ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVONNE CHOQUET-BRUHAT

Problème de Cauchy pour le système intégro-différentiel d'Einstein-Liouville

Annales de l'institut Fourier, tome 21, n° 3 (1971), p. 181-201

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_3_181_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,3 (1971), 181-201

PROBLÈME DE CAUCHY POUR LE SYSTÈME INTEGRO DIFFERENTIEL D'EINSTEIN-LIOUVILLE

par Yvonne CHOQUET-BRUHAT

Introduction.

Le but de ce mémoire est de démontrer un théorème d'existence pour la solution du problème de Cauchy pour le système couplé d'Einstein et Liouville : un tel système représente un gaz relativiste, sans collision, soumis à son propre champ de gravitation. La même méthode permet, avec seulement des complications d'écriture, de traiter le cas où, de plus le gaz est soumis à son champ électromagnétique moyen (équation de Vlasov). Nous traitons ici le cas où les particules du gaz sont toutes de même masse $m > 0$: le cas de particules ayant un nombre fini de masses différentes (plasmas relativistes) en découle immédiatement. Il est aussi possible d'adapter la méthode au cas $m = 0$ (photons ou neutrinos). Des modèles de galaxies, ou d'amas de galaxies, relèvent aussi de ces équations : les masses varient alors continuement entre deux nombres > 0. Nous donnerons ailleurs le complément nécessaire à la résolution de ce cas. Les méthodes mathématiques utilisées ici pourraient, plus généralement, être appliquées à des systèmes intégro différentiels non linéaires où les opérateurs différentiels seraient de type hyperboliques et où les opérateurs intégraux satisferaient à des majorations dans des algèbres de Sobolev adaptées à la résolution des opérateurs différentiels. Un des buts de notre première partie est de mettre le système étudié, par choix des variables et utilisation d'un poids approprié, sous une telle forme. Le plan de ce mémoire est le suivant :

Dans I nous donnons un bref exposé des concepts fondamentaux de la théorie cinétique relativiste et nous rappelons, ou établissons, quelques propriétés générales des équations d'Einstein et de Liouville qui nous seront utiles.

Dans II nous démontrons un théorème d'existence locale, dans des espaces fonctionnels convenables. Nous montrons d'abord qu'à une métrique donnée est associée, par la résolution d'un problème de Cauchy, une fonction de distribution et une seule. Nous écrivons ensuite une application non linéaire d'un espace de métriques dans lui-même, et nous montrons à l'aide de majorations a priori et du théorème de Schauder, l'existence d'un point fixe de cette application, solution du problème posé. Nous donnons enfin, en langage géométrique, le théorème d'existence intrinsèque adapté au problème posé. Un théorème d'unicité, pour le système d'Einstein-Liouville a été démontré précédemment (cf. [8]).

I. GENERALITES

1. Espace des phases.

L'espace des phases, en relativité générale, est le fibré tangent T(M) à une variété différentiable M de dimension 4, munie d'une métrique hyperbolique g. Si (x^α) sont des coordonnées locales dans M on désigne par (x^α, p^α) les coordonnées locales dans T(M) où les p^α sont les composantes d'un vecteur p de la fibre T_x, dans le repère naturel correspondant aux coordonnées x^α.

Une particule est un chemin dans l'espace des phases, classe d'équivalence d'arcs paramétrés, $t \to (x(t), p(t))$, où $x(t)$ et $p(t)$ décrivent respectivement la position et l'impulsion relativiste de la particule. La longueur relativiste de p est la masse propre m de la particule, cette masse étant une constante, la trajectoire de la particule est dans le sous-fibré P(M), de fibre

$$g_{\alpha\beta}(x)\, p^\alpha p^\beta = m^2 \tag{1.1}$$

Nous supposons de plus que M est orienté dans le temps et que p est orienté vers le futur : les impulsions des particules de masse m, au point x sont alors sur la nappe future, P_x de l'hyperboloïde (1 – 1) vérifiant en coordonnées adaptées $p^0 > 0$.

Une particule définit une équation différentielle du second ordre sur M, c'est-à-dire qu'il existe un paramétrage tel que sa trajectoire soit tangente à un champ de vecteur X sur T(M) du type

$$X = \{ p^\alpha , Q^\alpha \}$$

En cas d'absence de forces extérieures, la trajectoire est une géodésique, on a

$$Q^\alpha = - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \, p^\lambda \, p^\mu \tag{1.2}$$

Si, de plus, un champ électromagnétique F est présent et la particule a pour charge e on a

$$Q^\alpha = - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \, p^\lambda \, p^\mu + e F^\alpha_\beta \, p^\beta \tag{1.3}$$

On vérifie que dans l'un et l'autre cas (et dans tous les cas où $Q^\alpha = - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \, p^\lambda p^\mu + f^\alpha$, avec $f^\alpha p_\alpha = 0$) *le vecteur* X *est tangent à* P(M).

2. Fonction de distribution. Equation de Liouville.

La fonction de distribution des particules de masse m est une fonction scalaire, positive, $f(x;p)$ sur P(M) : elle s'interprète en termes d'élément de volume pour la mesure du nombre de particules traversant une hypersurface (dimension 6) Σ de P(M) de la façon suivante :

Les éléments de volume sur M et T_x sont :

$$\eta = |g|^{1/2} \, d^4x \quad , \quad \omega = |g|^{1/2} \, d^4p \tag{2.1}$$

où $\quad d^4x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad , \quad d^4p = dp^0 \wedge dp^1 \wedge \ldots \wedge dp^3$

La forme de Leray $\overline{\omega}$ sur P_x est telle que :

$$\overline{\omega} \wedge d \left\{ \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\beta} \, p^\alpha \, p^\beta - m^2 \right) \right\} = \omega$$

Une expression de $\overline{\omega}$ est :

$$\overline{\omega} = \frac{|g|^{1/2}}{p_0} \, d^3p \quad , \quad d^3p = dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3 \tag{2.2}$$

