ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GÉRARD CŒURÉ

Fonctions plurisousharmoniques sur les espaces vectoriels topologiques et applications à l'étude des fonctions analytiques

Annales de l'institut Fourier, tome 20, nº 1 (1970), p. 361-432

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1970__20_1_361_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
20,1 (1969), 361-432

FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES SUR LES ESPACES VECTORIELS TOTOLOGIQUES ET APPLICATIONS A L'ÉTUDE DES FONCTIONS ANALYTIQUES

par Gérard COEURÉ

Introduction.

L'étude des fonctions plurisousharmoniques sur les polycercles, nous a conduit à utiliser ces fonctions sur les boules d'un espace normé munies de la topologie affaiblie. Aussi nous définissons et dégageons, dans le premier chapitre, les propriétés générales des fonctions plurisousharmoniques sur des parties plus générales que les ouverts d'un e.v.t., à savoir les parties f-ouvertes (finitely-open selon Hille-Phillips [18]). Après avoir généralisé à ce cadre la topologie fine de Cartan-Brelot et établit le principe "fin" du Maximum, nous démontrons que l'enveloppe supérieure d'une famille localement bornée supérieurement de fonctions plurisousharmoniques sur une partie f-ouverte ω, a pour régularisée s.c.s. une fonction plurisousharmonique, si une fonction distance sur ω vérifie une hypothèse de semi-continuité. Ce résultat continue une suite de recherches : P. Lelong [22], Kieselman [20], Cœuré [11], P. Lelong [23].

Les polycercles déjà introduits dans une note antérieure [11] sont définis au chapitre II, dans les espaces localement convexes séparés et quasi-complets E. Ils généralisent les polydisques de $\mathbf{C}^n$ et ont pour objet d'introduire des mesures dont le support soit aussi étendu dans E qu'il m'a été possible et jouent un rôle analogue aux mesures harmoniques. Si $\mathcal{R}$ est un polycercle défini comme $\{X \in E \mid X = \Sigma x_i\, e_i\}$ où (e_i) est une famille sommable dans E, où chaque x_i décrit le cercle unité du plan complexe, on construit une mesure μ_x sur l'arête de $\mathcal{R}$ telle que $f(a) \leqslant \int f(\xi)\, d\mu_x(\xi)$, pour toute fonction plurisousharmonique dans une partie f-ouverte contenant $\mathcal{R}$, pour tout $a = \Sigma x_i\, e_i (|x_i| < 1)$. $d\mu_y/d\mu_x$ est essentiellement borné pour chaque y dans l'intersection de la boule unité de C^N avec une certaine variété $V \ni x$ dont on donne une description détaillée. Après avoir transporté V dans E, l'étude des mesures μ_x permet de donner une sorte de propriété du tout ou rien sur l'intégrabilité des fonctions plurisousharmoniques par rapport aux mesures μ_x. Néanmoins une fonction plurisousharmonique peut très bien être $\equiv -\infty$ sur un polycercle ; plus, la proposition 6.1 montre que la plupart des polycercles sont polaires, aussi le problème se posait-il de construire une suite de polycercles telle que toute fonction plurisousharmonique soit μ_x-intégrable sur l'un d'entre eux pour un nombre assez grand de x. Une solution positive est donnée à ce problème dans une étude particulière où E vérifie des hypothèses réalisées par le dual fort d'un espace de Fréchet nucléaire.

Si E est un espace de Fréchet, les polycercles nous permettent de donner quelques propriétés nouvelles des ensembles strictement polaires étudiés par P. Lelong [23]. Après avoir remarqué que les ensembles strictement polaires peuvent ne pas être de classe $\mathfrak{P}$ au sens de Ph. Noverraz [27], on établit, par des méthodes inspirées par la théorie du potentiel, un théorème de prolongement du type Riemann des fonctions plurisousharmoniques aux ensembles strictement polaires et fermés, on démontre aussi qu'une réunion dénombrable d'ensembles strictement polaires est encore de ce type. La fin du chapitre II est consacrée à l'étude d'enveloppes du type Perron-Wiener qui nous permettent d'établir la propriété suivante de l'ensemble singulier A où la régularisée s.c.s. d'une certaine classe de fonctions sous-médianes u diffère de u^* : si E est un espace de Banach, tout fermé de A est coupé par la frontière de toute boule B suivant un ensemble négligeable pour l'application du principe du Maximum dans B.

Les chapitres III et IV abordent le problème du prolongement analytique sur une variété étalée X sur un espace de Banach E. Selon un résultat de P. Lelong et de l'auteur [25] et [8] assurant la stabilité de la plurisousharmonicité par composition avec les fonctions analytiques, on peut définir les fonctions plurisousharmoniques sur X et plus généralement sur une variété banachique. Si Y est un ouvert connexe de X supposé connexe aussi, (Y , X) est un couple de prolongement si toute fonction C-analytique sur Y se prolonge à X. En dimensions finies les anneaux $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$ de fonctions C-analytiques sur X et Y sont alors isomorphes lorsqu'on les munit de la topologie de la convergence compacte. En dimension infinie, cette topologie n'est plus adaptée au problème puisque, selon un mémoire d'Alexander [1], $\mathcal{O}_Y$ et $\mathcal{O}_X$ ne sont plus isomorphes.

Dans le chapitre IV, en supposant E séparable, nous construisons une topologie sur $\mathcal{O}_X$, définie comme limite inductive d'une famille $\mathcal{F}_\tau$ d'espaces de Fréchet indexés par une famille de fonctions s.c.i. sur X, telle que si (X , Y) est un couple de prolongement $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$ munis de ces topologies sont isomorphes. On peut alors démontrer que (X , Y) est un couple de prolongement pour les fonctions C-analytiques à valeurs vectorielles.

Il nous a fallu, au préalable dans le chapitre III, introduire sur X deux fonctions $d(x)$ et $d_a(x)$ jouant le même rôle que dans $\mathbf{C}^n$ joue la distance d'un point (resp. parallèlement à une direction) au complémentaire d'un ouvert. Cette généralisation nous permet de définir la notion de variété pseudo-convexe étalée sur un espace de Banach en montrant que les propriétés suivantes, déjà équivalentes en dimension finie selon le mémoire de P. Lelong [26], le sont encore en dimension infinie :

i) $\log d(x)$ est plurisousharmonique sur X

ii) $\log d_a(x)$ est plurisousharmonique sur X

iii) il existe une fonction plurisousharmonique tendant vers $+\infty$ lorsque $d(x)$ tend vers 0.

iv) Pour tout compact K de X, $\inf\limits_{x \in \hat{K}} d(x)$ est strictement positif, où K est l'enveloppe de K relativement aux fonctions plurisousharmoniques sur X.

La dernière partie du chapitre IV est un essai pour établir l'existence d'une enveloppe d'holomorphie. Elle n'est encore que partiellement satisfaisante. Nous arrivons à munir une partie $\mathcal{E}(X)$ du spectre de $\mathcal{O}_X$ pour la topologie déjà introduite, d'une structure de variété étalée sur E telle que $(X , \mathcal{E}(X))$ soit un couple de prolongement, mais nous ne pouvons montrer la maximalité de $\mathcal{E}(X)$ parmi les couples de prolongement (X , Y) que relativement à ceux pour lesquels il existe une suite (X_n , Y_n) de couples de prolongement tels que $X_n \subset X$, $\cup Y_n = Y$ et $\inf\limits_{y \in Y_n} d(y) > 0$ quel que soit n. $\mathcal{E}(X)$ contient les homomorphismes continus pour la topologie de la convergence compacte.

Le dernier chapitre développe une application des fonctions plurisousharmoniques à une généralisation des espaces de Hardy [17] aux domaines cerclés de $\mathbf{C}^n$. $\mathrm{H}^{p>0}(\mathrm{D})$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur D tel que $\int |f(x\, e^{i\theta})|^p \, d\theta$ est une majorante plurisurharmonique sur D ; si u désigne la plus petite d'entre elles, si $d\sigma$ est l'élément d'aire d'une boule tout entière dans D, $\left[\int u \, d\sigma \right]^{1/p}$ définit un écart sur H^p qui en fait un espace vectoriel topologique métrisable et complet. Contrairement au cas du cercle, si $n > 1$ H^p n'est pas réflexif ($p > 1$). En effet on démontre que la réflexivité entraînerait la densité des fonctions holomorphes et continues sur $\overline{\mathrm{D}}$, or un exemple, non trivial d'ailleurs, montre qu'il n'en est pas ainsi en général.

Afin d'étudier les fonctions de H^p à la frontière, on suppose que D est un domaine d'holomorphie borné, disqué. Soit dg la mesure de Haar (à droite) du groupe G des automorphismes analytiques de D conservant l'origine. On introduit une classe $\mathfrak{M}$ de mesures positives sur la frontière de Silow S(D) de D : $\mu \in \mathfrak{M}$ si et seulement si $\int f \, d\mu \leqslant \int f(g \cdot x) \, d\sigma(x) \, dg$ pour toute fonction plurisurharmonique sur D, s.c.i. sur $\mathrm{D} \cup \mathrm{S(D)}$; $\mathfrak{M}$ est vaguement fermé et si G agit transitivement sur S(D), ce qui est réalisé si D est un domaine de Cartan d'après Furstenberg [13], $\mathfrak{M}$ contient dg.

Si E est la réunion des droites issues de l'origine sur lesquelles une fonction donnée de H^p est dans l'espace de Hardy du cercle intersection avec D, S(D) – E est de μ-mesure nulle, $\forall \mu \in \mathfrak{M}$, de telle sorte que l'on peut définir une fonction frontière f^* associée. On montre alors que $\sup\limits_{\mu \in \mathfrak{M}} \left[\int |f^*(x\, e^{i\theta})|^p \, d\theta \, d\mu \right]^{1/p}$ est une norme ($p \geqslant 1$) équivalente à celle de H^p. On obtient, en conséquence, l'appartenance de f^* à $\mathrm{L}^p(dg)$ si G agit transitivement sur S(D). Ces espaces H^p apparaissent alors comme des sous-espaces d'une classe étudiée par Bochner [2], mais les renseignements sont plus riches, car selon notre méthode la classe de Bochner consiste, en sens inverse, à partir de la classe $\mathfrak{M}$ réduite à une seule mesure circulairement invariante. Enfin un dernier résultat caractérise les fonctions de H^p approchables en norme par les fonctions holomorphes sur D et continues sur $\overline{\mathrm{D}}$.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur M. Hervé pour les multiples améliorations dont ce travail lui est redevable et aussi pour tous les conseils et entretiens qu'il m'a accordés durant toutes mes études mathématiques.

Je suis heureux de remercier Monsieur P. Lelong pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à ces recherches qui ont leur source dans ses travaux. Je suis très honoré qu'il ait bien voulu faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie Monsieur P. Eymard qui a bien voulu proposer le second sujet et présider cette thèse, ainsi que Monsieur J.P. Ferrier qui a accepté de se joindre au jury.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

LES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES DEFINITIONS ET PREMIERES PROPRIETES

H est une variété linéaire dans un espace vectoriel topologique séparé complexe E ; H est muni de la topologie induite par E. Une partie ω de H est dite f-ouverte si son intersection avec toute variété linéaire de dimension finie est ouverte. Les parties f-ouvertes de H sont les ouverts d'une topologie "f-ouverte".

Cette topologie induit sur toute sous-variété H$'$ de H, la topologie "f-ouverte" de H$'$; en effet si ω' est une partie f-ouverte de H$'$, $\omega = \omega' \cup (\mathrm{H} - \mathrm{H}')$ est alors f-ouverte dans H et a pour trace ω' sur H$'$. La topologie "f-ouverte" est identique à la topologie euclidienne lorsque H est de dimension finie. Toute partie f-ouverte de H sera toujours munie de la topologie induite par H. Les composantes connexes d'une partie f-ouverte sont f-ouvertes.

1. Les fonctions plurisousharmoniques.

Definition 1.1. – *Une partie ω, f-ouverte de* H, *sera dite localement f-connexe, si tout point x de ω possède un voisinage* V *tel que toute variété de dimension finie issue de x coupe* V *suivant un ouvert connexe.*

Proposition 1.1. – *Si ω est f-ouvert et localement f-connexe, ses composantes connexes sont localement f-connexes et ouvertes dans ω.*

Démonstration. – Soit ω' une composante connexe de ω, soit x dans ω' qui possède un voisinage V selon la définition 1.1 ; V est alors contenu dans ω'.

Definition 1.2. – *Une fonction f sera dite plurisousharmonique (abrév. p.s.h.) dans une partie f-ouverte ω si :*

– *f est à valeurs dans* $[-\infty, +\infty[$.

– *pour toute droite complexe d située dans* H, *la restriction de f à chaque composante de $d \cap \omega$ est sous-médiane ou* $\equiv -\infty$.

– *f n'est pas $\equiv -\infty$ sur chaque composante connexe de ω.*

– *f est s.c.s. dans ω.*

Une fonction p.s.h. sur ω est sousharmonique ou $\equiv -\infty$ sur chaque composante connexe de $d \cap \omega$ pour toute droite complexe d de H. Plus généralement si H$'$ est une sous-variété linéaire de H, la trace sur chaque composante connexe de $H' \cap \omega$, d'une fonction p.s.h. sur ω, est p.s.h. ou $\equiv -\infty$.

L'enveloppe inférieure d'un ordonné filtrant décroissant de fonctions p.s.h. sur ω est sur chaque composante connexe de ω p.s.h. ou $\equiv -\infty$.

Si F est un sous-espace vectoriel fermé de E, les fonctions p.s.h. sur E/F muni de la topologie quotient, induisent canoniquement des fonctions p.s.h. sur E. En particulier si H est une sous-variété linéaire directe de E, les fonctions p.s.h. sur H se relèvent en des fonctions p.s.h. sur E.

Il résulte du caractère local de la sousharmonicité que toute fonction localement p.s.h. ou $\equiv -\infty$ est p.s.h. ou $\equiv -\infty$ sur chaque composante connexe de ω.

Une fonction est dite plurisurharmonique si son opposé est p.s.h.

PROPOSITION 1.2. – *L'ensemble des infinis négatifs d'une fonction u p.s.h. dans ω est d'intérieur vide, lorsque ω est localement f-connexe.*

Démonstration. – On peut supposer ω connexe en raisonnant sur une composante connexe. Soit $X = \{x \in \omega / u = -\infty$ dans un voisinage de $x\}$. Il suffit de montrer que X est fermé dans ω pour conclure. Soit $a \in \overline{X}$, soit V un voisinage de a tel que V soit coupé par toute droite complexe issue de a suivant un ouvert connexe, soit $x_0 \in V \cap X$, soit x quelconque dans V. Si H$'$ est la sous-variété engendrée par a, x, x_0, la trace de u sur $H' \cap \omega$ est p.s.h. ou $\equiv -\infty$ sur la composante connexe de $H' \cap \omega$ contenant a ; cette composante connexe contient x et x_0 ; puisque u vaut $-\infty$ dans un voisinage de x_0, u vaut $-\infty$ en x d'après la validité de la proposition à démontrer en dimension finie. u est donc $\equiv -\infty$ sur V.

