal{L}_k) \leqslant C''(\|f' - Q'_k\|_{L^p(I)} + d_p(f, \mathcal{L}_k)).$$

Les inégalités (13) (respectivement (13')) et (14) montrent que f vérifie la condition (ii) de la proposition 1 (respectivement de la proposition 2); en utilisant ces propositions, on conclut que f est $\mathcal{C}^\infty$ (respectivement analytique) sur $\bar{I}$.

Remarque 2. — Les propositions 1, 2, 3 et 4 ainsi que le lemme 1 restent valables sur un intervalle borné $]a, b[$ au lieu de $]-1, +1[$; c'est immédiat par changement de variables affine.

2. Le cas d'un pavé.

Soit Π le pavé $(]-1, +1[)^n$ de $\mathbf{R}^n$. Nous allons donner des caractérisations des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et analytiques sur $\overline{\Pi}$ en termes de distance aux espaces de polynômes. Les démonstrations, sur beaucoup de points, sont similaires à celles du paragraphe I, aussi nous les abrégerons et nous nous limiterons à quelques indications, en se référant aux démonstrations analogues du cas d'un intervalle.

1. *Résultats dans* L^2.

Notons :

$$\mathcal{L}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(1 - x_i^2)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\mathcal{B} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i$$

$$P_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = P_{\alpha_1}(x_1) \ldots P_{\alpha_n}(x_n)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ désigne un multi-indice $(\alpha_i \in \mathbf{N})$ et P_k est le k-ième polynôme de Legendre. Posons encore

$$D(\mathcal{L}_i) = \left\{u \in L^2(\Pi),\quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Pi) \quad \text{et} \quad (1 - x_i^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L^2(\Pi)\right\}$$

$$D(\mathcal{B}) = \bigcap_{i=1}^{n} D(\mathcal{L}_i).$$

L'opérateur $\mathcal{L}_i$ de domaine $D(\mathcal{L}_i)$ est auto-adjoint positif dans $L^2(\Pi)$; les opérateurs $\mathcal{L}_i$ commutent deux à deux, donc l'opérateur $\mathcal{B}$ de domaine $D(\mathcal{B})$ est aussi auto-adjoint positif dans $L^2(\Pi)$.

Des propriétés de régularité de l'opérateur de Legendre (paragraphe I), il résulte que l'on a

$$D(\mathcal{B}^k) \subset H^k(\Pi) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{k \in \mathbf{N}} D(\mathcal{B}^k) = \mathcal{C}^\infty(\overline{\Pi}).$$

Notons, enfin, que les polynômes P_α forment un système orthonormé, total dans $L^2(\Pi)$; ce sont les fonctions propres de l'opérateur $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}P_\alpha = (\alpha_1(\alpha_1 + 1) + \cdots + \alpha_n(\alpha_n + 1))P_\alpha. \tag{15}$$

Nous déduisons facilement de ce qui précède :

Proposition 5. — *Soit* $f \in L^2(\Pi)$, *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Pi})$.

ii) *La suite* $d_2(f, \mathcal{L}_k)$ *est dans* $\mathcal{S}$.

Nous avons aussi :

Proposition 6. — *Soit* $f \in L^2(\Pi)$ *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $f \in \mathcal{A}(\overline{\Pi})$.

ii) *Il existe deux constantes* $L > 0$ *et* $a \in]0, 1[$ *telles que l'on ait pour tout* $k \in \mathbf{N}$,

$$d_2(f, \mathcal{L}_k) \leqslant La^k.$$

Démonstration. — Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Pi})$, nous commençons par vérifier que la condition i) est équivalente à la condition iii) suivante :

iii) il existe une constante L_1 telle que l'on ait pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$\|\mathcal{B}^k f\|_{L^2(I)} \leqslant L_1^{k+1}(2k)\,!$$

La démonstration de l'équivalence de i) et iii) se trouve dans un cadre plus général dans [3]. Comme dans le cas d'une variable, nous pouvons en donner une démonstration plus directe en projetant le laplacien du produit de n sphères S sur le produit de n diamètres (Voir la démonstration de la proposition 2).

Pour montrer l'équivalence de ii) et iii), ordonnons les valeurs propres de $\mathcal{B}$ (cf. (15)) suivant le degré total des polynômes P_α (et pour un degré total donné, suivant l'ordre lexicographique de α). Désignons par w_j et λ_j les fonctions propres et les valeurs propres ainsi rangées.