L'élément de volume de P(M) est :

$$\eta \wedge \overline{\omega} \tag{2.3}$$

Le nombre moyen[1] de particules traversant Σ est alors : $\int_\Sigma \theta$ où θ est la 6-forme

$$\theta = f(x, p)\, i_X(\eta \wedge \overline{\omega}) \tag{2.4}$$

$i_X(\eta \wedge \overline{\omega})$ est élément d'invariant intégral absolu pour le champ de vecteurs X. Il doit en être de même de θ (c'est-à-dire $i_X\theta = 0$ et $i_X d\theta = 0$) en l'absence de collisions. On en déduit pour la fonction de distribution f l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

Equation de Liouville :

$$i_X df = (df)(X) \equiv p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + Q^\alpha \frac{\partial f}{\partial p^\alpha} = 0 \tag{2.5}$$

De manière à avoir un tenseur d'impulsion énergie $T^{\alpha\beta}$ borné nous serons amenés à poser :

$$\varphi(x, p) = f(x, p)\,(U \,.\, p)^N \quad , \quad U \,.\, p \equiv U_\alpha p^\alpha \tag{2.6}$$

où U sera un champ de vecteurs temporel. La fonction f vérifiera l'équation de Liouville si et seulement si φ vérifie l'équation (on a posé $Q^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} p^\lambda p^\mu + f^\alpha$).

$$p^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} + Q^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial p^\alpha} - \varphi N (U \,.\, p)^{-1} p^\lambda p^\mu \nabla_\lambda U_\mu \tag{2.7}$$

$$- N f^\alpha U_\alpha \varphi (U \,.\, p)^{-1} = 0$$

On remarque que

$$p^\lambda p^\mu \nabla_\lambda U_\mu \equiv \frac{1}{2} p^\lambda p^\mu (\nabla_\lambda U_\mu + \nabla_\mu U_\lambda) \tag{2.8}$$

s'annule si et seulement si U est un champ de vecteurs de Killing pour la métrique g.

---

(1) au sens des ensembles de Gibbs.

3. Equations d'Einstein.

Nous supposons désormais que les particules sont la source du champ gravitationnel, c'est-à-dire que les équations d'Einstein s'écrivent :

$$S^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} \quad , \quad T^{\alpha\beta} = \int_{P_x} f p^\alpha p^\beta \,\overline{\omega} \tag{3.1}$$

Nous considèrerons, pour résoudre le problème de Cauchy localement, les équations d'Einstein en coordonnées harmoniques, le tenseur d'Einstein s'écrit alors :

$$\overset{(h)}{S}{}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\, g^{\lambda\mu}\, \partial^2_{\lambda\mu}\, g^{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta}(g^{\lambda\mu}, \partial_\gamma g^{\lambda\mu}) \tag{3.2}$$

où $H^{\alpha\beta}$ est une fraction rationnelle (de dénominateur une puissance de $|g|$) de $g^{\lambda\mu}$, $\partial_\gamma g^{\lambda\mu}$.

On sait que, si f vérifie l'équation de Liouville, (2.5), le tenseur d'impulsion énergie, (3.1), vérifie les conditions de conservation

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.3}$$

On en déduit, par les arguments habituels [4], qu'une métrique g (dans l'espace de Sobolev $\widetilde{H}_\mu$, $\mu \geqslant 4$, que nous allons introduire) solution de :

$$\overset{(h)}{S}{}^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} \ , \tag{3.4}$$

vérifiant les contraintes sur une hypersurface initiale spatiale, est solution des équations d'Einstein (3.1) (si $T^{\alpha\beta}$ est dans $\widetilde{H}_\mu$).

Nous résoudrons le problème de Cauchy pour le système (2.7), (3.2), localement, c'est-à-dire pour des données de Cauchy portées par un ouvert borné ω_0 d'une hypersurface initiale S_0 , dont nous prendrons pour équation locale $x^0 = 0$, et nous construirons une solution dans un voisinage de ω_0 : le théorème d'unicité montré précédemment (cf. [8]) permet, par des arguments classiques (cf. [7]) de construire une solution, par raccordement de solutions locales, dans un voisinage de l'hypersurface Σ tout entière.

Ce caractère local de la construction montre que les hypothèses suivantes ne sont pas une restriction à la généralité souhaitable des solutions.

Hypothèse H.

Nous dirons qu'une métrique, de composantes en coordonnées locales $g^{\alpha\beta}$ sur un ouvert Ω de R^4 vérifie les hypothèses H si :

1) Il existe une constante positive ε telle que, sur Ω :

$$|\eta^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}| \leqslant \varepsilon \tag{3.5}$$

où $\eta^{\alpha\beta}$ est le tenseur de Minkovski, et ε tel que les métriques vérifiant (3.5) soient uniformément hyperboliques sur Ω avec $x^0 = c^{te}$ uniformément spatial(²).

2) g est continuement différentiable et uniformément borné sur Ω ainsi que ses dérivées premières.

4. Equation de Liouville à paramètres bornés.

Une vitesse relativiste est toujours inférieure à 1 (vitesse de la lumière). Ce fait va avoir pour traduction mathématique la possibilité de prendre sur l'hyperboloïde de masse des coordonnées dont le domaine sera borné, et pour lesquelles les coefficients de l'équation de Liouville seront bornés : ce fait simplifiera notablement la résolution de l'équation.

Prenons pour paramètres sur le m hyperboloïde $P_x (m \neq 0)$, quand x est dans le domaine $\Phi^{-1}(\Omega)$ d'une carte locale où la métrique g vérifie les hypothèses H, les trois nombres

$$v^i = \frac{p^i}{p^0} \tag{4.1}$$

Nous désignons par $\mathfrak{M}_x$ l'image dans R^3 de P_x par l'application $p \to \{v^i\}$.

LEMME. — *Pour tout* $x \in \Phi^{-1}(\Omega)$, $\mathfrak{M}_x$ *est un compact de* R^3, *contenu dans un compact fixe* $\mathfrak{M} \subset R^3$, *si* g *vérifie les hypothèses* H *sur* Ω.

(²) Par exemple $\varepsilon = \dfrac{1-b}{6}$, $b > 0$.

Preuve. – L'équation (1.1) de P_x s'écrit :

$$g_{00}(p^0)^2 + g_{ij}(p^i + \overline{g}^{0i}p^0)(p^j + \overline{g}^{0j}p^0) - g_{ij}\overline{g}^{0i}\overline{g}^{0j}p^0)^2 = m^2 \tag{4.2}$$

avec $\overline{g}^{0i} = \overline{g}^{ih}g_{0h}$, $\overline{g}^{ik}$ éléments de la matrice inverse de g_{ih}.