PROPOSITION 1.3. — *Si ω est f-ouvert et localement f-connexe, toute fonction p.s.h. f dans ω est encore p.s.h. dans tout ouvert partiel ω' de ω.*

Démonstration. — ω' est de la forme $\omega \cap \Omega$ où Ω est ouvert dans H. Soit x dans ω' et V un voisinage de x selon la définition 1.1. Il existe d'après la proposition précédente y dans V tel que $f(y) \neq -\infty$. La droite d joignant x à y est coupée par V suivant un domaine où f est sousharmonique, f sera donc sousharmonique sur $d \cap V \cap \Omega$, et aussi en particulier sur la composante connexe contenant x de cet ouvert de C qui est contenu dans la composante connexe de x dans ω'.

PROPOSITION 1.4. — *L'ensemble des fonctions p.s.h. dans ω forment un cône convexe réticulé supérieurement.*

Démonstration. — La seule propriété non trivialement vérifiée est la stabilité par addition, ce qui revient à démontrer que la réunion des infinis négatifs des fonctions u et v, p.s.h. dans ω connexe, est distincte de ω.

Soit $x_0 \in \omega$ tel que $u(x_0) > -\infty$, il existe, d'après la proposition 1.2 et la locale f-connexité, un voisinage V de x_0 et $x_1 \in V$ tels que $v(x_1) > -\infty$ et $x_1 \neq x_0$, et la droite $\overline{x_1 x_0}$ coupe V suivant un ouvert connexe. Alors u et v sont sousharmoniques sur $\overline{x, x_0} \cap V$, il existe donc un point où u et v diffèrent tous deux de $-\infty$.

Exemple de partie f-ouverte, localement f-connexe, non ouverte.

On précise un exemple dû à Pollard [10, p. 14]. Dans un espace normé E, de dimension infinie, on prend une suite x_n telle que : $\|x_n\| = 1 \quad \forall n$, et (x_n) n'ait pas de point d'accumulation. On pose $I_n = \left\{ x \mid x = \lambda x_n,\ |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\}$. Soit $\omega = E - \cup I_n$, ω est f-ouverte (il suffit pour cela qu'un nombre fini seulement de I_n se trouve dans tout sous-espace de dimension finie). L'origine est le seul point non intérieur dans E et en ce point la propriété de f-connexité est vérifiée.

2. Ensembles effilés et topologie fine.

DEFINITION 2.1. — *Une partie* A *de* H *sera dite effilée dans* H *au point* $x_0 \in$ H *si* $x_0 \in$ H $-$ $\overline{\text{A}}$, *ou si, dans le cas contraire, il existe une fonction* u, *p.s.h. dans un voisinage de* x_0 *dans* H *telle que* : $\lim_{y \to x_0\,,\, y \in A - \{x_0\}} \sup u(y) < u(x_0)$.

La réunion de deux ensembles effilés en x_0 est effilée en x_0 (démonstration identique au cas classique).

DEFINITION 2.2. — *La topologie borne supérieure de la topologie la moins fine rendant continue les fonctions p.s.h. sur* H *et de la topologie f-ouverte sera appelée topologie fine de* H *et notée* $\mathcal{C}_\mathrm{H}$.

Un système fondamental de voisinages de x_0 dans $\mathcal{C}_\mathrm{H}$ est formé par les intersections des complémentaires des ensembles effilés en x_0 et ne contenant pas x_0, avec les voisinages f-ouverts de x_0.

Le complémentaire d'une partie ω f-ouverte peut être non effilé en un point de ω, de telle sorte que $\mathcal{C}_\mathrm{H}$ est en général strictement plus fine que la topologie la moins fine rendant continue les fonctions p.s.h. Reprenons en effet l'exemple du paragraphe 1.

Soit B une boule centrée en O et une fonction u p.s.h. dans B, quel que soit $k > 0$ il existe n tel que B $-$ I_n rencontre k.B ; le principe du maximum appliqué à u sur la droite supportant I_n conduit à $u(\mathrm{O}) \leqslant \sup_{k\mathrm{B}-\omega} u$. Le complémentaire de ω n'est donc pas effilé en O.

Si H est de dimension finie, $\mathcal{C}_\mathrm{H}$ est exactement la topologie la moins fine rendant continue les fonctions p.s.h. Si H est une droite, $\mathcal{C}_\mathrm{H}$ est la topologie fine de H. Cartan.

PROPOSITION 2.1. — *Si* H′ *est une sous-variété linéaire directe de* H, *alors* $\mathcal{C}_{\mathrm{H}'}$, *est la topologie induite par* $\mathcal{C}_\mathrm{H}$ *sur* H′.

Démonstration. — Une partie effilée en $x_0 \in$ H′ dans H est coupée par H′ suivant une partie effilée en x_0 dans H′ ; réciproquement si p est un projecteur continu de H sur H′, toute partie effilée en x_0 dans H′ est l'image réciproque d'une partie effilée en x_0 dans H car toute fonction p.s.h. sur H′ se relève en $u_0\, p$ p.s.h. sur H.

(Principe du Maximum).

THEOREME 2.1. – *Soit ω une partie f-ouverte de* H *telle que tout $x \in \omega$, il existe une droite complexe d coupant ω suivant un ouvert dont la composante connexe $\ni x$ est bornée. Soit $\Delta(\omega)$ les points frontières de ω pour la topologie $\mathcal{C}_H$. Pour toute fonction u p.s.h. dans ω on a :*

$$\overline{\lim_{y \to x}}\, u(y) < +\infty \quad et \quad \overline{\lim_{\substack{y \to x \\ \mathcal{C}_H}}}\, u(y) \leqslant 0 \quad , \ \forall x \in \Delta(\omega) \Longrightarrow u \leqslant 0$$

sur ω.

Démonstration. – Soit D la composante connexe de $d \cap \omega$ contenant x, on sait que D n'est C^1 effilée en aucun point frontière ; d'autre part tout point frontière de D est dans $\Delta(\omega)$, et le filtre des complémentaires dans d des ensembles effilés en un point x_0 de d, est plus fin que le filtre induit par $\mathcal{C}_H$ sur d.

3. Le théorème de convergence.

ω est une partie f-ouverte de H telle que tout $a \in$ H, la distance de x au complémentaire de ω parallèlement à a soit une fonction s.c.i. de x dans ω. Si ω' est une partie ouverte de ω, ω' vérifie encore cette propriété ; en effet $\omega' = \omega \cap V$, où V est un ouvert de H et l'on a $d_a^{\omega'} = \inf(d_a^{\omega}, d_a^{V})$, or d_a^{V} est s.c.i.

THEOREME 3.1[1] – *L'enveloppe supérieure d'une famille* (resp. la lim. sup. d'une suite) *de fonctions p.s.h. dans ω et localement bornées supérieurement et uniformément, a pour régularisée s.c.s. une fonction p.s.h, dans ω* (resp. *une fonction p.s.h. ou $\equiv -\infty$ sur chaque composante de ω*)

Démonstration. – Soit I un ensemble d'indices (resp. I = N) ; soit u_i la famille donnée dont l'enveloppe supérieure est v_1 (resp. v_2 la lim. sup.) $v^*_{1 \text{ ou } 2}$ désigne la régularisée s.c.s. de $v_{1 \text{ ou } 2}$. Il faut montrer que $\forall x_0 \in \omega$, $\forall a \in$ H

[1] Comme me l'a fait remarquer M. Lelong, la démonstration donnée ici s'applique à la lim. sup. d'un filtre admettant une partie cofinale dénombrable.

$$v^*_{1 \text{ ou } 2}(x_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int v^*_{1 \text{ ou } 2}(x_0 + \rho\, a\, e^{i\theta})\, d\theta \;,$$

pour ρ assez petit.

En restreignant ω à un voisinage convenable de x_0, on peut supposer les $u_i \leqslant 0$ sur ω. L'hypothèse sur ω entraîne l'existence d'un voisinage V de x_0 et d'un $r > 0$ tels que $y + z\,a \in \omega \ \ \forall y \in \mathrm{V}$, $\forall |z| \leqslant r$. Soit $\varepsilon > 0$ et $0 < \rho \leqslant r$, il existe un voisinage W_θ de O dans E tel que $v^*(\rho\, a\, e^{i\theta} + y) \leqslant v^*(\rho\, a\, e^{i\theta} + x_0) + \varepsilon$, quel que soit y pris tel que $\rho\, a\, e^{i\theta} + y$ soit dans $(x_0 + \rho\, a\, e^{i\theta} + \mathrm{W}_\theta) \cap \omega$. Soit W'_θ un voisinage de O dans E tel que $\mathrm{W}'_\theta + \mathrm{W}'_\theta \subset \mathrm{W}_\theta$.

D'autre part, il existe subdivision finie (t_k) de $[0,2\pi]$ telle que : $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int v^*(x_0 + \rho\, a\, e^{i\theta})\, d\theta \geqslant \dfrac{1}{2\pi}\, \Sigma \mathrm{M}_k(t_{k+1} - t_k) - \varepsilon$ où M_k est la borne supérieure de v^* sur le compact

$$\mathrm{T}_k = \{x_0 + \rho\, a\, e^{i\theta} \;,\; \theta \in [t_k \;,\; t_{k+1}]\} .$$

Effectuons un recouvrement fini de T_k de la forme

$$\mathrm{T}_k \subset \bigcup_{\text{finie}} (x_0 + \rho\, a\, e^{i\theta_i} + \mathrm{W}'_{\theta_i}) \,.$$

Posons $\mathrm{W}'_k = \cap\, \mathrm{W}'_{\theta_i}$, alors $\forall \theta \in [t_k \,,\, t_{k+1}]$, $\ni \theta_i \in [t_k \,,\, t_{k+1}]$ tel que

$$\rho\, a\, e^{i\theta} + (x_0 + \mathrm{W}'_k) \cap \mathrm{V} \subset \omega \cap (\rho\, a\, e^{i\theta_i} + \mathrm{W}'_{\theta_i} + \mathrm{W}' + x_0) \subset \omega \cap (x_0 + \rho\, a\, e^{i\theta_i} + \mathrm{W}_{\theta_i})$$

On a donc $v^*(y + \rho\, a\, e^{i\theta_i}) \leqslant v^*(x_0 + \rho\, a\, e^{i\theta_i}) + \varepsilon$, quel que soit y dans $(x_0 + \mathrm{W}'_k) \cap \mathrm{V}$. Si M'_k désigne la borne supérieure de v^* sur $\mathrm{T}_k - x_0 + (x_0 + \mathrm{W}'_k) \cap \mathrm{V}$, on a donc $\mathrm{M}'_k \leqslant \mathrm{M}_k + \varepsilon$. Dès que y est dans $(x_0 + \cap\, \mathrm{W}'_k) \cap \mathrm{V}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\frac{1}{2\pi} \int v^*(\rho\, a\, e^{i\theta} + y)\, \frac{1}{2\pi} \leqslant \frac{1}{2\pi}\, \Sigma \mathrm{M}'_k(t_{k+1} - t_k) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int v^*(\rho\, a\, e^{i\theta} + x_0) + 2\,\varepsilon \,.$$

La fonction $y \rightsquigarrow \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int v^*(\rho\, a\, e^{i\theta} + y)\, d\theta$ est donc s.c.s. en x_0 ; la fonction de z : $v_{1 \text{ ou } 2}(y + z\,a)$ étant sous-médiane, on a :

$$v_{1 \text{ ou } 2}(y) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_* v_{1 \text{ ou } 2}(\rho\, a\, e^{i\theta} + y)\, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_* v^*_{1 \text{ ou } 2}(\rho\, a\, e^{i\theta} +$$

$$+ y)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int v^*_{1 \text{ ou } 2}(\rho\, a\, e^{i\theta} + y)\, d\theta \,.$$

Il suffit pour terminer de prendre la lim. sup. des deux membres lorsque y tend vers x_0.

Un exemple de partie ω non ouverte répondant aux conditions d'application du théorème de convergence.

Soit C_0 l'espace des suites à termes nuls à partir d'un certain rang muni de la topologie de l_∞ ; soit ω la partie de C_0 formée par les suites (x_n) telles que $|x_n| < \varepsilon_n \;\; \forall n,$ où ε_n est une suite strictement positive, convergente vers O, donnée.

Soit $a = (a_1, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots) \in C_0$, la distance de x au complémentaire de ω parallèlement à a est la distance du point

$$\left(\frac{x_1}{a_1}, \ldots, \frac{x_N}{a_N}\right)$$

de C^N au complémentaire du polycercle de cet espace dont les rayons sont $\varepsilon_1/|a_1|, \ldots, \varepsilon_N/|a_N|$. Elle est continue. ω n'est pas ouvert dans C_0 ; elle est localement f-connexe car tout point x de ω possède un système fondamental de voisinages dont les intersections avec une variété de dimension finie contenant x, sont des intersections finies d'ouverts convexes ayant en commun x.

CHAPITRE II

POLYCERCLES

E sera supposé dans ce chapitre localement convexe, séparé et pour le moins quasi-complet.

4. Quelques rappels utiles aux paragraphes suivants.

PROPOSITION 4.1. – *Soit* (e_i) *une famille sommable dans* E, *indexée par un ensemble* I ; *alors pour tout* $x = (x_i)$ *dans* $l^\infty(\mathrm{I})$, *la famille* $(x_i\, e_i)$ *est sommable et l'application* u :

$$x = (x_i) \rightsquigarrow u(x) = \Sigma x_i\, e_i$$

a une restriction à toute partie bornée de $l^\infty(\mathrm{I})$, *continue pour la topologie de la convergence simple sur* $l^\infty(\mathrm{I})$. u *transforme donc la boule unité fermée de* $l^\infty(\mathrm{I})$ *en un compact de* E.

Démonstration. – Les sommes $\sum\limits_{i \in \mathrm{L}} x_i\, e_i$ décrivent une partie bornée de E lorsque L décrit les parties finies de I ; en effet les sommes $\sum\limits_{i \in \mathrm{L}} e_i$ décrivent une partie bornée A de E puisque (e_i) est sommable, d'autre part le procédé de sommation d'Abel montre que pour toute semi-norme p, on a

$$p\Big(\sum_{i \in \mathrm{L}} x_i\, e_i\Big) \leqslant 4\, \|x\|_\infty \sup_{y \in \mathrm{A}} p(y) .$$

Puisque E est quasi-complet, il suffit donc maintenant de vérifier que les sommes $\sum\limits_{i \in \mathrm{L}} x_i\, e_i$ forment un filtre de Cauchy ; or étant donné un voisinage V de O défini par une semi-norme continue, il existe une partie finie L_0 telle que les sommes $\sum\limits_{i \in \mathrm{L}} e_i$ soient dans V pour toute partie finie L disjointe de L_0 ; le procédé d'Abel montre que $\sum\limits_{i \in \mathrm{L}} x_i\, e_i$ est alors dans $4\, \|x\|_\infty \cdot \mathrm{V}$.