Si

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j w_j$$

nous avons

$$d_2(f, \mathcal{L}_k) = \Bigg(\sum_{j > \binom{k+n}{n}} |f_j|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

La condition ii) s'écrit donc (avec $L_2 > 0$ et $b \in]0, 1[$)

$$(16) \qquad |f_j| \leqslant L_2 b^{j^{\frac{1}{n}}}.$$

D'autre part, on peut vérifier sans peine que l'on a :

$$C_1 j^{\frac{2}{n}} \leqslant \lambda_j \leqslant C_2 j^{\frac{2}{n}}.$$

La condition iii) s'exprime alors de la manière suivante :

$$(17) \qquad \begin{cases} \text{Il existe } t > 0 \text{ tel que l'on ait :} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|f_j|^2 j^{\frac{4k}{n}} t^{2k}}{(2k\,!)^2} < +\infty. \end{cases}$$

Il est maintenant facile de voir que (16) est équivalente à (17) (voir la fin de la démonstration de la proposition 2), ce qui termine la démonstration de la proposition 6.

2. *Résultats dans* L^p.

Nous avons :

THÉORÈME 1. — *Soit* $f \in L^p(\Pi)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

1) *Pour que* f *soit* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\overline{\Pi}$, *il faut et il suffit que la suite* $k \longmapsto d_p(f, \mathcal{L}_k)$ *soit dans* s.

2) *Pour que* f *soit analytique sur* $\overline{\Pi}$, *il faut et il suffit qu'il existe deux constantes* $L > 0$ *et* $a \in]0, 1[$ *telles que l'on ait pour tout* $k \in \mathrm{N}$,

$$d_p(f, \mathcal{P}_k) \leqslant La^k.$$

La démonstration de ce théorème est basée sur les propositions 5 et 6. On utilise aussi le lemme suivant, qui est une conséquence immédiate du Lemme 1.

Lemme 2. — *Pour tout* p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *il existe deux constantes* C *et* α *telles que l'on ait pour tout polynôme* Q *de degré* d *et tout* i, $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\left\|\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Pi)} \leqslant Cd^\alpha \|Q\|_{L^p(\Pi)}.$$

Le reste suit de près la démonstration des propositions 3 et 4. Il suffit de remplacer l'opérateur $\mathcal{L}$, dans la partie « i) implique ii) » par $\mathcal{B}^l$ avec $l > \frac{n}{2}$, et la norme de la dérivée d'ordre 1 dans la partie « ii) implique i) » par la somme des normes des dérivées d'ordre $\leqslant l$ $\left(\text{avec } l > \frac{n}{2}\right)$, pour pouvoir appliquer le théorème de Sobolef (Formules (9) et (14)).

Remarque 3. — Les propositions 5 et 6, le lemme 2 ainsi que le théorème 1 sont encore valables en remplaçant le pavé Π par un autre parallélépipède de $\mathbf{R}^n$, borné et d'intérieur non vide; il suffit de faire un changement de variables affine convenable.

3. Le cas d'un compact de $\mathbf{R}^n$.

1. *Distance aux polynômes d'une fonction* $\mathcal{C}^\infty$ *ou analytique sur un compact.*

Le résultat suivant ne nécessite pas d'hypothèses sur le compact K.

THÉORÈME 2. — *Soit* K *un compact de* $\mathbf{R}^n$.

1) *Si* f *est une fonction* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* K, *la suite* $k \longmapsto d_{p,\mathrm{K}}(f, \mathcal{P}_k)$ *est à décroissance rapide pour tout* p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ (2).

2) *Si* f *est une fonction analytique sur* K, *pour tout* p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *il existe deux constantes* $\mathrm{L} > 0$ *et* $a \in]0, 1[$ *telles que l'on ait, pour tout* $k \in \mathbf{N}$,

$$d_{p,\mathrm{K}}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant \mathrm{L}a^k.$$

La démonstration du 1) est très simple; il suffit de prolonger f en une fonction $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un pavé $\overline{\Pi}$ contenant K. On a

$$d_{p,\mathrm{K}}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant d_{p,\Pi}(\tilde{f}, \mathcal{P}_k).$$

On applique, alors, le résultat du paragraphe précédent (cas d'un pavé, théorème 1).

Malheureusement, la démonstration du 2) n'est pas si simple et nécessite des résultats intermédiaires.

Nous commençons par le cas particulier où le compact K est convexe.