L'équation de $\mathcal{M}_x$ dans R^3 est donc :

$$\mathcal{E}(v^i) \equiv - g_{ij}(v^i + \overline{g}^{0i})(v^j + \overline{g}^{0j}) = - \frac{m^2}{(p^0)^2} + \frac{1}{g^{00}}, \; p^0 \geqslant m(g^{00})^{1/2} \tag{4.3}$$

c'est-à-dire que $\mathcal{M}_x$ est l'ellipsoïde fermé :

$$\mathcal{E}(v^i) \leqslant \frac{1}{g^{00}} \tag{4.4}$$

intérieur à une boule fixe $\mathcal{M}$, ne dépendant que de ε.

Nous désignons désormais par $f(x, v)$ l'expression de la fonction de distribution, sur le sous fibré de P(M) de base $\Phi^{-1}(\Omega)$, dans ces paramètres v^i.

L'équation de Liouville (2.5) est équivalente à l'équation suivante pour $f(x, v)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x^0} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} - A^i \frac{\partial f}{\partial v^i} = 0 \quad \text{avec} \tag{4.5}$$

$$A^i = \frac{Q^i - v^i Q^0}{(p^0)^2} \tag{4.6}$$

Dans le cas purement gravitationnel A^i est un polynôme des $\Gamma^\mu_{\lambda\mu}$ et v^i, en présence d'un champ électromagnétique il s'y ajoute un polynôme des v^i, à coefficients F^α_β, divisé par p^0 : sous les hypothèses H, A^i est une fonction uniformément bornée sur $P(\Phi^{-1}(\Omega))$ (si F^α_β l'est).

Nous choisirons pour U (cf. formule (2.6)) un champ de vecteurs strictement temporel pour toutes les métriques vérifiant les hypothèses H, par exemple, dans les coordonnées locales :

$$U_\alpha = \delta^0_\alpha \quad , \quad U \, . \, p = p^0 \tag{4.7}$$

L'équation (2.7) s'écrira alors, si $\varphi(x, v)$ est l'expression de φ dans les paramètres v^i :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} + v^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - A^i \frac{\partial \varphi}{\partial v^i} - NF\varphi = 0 \text{ , où} \tag{4.8}$$

$$F = \frac{1}{2} \frac{p^\lambda p^\mu}{(p^0)^2} (\nabla_\lambda U_\mu + \nabla_\lambda U_\mu) \text{ ;} \tag{4.9}$$

F est borné sur $P(\Phi^{-1}(\Omega)$.

5. Elément de volume, tenseur d'impulsion énergie.

La forme de Leray $\bar{\omega}$, sur la fibre P_x, a pour expression dans les paramètres v^i :

$$\bar{\omega} = |g|^{1/2} \frac{(p^0)^4}{m^2} d^3 v \tag{5.1}$$

D'où, pour $T^{\alpha\beta}$

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{m^2} \int_{\mathcal{M}_x} \varphi v^{\alpha\beta} |g|^{1/2} d^3 v \tag{5.2}$$

où $v^{\alpha\beta}$ est la fonction, bornée sur $\mathcal{M}_x$ si $N \geqslant 6$

$$v^{\alpha\beta} = \frac{p^\alpha p^\beta}{(p^0)^{N-4}}$$

Nous prendrons désormais $N = 6$, de sorte que $v^{\alpha\beta}$ est indépendant de g.

II. Probleme de Cauchy
(cas purement gravitationnel)

6. Le problème de Cauchy.

Le problème de Cauchy (local) relatif à un ouvert borné[3] d'une hypersurface initiale S_0 (soit $x^0 = 0$) est la recherche d'une métrique

---

[3] Nous supposerons de plus que ω_0 possède la propriété du cône – les domaines X_T la possèdent alors aussi.

$g^{\alpha\beta}$ dans un voisinage X de ω_0 et d'une fonction $\varphi(x, \nu)$ sur $\mathcal{M}(X)$ (fibré de base X, de fibre $\mathcal{M}_x$) solutions des équations (3.4) et (4.8) et vérifiant :

$$\left.\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= \varphi^{\alpha\beta} \\ \partial_0 g^{\alpha\beta} &= \psi^{\alpha\beta} \end{aligned}\right\} \quad \text{sur } \omega_0 \tag{6.1}$$

$$\varphi = \psi \quad \text{sur} \quad \mathcal{M}(\omega_0) \tag{6.2}$$

où $\varphi^{\alpha\beta}$, $\psi^{\alpha\beta}$, ψ sont des fonctions données, vérifiant les :

Hypothèses sur les données de Cauchy.

1) $$\eta^{\alpha\beta} - \varphi^{\alpha\beta} | \leqslant \varepsilon - \delta \quad \text{sur} \quad \omega_0 \,, \; \delta > 0 \tag{6.3}$$

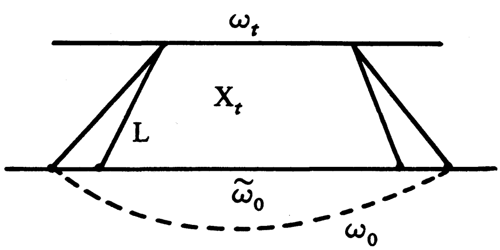
2) $\varphi^{\alpha\beta}$, $\psi^{\alpha\beta}$ et ψ appartiennent respectivement aux espaces de Sobolev

$$\varphi^{\alpha\beta} \in H_{\mu+1}(\omega_0) \;,\; \psi^{\alpha\beta} \in H_\mu(\omega_0) \;,\; \psi \in H_\mu(\mathcal{M}(\omega_0))$$

où $H_\mu(\Omega)$ est l'espace (de Hilbert) des fonctions ayant des dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre μ de carré sommable sur Ω.

Domaine X.

Nous désignerons par X la partie dans le futur de $\omega_0 (x^0 > 0)$ d'un sous-ensemble Ω_T de Ω globalement hyperbolique, et admettant ω_0 pour surface de Cauchy([4]) pour toutes les métriques vérifiant les hypothèses H. On désigne par ω_t l'hypersurface $x^0 = t$ de X, par X_t le sous-ensemble $x^0 < t$ de X.