La continuité de u résulte de l'inégalité suivante obtenue encore, par le procédé d'Abel :

$$p[u(x) - u(x')] \leqslant p\left[\sum_{i\in L} (x_i - x'_i)\, e_i\right] + 4\, \|x - x'\|_\infty\, p\Big(\sum_{I-L} e_i\Big),$$

où p est une semi-norme continue et L une partie finie.

PROPOSITION 4.2. – *Si* K *est un compact convexe équilibré de* E, *le sous-espace* E_K *engendré par* K *et muni de la norme définie par la jauge de* K, *est un espace de Banach.*

Démonstration. – Si p est la jauge de K, si x_n est une suite de Cauchy pour p, alors la suite $p(x_n)$ est bornée et il existe donc $M > 0$ tel que $\frac{1}{M}\, x_n \in K$, quel que soit n. Il existe donc une suite extraite $\frac{1}{M}\, x_{n_i}$ convergente vers $a \in K$ pour la topologie de E. Il suffit de vérifier que $\frac{1}{M}\, x_{n_i}$ converge vers a dans E_K ; or étant donné $\varepsilon > 0$, pour i et j assez grands, $\frac{1}{M}\,(x_{n_i} - x_{n_j})$ est dans $\frac{\varepsilon}{M} \cdot K$ puisque x_n est une suite de Cauchy dans E_K, il en résulte que $\frac{1}{M}\, x_{n_i} - a$ est dans $\frac{\varepsilon}{M} \cdot K$ pour i assez grand, ce qui revient à dire :

$$p(x_{n_i} - M \cdot a) < \varepsilon\,.$$

5. L'inégalité de la moyenne.

U (resp. $\overline{U}$) désignera la boule unité ouverte (resp. fermée) de $l^\infty(I)$; π est le tore à une dimension.

DEFINITION 5.1. – *Pour toute famille sommable* (e_i) *dans* E, $\mathcal{R}(e_i)$: *polycercle défini par les* e_i, *désignera le compact de* E, *image de* $\overline{U}$ *par* u ; $\mathcal{R}^*(e_i)$: *arête de ce polycercle, sera l'image de* π^I.

$E(e_i)$ désignera l'espace de Banach obtenu en prenant pour compact K dans la proposition 4.2 le polycercle $\mathcal{R}(e_i)$. $\overset{\circ}{\mathcal{R}}(e_i)$ sera l'intérieur de $\mathcal{R}(e_i)$ dans $\mathrm{E}(e_i)$; $\overset{\circ}{\mathcal{R}}(e_i)$ est l'image de U par u car : si a est dans $\overset{\circ}{\mathcal{R}}(e_i)$, $\lambda\, a$ est encore dans $\mathcal{R}(e_i)$ pour λ convenable $(\lambda > 1)$, et $a \in \frac{1}{\lambda}\, u(\overline{\mathrm{U}}) \subset u(\mathrm{U})$, la réciproque est immédiate.

Quel que soit a dans $\overset{\circ}{\mathcal{R}}(e_i)$, on posera $\dot{a} = u^{-1}(a) \cap \mathrm{U}$, $\dot{a}$ est non vide.

DEFINITION 5.2. – $\forall x = (x_i) \in \mathrm{U}$, $\forall \theta = (\theta_i) \in \pi^{\mathrm{I}}$, *on pose*

$$\mathrm{T}_x(\theta) = \Sigma\ \frac{x_i + e^{2\pi i \theta_i}}{1 + x_i\, e^{2\pi i \theta_i}}\ e_i\ .$$

T_x *étant une application continue du tore* π^{I} *dans* $\mathcal{R}^*(e_i)$, *on désignera par* μ_x *l'image par* T_x *de la mesure de Lebesgue normalisée* $d\theta$ *sur* π^{I}.

THEOREME 5.1. – *Soit* ω *une partie f-ouverte contenant l'origine de* E. *Alors, pour toute fonction* v *p.s.h. sur* ω, *pour tout polycercle* $\mathcal{R}(e_i)$ *contenu dans* ω, *on a l'inégalité de la moyenne suivante* :

$$\forall a \in \overset{\circ}{\mathcal{R}}(e_i)\ ,\quad \forall x \in \dot{a}\ ,\quad v(a) \leqslant \int v(\xi)\, d\mu_x(\xi)\ .$$

Démonstration.

a) $a = 0\,,\ x = 0.$

Soit u une fonction continue sur $\mathcal{R}^*(e_i)$ et supérieure à v ; posons

$$\mathrm{H} = \int u(\xi)\, d\mu_0(\xi) = \int_{\pi^{\mathrm{I}}} u(\Sigma \exp(2\pi i \theta_i)\, e_i)\, d\theta =$$

$$= \int_0 \int_{\pi^{\mathrm{I}}} u(\Sigma \exp[2\pi i (\theta_i + \varphi)]\, e_i)\, d\theta\, d\varphi\ .$$

Cette intégrale est limite uniforme suivant le filtre $\mathcal{F}$ des parties finies L de I, des intégrales :

$$\mathrm{H_L} = \int_0^1 \int_{\pi^{\mathrm{I}}} u(\Sigma \exp[2\pi i(\theta_i + \varphi)]\, e_i) \underset{i\in \mathrm{L}}{\otimes} d\theta_i\, d\varphi =$$

$$= \int_0^1 \int_{\pi^{\mathrm{I}}} u\Big(\sum_{i\in \mathrm{L}} \exp(2\pi i \theta_i)\, e_i + \sum_{i\in \mathrm{I}-\mathrm{L}} \exp(2\pi i[\theta_i + \varphi])\, e_i\Big) \underset{i\in \mathrm{L}}{\otimes} d\theta_i\, d\varphi\,.$$

$\mathrm{H_L}$ est minoré par la moyenne sur l'arête d'un polycercle de dimension finie de la fonction

$$\widetilde{\nu}\,[(t_i)_{i\in \mathrm{L}}\,,\tau] = \nu\Big(\sum_{i\in \mathrm{L}} t_i\, e_i + \tau \sum_{i\in \mathrm{I}-\mathrm{M}} \exp(2\pi i \theta_i)\, e_i\Big)$$

qui est p.s.h. ou $\equiv -\infty$ sur un voisinage du polycercle $(|t_i| \leqslant 1\,, |\tau| \leqslant 1)$ de $\mathbf{C}^{\mathrm{L}} \times \mathbf{C}$.

$\mathrm{H_L}$ est donc minorée par $\nu(\mathrm{O})$. La constante H sur $\pi^{\mathrm{I}} \times \pi$ étant limite uniforme des fonctions $\mathrm{H_L}$ minorées par $\nu(\mathrm{O})$ est elle-même minorée par $\nu(\mathrm{O})$. Il résulte enfin de la définition de l'intégrale d'une fonction s.c.s. que $\int \nu(\xi)\, d\mu_0(\xi)$ est minorée par $\nu(\mathrm{O})$.

b) Cas général : $a \in \overset{\circ}{\mathfrak{K}}(e_i)\,, x \in \dot{a}$.

La topologie de $\mathrm{E}(e_i)$ étant plus fine que celle induite par E, ν est p.s.h. ou $\equiv -\infty$ sur $\overset{\circ}{\mathfrak{K}}(e_i)$ dans l'espace $\mathrm{E}(e_i)$. Soit $0 < \rho < 1$, l'application $\mathrm{F} : (t_i) \rightsquigarrow \Sigma \dfrac{\rho t_i + x_i}{1 + \rho \bar{x}_i\, t_i} \cdot e_i$ est analytique sur la boule $\mathrm{B}(\mathrm{O}\,, 1/\rho)$ de $l^{\infty}(\mathrm{I})$ et à valeurs dans $\mathfrak{K}(e_i)$; $\nu_0 \mathrm{F}$ est donc p.s.h. ou $\equiv -\infty$ sur $\mathrm{B}(\mathrm{O}\,, 1/\rho)$ pour la topologie normique de $\mathcal{C}^{\infty}(\mathrm{I})$, d'après un résultat de P. Lelong [25] et de l'auteur [8] ; d'autre part (e_i) étant sommable, F a une restriction à $\mathrm{B}(\mathrm{O}\,, 1/\rho)$ continue pour la topologie de la convergence simple, $\nu_0\, \mathrm{F}$ est donc encore s.c.s. pour cette topologie, $\nu_0\, \mathrm{F}$ est p.s.h. sur la partie f-ouverte : $\mathrm{B}(\mathrm{O}\,, 1/\rho)$ de $l^{\infty}(\mathrm{I})$ muni de la convergence simple.

La suite $\varepsilon_i = (\mathrm{O}\,, t_i = 1\,, 0)$ "coordonnée" est sommable dans $l^{\infty}(\mathrm{I})$ muni de la convergence simple, espace qui est quasi-complet ; cette famille définit donc un polycercle contenu dans $\mathrm{B}(\mathrm{O}, 1/\rho)$; il résulte alors de la première partie :

$$\nu(a) = \nu_0\, \mathrm{F}(0) \leqslant \int \nu_0\, \mathrm{F}(\Sigma \exp(2\pi i\, \theta_i)\, \varepsilon_i)\, d\theta$$

$$= \int \nu\Big(\Sigma\, \frac{\rho\, e^{2\pi i \theta_i} + x_i}{1 + \rho x_i\, e^{2\pi i \theta_i}}\, e_i\Big)\, d\theta\,.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme de Fatou et la s.c.s. en ρ sur $[0,1]$ de la fonction sous le signe somme.

Le théorème suivant donne une réponse au problème de l'intégrabilité des fonctions p.s.h. par rapport aux mesures μ_x.

THEOREME 5.2. – *Soient* $x = (x_i)$ *et* $y = (y_i)$ *dans* U ; *les mesures* μ_x *et* μ_y *sont équivalentes lorsque* $(x_i - y_i)$ *est dans* $l^2(\mathrm{I})$; $d\mu_x/d\mu_y$ *est essentiellement borné lorsque* $(x_i - y_i)$ *est dans* $l^1(\mathrm{I})$.

Démonstration. – Rappelons le théorème de S. Kakutani [15, 16] suivant : soit $\mathrm{X}_i\,(i \in \mathrm{I})$ une famille d'espaces compacts ; sur chacun d'eux on se donne deux mesures boréliennes μ_i et μ'_i, positives, de masses totales 1, et équivalentes ; alors les mesures $\underset{i\in \mathrm{I}}{\otimes} \mu_i = \mu$ et $\underset{i\in \mathrm{I}}{\otimes} \mu'_i = \mu'$ sur $\prod \mathrm{X}_i$ sont équivalentes lorsque la famille :

$$\int \left(\frac{d\mu_i}{d\mu'_i}\right)^{1/2} d\mu'_i \,,$$

est multipliable dans $\mathbf{R}_+ - \{0\}$, $d\mu/d\mu'$ vaut alors $\prod_{i\in \mathrm{I}} d\mu_i/d\mu'_i$ ($d\mu'$ presque partout).

Posons $d\mu'_i = \mathrm{K}(x_i\,, y_i\,, \theta_i)\, d\theta_i$, où $\mathrm{K}(z\,, t\,, \theta)$ est le noyau de Poisson du cercle unité au point $\dfrac{z - t}{1 - zt} = r\, e^{i\varphi}$ et vaut

$$\frac{1 - r^2}{[1 - 2r \cos 2\pi(\theta - \varphi) + r^2]}$$

μ'_i est de masse totale 1, soit $\mu' = \otimes \mu'_i$; appelons $\mathfrak{F}$ l'ensemble filtrant des parties finies L de I.

a) μ' *et* $d\theta$ *sont équivalentes lorsque* $(x_i - y_i)_{i\in \mathrm{L}} \in l^2(\mathrm{I})$. Selon le résultat de S. Kakutani, il suffit de montrer que le produit

$$\prod_{i\in \mathrm{I}} \int \sqrt{\mathrm{K}(x_i\,, y_i\,, \theta_i)}\, d\theta_i$$

converge dans $\mathbf{R}_+ - \{0\}$ et $\dfrac{d\mu'}{d\theta}$ sera la limite suivant $\mathfrak{F}$, dans $\mathrm{L}^1(d\theta)$, de $\mathrm{H}_\mathrm{L} = \prod_{i\in \mathrm{L}} \mathrm{K}(x_i\,, y_i\,, \theta_i)$ or

$$\int \sqrt{K(z\,,t\,,\theta)}\,d\theta = (1-r^2)^{1/2} \int_0^1 (1-2r\cos 2\pi\theta + r^2)^{-1/2}\,d\theta\;.$$

Le développement taylorien de second ordre de

$$(1-2r\cos 2\pi\theta + r^2)^{1/2}$$

montre que $\int\sqrt{K(z\,,t\,,\theta)}\,d\theta$ est de la forme $1+0(r^2)$ lorsque r tend vers 0.

b) $\dfrac{d\mu'}{d\theta}$ *est essentiellement borné lorsque* $(x_i - y_i)_{i\in I} \in l^1(I)$.

H_L est uniformément majoré sur π^I par un produit infini de la forme $\prod\limits_{i\in I}(1+0(r_i))$ et converge dans $L^1(d\theta)$ suivant $\mathfrak{F}$ vers $d\mu'/d\theta$; sa limite est donc dans $L^\infty(d\theta)$.

c) μ_x *est l'image de* μ' *par* T_y.

On a $\mu_x = T_x(d\theta)$ $\forall x \in \mathfrak{R}(e_i)$; posons

$$H_L = \int f\circ T_x(\theta) \underset{i\in L}{\otimes} d\theta_i\;,$$

où f est une fonction continue sur $\mathfrak{R}^*(e_i)$; $\mu_x(f)$ est limite uniforme des H_L. Or H_L peut s'écrire, après le changement de variables défini par :

$$\frac{y_i + e^{2\pi i\theta_i}}{1+\overline{y}_i e^{2\pi i\theta_i}} = \frac{x_i + e^{2\pi i\alpha_i}}{1+\overline{x}_i e^{2\pi i\alpha_i}} \qquad \text{entre } \theta_i \text{ et } \alpha_i\;,$$

$$H_L = \int f\Big(\sum_{i\in L}\frac{y_i + e^{2\pi i\theta_i}}{1+\overline{y}_i e^{2\pi i\theta_i}}\,e_i + \sum_{i\in I-L}\frac{x_i + e^{2\pi i\alpha_i}}{1+x_i e^{2\pi i\alpha_i}}\,e_i\Big) \underset{i\in L}{\otimes} d\mu_i'\;.$$

La fonction sous le signe somme converge uniformément suivant $\mathfrak{F}$ vers $f\circ T_y(\theta)$. On a donc $T_y(\mu')(f) = \lim\limits_{\mathfrak{F}} H_L = \mu_x(f)$.

d) μ_x *et* μ_y *sont donc équivalentes* (resp. $d\mu_x/d\mu_y$ est essentiellement borné) en même temps que μ' et $d\theta$.

DEFINITION 5.3. — *Soit* $\mathfrak{R}(e_i)$ *un polycercle,* $\forall a \in E(e_i)$, $\forall$ *entier* $p \geqslant 1$, *on note* $l_a^p(e_i)$ *le sous-espace affine formé par les* b *appartenant à* $E(e_i)$ *tels que* $b-a$ *soit de la forme* $\Sigma x_i e_i$ *avec* $(x_i)_{i\in I}$ *dans* $l^p(I)$.