LEMME 3. — *Soit* K *un compact convexe de* $\mathbf{R}^n$. *Si* $f \in \mathcal{A}(\mathrm{K})$, *il existe* $\mathrm{L} > 0$ *et* $a \in]0, 1[$ *telles que l'on ait, pout tout* $k \in \mathbf{N}$,

$$d_{\infty,\mathrm{K}}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant \mathrm{L}a^k.$$

Nous utilisons, pour la démonstration du lemme 3, le résultat connu suivant:

LEMME 4. — *Soient* Ω_i, $i = 1, \ldots, l$, *des ouverts de* $\mathbf{R}^n$ *et* u *une fonction analytique sur* $\bigcap_{i=1}^{l} \Omega_i$. *Pour chaque* i *il existe une fonction* u_i, *analytique sur* Ω_i, *telle que l'on ait:*

$$\sum_{i=1}^{l} u_i = u \qquad \text{sur} \qquad \bigcap_{i=1}^{l} \Omega_i.$$

(2) On désigne par $d_{p,\mathrm{K}}(f, \mathcal{P}_k)$ la distance de f aux polynômes de degré $\leqslant k$ dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{K})$; ceci n'a d'intérêt que pour des compacts de mesure > 0, ou dans le cas $p = \infty$ en convenant de remplacer L^∞ par l'espace des fonctions bornées muni de la norme de la convergence uniforme sur K.

Démonstration. — Elle est très simple et nous la donnons ici. Il est clair qu'il suffit de traiter le cas $l = 2$. Par le théorème de Cauchy-Kovalevsky (en raisonnant dans $\mathbf{R}^{n+1}$) on peut se ramener à la situation suivante :

Soient U_1 et U_2 deux ouverts de $\mathbf{R}^n$ et f une fonction définie dans $U_1 \cap U_2$ vérifiant $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$. Nous allons montrer qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 définies respectivement dans U_1 et U_2 et vérifiant

$$(18) \qquad \begin{cases} \Delta f_i = 0 \quad \text{dans} \quad U_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \\ f_1 + f_2 = f \quad \text{dans} \quad U_1 \cap U_2. \end{cases}$$

Par une partition de l'unité, on peut écrire

$$f = h_1 + h_2 \quad \text{dans} \quad U_1 \cap U_2.$$

où h_i est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans U_i. Comme $\Delta h_1 = - \Delta h_2$ dans $U_1 \cap U_2$, on peut considérer la fonction g, $\mathcal{C}^\infty$ dans $U_1 \cup U_2$ valant Δh_1 dans U_1 et $-\Delta h_2$ dans U_2. D'après [11], il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie dans $U_1 \cup U_2$ et vérifiant

$$\Delta \varphi = g \quad \text{dans} \quad U_1 \cup U_2.$$

Il suffit, alors, de poser

$$\begin{aligned} f_1 &= - \varphi + h_1 \quad \text{dans} \quad U_1 \\ f_2 &= \varphi + h_2 \quad \text{dans} \quad U_2. \end{aligned}$$

Les fonctions f_1 et f_2 vérifient bien (18).

Démonstration du lemme 3. — Soit U un voisinage ouvert de K où f se prolonge analytiquement. Le compact K étant convexe, il existe des pavés $\Pi_1, \ldots, \Pi_l$ tels que :

$$K \subset \bigcap_{i=1}^{l} \overline{\Pi}_i \subset U.$$

En vertu du lemme 4, on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^{l} f_i \qquad \text{sur} \qquad \bigcap_{i=1}^{l} \overline{\Pi}_i$$

où f_i est une fonction analytique sur $\overline{\Pi}_i$ (en raisonnant sur des voisinages ouverts de $\overline{\Pi}_i$).

Nous avons alors :

$$d_{\infty,\mathrm{K}}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant d_{\infty, \cap \overline{\Pi}_i}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant \sum_{i=1}^{l} d_{\infty,\Pi_i}(f_i, \mathcal{P}_k).$$

Il suffit maintenant de majorer convenablement $d_{\infty,\Pi_i}(f_i, \mathcal{P}_k)$ pour chaque i, ce qui est possible en utilisant la deuxième partie du théorème 1.

Nous allons démontrer la deuxième partie du théorème 2 dans un autre cas particulier, en supposant que le compact K est une « couronne ».

Lemme 5. — *Soit* K *le compact de* $\mathbf{R}^n$ *défini par*

$$\mathrm{K} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) ;\ 0 \leqslant r^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2 \leqslant \mathrm{R}^2 \right\}$$

où r, R *et* c_i *sont des nombres réels donnés. Alors, pour toute fonction* f, *analytique sur* K, *il existe deux constantes* $\mathrm{L} > 0$ *et* $a \in]0, 1[$ *telles que l'on ait, pour tout* $k \in \mathrm{N}$:

$$d_{\infty,\mathrm{K}}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant \mathrm{L}a^k.$$