([4]) C'est-à-dire tel que tous les chemins temporels ou isotropes de Ω_T issus d'un point $x \in \Omega_T$, vers le passé, coupent ω_0 en un point et un seul – il est facile de construire de tels domaines, les cônes relatifs aux métriques g vérifiant les hypothèses H étant tous compris entre 2 cônes déduits (par translation dans R^4) de cônes fixes.

Domaines $\mathfrak{M}_g(X)$:

On désigne par $\mathfrak{M}_g(X)$ l'image dans R^7, par $(x, p) \to (x^\alpha, v^i)$, du sous-fibré de P(M) de base X, pour une métrique g.

7. Espaces fonctionnels E et F.

Nous démontrerons le théorème d'existence en utilisant le théorème de Schauder (toute application continue d'un sous-ensemble convexe compact F d'un espace de Banach E dans lui-même admet un point fixe).

Espace de Banach E.

Ce sera l'espace (de Hilbert) des métriques $g^{\alpha\beta}$ dont chacune des 10 composantes est dans l'espace de Sobolev $H_\mu(X_T)$.

Remarque. – si $\mu \geqslant 3$ l'espace de Sobolev $H_\mu(X_T)$ est un anneau (cf. Dionne [6] ch. I).

Sous-espace F *de* E.

Ce sera l'espace des métriques $g^{\alpha\beta}$ telles que :

1) $g^{\alpha\beta} \in H_{\mu+1}(X_T)$

et
$$\| \eta^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} \|_{X_T}^{\mu+1} \leqslant \varepsilon'$$

où ε' est une constante positive que nous préciserons, $\| \quad \|_X^{\mu+1}$ désigne la norme de Sobolev

$$\| u \|_X^{\mu+1} = \left\{ \sum_{|j| \leqslant \mu+1} \int |D^j u|^2 \, d^4x \right\}^{1/2}$$

2) $g^{\alpha\beta}$ vérifie les conditions (6.1) sur ω_0.

PROPOSITION 1. – *Il existe* $T_1 > 0$ *tel que toute métrique vérifiant les conditions* 1) *et* 2) *vérifie les hypothèses* H *si* $\mu \geqslant 3$ et $T \leqslant T_1$.

Preuve. – L'inégalité de Sobolev :

$$\operatorname*{Sup}_{\omega} |u| \leqslant c(\omega) \, \| u \|_\omega^\mu$$

si ω est un ouvert borné de R^l et $\mu > \frac{l}{2}$ donne, appliquée à l'ouvert ω_t de R^3

$$\operatorname*{Sup}_{\omega_t} | \partial_0 g^{\alpha\beta} | \leqslant c(\omega_t) \| g^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta} \|^{\mu+1} \quad \text{si} \quad \mu \geqslant 2$$

d'où (on a $\omega_{T_0} \subset \omega_t \subset \omega_0$, donc $c(\omega_t)$ borné par une constante c_0, si $0 \leqslant t \leqslant T_0$) si $T \leqslant T_0$ (arbitraire, fixé) :

$$\operatorname*{Sup}_{X_T} | g^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta} | \leqslant \operatorname*{Sup}_{\omega_0} | \varphi^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta} | + C_0 \int_0^T \| g^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta} \|_{\omega_\tau}^{\mu+1} d\tau$$

donc :

$$\operatorname*{Sup}_{X_T} | g^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta} | \leqslant \varepsilon - \delta + c_0 T^{1/2} \| g^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta} \|_{X_T}^{\mu+1}$$

d'où la borne (3.5) pour $g^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta}$ si

$$T \leqslant \frac{\delta^2}{c_0^2 \varepsilon'^2} = T_1$$

on démontre H_2 de façon analogue si $\mu \geqslant 3$,

PROPOSITION 2. — F *est un sous-ensemble convexe et compact de* E.

Preuve. — Il est évident que F est convexe ; sa compacité résulte du fait que, X_T étant un ouvert borné de R^4 possédant la propriété du cône l'application identique de $H_{\mu+1}(X_T)$ dans $H_\mu(X_T)$ est compacte et du fait que les conditions (6.1) définissent d'autre part un sous-ensemble fermé de $H_{\mu+1}(X_T)$, car la convergence dans $H_{\mu+1}(X_T)$ entraîne la convergence dans $C^1(\overline{X}_T)$ (convergence uniforme) si $\mu \geqslant 3$, $\overline{X}$ désignant la fermeture de X.

8. Fonction de distribution associée à une métrique *g* par un problème de Cauchy.

Il sera commode, pour la suite, de déterminer la fonction de distribution associée à une métrique *g* dans des paramètres y qui dépendent de la métrique mais dont le domaine de variation en est indépendant.

La partie spatiale, g_{ij}, d'une métrique $g \in \mathrm{E}$ admet une décomposition en carrés :

$$g_{ij} X^i X^j \equiv - \sum_j (a^j_i X^i)^2$$

où les a^j_i sont des fonctions C^∞ des g_{ij}, bornés ainsi que chacune de leurs dérivées par rapport aux g_{ij} pour $g \in \mathrm{E}$.

On posera :

$$v^i = \overset{-1}{a_j}{}^i y^j \, |g^{00}|^{-1/2} - \overline{g}^{0i} \tag{8.1}$$

l'image de P_x dans les coordonnées (admissibles) y^j est la boule B, indépendante de x

$$(\mathrm{B}) \quad \sum_j (y^j)^2 \leqslant 1 \tag{8.2}$$

on a d'autre part :

$$\Delta = \frac{\mathrm{D}(y^j)}{\mathrm{D}(v^i)} = |g^{00}|^{3/2} \, |\overline{g}|^{1/2} \quad , \quad (\overline{g} \text{ déterminant de } g_{ij}) \tag{8.3}$$

L'équation de Liouville associée à la métrique g s'écrit, dans les coordonnées y^i :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} + (\overset{-1}{a_j}{}^i y^j \, |g^{00}|^{-1/2} - \overline{g}^{0i}) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \mathrm{A}^i a^j_i \frac{\partial \varphi}{\partial y^j} - \mathrm{NF}\varphi = 0 \tag{8.4}$$

Problème de Cauchy.