THEOREME 5.3. — *Soit* ω *une partie f-ouverte et localement f-connexe contenant* $\mathfrak{P}(e_i)$; *soit a dans* $\mathring{\mathfrak{P}}(e_i)$ *ainsi qu'une fonction f p.s.h. dans* ω. *Alors* :

— *ou* : *f vaut* $-\infty$ *sur la composante connexe contenant a, de* $l_a^1(e_i) \cap \omega$ *pour la topologie induite par* $\mathrm{E}(e_i)$.

— *ou* : *pour tout b dans* $l_a^1(e_i) \cap \mathring{\mathfrak{P}}(e_i)$, *tout y dans b f est* $d\mu_y$*-intégrable.*

Démonstration. — La topologie de $\mathrm{E}(e_i)$ étant plus fine que celle de E, $l_a^1 \cap \omega$ est localement f-convexe, on peut donc lui appliquer la proposition 1.2. :

Si f ne vaut pas $-\infty$ sur la composante connexe $\ni a$ de $l_a^1 \cap \omega$, ses infinis négatifs sont d'intérieur vide dans cette composante connexe. Il existe donc b_0 dans $\mathring{\mathfrak{P}}(e_i) \cap \mathcal{C}_a^1$ où $f(b_0) > -\infty$.

Soit b dans $\mathring{\mathfrak{P}}(e_i) \cap \mathcal{C}_a^1$, $\widetilde{f}(t) = f[b + t(b - b_0)]$ est sous-harmonique sur l'ouvert convexe du plan complexe formé par les t tels que $b + t(b_0 - b) \in \mathring{\mathfrak{P}}(e_i)$, ouvert qui contient 0 et 1 où $\widetilde{f}(1) \neq -\infty$. Il existe donc des t arbitrairement petits tels que $\widetilde{f}(t) \neq -\infty$. Le théorème 5.1 permet alors d'affirmer qu'il existe des t arbitrairement petits tels que f soit $d\mu_x$-intégrable tout x dans $\overset{\frown}{b + t(b_0 - b)}$.

Soit $y = (y_i) \in \dot{b}$, il existe $(z_i) \in l^1(\mathrm{I})$ tel que $b_0 - b = \Sigma z_i e_i$ pour tout t assez petit : $(y_i + t z_i)$ appartient à $\overset{\frown}{b + t(b_0 - b)}$. Il reste à appliquer le théorème 5.2 pour conclure à la $d\mu_y$-intégrabilité.

COROLLAIRE 5.1. — *Pour toute fonction f p.s.h. sur* ω, *pour tout polycercle centré en* O *et contenu dans* ω, *on a* :

$$f(0) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{\lambda \mathfrak{P}^*} f(y)\, d\mu_0(y) .$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 5.1 et de la s.c.s. de f.

COROLLAIRE 5.2. — *Une condition nécessaire pour qu'une partie* A *de* E *soit effilée en* O *est que pour tout polycercle centré en* O, *on ait* :

$$\lim_{\lambda \to 0} \mu_0^*(\mathrm{A} \cap \lambda \mathfrak{P}^*) = 0 .$$

Démonstration identique au cas classique.

Un cas particulier.

E a une topologie séparée limite inductive d'une suite croissante E_n d'espaces de Hilbert séparables dont E est la réunion et tel que l'injection canonique $E_n \longrightarrow E_{n+1}$ soit nucléaire.

Gelfand démontre, dans [14], que le dual fort d'un espace de Frechet nucléaire vérifie cette propriété.

PROPOSITION (Grothendieck). – E *est un espace de Montel, il est donc complet, et toute partie bornée de* E *est contenue dans l'un des* E_n.

Cette proposition est la réunion du corollaire 2, proposition 5 des espaces $\mathcal{D}\cdot\mathcal{F}$ et du corollaire 2, du théorème 1 des espaces $\mathcal{L}\cdot\mathcal{F}$ de [15].

THEOREME 5.3. – *Il existe une suite* $(\mathcal{P}_n)$ *de polycercles tels que* :

a) *tout polycercle soit contenu dans l'un d'eux.*

b) *étant donnée une boule* B *de l'un des* E_n, *il existe un des polycercles* $\mathcal{P}_n$ *tel que* B *soit contenu dans* $l_0^1(\mathcal{P}_n)$.

c) *pour toute fonction* p.s.h. *dans un voisinage* V *de* O, *il existe un des polycercles* $\mathcal{P}_n$ *tel que* f *soit* μ_x*-intégrable* $\forall a \in l_0^1(\mathcal{P}_n) \cap \mathring{\mathcal{P}}_n$, $\forall x \in \dot{a}$

Démonstration. – La nucléarité de $E_n \longrightarrow E_{n+1}$ signifie qu'il existe deux systèmes orthonormés dans E_n et E_{n+1} : (φ_k) et (ψ_k) tels que : $x = \Sigma \lambda_k < x , \varphi_k >_n \psi_k$, $\forall x \in E_n$; où λ_k est une suite sommable positive, $< , >_n$ désigne le produit scalaire de E_n.

Les vecteurs $(\sqrt{\lambda_k}\ \psi_k)$ forment une suite sommable dans E_{n+1}, donc dans E, et définissent par conséquent un polycercle. Ces polycercles ainsi que leurs homothétiques dans un rapport rationnel forment la suite $(\mathcal{P}_n)$. En effet :

a) toute partie bornée de E est contenue dans une boule B de l'un des E_n ; cette boule est dans un homothétique de polycercle construit dans E_{n+1} car $\sqrt{\lambda_k} < x , \varphi_k >_n$ est uniformément bornée sur B ; d'autre part la suite $\sqrt{\lambda_k} < x , \varphi_k >_n$ est dans l^1, $\forall x \in$ B, ce qui démontre b).

c) il suffit d'après le théorème 5.2, de vérifier que f n'est pas $\equiv -\infty$ sur la composante connexe $\ni 0$ de l'un des $l^1_0(\mathfrak{P}_n) \cap V$.

Or V coupant chaque E_n suivant un ouvert pour sa topologie propre, f étant s.c.s. sur chacun d'eux, f n'étant pas $\equiv -\infty$ sur tout voisinage convexe de O dans E (Proposition 1.3.), f est p.s.h. dans un voisinage de l'origine de l'un des E_n. Il suffit alors d'appliquer b). C.Q.F.D.

P. Lelong [24] définit et étudie sur un ouvert ω de C^n la classe M_0 réunion des ensembles C_k définis par récurrence comme suit :

1) C_0 est l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques sur ω.

2) C_{k+1} est l'ensemble des fonctions qui sont :

a) enveloppe supérieure d'une suite localement bornée supérieurement de fonctions de C_k.

b) limite décroissante de fonctions définies en a).

Si $u \in M_0$, sa régularisée s.c.s. u^* ne diffère de u, sur toute n-circonférence $\mathfrak{P}$, que sur un ensemble de mesure circulaire nulle et :

$$u^*(x) \leqslant \int_{\mathfrak{P}} u(y)\, dy \;\; ; \; x \text{ centre de } \mathfrak{P},\; dy \;:\; \text{mesure circulaire.}$$

Le résultat suivant est une généralisation aux espaces de Fréchet de cette dernière inégalité.

THEOREME 5.4. – *Soit* E *un espace de Fréchet sur un ouvert* ω *duquel on se donne une famille* u_i (resp. une suite) *de fonctions p.s.h., localement bornées supérieurement dans leur ensemble, ayant* u *pour enveloppe supérieure* (resp. lim. sup.) *de régularisée s.c.s.* u^*, *alors* $\forall a \in \omega$.

a) *si on pose pour tout* b *dans* $l^1_0(\mathfrak{P})$, $\|b\|_1 = \inf \|y\|_1$ *lorsque* y *décrit* $\dot{b} \cap l^1$:

Il existe un polycercle $\mathfrak{P}$ *tel que* $a + \mathfrak{P}$ *soit contenu dans* ω *pour lequel* : $u^*(a) = \lim u(b)$ *lorsque* $\|b - a\|_1$ *tend vers* 0.

b) *pour tout polycercle* $\mathfrak{P}$ *vérifiant* a)

$$u^*(a) \leqslant \int_{\mathfrak{P}^*} u(a + \xi)\, d\mu_0(\xi)\,. \tag{1}$$

$$u^*(a) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{\lambda \mathfrak{P}^*} u(a + \xi)\, d\mu_0(\xi)\,. \tag{2}$$

Démonstration. – On peut prendre a comme origine et supposer les $u_i \leqslant 0$ dans un voisinage convenable de 0.

a) étant donné une suite p_n croissante de semi-normes définissant la topologie de E, on construit une suite e_n telle que $p_n(n\, e_n)$ forme une suite sommable et $u^*(0) = \lim u(e_n)$.

Les vecteurs $n\, e_n$ définissent un polycercle $\mathcal{R}$ et $\|e_n\|_1 \leqslant 1/n$; enfin $\overline{\lim}_{\|b\|_1 \to 0} u(b) \geqslant \overline{\lim}\, u(e_n) = u^*(0) = \lim u(b)$ lorsque $b \longrightarrow 0$ dans E, $\geqslant \lim_{\|b\|_1 \to 0} u(b)$.

b) le théorème 5.1 fournit l'inégalité $u(b) \leqslant \int u(\xi)\, d\mu_y(\xi)$, $\forall b \in \overset{\circ}{\mathcal{R}}$, $\forall y \in \dot{b}$. Prenons b dans $l_0^1(\mathcal{R})$ et y dans $\dot{b}$ tel que

$$\|y\|_1 \leqslant 2\ \|b\|_1\ .$$

Il résulte du théorème 5.2 que $d\mu_y/d\mu_0$ est minoré par

$$\prod(1 - \lambda|y_n|) \geqslant e^{-\lambda' \|y\|_1} \geqslant e^{-2\lambda' \|b\|_1}\ ,$$

où λ et λ' sont des constantes indépendantes de y et de b.

L'inégalité b) s'obtient alors par application du lemme de Fatou ; la relation (2) est conséquence de la s.c.s. de u^*.

6. Ensembles polaires.

Dans ce paragraphe E est un espace de Fréchet.

M. Lelong dans [23,b] distingue deux types d'ensembles polaires.

DEFINITION 6.1. – *Soit ω un ouvert connexe de* E, *une partie* A *de ω est dite polaire* (resp. *strictement polaire*) *dans ω si* A *est contenue dans les infinis négatifs d'une fonction p.s.h.* (resp. *p.s.h. et négative*) *dans ω.*

Un ensemble polaire est d'intérieur vide (Prop. 1.1).

DEFINITION 6.2. – A *est dit de classe $\mathcal{R}$ dans ω au sens de* Ph. Noverraz [27] *si* A $\neq \omega$, *si* A *a pour trace sur chaque composante connexe de $d \cap \omega$ soit un ensemble* C^1 *polaire soit cette composante tout entière, où d est une droite complexe quelconque.*

PROPOSITION 6.1. – *Soit e_n une suite bornée dans un espace de Fréchet* E *de dimension infinie, alors il existe une suite* $\varepsilon_n (\varepsilon_n > 0)$ *telle que* $\mathcal{R}(\varepsilon_n e_n)$ *soit un polycercle strictement polaire dans un ouvert* ω *convenable. Si les* e_n *forment un système total dans* E, *ce que l'on peut réaliser si* E *est séparable, alors* $\mathcal{R}(\varepsilon_n e_n)$ *n'est contenu dans aucun fermé de classe* $\mathcal{R}$ *dans* ω.

Démonstration. – On peut supposer que les e_n forment une suite sommable en prenant des homothétiques convenables ; $E(e_n)$ est alors différent de E sinon celui-ci posséderait un voisinage compact de l'origine et serait de dimension finie ; soit $a \in E - E(e_n)$, il existe une semi-norme continue p ne s'annulant pas en a, telle que $\mathcal{R}(e_n)$ et a soient contenus dans la p-boule ω de rayon 1. Soit E_n l'espace engendré par $e_1, \dots, e_n$; le théorème de Hahn-Banach assure l'existence d'une forme linéaire u_n, majorée en valeur absolue par p, nulle sur E_n et telle que $|u_n(a)| = p(a)$.

Soit λ_n, k_n, ε_n des suites strictement positives :

$$f(x) = \Sigma\lambda_n \log |u_n(x)|$$

est p.s.h. ou $\equiv -\infty$ sur ω ; en faisant un choix tel que $\Sigma\lambda_n < +\infty$, $\Sigma\lambda_n \log k_n = -\infty$, puis ε_n tel que $p\Big(\sum_{i>n} \varepsilon_i x_i e_i\Big) < k_n$, f vaudra $-\infty$ sur $\mathcal{R}(\varepsilon_n e_n)$ et $\log p(a).\ \Sigma\lambda_n \neq -\infty$ en a.

Soit A un fermé de classe $\mathcal{R}$ contenant $\mathcal{R}(\varepsilon_n e_n)$. L'intersection de $\mathcal{R}(\varepsilon_n e_n)$ avec une droite issue de 0 contenue dans $E(e_n)$ a l'origine comme point intérieur, A contient donc $E(e_n) \cap \omega$. Si les (e_n) forment un système total, on aura $A = \omega$, ce qui est impossible.

PROPOSITION 6.2. – *Soit* A *une partie strictement polaire fermée dans un ouvert connexe* ω *d'un espace de Fréchet* E. *Toute fonction* f *p.s.h. sur* $\omega - A$, *localement bornée supérieurement au voisinage de* A *se prolonge d'une façon unique en une fonction p.s.h. dans* ω.

Démonstration. – Soit $g \leqslant 0$, p.s.h. dans ω, valant $-\infty$ sur A, on pose comme dans le cas potentiel réel $f_n = \dfrac{1}{n} g + f$ sur $\omega - A$, $f_n(x) = -\infty$ sur A, f_n est s.c.s. sur ω ; c'est évident sur $\omega - A$; sur A, on a :

$$\overline{\lim_{y \to x \in A}}\, f_n(y) = \overline{\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \omega - A}}}\, f_n(y) \leqslant \frac{1}{n} \overline{\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \omega - A}}}\, g(y) + \\ + (\text{constante} < +\infty) = -\infty .$$

f_n est donc une suite croissante de fonctions p.s.h. ayant pour limite F dont la régularisée s.c.s. F^* est p.s.h. dans ω (théorème 3.1). Il reste à montrer que $F^* = f$ sur $\omega - A$. Le théorème 5.4 assure l'existence d'un polycercle $\mathfrak{R}(e_i) + x$, centré en $x \in \omega - A$, dont les premiers vecteurs directeurs peuvent d'ailleurs être choisis dans des directions arbitraires, telles que

$$F^*(x) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{\lambda \mathfrak{R}^*} F(x + \xi)\, d\mu_0(\xi) .$$

Choisissons le vecteur e_1 sur une droite d issue de x et sur laquelle $g \not\equiv -\infty$ dans tout voisinage suffisamment petit de x ; g ne sera pas $\equiv -\infty$ sur $x + [\, l_0^1(\lambda \mathfrak{R}) \cap \lambda \mathring{\mathfrak{R}}]$ $\lambda < 1$, g sera donc μ_0-intégrable sur $\lambda \mathfrak{R}^*$, d'après le théorème 5.2.