Démonstration. — Nous pouvons supposer $c_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. En raisonnant par récurrence sur n, il est facile de voir que nous avons la décomposition suivante de f :

$$\begin{aligned}(19)\quad f(x_1, \ldots, x_n) &= f_0(x_1^2, \ldots, x_n^2) + \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x_1^2, \ldots, x_n^2) \\ &\quad + \cdots + x_1 x_2 \ldots x_n\, f_{1,\ldots,n}(x_1^2, \ldots, x_n^2) \\ &= \sum_{p=0}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \cdots < i_p \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}\, f_{i_1,\ldots,i_p}(x_1^2, \ldots, x_n^2)\end{aligned}$$

où les 2^n fonctions $f_{i_1,\ldots,i_p}$ sont analytiques sur le compact K_1 de $\mathbf{R}^n$ défini par :

$$\mathrm{K}_1 = \left\{ y = (y_1, \ldots, y_n) ;\ r^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i \leqslant \mathrm{R}^2,\ y_i \geqslant 0 \right\}.$$

Notons que K_1 est *convexe*.

Posons $g_{i_1,\ldots,i_p}(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} f_{i_1,\ldots,i_p}(x_1^2, \ldots, x_n^2)$. Il suffit alors grâce à (19) de montrer que chacune des 2^n

fonctions $g_{i_1, \ldots, i_p}$ vérifie la conclusion du lemme. Nous avons

$$d_{\infty, \mathrm{K}}(g_{i_1, \ldots i_p}, \mathfrak{L}_{2k+p}) \leqslant d_{\infty, \mathrm{K}}(g_{i_1, \ldots, i_p}, x_{i_1} \ldots x_{i_p} \mathfrak{L}_{2k}) \leqslant \mathrm{M} d_{\infty, \mathrm{K}_1}(f_{i_1, \ldots, i_p}, \mathfrak{L}_k)$$

avec $\mathrm{M} = \sup |x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}|$.

Nous utilisons maintenant le lemme 3 sur le compact convexe K_1. Ce qui démontre le lemme 5.

Démonstration de la 2^e *partie du théorème* 2.

Soient K un compact quelconque de $\mathbf{R}^n$ et f une fonction analytique sur K. Il existe U, voisinage ouvert de K, tel que f se prolonge en une fonction analytique sur U.

Montrons qu'il existe un nombre fini de « couronnes » K_i (compacts de la forme donnée dans l'énoncé du lemme 5) vérifiant :

$$\mathrm{K} \subset \bigcap_{i=1}^{l} \mathrm{K}_i \subset \mathrm{U}.$$

On commence par prendre K_1, une boule fermée contenant K. On recouvre ensuite le compact $\mathrm{K}_1 \cap \complement \mathrm{U}$ par un nombre fini de boules ouvertes de centre $c^i = (c_1^i, \ldots, c_n^i)$ pour $i = 2, \ldots, l$, et de rayon r_i, ne rencontrant pas K. Soit R_i tel que la boule de centre c^i et de rayon R_i contienne K. Les compacts K_1 et

$$\mathrm{K}_i = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) ; \ r_i^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} (x_j - c_j^i)^2 \leqslant \mathrm{R}_i^2 \right\}$$

pour $2 \leqslant i \leqslant l$, répondent à la question.

Le reste de la démonstration suit de près celle du lemme 3. On utilise, en particulier, le lemme 4 en écrivant f sous la forme :

$$f = \sum_{i=1}^{l} f_i \quad \text{sur} \quad \bigcap_{i=1}^{l} \mathrm{K}_i$$

avec $f_i \in \mathcal{A}(\mathrm{K}_i)$, et on applique le lemme 5.

D'autre part, il suffit de traiter le cas $p = \infty$ puisque l'on a :

$$d_p(f, \mathfrak{L}_k) \leqslant (mes \ \mathrm{K})^{\frac{1}{p}} d_\infty(f, \mathfrak{L}_k).$$

2. *Peut-on caractériser les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et analytiques par leurs distances aux polynômes?*

On s'intéresse ici à la « réciproque » du théorème 2. Une fonction à « bonne » distance des polynômes est-elle $\mathcal{C}^\infty$ ou analytique?

Notons, tout d'abord, le résultat suivant qui est une conséquence immédiate des théorèmes 1 et 2.

THÉORÈME 3. — *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, f *une fonction dans* $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

1) *Pour que* f *soit de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* Ω, *il faut et il suffit que, pour tout compact* K *de* Ω, *la suite* $k \longmapsto d_{p,\mathrm{K}}(f, \mathfrak{L}_k)$ *soit à décroissance rapide.*

2) *Pour que* f *soit analytique dans* Ω, *il faut et il suffit que, pour tout compact* K *de* Ω, *il existe des constantes* $L > 0$ *et* $a \in]0, 1[$ *telles que l'on ait, pour tout* $k \in \mathbf{N}$:

$$d_{p,\mathrm{K}}(f, \mathfrak{L}_k) \leqslant La^k.$$

Pour un compact K quelconque dans $\mathbf{R}^n$, la réciproque du théorème 2 n'est pas toujours vraie. On peut trouver des exemples ([3]) constitués par un compact K et une fonction f sur K dont la distance dans $L^p(K)$ aux polynômes est à décroissance rapide (respectivement : exponentielle) et qui n'est pas C^∞ (respectivement : analytique) sur K, quel que soit p et avec K de mesure > 0 ou bien en considérant la distance dans l'espace des fonctions bornées sur K.