Les métriques $g \in \mathrm{F}$ coïncident sur ω_0, les m-hyperboloïdes $\mathrm{P}_x(g)$ correspondant à ces diverses métriques sont donc les mêmes pour chaque $x \in \omega_0$, et à une fonction $\varphi(x, p)$ sur $\mathrm{P}(\omega_0)$ correspondra, quelque soit $g \in \mathrm{F}$, une même fonction $\psi(x, y)$ sur $\omega_0 \times \mathrm{B}$. Nous ferons sur cette fonction l'hypothèse suivante :

Hypothèse sur $\psi = \varphi(x, y)|_{x^0 = 0}$

$$\psi \in \mathrm{H}_\mu(\omega_0 \times \mathrm{B}) \, , \tag{8.5}$$

$\mathrm{H}_\mu(\omega_0 \times \mathrm{B})$ désigne l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur $\omega_0 \times \mathrm{B}$ ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant \mu$, $|||\psi|||^\mu_{\omega_0 \times \mathrm{B}}$ la norme dans cet espace.

Proposition. — *L'équation de Liouville* (8.4) *a, si* $g \in \mathrm{F}$, *une so-*

lution et une seule $\varphi \in H_\mu(X_T \times B)$ *prenant pour* $x^0 = 0$ *la valeur* ψ , *si* $\mu \geqslant 5$.

Preuve. – L'équation de Liouville (8.4) s'écrit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} + \alpha^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \beta^i \frac{\partial \varphi}{\partial y^i} - \mathrm{NF}\varphi = 0 \tag{8.6}$$

où α^i, β^i, F sont des polynômes des y^j, à coefficients dans $H_\mu(X_T)$ (et même $H_{\mu+1}(X_T)$ pour α^i). C'est une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont les bicaractéristiques (c'est-à-dire les chemins temporels au sens de Leray) sont les géodésiques de la métrique g (d'où le domaine d'influence $X_T \times B$).

L'existence et l'unicité résultent du théorème de Leray-Dionne [5], [6]. Nous allons dans le cas simple de l'équation (8.6) établir directement la majoration fondamentale, pour avoir une estimation des bornes qui sera utile par la suite.

Dérivons p fois ($|p| \leqslant \mu$) par rapport aux variables x et y l'équation (8.6), on trouve, en désignant par C^p_q des nombres, une expression du type :

$$\frac{\partial}{\partial x^0}(D^p \varphi) + \sum_{|q|=0}^{p} c^p_q D^{p-q}\alpha^i \times \frac{\partial}{\partial x^i}(D^q \varphi)$$

$$- \sum_{|q|=0}^{p} c^p_q D^{p-q}\beta^i \times \frac{\partial}{\partial y^i}(D^q\varphi) - \sum_{|q|=0}^{p} c^p_q \mathrm{N} D^{p-q}\mathrm{F} \times D^q\varphi = 0$$

d'où, en multipliant par $D^p\varphi$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}|D^p\varphi|^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}(\alpha^i |D^p\varphi|)^2 = \mathrm{A}$$

où

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}|D^p\varphi|^2\left(\frac{\partial\alpha^i}{\partial x^i} - \frac{\partial\beta^i}{\partial y^i}\right) - \sum_{|q|=0}^{|p|-1} c^p_q D^{p-q}\alpha^i \times \frac{\partial}{\partial x^i}(D^q\varphi) D^p\varphi$$

$$+ \sum_{|q|=0}^{|p|-1} c^p_q D^{p-q}\beta^i \times D^q\varphi \,.\, D^p\varphi + \sum_{|q|=0}^{p} c^p_q \mathrm{N}D^{p-q}\mathrm{F}\,.\,D^q\varphi D^p\varphi$$

On intègre sur $\mathcal{M}(X_t)$, on obtient

$$\int_{\omega_t \times B} |D^p\varphi|^2\, dx\, dy = \int_{\omega_0} |D^p\varphi|^2\, dx\, dy + \int_0^t \int_{\omega_\tau} \mathrm{A}\, d\tau$$

Pour majorer l'intégrale $\int_{\omega_T} A d\tau$ on utilise :

– pour le premier terme le fait que $\frac{\partial \alpha^i}{\partial x^i}$ et $\frac{\partial \beta^i}{\partial y^i}$ sont uniformément bornés sur X_t pour tout $g \in F$: une borne ne dépendant que de F sera désignée par C_0, $C'_0, \ldots$ etc.

– pour le deuxième terme on utilise le fait que

$$|D^{p-q}\alpha^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(D^q\varphi)\cdot D^p\varphi| \leqslant \frac{1}{2}\left\{ |D^p\varphi|^2 + |D^{p-q}\alpha^i|^2 \left|\frac{\partial}{\partial x^i}(D^q\varphi)\right|^2\right\}$$

puis l'inégalité de Schwarz pour l'intégrale du produit et l'inégalité de Sobolev sur un ouvert Ω borné de R^l

$$\|f\|_{W^m_{4(\Omega)}} \leqslant C(\Omega)\,\|f\|_{H^{(\Omega)}_{m+\nu}}$$

$W^m_4(\Omega)$ est l'espace des fonctions de puissance $4^{\text{ème}}$ sommable sur Ω ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m$, on a

$$\nu > \frac{l}{4}$$

Si $\Omega = \omega_t \times B$ on a $l = 6$ donc $\nu \geqslant 2$; mais, pour les fonctions α^i et β^i de coefficients α^i_J, β^i_J, polynômes des y^i, il existe un nombre $\mathcal{B}$ tel que :

$$|||\alpha^i|||_{W^m_4(\omega_t \times B)} \leqslant \mathcal{B} \sup_J \|\alpha^i_J\|_{W^m_4(\omega_t)}$$

donc (pour ω_t on a $l = 3$, $\nu = 1$)

$$|||\alpha^i|||_{W^m_4(\omega_t \times B)} \leqslant \mathcal{B}C(\omega_t) \sup_J \|\alpha^i_J\|_{H_{m+1}(\omega_t)}$$

qui donnera

$$|||\alpha^i|||_{W^m_4(\omega_t \times B)} \leqslant C_0 \quad \text{si} \quad m \leqslant \mu$$

et de manière analogue

$$|||\beta^i|||_{W^m_4(\omega_t \times B)} \leqslant C_0 \quad \text{si} \quad m \leqslant \mu - 1$$

on aura par cette méthode

$$\left\{ \int_{\omega_t \times B} |D^{p-q}\alpha^i|^2 \left| \frac{\partial}{\partial x^i} (D^q \varphi) \right|^2 d^3x\, d^3y \right\}^{1/2} \leqslant C_0 \, |||\varphi|||^{\mu}_{\omega_t \times B}$$

$$|p| \leqslant \mu \ , \ |q| \leqslant \mu - 3$$

pour $\mu - 2 \leqslant |q| \leqslant \mu - 1$ on obtient la même inégalité puisque $D^{p-q}\alpha^i$ est alors borné par une constante C_0, (on a supposé $\mu \geqslant 5$).