On a donc $F = f$ μ_0-*p.p* sur $x + \lambda \mathfrak{R}^*$ ce qui entraîne

$$F^*(x) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{\lambda \mathfrak{R}^*} f(x + \xi)\, d\mu_0(\xi) = f(x)$$

d'après le corollaire 5.1, f étant p.s.h. dans un voisinage de x.

Unicité. – Soient f_1 et f_2 deux prolongements ; soit $x \in A$, il existe une droite complexe d issue de x telle que $d \cap A$ soit polaire dans la composante connexe de $d \cap \omega$ contenant x ; $d \cap \omega - d \cap A$ n'est donc pas C^1 effilé en x. On a :

$$f_{1\text{ ou }2}(x) = \overline{\lim_{\substack{y \to x \\ y \in d}}}\, f_{1\text{ ou }2}(y) = \overline{\lim_{\substack{y \to x \\ y \in d\, \omega - d \cap A}}}\, f_{1\text{ ou }2} = \overline{\lim_{\substack{y \to x \\ y \in d\, \omega - d \cap A}}}\, f(y) .$$

COROLLAIRE 6.2. – *Toute fonction pluriharmonique* (f *et* $-f$ *p.s.h.*) *sur* $\omega - A$ *bornée localement au voisinage de* A, *se prolonge d'une façon unique en une fonction pluriharmonique sur* ω.

Démonstration. – On prolonge f et $-f$ en f_1 et f_2 p.s.h. dans ω, $f_1 + f_2$ est un prolongement p.s.h. de O, d'après l'unicité on a donc $f_1 + f_2 = 0$ sur ω.

COROLLAIRE 6.3. – $\omega - E$ *est connexe (démonstration identique au cas potentiel réel).*

THEOREME 6.1. – *Toute réunion dénombrable d'ensembles strictement polaires dans ω est strictement polaire dans ω.*

LEMME[1]. – *Soit (u_n) une suite de fonctions p.s.h. dans ω, il existe un point de ω où chaque u_n diffère de $-\infty$.*

Démonstration. – Soit $a \in \omega$, pour tout n, il existe une droite complexe d_n issue de a telle que la trace de u_n sur d_n ne soit pas $\equiv -\infty$ sur la composante connexe contenant a de $d_n \cap \omega$. On peut donc prendre sur chaque d_n un vecteur $e_n \neq 0$ tel que la suite (e_n) soit sommable, définisse un polycercle $\mathcal{R}$, et tel que u_n ne soit $\equiv -\infty$ sur $a + t\, e_n (|t| \leqslant 1)$ qui est dans $l_0^1(\mathcal{R}) + a$. Il résulte du théorème 5.3 que u_n est μ_0-intégrable quel que soit n sur $\mathcal{R}^*$. Les infinis négatifs de u_n sont donc μ_0-négligeables sur $\mathcal{R}^*$; il existe donc un point de $\mathcal{R}^*$ où chaque u_n diffère de $-\infty$.

Démonstration du théorème. – Soit u_n la fonction négative et p.s.h. sur ω valant $-\infty$ sur A_n, soit a tel que $u_n(a) > -\infty$ $\forall n$. Il existe une suite ε_n positive telle que $\Sigma \varepsilon_n u_n$ converge en a ; u est donc p.s.h. dans ω et $\equiv -\infty$ sur $\cup A_n$.

7. Enveloppe de Perron Wiener.

Soit ω un ouvert d'un espace vectoriel topologique E, séparé complexe, tel que $\forall x \in \omega$, il existe une droite complexe d, $d \ni x$, dont la composante connexe de $d \cap \omega$ contenant x est bornée. On rappelle que $\Delta(\omega)$ est la frontière de ω pour la topologie fine $\mathcal{C}$.

DEFINITION 7.1. – *Soit u une fonction bornée inférieurement sur $\Delta(\omega)$; Φ_u désigne l'ensemble des fonctions h plurisurharmoniques sur ω telles que*

[1] Si E n'est pas un Fréchet, le lemme n'a plus lieu ; le lecteur trouvera un résultat plus faible, mais valable sans cette hypothèse sur E, dans le mémoire [24, b] de M. Lelong.

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in\omega}} h(y) > -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{\substack{y\to x\\ \mathscr{C}\\ y\in\omega}} h(y) \geqslant u(x) \quad \forall x \in \Delta(\omega)\ ,$$

H_u *désignera l'enveloppe inférieure de* Φ_u, *dont la régularisée s.c.i. sera notée* $\overline{\mathrm{H}}_u$.

PROPOSITION 7.1. – $\overline{\mathrm{H}}_u$ *est plurisurharmonique sur* ω, *si* Φ_u *est non vide.*

On peut appliquer le théorème de convergence car d'après le principe du maximum (théorème 2.1) Φ_u est borné inférieurement.

THEOREME 7.1. – *Si* u *est p.s.h. dans un voisinage de* $\bar{\omega}$ *et bornée inférieurement sur* $\Delta(\omega)$, *si* E *est un espace de Fréchet, alors* H_u *est la plus petite majorante plurisurharmonique de* u *sur* ω *de* lim. inf. *finie en tout point de* $\Delta(\omega)$, *lorsque* Φ_u *est non vide.*

Démonstration.

a) $\overline{\mathrm{H}}_u$ majore u ; en effet $h - u$ est localement bornée inférieurement au voisinage de tout point de $\omega \cup \Delta(\omega), \forall\, h \in \Phi_u$; on peut donc appliquer le principe du maximum :

$$\underline{\lim}_{\substack{\mathscr{C}\\ y\to x\\ y\in\omega}} (h-u) = \lim_{\substack{\mathscr{C}\\ y\to x\\ y\in\omega}} h(y) - u(x) \geqslant 0\ ,$$

h donc H_u majore u.

En tout point x de ω, il existe un polycercle $\mathscr{P}$ tel que :

$$\overline{\mathrm{H}}_u(x) = \lim_{\lambda\to 0} \int_{\lambda\mathscr{P}^*} \mathrm{H}_u(x+\xi)\, d\mu_0(\xi) \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{\lambda\to 0} \int_{\lambda\mathscr{P}^*} u(x+\xi)\, d\mu_0(\xi) = u(x)$$

d'après les corollaires 5.2 et 5.1.

b) $\mathrm{H}_u = \overline{\mathrm{H}}_u$; il suffit de vérifier que $\overline{\mathrm{H}}_u \in \Phi_u$, or Φ_u étant bornée inférieurement $\lim\limits_{y\to x} \overline{\mathrm{H}}_u(y) > -\infty$, tout $x \in \Delta(\omega)$, d'autre part

$$\lim_{\substack{y\to x\\ \mathscr{C}}} \mathrm{H}_u(y) \geqslant \lim_{\substack{y\to x\\ \mathscr{C}}} u(y) = u(x)\ , \quad \text{tout} \quad x \in \Delta(\omega)\ .$$

c) enfin toute majorante plurisurharmonique de u sur ω de lim. sup. finie en tout point de $\Delta(\omega)$ est dans Φ_u.

COROLLAIRE 7.1. – *Soit u^* la régularisée s.c.s. de l'enveloppe supérieure u d'une famille $\mathcal{H}$ localement bornée supérieurement de fonctions p.s.h. dans un même voisinage de $\overline{\omega}$. Si u est bornée sur $\Delta(\omega)$ alors*

$$\overline{\overline{\mathrm{H}}}_u = \overline{\overline{\mathrm{H}}}_{u^*} = \mathrm{H}_u = \mathrm{H}_{u^*} \quad sur \quad \omega .$$

Démonstration.

a) $\overline{\overline{\mathrm{H}}}_u = \overline{\overline{\mathrm{H}}}_{u^*}$. Soit $m = \inf u$ sur $\Delta(\omega)$, soit $v_m = \sup(v, m)$, $\forall v \in \mathcal{H}$; v_m minore u sur $\Delta(\omega)$, on a donc d'après le théorème 7.1 : $\mathrm{H}_u \geqslant \mathrm{H}_{v_m} \geqslant v_m \geqslant v$ sur ω ; la même utilisation des polycercles qu'au théorème précédent conduit à $\overline{\mathrm{H}}_u \geqslant u$ puis $\overline{\mathrm{H}}_u \geqslant u^*$ sur ω. H_u majore donc H_{u^*} d'après le théorème 7.1.

b) le corollaire résulte alors des inégalités immédiates :

$$\mathrm{H}_u \leqslant \mathrm{H}_{u^*} = \overline{\overline{\mathrm{H}}}_{u^*} = \overline{\overline{\mathrm{H}}}_u \leqslant \mathrm{H}_u .$$

8. Ensembles négligeables([1]).

ω est un ouvert borné de E supposé normé.

DEFINITION 8.1. – *Une partie* A *de* $\Delta(\omega)$ *sera dite négligeable si pour toute fonction u,* p.s.h. *dans ω et bornée supérieurement dans un voisinage de $\Delta(\omega)$,*

$$\lim_{\substack{y \to x \\ \omega}} u(y) \leqslant 0 \quad \forall x \in \Delta(\omega) - \mathrm{A} \Longrightarrow u \leqslant 0 .$$

(L'ensemble vide est négligeable : théorème 2.1).

PROPOSITION 8.1. – *Soit* A *un ensemble polaire dans un voisinage de ω, alors* $\mathrm{A} \cap \Delta(\omega)$ *est négligeable.*

([1]) Cette notion est utilisée dans un sens différent que celui donné par M. Lelong [24, b] ; elle s'inspire de celle employée par M. Brelot.

Démonstration. – Soit u, p.s.h. dans ω, de lim. sup. fine $\leqslant 0$ sur $\Delta(\omega) - A$, de lim. sup. $< +\infty$ sur $\Delta(\omega)$; $\forall x \in \omega$, il existe une droite complexe $d \ni x$, telle que $A \cap d$ soit C^1 polaire dans la connexe de $\omega \cap d$ contenant x.

$\mathcal{C}$ induisant sur d une topologie moins fine que la topologie de H. Cartan, les points frontières de la composante connexe précédente étant dans $\Delta(\omega)$, il suffit d'appliquer la prop. 8.1 en dimension 1, ce qui est bien connu [5].

PROPOSITION 8.2. – *Soit* H *un hyperplan réel, alors pour tout ouvert ω connexe, borné de* E (E *est donc supposé normé*) $H \cap \Delta(\omega)$ *est négligeable tandis que* H *n'est pas polaire dans ω si* H *le coupe.*

Démonstration. – Soit $x \in \omega - H$; il existe une droite $d \ni x$ et ne coupant pas H ; si v est p.s.h. sur ω de lim. sup. $< +\infty$ sur $\Delta(\omega)$ et de lim sup. fine $\leqslant 0$ sur $\Delta(\omega) - H$, v sera négative sur d d'après le principe du maximum en dimension 1 ; on a donc $v \leqslant 0$ sur $\omega - H$. Soit $x \in H \cap \omega$, soit d une droite complexe $\ni x$ et non située dans H, $d \cap \omega - H$ est formé dans un voisinage convenable de x d'un cercle diminué d'un diamètre : ensemble qui est non effilé en $x \cdot v$ étant $\leqslant 0$ sur cet ensemble est $\leqslant 0$ en x ; soit v p.s.h. dans ω ou $\equiv -\infty$, un diamètre d'un cercle ne formant pas un ensemble C^1 polaire, si $v = -\infty$ sur H, $\forall x \in H$, v vaudra $-\infty$ sur l'intersection de toute droite $\ni x$ avec un voisinage convexe de x, ce qui entraîne que v vaut $-\infty$ sur ω (prop. 2.1).

THEOREME 8.1. – *Soit u^* la régularisée s.c.s. de l'enveloppe supérieure u d'une famille localement bornée supérieurement de fonctions p.s.h. et continue dans un ouvert ω d'un espace de Banach* E. *Soit* $A = \{x \mid u^*(x) > u(x)\}$. *Alors* A *est d'intérieur vide et toute partie fermée* F *de* A *contient une partie* A$'$ *ouverte dans le sous-espace* F, *non vide, dont l'intersection avec toute boule centrée sur* A$'$ *et de rayon assez petit est négligeable.*

Démonstration. – L'existence de A$'$ vérifiant les propriétés du théorème entraîne que A est d'intérieur vide.

La fonction $\dfrac{1}{u^* - u}$ est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions s.c.i., et est finie en tout point de l'espace de Baire F ;

il existe donc un ouvert non vide A′ de l'espace F et $\varepsilon > 0$ tels que $u^* - u > \varepsilon$ sur A′. Si u vaut $-\infty$ sur A′, alors A′ est l'ouvert cherché d'après la proposition 8.1.

Dans le cas contraire, soit A″ l'ouvert de A′ où $u > -\infty$, alors tout $x_0 \in A''$, il existe une boule centrée en x_0 au voisinage de laquelle u est bornée, la conclusion résulte alors du lemme suivant :

LEMME. – *Les hypothèses étant les mêmes que dans le corollaire 7.1, l'ensemble* $A_\varepsilon = \{x \mid u^*(x) > u(x) + \varepsilon\}$ *est négligeable sur* $\Delta(\omega)$.

Démonstration. – Il résulte des relations $H_{u^*} = H_u$ (corollaire 7.1) et $H_u \leqslant H_{u^*} + H_{u-u^*}$ que $\overline{H_{u-u^*}} = 0$. Soit φ la fonction caractéristique de A_ε, on a $-\varepsilon\varphi \geqslant u - u^*$ sur $\Delta(\omega)$ et $\overline{H_{-\varphi}} = 0$ par conséquent. Enfin si h est plurisurharmonique, bornée inférieurement au voisinage de $\Delta(\omega)$ et de lim. sup. fine $\geqslant 0$ sur $\Delta(\omega) - A_\varepsilon$, il existe une constante $k > 0$ telle que $\underset{\substack{y \to x \\ \mathscr{C}}}{\lim}\; k\,h(y) \geqslant 1 \quad \forall x \in \Delta(\omega)$;

on a donc $k\,h \geqslant H_{-\varphi} = 0$ et A_ε est négligeable sur $\Delta(\omega)$.

Remarque. – L'hypothèse de continuité sur $\mathscr{H}$ est peut-être superflue mais la complétion de E est indispensable comme le montre l'exemple suivant :

On munit C_0 de la norme de l_∞. Soit ν une enveloppe supérieure localement bornée supérieurement de fonctions sousharmoniques et continues sur C, telle que $\nu(0) = 0$ et $\overline{\lim\limits_{z \to 0}}\; \nu(z) = a > 0$. (Par exemple $\nu(z) = \sup \dfrac{\log|nz + 1|}{\log n}$. On pose pour tout $x = (x_n)$ dans C_0 :

$u(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\, \nu(x_n)$; u est l'enveloppe supérieure de fonctions p.s.h. et continues sur C_0 ; soit $x = (x_1, \ldots, x_N, 0 \ldots)$ alors :

$$u^*(x) = \overline{\lim_{h \to 0}} \left[\sum_{1}^{N} \frac{1}{2^n} \nu(x_n + h_n) + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \nu(h_n) \right] \geqslant u(x) + \frac{a}{2^N} > u(x).$$

CHAPITRE III

DOMAINES PSEUDO-CONVEXES

Le triplet (X, p, E) désignera une variété étalée sur un espace de Banach complexe E, au moyen d'un homéomorphisme local p : $X \rightsquigarrow E$.