Nous allons donner maintenant des conditions suffisantes sur un compact K de $\mathbf{R}^n$ pour qu'une fonction dont la distance aux polynômes dans $L^p(K)$ est à décroissance rapide (respectivement : exponentielle) soit de classe C^∞ (respectivement : analytique) sur K. Pour plus de clarté et de concision, nous nous contentons ici de conditions suffisantes très éloignées des conditions nécessaires; il est possible de dégager des critères plus fins pour le cas C^∞ comme pour le cas analytique, mais avec quelques difficultés techniques supplémentaires ([3]).

([3]) Ceci sera publié ultérieurement avec diverses généralisations et applications.

Introduisons la condition (H) suivante :

(H) Ω *est un ouvert borné de* $\mathbf{R}^n$ *à bord lipschitzien.* (i.e.) localement, Ω est défini par

$$x_i > \varphi\,(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

où φ est une fonction lipschitzienne).

Nous avons :

THÉORÈME 4. — *Soient* Ω *un ouvert vérifiant* (H), $1 \leqslant p \leqslant \infty$, f *une fonction de* $L^p(\Omega)$.

1) *Pour que* f *soit de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\overline{\Omega}$, *il faut et il suffit que la suite* $k \longmapsto d_{p,\Omega}(f, \mathcal{P}_k)$ *soit à décroissance rapide.*

2) *Pour que* f *soit analytique sur* $\overline{\Omega}$, *il faut et il suffit qu'il existe deux constantes* $L > 0$ *et* $a \in]0, 1[$ *telles que l'on ait pour tout* $k \in \mathbf{N}$:

$$d_{p,\Omega}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant La^k.$$

La partie directe de ce théorème résulte (sans conditions sur Ω) du théorème 2. La partie réciproque sera une conséquence des propositions 7 et 8 (voir plus loin) où nous ferons des hypothèses sur Ω, plus faibles que l'hypothèse (H).

Introduisons les conditions suivantes sur Ω, ouvert borné de $\mathbf{R}^n$.

(H_1) *Tout point de* $\partial\Omega$ *admet un système fondamental de voisinages ouverts* (V_i) *tels que :*

$$\text{chaque } V_i \cap \Omega \text{ est connexe.}$$

(H_2) *Propriété du parallélépipède. Il existe un parallélépipède ouvert* Π_0 *non vide tel que tout point* x *de* $\overline{\Omega}$ *soit sommet d'un parallélépipède* Π_x *congruent à* Π_0 (*modulo les transformations orthogonales et les translations de* $\mathbf{R}^n$) *et vérifiant*

$$\overline{\Pi}_x \subset \overline{\Omega}.$$

(H_3) *Propriété faible du parallélépipède. Tout point* x *de* $\overline{\Omega}$ *est sommet d'un parallélépipède ouvert non vide* Π_x *tel que :* $\overline{\Pi}_x \subset \overline{\Omega}$.

(H_4) *Propriété de prolongement. Toute fonction uniformément continue ainsi que ses dérivées sur* Ω *se prolonge en une fonction* *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\overline{\Omega}$ (*i.e. en une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur un voisinage de* $\overline{\Omega}$).

Nous avons les implications suivantes :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{H}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[ddd, Rightarrow] & (\mathrm{H}_1) & \\
 & (\mathrm{H}_2) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & & (\mathrm{H}_3) \\
(\mathrm{H}_4) & &
\end{tikzcd}$$

En effet, (H) implique que le bord de Ω est continu, ce qui implique (H_1). Les implications $(\mathrm{H}) \Longrightarrow (\mathrm{H}_2) \Longrightarrow (\mathrm{H}_3)$ sont évidentes. Enfin (H) implique (H_4) grâce au prolongement de Whitney.