— pour les troisièmes et quatrièmes termes on procède de manière analogue : toutefois β^i est dans $H_\mu(\omega_t \times B)$ et non dans $H_{\mu+1}$, de sorte qu'il faut aussi considérer à part le terme $q = 0$, qui vérifie une inégalité de la même forme parce que

$$\left| \frac{\partial}{\partial y^i} \varphi \right| \leqslant C(\omega_t \times B) \, |||\varphi|||^{\mu}_{\omega_t \times B} \quad \text{si} \quad \mu \geqslant 5$$

On déduit d'autre part de l'équation et des données de Cauchy une majoration de la forme :

$$\left\{ \int_{\omega_0 \times B} |D^p \varphi|^2 \, dx\, dy \right\}^{1/2} \leqslant C_0' \, |||\psi|||^{\mu}_{\omega_0 \times B} \quad \text{pour} \quad |p| \leqslant \mu$$

on obtient finalement la majoration, pour $\mu \geqslant 5$

$$|||\varphi|||^{\mu}_{\omega_t \times B} \leqslant C_0' \, |||\psi|||^{\mu}_{\omega_0 \times B} + C_0 \int_0^t |||\varphi|||^{\mu}_{\omega_\tau \times B} \, d\tau$$

d'où

$$|||\varphi|||^{\mu}_{X_t \times B} \leqslant C_0'' \, |||\psi|||^{\mu}_{\omega_0 \times B} \, (e^{C_0 t} - 1)$$

On déduit immédiatement de cette inégalité l'unicité de la solution dans $H^\mu(X_T)$, on en déduit aussi l'existence soit par la méthode de Lax-Garding-Leray après minoration de l'adjoint, soit en approchant les coefficients et la donnée initiale par des fonctions analytiques (pour lesquelles on utilise le théorème de Cauchy Kovalevski) et faisant un passage à la limite : la méthode de majoration employée précédemment conduit à une majoration du type (pour $t \in T$)

$$|||\varphi_k - \varphi_{k-1}|||^{\mu}_{X_t} \leqslant C_0' \, |||\psi_k - \psi_{k-1}|||^{\mu}_{\omega_0} \, (e^{C_0 t} - 1) + \\ + C''' \, \| g_k - g_{k-1} \|^{\mu+1}_{X_t} \tag{8.7}$$

où C''' est une constante dépendant de F, $|||\psi|||^{\mu}_{\omega_0}$ et T (croissante avec T, nulle pour $T = 0$), φ_k la solution (analytique) de l'équation de Liouville (donnée de Cauchy analytique ψ_k, correspondant à une métrique analytique g_k). L'inégalité (8.7) et la complétude de $H^{\mu}_{X_t \times B}$ montrent l'existence de φ dans $H^{\mu}_{X_t \times B}$, limite de φ_k, solution au sens des distributions de (8.4), donc au sens usuel car de classe C^1 si $\mu \geqslant 5$.

Remarque. — Si $g \in F$ et $\psi > 0$ on a $f > 0$ puisque $\dfrac{df}{d\tau} = 0$ (où $\dfrac{d}{d\tau}$ est la dérivation le long des géodériques de g dans $P(m)$).

9. Application continue de F dans F.

Considérons $\overset{1}{g}{}^{\alpha\beta} \in F$ la fonction $\overset{1}{\varphi} \in H_{\mu}(X_T \times B)$ ($\mu \geqslant 5$) correspondante et le système d'équations aux dérivées partielles linéaires aux inconnues $\overset{2}{g}{}^{\alpha\beta}$

$$-\frac{1}{2}\,\overset{1}{g}{}^{\lambda\mu}\,\partial^2_{\lambda\mu}\,\overset{2}{g}{}^{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta}(\overset{1}{g}{}^{\lambda\mu}\,,\,\partial_{\gamma}\,\overset{1}{g}{}^{\lambda\mu}) = \overset{1}{T}{}^{\alpha\beta}\;, \tag{9.1}$$

où
$$T^{\alpha\beta}(x) = \int_B \Phi^{\alpha\beta}(x\,,y)\,d^3y$$

avec (cf. (5.2), (8.3)).

$$\Phi^{\alpha\beta}(x\,,\,y) = \varphi(x\,,\,y)\,v^{\alpha\beta}(x\,,\,y)\,|\,g(x)\,|^{1/2}\,|\,\Delta(x)\,|^{-1/2} \tag{9.2}$$

Les coefficients du système (9.1) sont dans l'anneau $H_{\mu}(X_T)$, en particulier on a $\Phi^{\alpha\beta} \in H_{\mu}(X_T \times B)$ donc, pour presque tout x,

$$\Phi^{\alpha\beta}(x\,,\,y) \in H_{\mu}(B)$$

et D^j étant une dérivation (au sens des distributions) d'ordre $\leqslant \mu$:

$$D^j\,T^{\alpha\beta} = \int_B D^j\,\Phi^{\alpha\beta}\,d^3y$$

d'où on déduit

$$\| T^{\alpha\beta} \|^{\mu}_{X_T} \leqslant (\text{mes B})^{1/2} \, ||| \Phi^{\alpha\beta} |||^{\mu}_{X_T \times B} \leqslant M_0 \, ||| \varphi |||^{\mu}_{X_T \times B} \tag{9.3}$$

où M_0 est une constante (qui ne dépend que de ε, ε', δ, c'est-à-dire de F.