Etant donné un sous-espace ω de X, on notera $\omega \longleftrightarrow p(\omega)$ le fait que ω soit homéomorphe par p à $p(\omega)$; p_ω désignera alors $\omega \overset{p}{\rightsquigarrow} p(\omega)$.

Etant donnés $x \in X$, $a \in E$ ($\|a\| = 1$), $B(p(x), r)$ désignera la boule de E de centre $p(x)$ et de rayon r, $D_a(p(x), r)$ sera le cercle de centre $p(x)$ et de rayon r sur la droite de vecteur directeur a dans E, c'est-à-dire $D_a(p(x), r) = \{y \in E \;\; y = p(x) + z\, a, \; |z| \leqslant r\}$.

9. Fonctions distances sur (X, p, E).

LEMME 9.0. — *Soient ω et A deux sous-espaces de X, ω ouvert, tels que $\omega \longleftrightarrow p(\omega)$, $A \longleftrightarrow p(A)$, $p(\omega) \cap p(A)$ connexe. Alors : $\omega \cap A \longleftrightarrow p(\omega) \cap p(A)$.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que

$$p(\omega \cap A) = p(\omega) \cap p(A) .$$

Or $p(\omega \cap A)$ est une partie ouverte de $p(\omega) \cap p(A)$, vérifions qu'elle y est aussi fermée, et soit y un point de son adhérence. Les égalités suivantes démontrent la propriété cherchée : (t est dans $p(\omega) \cap p(A)$)

$$p_\omega^{-1}(y) = \lim_{t \to y} p_\omega^{-1}(t) = \lim_{t \to y} p_{\omega}^{-1}{}_{(A)}(t) = \lim_{t \to y} p_A^{-1}(t) = p_A^{-1}(y)$$

LEMME 9.1. — *Soient ω et ω' deux ouverts de X tels que : $\omega \longleftrightarrow p(\omega)$, $\omega' \longleftrightarrow p(\omega')$, $\omega \cap \omega' \neq \emptyset$, $p(\omega) \cap p(\omega')$ connexe. Alors on a : $\omega \cup \omega' \longleftrightarrow p(\omega) \cup p(\omega')$.*

Démonstration. – Il suffit de vérifier l'injectivité de p sur $\omega \cup \omega'$. Si $y = p(x) = p(x')$, avec x et x' dans $\omega \cup \omega'$, alors x est dans ω et x' dans ω' ; y est donc dans $p(\omega) \cap p(\omega')$. Or, le lemme 9.0 assure que $p(\omega) \cap p(\omega') = p(\omega \cap \omega')$, on a donc $x = p^{-1}_{\omega \cap \omega'}(y) = x'$.

DEFINITION 9.1. – $\forall x \in X$, *on pose*

$$d(x) = \sup\{r > 0 \mid (1)\ \exists\, \omega_r \ni x \quad \text{et} \quad \omega_r \longleftrightarrow B(p(x), r)\}.$$

Pour toute partie A de X, on pose $d(A) = \inf\{d(x),\ x \in A\}$. Il résulte du lemme précédent que l'ouvert ω_r vérifiant (1) est unique, croissant avec r, on le notera $B(x, r)$ et appellera boule de centre x et de rayon r dans X. La borne supérieure définissant $d(x)$ est atteinte, on note $B(x)$ et $B_E(x)$ les boules de rayon $d(x)$, de centres x et $p(x)$ dans X et E respectivement.

PROPOSITION 9.1. – *La fonction* $d(x)$ *est continue dans* X *et vérifie localement* $|d(x) - d(x')| \leqslant \|p(x) - p(x')\|$.

Démonstration. – Il résulte de la définition de $d(x)$ que : $\forall x \in B(x_0)$, on a $d(x) \geqslant d(x_0) - \|p(x) - p(x_0)\|$; $d(x)$ est donc s.c.i.

Démontrons ensuite : (1) $B(x) \cup B(x') \longleftrightarrow B_E(x) \cup B_E(x')$ lorsque x et x' sont suffisamment voisins de x_0. Il suffit, pour appliquer le lemme 9.1 de trouver un voisinage V de x_0 tel que $x_0 \in B(x)$, $\forall x \in V$; or il résulte de la s.c.i. de $d(x)$ l'existence d'un tel V tel que $p(x_0) \in B_E(x)$ $\forall x \in V$, d'autre part on a

$$B(x_0) \cup B(x) \longleftrightarrow B_E(x_0) \cup B_E(x) \quad , \quad \forall x \in B(x_0)$$

d'après le lemme 9.1 ; $B(x)$ contient donc x_0, $\forall x \in B(x_0) \cap V$.

Enfin la boule $B[p(x'), d(x) - \|p(x) - p(x')\|]$ est contenue dans $B_E(x)$ pour x et x' assez voisins de x_0 ; il résulte de (1) que p est un homéomorphisme d'un ouvert contenant x' sur cette boule ; on a donc l'inégalité : $d(x') \geqslant d(x) - \|p(x) - p(x')\|$ pour x et x' assez voisins de x_0. Il suffit de renverser les rôles joués par x et x' pour conclure.

LEMME 9.2. – *Soit* (K_i) *une famille de compacts de* X, *tels que* $\forall i\ K_i \longleftrightarrow p(K_i)$, $p(K_i)$ *soient convexes,* $K_i \cap K_{i_0} \neq \emptyset$

(où K_{i_0} *est l'un des compacts),* $\forall i$ *et* j *la distance de* $p(K_i)$ *à* $p(K_j)$ *soit atteinte sur* $p(K_{i_0})$*. Alors il existe un voisinage* W *de* K_i *tel que* $W \longleftrightarrow p(W)$.

Soient $\varepsilon_i = d(K_i)$ et $V_i = \bigcup_{x \in K_i} B(x, \varepsilon_i)$.

a) on montre d'abord : $V \longleftrightarrow p(V)$, où V est l'un des V_i. Il suffit de vérifier l'injectivité de p sur V ; soient y et y' dans $B(x, \varepsilon)$ et $B(x', \varepsilon)$ respectivement, avec x et x' dans K et $p(y) = p(y')$

$$B(x, \varepsilon) \cap B(x', \varepsilon)$$

n'est pas vide, car, dans le cas contraire, les points du segment $[p(x), p(x')] \cap B(p(x), \varepsilon) \cap B(p(x'), \varepsilon)$, qui est non vide car les deux boules contiennent $p(y)$, qui est tout entier dans $p(K)$, auraient chacun deux antécédents distincts par p^{-1}, l'un dans $B(x, \varepsilon) \cap K$, l'autre dans $B(x', \varepsilon) \cap K$ d'après le lemme 9.0, ce qui est contradictoire avec $K \longleftrightarrow p(K)$. On applique alors le lemme 9.1 à $B(x, \varepsilon) \cup B(x', \varepsilon)$ pour conclure à $y = y'$.

b) on pose $W = \cup V_i$, il reste à vérifier l'injectivité de p sur W, ce qu'il suffit de faire sur $V_i \cup V_j$. Lorsqu'on remarque que $p(V_i)$ et $p(V_j)$ sont convexes, l'application du a) et du lemme 9.1 ramène le problème à : $p(V_i) \cap p(V_j) \neq \emptyset \longrightarrow V_i \cap V_j \neq \emptyset$.

Soient $y \in V_i$, $y' \in V_j$ tels que $p(y) = p(y')$, la distance de $p(K_i)$ à $p(K_j)$ étant atteinte sur $p(K_{i_0})$, il existe a et b dans $p(K_i) \cap p(K_{i_0})$ et $p(K_j) \cap p(K_{i_0})$ respectivement, tels que

$$d(a, b) < \varepsilon_i + \varepsilon_j .$$

On a $V_i \cap K_{i_0} \longleftrightarrow p(V_i) \cap p(K_{i_0})$ et de même pour l'indice j d'après le lemme 9.0. Si $V_i \cap V_j$ était vide, les points du segment $[a, b] \cap B(a, \varepsilon_i) \cap B(b, \varepsilon_j)$, qui est non vide et tout entier dans $p(K_{i_0})$, auraient chacun deux antécédents distincts par p et situés dans $V_i \cap K_{i_0}$ et $V_j \cap K_{i_0}$. Ce qui est contradictoire avec $K_{i_0} \longleftrightarrow p(K_{i_0})$.

DEFINITION 9.2. – $\forall a \in E$ ($\|a\| = 1$), $\forall x \in x$.

On pose

$$d_a(x) = \sup.\{r > 0 \mid (2)\ \exists \omega_r \ \ \textit{et} \ \ \omega_r \longleftrightarrow D_a(p(x)), r)\} .$$

Il résulte du lemme 9.2 que le compact ω_r vérifiant (2) *est unique croissant avec r ; on le notera* $D_a(x, r)$.

On note $D_a(x) = \bigcup_{r < d_a(x)} D_a(x, r)$.

Proposition 9.2. – *La fonction $d_a(x)$ est s.c.i. sur* X *et vérifie*

1) $d(x) = \inf_{\|a\|=1}, d_a(x)$.

2) *si* $d_a(x_0) < +\infty$, $\inf d_a(x) = 0$ *lorsque x décrit* $D_a(x_0)$.

Démonstration.

– s.c.i. de d_a.

Soit $D_a(x_0, r)$ $(r < d_a(x_0))$; le lemme 9.2 assure l'existence d'un voisinage V de ce D_a tel que $V \longleftrightarrow p(V)$. Il suffit alors de remarquer que dans $p(V)$, la distance au complémentaire de $p(V)$, parallèlement à une direction est s.c.i.

– $d(x) = \inf_{\|a\|=1} d_a(x)$.

On a trivialement $d_a(x) \geqslant d(x)$ $\forall a \in E(\|a\| = 1)$. Supposons : $d_a(x) > d(x) + (\varepsilon > 0)$, $\forall a \in E(\|a\| = 1)$; alors le lemme 9.2 appliqué à la famille de compacts $K_a = D_a(x, d(x) + \varepsilon)$ et $K_0 = \{x\}$, entraînerait $d(x) \geqslant d(x) + \varepsilon$.

– $\inf \cdot d_a(x) = 0$, lorsque x décrit $D_a(x_0)$.

Supposons $d_a(x) \geqslant \varepsilon > 0$, $\forall x \in D_a(x_0)$; alors le lemme 9.2 appliqué à la famille des compacts :

$$K_x = D_a\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad K_0 = D_a\left(x_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

lorsque x décrit K entraînerait : $d_a(x_0) \geqslant d_a(x_0) + \dfrac{\varepsilon}{6}$.

10. Domaines pseudo-convexes.

Theoreme 10.1. – *Les propositions suivantes sont équivalentes* :

i) $-\log d_a(x)$ *est p.s.h. ou* $\equiv -\infty$ *sur chaque composante connexe de* X, $\forall a \in E(\|a\| = 1)$.

ii) $\exists u$, *p.s.h. sur* X, *tel que* $u(x) \longrightarrow +\infty$ *lorsque* $d(x) \longrightarrow 0$.

iii) *pour tout compact* K *dans* X, $d(\hat{K})$ *est strictement positif, où* $\hat{K} = \{x \in X \mid u(x) \leqslant \sup\limits_K u(x)\ ,\ \forall u$ *p.s.h. sur* X$\}$.

iv) $-\log d(x)$ *est p.s.h. ou* $\equiv -\infty$ *sur chaque composante connexe de* X.

Démonstration. – L'implication i) $\Longrightarrow$ iv) résulte des propositions 9.2 et 9.1, les implications iv) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) sont immédiates. La démonstration qui suit de l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i) s'inspire de celle donnée par H.J. Bremermann [7b] en dimension finie.

Il reste donc à montrer que, sous les hypothèses iii), la fonction $\varphi(\tau) = -\log d_a\,[p^{-1}(p(x_0) + \tau w)]$ est sous-harmonique pour

$$|\tau| < d(x_0)\ ,\ \forall w \in E(\|w\| = 1)\ .$$

Soit r, $0 < r < d(x_0)$, soit $f(\tau)$ une fonction holomorphe dans un voisinage du cercle $|\tau| \leqslant r$, le problème est équivalent au suivant :

$$\varphi(\tau) \leqslant \operatorname{Re} f(\tau) \quad |\tau| = r \Longrightarrow \lambda_0 = \operatorname*{Max}_{|\lambda| \leqslant r} \cdot [\varphi(\tau) - \operatorname{Re} f(\tau)] \leqslant 0\ .$$

On raisonne par l'absurde en supposant $\lambda_0 > 0$. Soit $e^{-\lambda_0} < \rho < 1$. On introduit le point A_τ de $D_w(x_0\,,r)$ tel que

$$p(A_\tau) = p(x_0) + \tau\, w\ ,\quad \forall |\tau| \leqslant r\ .$$

Considérons les compacts suivants

$$K_0 = D_w(x_0\,,r)\ ,\quad K_\tau = D_a(A_\tau\,,e^{-\operatorname{Re} f(\tau) - \lambda})$$

pour $|\tau| \leqslant r$ et $\lambda > \lambda_0$, $Q_{\tau'} = D_a(A_{\tau'}, \rho\, e^{-\operatorname{Re} f(\tau')})$ pour $|\tau'| = r$. Admettons provisoirement le résultat suivant, qui sera démontré en fin.

LEMME. – *Il existe un voisinage* W *de* $K_0 \bigcup\limits_{|\tau| \leqslant r} K_\tau \bigcup\limits_{|\tau'| = r} Q_{\tau'}$, *tel que* $W \longleftrightarrow p(W)$.

On pose alors $M_{\tau,\lambda,t} = P_W^{-1}(p(x_0) + \tau\, w + t a\, e^{-f(\tau) - \lambda})$ pour $|\tau| \leqslant r$, $\lambda > \lambda_0$, $|t| \leqslant 1$; $\tilde{u}(\tau) = u(M_{\tau,\lambda,t})$ est sousharmonique au voisinage du cercle : $|\tau| \leqslant r \cdot \bigcup\limits_{|\tau'| = r} Q_{\tau'} = Q$ est compact, comme image réciproque par p_W^{-1} d'un compact de E. Enfin $M_{\tau,\lambda,t} \in Q$ lorsque $|\tau| = r$.

Ces constatations font que : $\widetilde{u}(\tau) \leqslant \sup\limits_{|\tau|=r} \widetilde{u}(r) \leqslant \sup u \cdot \forall |\tau| \leqslant r$, $\lambda > \lambda_0$, $|t| \leqslant 1$.