Voici maintenant les propositions annoncées :

Proposition 7. — *Soient* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *et* Ω *un ouvert borné de* $\mathbf{R}^n$ *vérifiant les propriétés du parallélépipède* (H_2) *et du prolongement* (H_4). *Si une fonction* f *de* $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *est telle que la suite* $d_{p,\Omega}(f, \mathcal{L}_k)$ *est à décroissance rapide, alors la fonction* f *est dans* $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Proposition 8. — *Soient* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *et* Ω *un ouvert borné de* $\mathbf{R}^n$ *vérifiant la propriété faible du parallélépipède* (H_3) *et la propriété* (H_1) ; *soit* $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ *telle qu'il existe* $\mathrm{L} > 0$ *et* $a \in]0,1[$ *avec*

$$d_{p,\Omega}(f, \mathcal{L}_k) \leqslant \mathrm{L}a^k \quad \textit{pour} \quad k \in \mathbf{N};$$

alors f *appartient à* $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$.

Démonstration de la proposition 7. — Montrons d'abord que si Ω vérifie (H_2), nous avons des inégalités du « type Markov » dans Ω.

En effet, du lemme 2 et de la propriété (H_2), nous déduisons qu'il existe deux constantes positives C et α telles que l'on ait pour tout polynôme Q de degré $\leqslant d$ et pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\left\|\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x_i}\right\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}d^\alpha \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}. \tag{19}$$

De même, en itérant (8) et grâce à (H_2), nous obtenons l'existence d'une constante C' telle que l'on ait pour tout polynôme Q de degré $\leqslant d$,

$$(20) \qquad \|Q\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C' d^{3n} \|Q\|_{L^1(\Omega)}.$$

Remarquons que de (19) et (20) il résulte l'inégalité

$$(21) \qquad \left\|\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C'' d^{\alpha_1} \|Q\|_{L^1(\Omega)}$$

avec $\alpha_1 = \alpha + 3n$ et $C'' = CC'$ [4].

Montrons maintenant que si f est dans $L^p(\Omega)$ telle que la suite $d_{p,\Omega}(f, \mathcal{P}_k)$ soit à décroissance rapide, il en est de même de la suite $d_{\infty,\Omega}(f, \mathcal{P}_k)$; ce qui ramène la démonstration de la proposition 7 au cas $p = \infty$.

En effet, soit Q_i un polynôme de degré $\leqslant i$ vérifiant

$$(22) \qquad d_{p,\Omega}(f, \mathcal{P}_i) = \|f - Q_i\|_{L^p(\Omega)}.$$

Nous avons

$$f = Q_0 + \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i+1} - Q_i.$$

En utilisant (20) nous obtenons

$$\|f - Q_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} C_1 (i+1)^{3n} \|Q_{i+1} - Q_i\|_{L^p(\Omega)}$$

$\left(\text{avec } C_1 = C' (\text{mes } \Omega)^{\frac{p-1}{p}}\right)$. Ou encore grâce à (22)

$$\|f - Q_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant 2C_1 \sum_{i=k+1}^{\infty} (i+1)^{3n} d_p(f, \mathcal{P}_i),$$

ce qui montre que la suite $d_\infty(f, \mathcal{P}_k)$ est bien à décroissance rapide.

Pour démontrer la proposition 7 dans le cas $p = +\infty$, il suffit de remarquer que grâce à (19) on a : pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $D^\alpha f$ est uniformément continue sur Ω (limite uniforme de polynômes). On conclut alors grâce à (H_4).

[4] Notons que par l'inégalité de Hölder, nous déduisons de (21) l'inégalité suivante

$$\left\|\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C''' d^{\alpha_1} \|Q\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{avec} \quad C''' = C'' \text{ mes } \Omega \quad \text{et} \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Démonstration de la proposition 8. — Soit f une fonction de $L^p(\Omega)$ vérifiant l'hypothèse de la proposition 8. Comme pour tout compact K de Ω on a

$$d_{p,K}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant d_{p,\Omega}(f, \mathcal{P}_k), \tag{23}$$

il résulte du théorème 3 que f est analytique dans Ω. Il nous reste à montrer qu'elle se prolonge en une fonction analytique dans un voisinage de $\overline{\Omega}$.

Soit x un point de $\partial\Omega$; d'après (H_3), il existe un parallélépipède Π_x tel que $\overline{\Pi}_x \subset \overline{\Omega}$. En utilisant

$$d_{p,\Pi_x}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant d_{p,\Omega}(f, \mathcal{P}_k)$$

et le théorème 1, nous en déduisons que la restriction de f à $\overline{\Pi}_x$ est analytique. Nous pouvons donc trouver, grâce à (H_1) une fonction g_x analytique sur V_x, voisinage ouvert de x tels que :

$$V_x \cap \Omega \text{ est connexe}$$
$$g_x|_{V_x \cap \Pi_x} = f|_{V_x \cap \Pi_x}.$$

La fonction g_x coïncide donc avec f dans $V_x \cap \Omega$, et est un prolongement analytique de f sur $V_x \cap \overline{\Omega}$. D'après un théorème de prolongement local d'une section d'un faisceau au-dessus d'un sous-ensemble [5], il existe un prolongement analytique de f à un voisinage ouvert de $\overline{\Omega}$.