Proposition. – *Le problème de Cauchy* (6.1) *relatif au système* (9.1) *a une solution et une seule, pour* $\mu \geqslant 5$

$$\overset{2}{g} \in H_{\mu+1}(X_T)$$

Preuve. – Le théorème de Leray-Dionne affirme l'existence et l'unicité de la solution de ce problème, pour $\mu \geqslant 3$, nous avons ici supposé(5) $\mu \geqslant 5$ pour que le deuxième membre, $T^{\alpha\beta}$, soit dans $H_\mu(X_T)$. Nous allons établir directement la majoration, pour étudier de façon précise l'application $\overset{1}{g} \to \overset{2}{g}$ ainsi définie. Posons

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta}$$

$h^{\alpha\beta}$ vérifie l'équation :

$$-\frac{1}{2} \overset{1}{g}{}^{\lambda\mu} \, \partial^2_{\lambda\mu} h^{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta}(\overset{1}{g}{}^{\lambda\mu}, \partial_\rho \overset{1}{g}{}^{\lambda\mu}) = \overset{1}{T}{}^{\alpha\beta} \tag{9.4}$$

on dérive p fois et on multiplie par $\partial_0 D^p h^{\alpha\beta}$, on trouve : (les C^p_q sont des nombres)

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4} \partial_0 \{ \overset{1}{g}{}^{00}(\partial_0 D^p h^{\alpha\beta})^2 - \overset{1}{g}{}^{ij}(\partial_i D^p h^{\alpha\beta})(\partial_j D^p h^{\alpha\beta})\} + \partial_i H^i \\
&+ \frac{1}{4}(\partial_0 D^p h^{\alpha\beta})^2 \, \partial_0 \overset{1}{g}{}^{00} - \frac{1}{4}(\partial_i D^p h^{\alpha\beta})(\partial_j D^p h^{\alpha\beta}) \, \partial_0 g^{ij} \qquad (9.5)\\
&- \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{|p|-1} C^p_q \, \partial_0 D^p h^{\alpha\beta}(D^{p-q} \overset{1}{g}{}^{\lambda\mu} D^q \partial^2 h^{\alpha\beta}) + \partial_0 D^p h^{\alpha\beta} D^p \overset{1}{H}{}^{\alpha\beta} = \\
&= \partial_0 D^p h^{\alpha\beta} \times D^p \overset{1}{T}{}^{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

H^i est un polynôme des dérivées d'ordre $p+1$ de $h^{\alpha\beta}$ qui possède la propriété que l'intégrale de $\partial_i H^i$ sur la frontière (caractéristique, c'est-à-dire isotrope pour $\overset{1}{g}$) de l'émission (relative à $\overset{1}{g}$) rétrograde de

(5) Il serait sans doute possible d'affaiblir cette hypothèse en utilisant le rôle différent joué par les variables x et y.

ω_t (qui est intérieure à X_t) est non négative. Si $\overset{1}{g} \in F$ on déduit de (9.5) par intégration sur la partie $t \geqslant 0$ de cette émission, en prenant $|p| \leqslant \mu$ et utilisant des techniques analogues à celles rappelées au paragraphe précédent

$$\|h\|_{\omega_t}^{\mu+1} \leqslant K_0 \|h\|_{\omega_0}^{\mu+1} + K_0' \int_0^t \|h\|_{\omega_\tau}^{\mu+1} d\tau + K_0'' \int_0^t \|\overset{1}{T}\|_{\omega_\tau}^{\mu} d\tau + K''' \tag{9.6}$$

où K_0 et, K_0', M_0, M_0' sont des constantes ne dépendant que de F et où

$$\|h\|_{\omega_t}^{\mu+1} = \sum_{\alpha,\beta} \|h^{\alpha\beta}\|_{\omega_t}^{\mu+1}$$

et définition analogue pour $\|\overset{1}{T}\|_{\omega_t}^{\mu}$,

On trouve en utilisant le système (9.4)

$$\|h\|_{\omega_0}^{\mu+1} \leqslant K_0^{(N)} \|DC\|_{\omega_0}^{\mu+1} \tag{9.7}$$

où on a posé

$$\|DC\|_{\omega_0}^{\mu+1} = \{\|8 - \eta\|^{\mu+1} + \|\gamma'\|_{\omega_0}^{\mu}\}$$

d'où, compte tenu de (9.3).

$$\|h\|_{\omega_t}^{\mu+1} \leqslant M_0'' \|DC\|_{\omega_0}^{\mu+1} + K_0' \int_0^t \|h\|_{\omega_\tau}^{\mu+1} d\tau + \\ + M_0' \||\psi|\|_{\omega_0 \times B}^{\mu} (e^{C_0 t} - 1) + K_0''' \tag{9.8}$$

D'où résulte l'inégalité, pour $t \leqslant T$

$$\|h\|_{X_t}^{\mu+1} \leqslant \{M_0'' \|DC\|_{\omega_0}^{\mu+1} + K \||\psi|\|_{\omega_0 \times B}^{\mu} + K_0'''\} (c^{K'_0 t} - 1) \tag{9.9}$$

où K est une constante, croissante avec T, nulle pour $T = 0$.

On déduit de (9.9) l'existence d'un nombre $T_2 > 0$ (dépendant de F et $\||\psi|\|_{\omega_0 \times B}^{\mu}$) tel que pour

$$t \leqslant T_2 \leqslant T$$

on ait

$$\|h\|_{X_t}^{\mu+1} \leqslant \varepsilon'$$

Pour $t \leqslant T_2$ l'application $\overset{1}{g} \to \overset{2}{g}$ est donc une application de F dans F.

Pour montrer que cette application est continue on pose, si $\overset{1}{g}$ et $\overset{1}{g}'$ sont deux points de F

$$\overset{1}{G} = \overset{1}{g}' - \overset{1}{g}$$

et, de même

$$\overset{2}{G} = \overset{2}{g}' - \overset{2}{g}$$

si $\overset{2}{g}'$ et $\overset{2}{g}$ sont respectivement les images de $\overset{1}{g}'$ et $\overset{1}{g}$ par l'application précédente.