Il en résulte que : $M_{\tau,\lambda,t} \in \hat{Q}$, $\forall |\tau| \leqslant r$, $\lambda > \lambda_0$, $|t| \leqslant 1$, ce qui entraîne d'après iii), $d(M_{\tau,\lambda,t}) \geqslant d(\hat{Q}) > 0$ dans les mêmes conditions.

Et pourtant, $\varphi(\tau)$ étant s.c.s. d'après la proposition 9.2, le maximum définissant λ_0 est atteint, il existe τ_0, $|\tau_0| \leqslant r$, tel que

$$\varphi(\tau_0) = \operatorname{Re} f(\tau_0) + \lambda_0 .$$

On sait, d'après la proposition 9.2, que $d(x)$ prend des valeurs arbitrairement petites sur $D_a(A_{\tau_0})$; il existe donc $k(0 < k < 1)$ et un point M dans $D_a(A_{\tau_0}, k\, d(A_{\tau_0}))$ tel que $d(M) < d(\hat{Q})$; or ce point M s'écrit $M_{\tau_0,\lambda,t}$ avec $\lambda = \lambda_0 - \log k > \lambda_0$; et $|t| \leqslant 1$. Ce qui établit la contradiction.

Démonstration du lemme. – K_τ et Q_τ rencontrent K_0 en A_τ et $A_{\tau'}$ respectivement, de telle sorte que l'application du lemme 9.2 est commandée par la vérification de l'hypothèse : la distance de $p(K_\tau)$ à $p(Q_\tau)$ est atteinte sur $p(K_0)$. Deux cas se présentent :

– ou a et w sont colinéaires, alors $p(K_0)$, $p(K_\tau)$, $p(Q_\tau)$ sont trois cercles dans un même sous-espace de dimension 1, les deux derniers étant centrés en $p(A_\tau)$ et $p(A_{\tau'})$ situés dans $p(K_0)$. La conclusion s'impose.

– ou a et w engendrent un sous-espace H de dimension 2 ; on peut définir sur H un produit scalaire, dont la norme associée est notée $\| \ \|'$, tel que a et w soient orthogonaux. H admet un supplémentaire topologique de F [15] ; $\|x_F\| + \|x_H\|'$ définit sur E une norme compatible avec sa structure uniforme initiale. Pour cette norme, la distance de $p(K_0)$ à $p(Q_\tau)$ est celle de $p(A_\tau)$ à $p(A_{\tau'})$, situés dans $p(K_0)$.

DEFINITION 10.1. – *Toute variété étalée sur un espace de Banach, vérifiant l'une des conditions du théorème précédent sera dite pseudo-convexe.*

PROPOSITION 10.1. — *Pour qu'une variété étalée soit pseudo-convexe, il faut et il suffit que chaque composante connexe le soit.*

La restriction de la fonction distance d à une composante connexe est la fonction distance de cette composante connexe, d'autre part la plurisousharmonicité est un phénomène local, la proposition résulte donc de iv).

CHAPITRE IV

PROLONGEMENT ANALYTIQUE

X est une variété étalée, connexe, sur un espace de Banach E complexe. X est alors un espace topologique séparable, en effet : si $X_{n,m}$ désigne l'ensemble des points x qui peuvent être joints à un point x_0 donné de X, par une chaîne de n boules de rayon $\rho/2m$ (ρ donné $< d(x_0)$) et tels que $d(x) > \rho/m$, si on pose $X_{0,m} = \{x\}$, il résulte du lemme 9.1 la relation :

$$X_{n+1,m} \subset X_{n,m} \bigcup_{y \in I} B\left(y, \frac{\rho}{m}\right),$$

pour toute partie I partout dense dans $X_{n,m}$, ce qui permet de conclure, par récurrence, à la séparabilité des $X_{n,m}$. Enfin X étant connexe, est réunion des $X_{n,m}$.

$\mathcal{O}_X$ désigne l'anneau des fonctions C-analytiques sur X, à valeurs scalaires ; si f est dans $\mathcal{O}_X$, $\rho(x, f)$ désignera le rayon de convergence normale du développement au point $p(x)$, de $f \circ p^{-1}$ en polynômes homogènes ; si $r_0 = \inf[\rho(x, f), d(x)]$, $x' \in B(x, r_0)$ entraîne, grâce à la proposition 9.1, $\rho(x', f) \geqslant \rho(x, f) - \|p(x) - p(x')\|$; $\rho(x, f)$ est donc s.c.i. en x. Le polynôme homogène de degré n du développement de f au point x a une valeur en un point a de E qui sera notée $f_n(x, a)$.

11. Une topologie sur $\mathcal{O}_X$.

Pour toute fonction τ, strictement positive et s.c.i. sur X, majorée par la fonction distance d, $\mathcal{F}_\tau(X)$ désigne l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{O}_X$ telles que $\rho(x, f) \geqslant \tau(x)$ $\forall x \in X$; $\mathcal{B}_\tau$ désigne l'ensemble des réunions finies de boules de X de rayons strictement inférieurs à $\tau(x)$ lorsqu'elles sont centrées en x. On sait que $\mathcal{F}_\tau$ est aussi l'ensemble des fonctions de $\mathcal{O}_X$, bornées sur toute partie appartenant à $\mathcal{B}_\tau$ [1]. On munit $\mathcal{F}_\tau$ de la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathcal{B}_\tau$. La famille de normes $\|f\|_A = \sup_{x \in A} |f(x)|$ définit, lorsque A décrit $\mathcal{B}_\tau$, la topologie de $\mathcal{F}_\tau$.

PROPOSITION 11.1. – *$\mathcal{F}_\tau(X)$ est une C-algèbre de Fréchet.*

Démonstration. – Soit x_n une suite partout dense dans X, r_m une suite partout dense dans $]0,1[$; si $B_{i,j}$ désigne la boule de centre x_i et de rayon $r_j \cdot \tau(x_i)$, les normes $\|\cdot\|_{B_{i,j}}$ forment une sous-famille dénombrable, définissant grâce à la s.c.i. de τ, la topologie de $\mathcal{F}_\tau$. $\mathcal{F}_\tau$ est donc métrisable. On sait d'autre part, que les restrictions des fonctions de $\mathcal{F}_\tau$ à l'une des boules de $\mathcal{B}_\tau$ forment un sous-espace fermé des fonctions bornées dans cette boule [12]. $\mathcal{F}_\tau$ est donc complet.

Les espaces $\mathcal{F}_\tau$ forment une famille filtrante croissante de sous-espaces (algébriques) de $\mathcal{O}_X$, dont il est la réunion (f quelconque dans $\mathcal{O}_X$ appartient à $\mathcal{F}_\tau$ avec $\tau(x) = \inf[\rho(x, f), d(x)]$). On munira $\mathcal{O}_X$ de la topologie limite inductive des topologies des espaces $\mathcal{F}_\tau$. En conséquence de la proposition précédente, $\mathcal{O}_X$ est un espace tonnelé et bornologique ; sa topologie est plus fine que la convergence compacte, $\mathcal{O}_X$ est donc en particulier séparé.

Si E est de dimension finie, chaque espace $\mathcal{F}_\tau$ est identique à $\mathcal{O}_X$ muni de la convergence compacte ; en dimension infinie, la situation est évidemment toute différente, en particulier :

PROPOSITION 11.2. – *La limite inductive des $\mathcal{F}_\tau$ n'est pas stricte lorsque* E *est de dimension infinie.*

Démonstration. – On vérifie même qu'étant donné un espace $\mathcal{F}_{\tau_0}$ quelconque, il existe $\tau_1 < \tau_0$ tel que $\mathcal{F}_{\tau_0}$ ne soit pas fermé dans $\mathcal{F}_{\tau_1}$.

Admettons le lemme suivant qui sera démontré en fin :

LEMME. – *Il existe une suite y_n de vecteurs unitaires et une suite u_n de formes linéaires sur* E, *de normes unités, telles que : $u_n(y_n) = 1$, $u_n(y_p) = 0$ pour $p < n$, u_n converge faiblement vers* 0.

Soit alors $x_0 \in E$, on peut supposer que x_0 est envoyé par p sur l'origine de E. Soit θ_n une suite de réels. Considérons la fonction g définie sur E par :

$$g(y) = \sum_{n \geq 1} n\left(\frac{2\, e^{i\theta_n}}{\tau(x_0)}\, u_n(y)\right)^n .$$

Cette série converge normalement dans toute boule de rayon $r < \frac{\tau_0(x_0)}{2}$, car $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sup_{\|a\|\leqslant r} |u_n(y+a)| \leqslant r$, du fait que $u_n(y)$ tend vers 0. La fonction $f = g \circ p$ est donc dans l'adhérence de $\mathcal{F}_{\tau_0}$ dans $\mathcal{F}_{\tau_1}$ avec $\tau_1 = \inf\left(\frac{\tau_0(x_0)}{2}, \tau_0\right)$, pourtant f n'est pas dans $\mathcal{F}_{\tau_0}$.

Il suffit, pour cela, de montrer qu'on peut choisir la suite θ_n telle que g ne soit pas bornée dans la boule de rayon $\tau_0(x_0)$ centrée à l'origine. La relation $n\,\theta_n = \operatorname{Arg} \sum_{p<n} p(e^{i\theta p}\, u_p(y_n))^p$ définit par récurrence une suite θ_n pour laquelle :

$$g\left(\frac{\tau_0(x_0)}{2}\, y_n\right) = \sum_{p<n} p[e^{i\theta_p}\, u_p(y_n)]^p + n\, e^{in\theta_n}\,.$$

Il en résulte que $\left| g\left(\frac{\tau_0(x_0)}{2}\, y_n\right)\right| \geqslant n$ quel que soit n.

Démonstration du lemme. – Il existe une suite croissante H_n de sous-espaces de dimensions finies dont la réunion est dense dans E. Il existe sur H_n une forme linéaire de norme unité, nulle sur H_{n-1}, que l'on prolonge sur E tout entier en une forme linéaire u_n de norme 1. E étant séparable, la boule unité du dual de E est un compact métrisable pour la topologie faible. On peut donc extraire une suite u_{n_i} faiblement convergente et dont la limite faible u ne peut être que nulle puisque u s'annule sur la réunion des H_{n_i}. Il reste à prendre un vecteur unitaire de H_{n_i} tel que $u_{n_i}(x_{n_i}) = 1$.

12. Domaine d'holomorphie.

DEFINITION 12.1. – X *sera appelé un domaine d'holomorphie, si* X *est connexe et s'il existe un espace* $\mathcal{F}_\tau(X)$ *tel que*

$$\lim_{d(x)\to 0} \cdot \inf_{f\in\mathcal{F}_\tau} \rho(x, f) = 0\,.$$

Dans la suite, si f est dans $\mathcal{O}_X$, $f_n(a)$ désignera l'application

$$x \rightsquigarrow f_n(x\,,a)\ .$$

On sait [18] que $f_n(a)$ est dans $\mathcal{O}_X$.

LEMME 12.1. — *$\forall f \in \mathcal{F}_\tau$, $f_n(a)$ est aussi dans $\mathcal{F}_\tau$ et $\forall A \in \mathcal{B}_\tau$, $\exists \varepsilon > 0$, $\exists A' \in \mathcal{B}_\tau$, tels que : (1) $\|f_n(a)\|_A \leqslant \|a/\varepsilon\|^n\ \|f\|_{A'}$.*

Démonstration. — Soit $B(x\,,\rho_i < \tau(x_i))$ la famille finie de boules formant A, on sait [12] que $\forall x \in B(x_i\,,p_i)$, $\forall a \in E\,(\|a\| < \tau(x_i) - \rho_i)$, on a :

$$f_n(x\,,a) = \frac{1}{2\pi}\int f \circ p^{-1}[p(x) + a\,e^{i\theta}]\,e^{-ni\theta}\,d\theta\ .$$

Si l'on choisit ε inférieur au plus petit des nombres $\tau(x_i) - \rho_i$, si A' est la partie de $\mathcal{B}_\tau$ obtenue en augmentant les rayons de boule de A, de ε, on obtient

$$\|f_n(a)\|_A \leqslant \|f\|_{A'}, \quad \forall a \in E \quad \|a\| < \varepsilon.$$

L'inégalité (1) s'obtient alors par homogénéité.

THEOREME 12.1. — *Tout domaine d'holomorphie est pseudo-convexe.*

Démonstration. — Si X n'était pas pseudo-convexe, il existerait d'après le théorème 10.1, un compact K de X, tel que $d(\hat{K}) = 0$. Soit alors τ_0 l'indice d'espace donné par la définition 12.1, il existe un recouvrement A de K appartenant à $\mathcal{B}_{\tau_0}$; le lemme 11.1 assure l'existence de $\varepsilon > 0$, et d'une constante K_f tels que :

$$|f_n(x\,,a)| \leqslant \left\|\frac{a}{\varepsilon}\right\|^n \cdot K_f\ ,\quad \forall x \in K\ ,\quad \forall f \in \mathcal{F}_{\tau_0}\ .$$

Cette inégalité reste vraie sur $\hat{K}$, on a donc : $\rho(x\,,f) \geqslant \varepsilon/2$, quel que soit x dans $\hat{K}$ et f dans $\mathcal{F}_{\tau_0}(X)$. Or $d(\hat{K})$ étant nul, on peut trouver une suite x_n dans $\hat{K}$ et une suite f_n dans $\mathcal{F}_{\tau_0}$ telle que $\rho(x_n\,,f_n)$ tende vers 0. D'où la contradiction.

13. Prolongement analytique.

DEFINITION 13.1. — (*"Extension paire" selon Alexander*). (X , Y) *est dit couple de prolongement scalaire, si* Y *est une variété connexe étalée sur* E, X *un ouvert connexe de* Y, *et si toute fonction f de* $\mathcal{O}_X$ *se prolonge en une fonction* $\bar{f}$ *(nécessairement unique) de* $\mathcal{O}_Y$. *Un couple de prolongement* (X , Y) *est dit normal pour un couple de topologies localement convexes sur* $\mathcal{O}_X$ *et* $\mathcal{O}_Y$, *si l'application* $\mathcal{O}_Y \rightsquigarrow \mathcal{O}_X$ *est un isomorphisme topologique.*

THEOREME 13.1. — *Si* $\mathcal{O}_X$ *et* $\mathcal{O}_Y$ *sont munis de leurs topologies limites inductives définies ci-avant, tout couple de prolongement scalaire est normal.*

Pour tout x dans Y, on désignera par $\hat{x}$ la forme linéaire sur $\mathcal{O}_X$: $f \rightsquigarrow \bar{f}(x)$. L'application $\mathcal{O}_Y \rightsquigarrow \mathcal{O}_X$ est continue et bijective, il suffit donc de démontrer qu'elle est ouverte.

LEMME 13.1. — *Si la restriction de* $\hat{x}_0$ *à* $\mathcal{F}_\tau(X)$ *est continue, il existe un voisinage* U *de* x_0 *tel que les restrictions de* $\hat{x}$ *à* $\mathcal{F}_\tau(X)$ *forment une famille équicontinue lorsque x décrit* U. *En particulier* $\bar{f}$ *est bornée sur* U, *quel que soit* $f \in \mathcal{F}_\tau(X)$.