4. Espaces du type Gevrey sur $\overline{\Omega}$ et interpolation.

Introduisons la définition suivante :

DÉFINITION. — *Soient* s *un nombre réel,* $s \geqslant 1$, *et* K *un compact de* $\mathbf{R}^n$. *Pour tout* p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *on désigne par* $\mathcal{A}_{s,p}(K)$ *l'espace des fonctions* f *de* $L^p(K)$ *vérifiant:*

Il existe deux constantes $L > 0$ *et* $a \in]0, 1[$ *telles que l'on ait, pour tout* $k \in \mathbf{N}$,

$$d_{p,K}(f, \mathcal{P}_k) \leqslant La^{k^{\frac{1}{s}}}.$$

On munit $\mathcal{A}_{s,p}(K)$ de la topologie limite inductive évidente. Le cas $s = 1$ a été étudié dans les paragraphes précédents.

Nous allons nous intéresser ici aux propriétés de ces espaces pour $s > 1$.

Pour s, p et K donnés, nous avons l'inclusion

$$\mathcal{A}_{s,\infty}(\mathrm{K}) \subset \mathcal{A}_{s,p}(\mathrm{K}).$$

On peut montrer aisément (voir démonstration de la proposition 7) que, lorsque K vérifie la propriété du parallélépipède (H_2), on a aussi pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$,

$$\mathcal{A}_{s,\infty}(\mathrm{K}) = \mathcal{A}_{s,p}(\mathrm{K}). \tag{24}$$

Notons que dans ce cas $\mathcal{A}_{s,p}(\mathrm{K})$ est stable par multiplication (la propriété est toujours vraie pour $\mathcal{A}_{s,\infty}(\mathrm{K})$) et par dérivation.

On se propose maintenant « d'interpoler » entre les espaces $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et $\mathcal{A}_{s,2}(\overline{\Omega})$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$.

Rappelons, qu'étant donnés s_0, s_1 et s, $1 \leqslant s_0 < s < s_1 < +\infty$, il est possible de construire (cf. [6]) deux foncteurs d'interpolation Φ et ψ vérifiant :

$$\left[\begin{array}{l} \Phi \left[\mathcal{S}, \varinjlim_{a>1} l^2_{aj^{1/s_0 n}}\right] = \varinjlim_{a>1} l^2_{aj^{1/sn}} \ (^5) \\ \psi \left[\varinjlim_{a>1} l^2_{aj^{1/s_0 n}}, \varinjlim_{a>1} l^2_{aj^{1/s_1 n}}\right] = \varinjlim_{a>1} l^2_{aj^{1/sn}} \end{array}\right. \tag{25}$$

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant :

Théorème 5. — *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ à bord lipschitzien (propriété (H)) (6). Pour $s \geqslant 1$, l'espace $\mathcal{A}_{s,2}(\overline{\Omega})$ est d'interpolation entre $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ et $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Plus précisément on a :*

$$\left[\begin{array}{ll} \text{i)} & \Phi[\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \mathcal{A}_{s_0,2}(\overline{\Omega})] = \mathcal{A}_{s,2}(\overline{\Omega}) \ (^7) \\ \text{ii)} & \psi[\mathcal{A}_{s_0,2}(\overline{\Omega}), \mathcal{A}_{s_1,2}(\overline{\Omega})] = \mathcal{A}_{s,2}(\overline{\Omega}) \end{array}\right.$$

où Φ et ψ sont les fonctions utilisées dans (25).

(5) Si $\mathrm{P}(j)$ est une suite de nombres réels positifs, on note

$$l^2_{\mathrm{P}(j)} = \left\{ (f_j) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}};\ \sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2 \mathrm{P}(j) < +\infty \right\}.$$

(6) On peut remplacer la propriété (H) par la propriété plus faible suivante : les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et analytiques sur $\overline{\Omega}$ sont caractérisées par leur distance aux polynômes dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

(7) Notons que $\mathcal{A}_{1,2}(\overline{\Omega}) = \mathcal{A}(\overline{\Omega})$ (cf. théorème 4).

Démonstration. — Soit $(P_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une base orthonormale dans $L^2(\Omega)$ formée de polynômes de degré total croissant. Le développement sur la base (P_i) réalise un isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ sur $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{A}_{s,2}(\overline{\Omega})$ sur $\varinjlim_{a>1} l^2_{a^{j^{1/ns}}}$. On déduit alors le théorème de (25).