Par soustraction des équations aux dérivées partielles correspondantes on trouve que $\overset{2}{G}$ vérifie le système

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\, \overset{1}{g}'^{\alpha\beta}\, \partial^2_{\alpha\beta}\, \overset{2}{G}^{\lambda\mu} + \frac{1}{2}\, \overset{1}{G}^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta}\, \overset{2}{g}^{\lambda\mu} + \overset{1}{H}^{\alpha\beta} - \overset{1}{H}'^{\alpha\beta} \\ &= \overset{1}{T}^{\alpha\beta} - \overset{1}{T}'^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{9.10}$$

Les techniques des paragraphes précédents fournissent, après $\mu - 1$ dérivations, une inégalité du type

$$\| \overset{2}{G} \|^{\mu}_{X_t} \leqslant M(e^{M_0 t} - 1)\, \| \overset{1}{G} \|^{\mu}_{X_t} \quad \text{pour } t \leqslant T \tag{9.11}$$

qui montre la continuité (dans $H^{\mu}(X_T)$) de l'application considérée.

10. Théorème d'existence et d'unicité.

En rassemblant les hypothèses et conclusions des paragraphes précédents, en utilisant des méthodes standard pour le problème de Cauchy intrinsèque en Relativité Générale [4], et un théorème d'unicité précédemment démontré [8] on obtient le théorème d'existence et d'unicité géométrique suivant :

Hypothèses :

1) Σ est une variété différentiable de dimension 3, de classe $C^{\mu+2} (\mu \geqslant 5)$; $\bar{g}$ est une métrique riemanienne uniformément définie < 0 sur Σ, K un tenseur d'ordre 2 symétrique sur Σ,

$$g \in \widetilde{H}_{\mu+1}(\Sigma) \quad , \quad K \in \widetilde{H}_{\mu}(\Sigma) \quad , \quad \mu \geq 5$$

($\widetilde{H}_{\mu}(\Sigma)$ espace des fonctions qui sont dans $H_{\mu}(\Omega)$ pour tout ouvert Ω relativement compact de Σ).

2) $\overline{f}$ est une fonction positive sur $T(\Omega)$ (fibré tangent à Σ)

$$\overline{f} = \widetilde{H}_{\mu,\overline{g}}(T(\Sigma)) \quad , \quad \mu \geq 5$$

c'est-à-dire $\overline{f} \in H_{\mu,\overline{g}}(T(\Omega))$ pour tout ouvert Ω relativement compact de Σ ; $H_{\mu,\overline{g}}(T(\Omega))$ est l'espace des fonctions $\overline{f}(\overline{x}, \overline{p})$ possédant la propriété requise au § 8, c'est-à-dire telles que $\psi(\overline{x}, \nu) \in H_{\mu}(\mathcal{M}(\Omega))$ où on a posé :

$$\psi(\overline{x}, \nu) = (\{m^2 - \overline{g}(\overline{p}, \overline{p})\,^3 \overline{f}(\overline{x}, \overline{p})\} \circ \pi \tag{10.1}$$

où π est l'application

$$\overline{p} \to \nu = \frac{\overline{p}}{(m^2 - \overline{g}(\overline{p}, \overline{p}))^{1/2}} \tag{10.2}$$

(les relations (10.1), (10.2) sont liées à l'interprétation qui sera faite de $\overline{p}$ au b) des conclusions).

3) $\overline{g}$, K et $\overline{f}$ vérifient sur Σ les équations des contraintes (cf. [4]).

Conclusions :

I – Il existe un espace temps (V_4, g), une fonction positive f sur $P(V_4)$ et une sous-variété S de V_4 tels que

1) g et f vérifient le système d'Einstein-Liouville(6)

$$g \in \widetilde{H}_{\mu}(V_4) \qquad f \in \widetilde{H}_{\mu,g}(P(V_4))$$

2) Il existe un difféomorphisme Λ de Σ sur S tels que ;

a) l'image par Λ de $\overline{g}$ et K coïncident avec les 2 formes quadratiques fondamentales de S comme sous variété de (V_4, g).

b) la fonction f prend sur P(S) la valeur suivante

$$f(x, p)\,|_{P(S)} = \overline{f} \circ \Lambda'$$

où Λ' est l'application de $T(\Sigma)$ sur P(S) définie par

----

(6) On dit que $f \in H_{\mu,g}(P(\Omega))$ si la fonction $\varphi(x, y)$ correspondante (cf. § 4 et 8) est dans $H_{\mu}(\Omega \times B)$.

$$(\overline{x}\,,\overline{p}) \to (\Lambda(\overline{x})\,,p(\Lambda\,\overline{p}))$$

où $\Lambda\,\overline{p}$ est le vecteur tangent à S en x image par Λ de $\overline{p}$ et $p(\Lambda\,\overline{p})$ le vecteur $P_x(S)$ (c'est-à-dire de $T_x(V_4)$ de projection $\Lambda\,\overline{p}$ sur $T_x(S)$.

II – Cette solution est unique (à une isométrie près) dans la classe des solutions globalement hyperboliques maximales (cf. [7]) admettant Σ pour surface de Cauchy.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. PICHON, L'équation de Boltzman relativiste, séminaire Lichnerowicz, Collège de France (1966).

[2] J. EHLERS, Relativistic Kinetic theory, lecture Notes Varenna, (1969).

[3] K. BITCHELER, Cauchy problem for the relativistic Boltzman equation, *Comm. Maths. Phys.* (1967).

[4] Y. BRUHAT, "Cauchy problem" in "Gravitation, an introduction to current research" L. Witten ed. 1962 (J. Wiley).

[5] J. LERAY, Hyperbolic differential equations, Princteon, I.A.S. (1953).

[6] P. DIONNE, Le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles hyperboliques, *Journ. An. Math.* (1962).

[7] Y. CHOQUET-BRUHAT and R. GEROCH, "Global aspects of the Cauchy problem in General Relativity" *Comm. Maths. Phys.* (1969).

et "Problème de Cauchy intrinsèque en Relativité Générale" *C.R.Ac. Sc.* t. 269, 746-748, (1969).

[8] Y. CHOQUET-BRUHAT, "Uniqueness and local stability for the Einstein-Liouville equations" *Journ. Math. Phys.,* (1970).

Manuscrit reçu le 2 octobre 1970

Yvonne CHOQUET-BRUHAT
Université de Paris VI
Département de Mécanique
11, Quai St Bernard
Paris 5°