En particulier lorsque Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ à bord lipschitzien, les espaces $\mathcal{A}_{s,p}(\overline{\Omega})$ que nous venons d'introduire par la distance aux polynômes, sont indépendants de p et sont des espaces d'interpolation entre les espaces $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$. On peut les caractériser différemment lorsque le bord de Ω est très régulier.

Si $\overline{\Omega}$ est une variété à bord analytique compacte, désignons, comme dans [2], par $\mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions u de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{\Omega}$, de classe Gevrey d'ordre s dans Ω et telles que :

Pour toute carte locale V, voisinage d'un point du bord, il existe $M > 0$ (dépendant de u) vérifiant pour tous $k \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in \mathbf{N}^{n-1}$,

$$\|(D_y y D_y)^k D_x^\alpha u\|_{L^2(V)} \leqslant M^{k+|\alpha|+1}((|\alpha| + 2k)\,!)^s$$

où x et y désignent respectivement les variables tangentielles et normale.

Il a été démontré dans [2] que l'on a

$$\Phi[\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \mathcal{A}(\overline{\Omega})] = \mathcal{A}_s(\overline{\Omega})$$

où Φ est le facteur utilisé dans (25).

Il résulte alors du théorème 5 :

Corollaire 1. — *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ tel que Ω soit une variété à bord analytique, pour $s \geqslant 1$ et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ on a*

$$\mathcal{A}_{s,p}(\overline{\Omega}) = \mathcal{A}_s(\overline{\Omega}).$$

Ceci a été démontré dans [2], dans le cas où Ω est une boule de $\mathbf{R}^n$.

En utilisant les résultats de [3], on obtient une caractérisation analogue de ces espaces dans le cas où le bord de Ω est analytique par morceaux.

Voici un résultat qui complète le théorème 3.

THÉORÈME 6. — *Soient* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *et* f *une fonction dans* $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. *Pour que* f *soit dans la classe de Gevrey d'ordre* s $(s \geqslant 1)$ *dans* Ω, *il faut et il suffit que, pour tout compact* K *de* Ω, *il existe* $L > 0$ *et* $a \in]0, 1[$ *tels que l'on ait pour tout* $k \in \mathbf{N}$,

$$d_{p,K}(f, \mathcal{L}_K) \leqslant La^{k^{1/s}}.$$

Le théorème résulte facilement de l'égalité (24), du corollaire 1 et du fait que toute fonction Gevrey d'ordre s sur $\bar{\mathcal{O}}$ est dans l'espace $\mathcal{A}_s(\bar{\mathcal{O}})$ lorsque $\bar{\mathcal{O}}$ est une variété à bord analytique (cf. [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC, Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés; *Arch. Rat. Mec. Anal.*, 34 n° 5 (1969), 361-379.

[2] M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC, Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés; application; *Journal of Functional Analysis* t. 8 (1971).

[3] M. S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC et B. HANOUZET, Caractérisation de classes de fonctions C^∞ et analytiques sur une variété irrégulière à l'aide d'un opérateur différentiel (à paraître).

[4] S. BERNSTEIN; Œuvres complètes, t. 1, 2, 3, 4.

[5] R. GODEMENT, Théorie des faisceaux, Hermann, Paris 1964.

[6] C. GOULAOUIC, Prolongements de fonctions d'interpolation et applications; *Ann. Inst. Fourier*, Genoble 18, 1 (1968) 1-98.

[7] E. HILLE J. D. TAMARKIN et G. SZEGÖ, On some generalisations of a theorem of A. Markoff, *Duke Math. Journal* vol. 3 (1937), 729-739.

[8] T. KOTAKE et N. S. NARASIMHAN, Fractional powers of a linear elliptic operator; *Bull. Soc. Math.* France, 90 (1962), 449-471.

[9] J. L. LIONS et E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes; tome 3 (Dunod), Paris 1970.

[10] G. G. LORENTZ, Approximation of functions, Elsevier 1965.

[11] B. MALGRANGE, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution; *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble 6, (1955-1956), 271-355.

[12] B. S. MITTIAGIN, Approximate dimension and bases in nuclear spaces. Uspeki Math. Nauk 16, (1961), 63-132.

[13] J. R. RICE, The approximation of functions. Addison-Wesley Publ. Company (1964).
[14] A. F. TIMAN, Theory of approximation of functions of a real variable. Pergamon Press (1963).
[15] M. ZERNER, Développement en série de polynômes orthonormaux des fonctions indéfiniment différentiables; *C.R. Acad. Sci.*, Paris, t. 268, (1969), 218-220.

Manuscrit reçu le 15 septembre 1971

M. S. BAOUENDI
Department of Mathematics
Purdue University
Lafayette Indiana 47907.
U.S.A.

et C. GOULAOUIC
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences d'Orsay
91 Orsay.