Démonstration. — Il existe $A \in \mathcal{B}_\tau(X)$ tel que $|\bar{f}(x_0)| \leqslant \|f\|_A$, $\forall f \in \mathcal{F}_\tau(X)$. Posons $\omega = B(x_0, d(x_0))$, soit x dans ω ;

$$y \rightsquigarrow \bar{f}_n(y\,; p(x) - p(x_0))$$

est le prolongement à Y de $f_n(y\,; p(x) - p(x_0))$ qui appartient à $\mathcal{F}_\tau(X)$ d'après le lemme 12.1. On a donc :

$$|\bar{f}_n(x_0\,; p(x) - p(x_0))| \leqslant \|f_n(y\,; p(x) - p(x_0))\|_A .$$

Toujours d'après le lemme 12.1, il existe $\varepsilon > 0$ et $A' \in \mathcal{B}_\tau(X)$ tels que, quels que soient n et a dans E, on ait :

$$\|f_n(y\,; a)\|_A \leqslant \left(\frac{\|a\|}{\varepsilon}\right)^n \|f\|_{A'} .$$

On a donc : $|\bar{f}_n(x_0\,, p(x) - p(x_0))| \leqslant \left\|\dfrac{p(x) - p(x_0)}{\varepsilon}\right\|^n \|f\|_{A'}$, quel que soit f dans $\mathcal{H}_\tau(X)$. Or $\Sigma \overline{f}_n(x_0\,, p(x) - p(x_0))$ est le développement de la trace de $\overline{f \circ p_\omega^{-1}}$ sur la droite passant par $p(x_0)$ et $p(x)$, la somme de cette série est donc $f(x)$.

Si U désigne le voisinage de x_0 formé par les x de ω tels que $\|p(x) - p(x_0)\| < \varepsilon/2$, alors $\forall x \in \mathrm{U}$: $|\hat{x}(f)| = |\overline{f}(x)| \leqslant \|f\|_{\mathrm{A}}$, ce qui démontre le lemme.

COROLLAIRE. – *La restriction de* $\hat{x}$ *à* $\mathcal{H}_\tau(X)$ *est continue quel que soit* x *dans* Y.

Démonstration. – L'ensemble W où le corollaire est vrai est ouvert d'après le lemme précédent ; W contenant X, il reste à vérifier que W est fermé. Soit x_n une suite dans W convergente vers x ; $\hat{x}_n(f) = \overline{f}(x_n)$ tend vers $f(x), \forall f \in \mathcal{H}_\tau(X)$, si bien que les $\hat{x}_n$ forment une suite bornée dans le dual de $\mathcal{H}_\tau(X)$ pour la topologie de la convergence simple. $\mathcal{H}_\tau(X)$ étant un espace de Fréchet, il en résulte que les $\hat{x}_n$ forment une famille équicontinue ; $\hat{x}$ est donc continue.

Démonstration du théorème 13.1. – L'application du lemme 13.1 et de son corollaire entraîne que $\forall x \in \mathrm{Y}$, les fonctions $\overline{f}$ sont bornées dans un même voisinage de x, lorsque f décrit $\mathcal{H}_\tau(X)$. Ces fonctions $\overline{f}$ appartiennent donc à un même espace $\mathcal{H}_{\tau_1}(Y)$: il suffit de prendre pour $\tau_1(x) = \sup\{r > 0 \,|\, \overline{f}$ bornée dans $\mathcal{B}(x\,, r), \forall f \in \mathcal{H}_\tau(X)\}$, τ_1 est s.c.i.

Les propriétés des limites inductives font qu'il suffit de vérifier la continuité de $f \rightsquigarrow \overline{f}$ pour la restriction de cette application à $\mathcal{H}_\tau(X)$. Il faut donc montrer qu'étant donné $\mathrm{A}' \in \mathcal{B}_{\tau_1}(Y)$, l'ensemble $\mathrm{W} = \{f \in \mathcal{H}_\tau(X) \,|\, \|\overline{f}\|_{\mathrm{A}'_0} \leqslant 1\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{H}_\tau(X)$. W étant convexe, cerclé, absorbant d'une manière évidente, $\mathcal{H}_\tau(X)$ étant tonnelé, il suffit de montrer que W est fermé. Or

$$\mathrm{W} = \bigcap_{x \in \mathrm{A}'} \hat{x}^{-1}(|z| \leqslant 1) \;;$$

$\hat{x}$ étant continue quel que soit x dans A$'$, W est bien fermé.

THEOREME 13.2. – *Si* (X , Y) *est un couple de prolongement scalaire, toute fonction f, analytique sur* X *à valeurs dans un espace de Banach* F, *se prolonge en une fonction analytique sur* Y *à valeurs dans* F.

Démonstration. – Soit f analytique sur X à valeurs dans F, soit $\rho(x) = \inf[d(x), \rho(x, f)]$, $u \circ f$ est dans $\mathcal{F}_\rho(X)$ quel que soit u dans le dual de F ; l'application $u \rightsquigarrow u \circ f$ est continue, car f transforme tout élément de $B_\rho(X)$ en une partie bornée de F, et la topologie de F' est celle de la convergence uniforme sur les parties bornées de F.

Si $\overline{u \circ f}$ désigne le prolongement de $\overline{u \circ f}$ à Y, le théorème 13.1 joint au développement précédent permettent d'affirmer que l'application $u \rightsquigarrow u \circ f$ est continue du dual fort F' dans $\mathcal{O}_Y$. Par conséquent, pour tout y dans Y, il existe un élement noté $\bar{f}(y)$ du bidual F'' tel que : (1) $\bar{f}(y) \cdot (u) = \overline{u \circ f}(y)$, $\forall u \in F'$.

a) $\bar{f}$ *prolonge* f *à* Y : *si* $y \in X$, (1) s'écrit $\bar{f}(y)(u) = u[f(y)]$, $\forall u \in F' \cdot f(y)$ étant dans F peut être considéré comme élément de F'' ; les deux formes linéaires $f(y)$ et $\bar{f}(y)$ sont donc égales.

b) $\bar{f}$ *est G-analytique* : (sa restriction à toute droite complexe est analytique). Soit $y_0 \in Y$, le problème étant local, on peut pour simplifier les notations, assimiler un voisinage de y_0 à un ouvert de E. Il faut donc montrer que $\bar{f}(y_0 + t a)$ $(a \in E)$ est analytique à valeurs dans F'' dans un voisinage ω compact de l'origine du plan complexe. Or une fonction à valeurs dans un espace de Banach est analytique si et seulement si elle est scalairement analytique [18]. Il faut donc vérifier l'analycité de $v \circ \bar{f}(y_0 + t a)$ où v est un élément de F'''. v appartient au complété faible d'une partie bornée de F' ; il existe donc un filtre u_α d'éléments uniformément bornés sur F' convergeant vers v pour la topologie de la convergence simple sur F''. $u_\alpha \circ \bar{f}(y_0 + t a) = \bar{f}(y_0 + t a) \cdot (u_\alpha) = \overline{u_\alpha \circ f}(y_0 + t a)$ est analytique dans ω et converge simplement vers $v \circ f(y_0 + t a)$; on pourra appliquer le théorème de Montel et conclure si les fonctions $\overline{u_\alpha \circ f}$ sont bornées dans leur ensemble sur ω. Les fonctions $u_\alpha \circ f$ décrivent une partie bornée de l'espace $\mathcal{F}_\rho(X)$ puisque les u_α sont bornés dans leur ensemble ; l'application $f \rightsquigarrow \bar{f}$ étant continue de $\mathcal{F}_\rho(X)$ dans un espace $\mathcal{F}_{\rho_1}(Y)$ d'après les démonstrations des théorèmes et lemmes 13.1, les fonctions $\overline{u_\alpha \circ f}$ forment une partie bornée de $\mathcal{F}_{\rho_1}(Y)$, elles sont donc uniformément bornées sur tout compact de Y, donc sur ω.

c) $\overline{f}$ *est analytique.*

Théorème de Zorn [28] une fonction G-analytique et continue en un point, est analytique.

Or ici $\overline{f}$ est analytique sur X d'après a).

d) $\overline{f}$ *est à valeurs dans* F, *sur tout* Y : F est identifiable à un sous-espace fermé de F''. Soit ν une forme de F''' orthogonale à F. $\nu \circ \overline{f}$ est nulle sur X qui est ouvert dans le connexe Y, et analytique ; $\nu \circ \overline{f}$ est donc nulle sur Y. $\overline{f}$ appartient au bipolaire de F, c'est-à-dire F.

14. Enveloppe d'holomorphie.

DEFINITION 14.1. – *Une forme linéaire continue h sur* $\mathcal{O}_X$, *sera dite portable à distance finie, s'il existe* $\tau \rightsquigarrow A_\tau \in \mathcal{B}_\tau$ *tel que :*

$$|h(f)| \leqslant \|f\|_A \quad , \quad \forall f \in \mathcal{F}_\tau(X) \quad \text{et} \quad \inf_\tau d(A_\tau) > 0 \; .$$

La famille A_τ sera appelée un support de h à distance finie. S désignera l'ensemble des homomorphismes non nuls, portables à distance finie. S contient les homomorphismes continus pour la topologie de la convergence compacte et les homomorphismes ponctuels $\hat{x}$ en particulier.

DEFINITION 14.2. – *Une famille* L *de formes linéaires sur* $\mathcal{O}_X$ *sera dite uniforme s'il existe un support à distance finie commun aux éléments de* L.

PROPOSITION 14.1. – *Soit* $h \in S$; *désignons par* $h^{(n)}(a)$, *l'application* $f \rightsquigarrow h[f_n(a)]$. *Alors il existe un voisinage* U *de* O *dans* E, *tel que pour tout compact* K *intérieur à* U, *la famille* $h^{(n)}(a)$ *soit uniforme lorsque n décrit les entiers et a décrit* K.

Démonstration. – Soit $0 < \varepsilon < \inf d(A_\tau)$, où (A_τ) est un support de h à distance finie ; $\forall \alpha > 0$, X_α est l'ouvert de X formé par les x tels que $d(x) > \alpha$; d_α désigne la fonction distance sur X_α. Soit $r (0 < r < \varepsilon)$ et posons $U = B_E(0, r)$. K_x désigne le compact engendré par les vecteurs de la forme $p^{-1}[p(x) + t\, a]$ lorsque a décrit un compact K dans U et lorsque : $|t| \leqslant 1$. Etant donnée une fonction τ, s.c.i. sur X, $0 \leqslant \tau \leqslant d$, on pose :

$$\left|\begin{array}{lll} \tau_1(x) & = \inf\cdot\{\tau(y) |\ y \in \mathrm{K}_x\} \ , \ \forall x \in \mathrm{X}_r \\ \tau_2 & = 1/2 \inf\cdot[\tau_1 \ , \ d_r \ , \ \varepsilon - r] \\ \tau_3 & = \begin{cases} \tau_2 & \text{sur } \overline{\mathrm{X}_\varepsilon} \\ \tau & \text{sur } \mathrm{X} - \overline{\mathrm{X}_\varepsilon} \ . \end{cases} \end{array}\right.$$

Les fonctions τ_1, τ_2, τ_3 sont s.c.i., positives ; τ_3 minore τ. On a $|h(f)| \leqslant \|f\|_{\mathrm{A}_{\tau_3}}$, $\forall f \in \mathcal{F}_{\tau_3}(\mathrm{X})$ avec $d(\mathrm{A}_{\tau_3}) > \varepsilon$; A_{τ_3} appartient donc à $\mathcal{B}_{\tau_2}(\mathrm{X}_r)$, $\|\cdot\|_{\mathrm{A}_{\tau_3}}$ est une norme continue sur $\mathcal{F}_{\tau_3}(\mathrm{X}_r)$. La restriction de h à $\mathcal{F}_{\tau_3}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{F}_{\tau_2}(\mathrm{X}_r)$ se prolonge d'après Hahn-Banach en une forme linéaire $\widetilde{h}$ sur $\mathcal{F}_{\tau_2}(\mathrm{X}_r)$, $|\widetilde{h}|$ étant majoré par $\|\cdot\|_{\mathrm{A}_{\tau_3}}$.

Reprenons f dans $\mathcal{F}_\tau(\mathrm{X})$ et considérons $f_\theta(x)$ définie au voisinage de chaque point x de X par $f \circ p^{-1}[p(x) + a\, e^{i\theta}]$, a étant pris dans U ; si x est dans $\mathrm{B}(x_0, \rho < \tau_2(x_0))$, $p(x) + a\, e^{i\theta}$ est dans une boule de rayon ρ centrée sur K_{x_0}, f_θ est donc dans $\mathcal{F}_{\tau_2}(\mathrm{X}_r)$ d'après les choix de τ_1 et τ_2. Lorsque x décrit $\mathrm{B}(x_0\ , \rho)$, $p(x) + a\, e^{i\theta'}$ appartient à une boule $\mathrm{B}[y = p(x_0) + a\, e^{i\theta},\ \rho' < \tau(y)]$ lorsque θ' est assez voisin de θ, boule sur laquelle $f \circ p^{-1}$ est uniformément continue ; $\theta \rightsquigarrow f_\theta$ est donc une application continue de $[0,2\pi]$ dans $\mathcal{F}_{\tau_2}(\mathrm{X}_r)$.

L'intégrale vectorielle faible $g = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int f_\theta\, e^{-ni}\, d\theta$ est alors aussi dans $\mathcal{F}_{\tau_2}(\mathrm{X}_r)$; on a donc : $\widetilde{h}(g) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \widetilde{h}(f_\theta)\, e^{-ni\theta}\, d\theta$, or g est la restriction à X_r de $f_n(a)$, on a donc :

$$|h^{(n)}(a)\ (f)| = |h(f_n(a))| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int |\widetilde{h}(f_\theta)|\, d\theta = |\widetilde{h}(g)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int \|f\|_{\mathrm{A}_\tau}\, d\theta$$

Soit $\mathrm{B}(x_i\ , \rho_i < \tau_2(x_i))$ une boule de A_{τ_3}. Il existe un recouvrement fini du compact K_{x_i} par des boules de rayon ρ_i, centrées sur K_{x_i}.

Soit A'_i le recouvrement obtenu en doublant le rayon des boules de ce recouvrement fini : si $A' = \cup A'_i$, alors $\|f_\theta\|_{A_{\tau_3}}$ est majoré par $\|f\|_{A'}$, quel que soit θ et a dans K. A' *est dans* $B_\tau(X)$: en effet, soit $x' \in K_{x_i}$ le centre d'une boule de A', on a :

$$2\,\rho_i \leqslant 2\,\tau_2(x_i) \leqslant \tau_1(x_i) \geqslant \tau(x')\ ,$$

τ_1 ayant été construit pour cela.

$d(A')$ *est minoré par* : $\inf\limits_{a \in K} (r - \|a\|) > 0$. En effet un point de A' a une projection sur E de la forme $p(x_i) + K \cdot t + b$ avec $|t| \leqslant 1$ et $\|b\| \leqslant 2\,\rho_i \leqslant 2\,\tau_2(x_i) < \varepsilon - r$, d'autre part : $d(x_i) > \varepsilon$.

DEFINITION 14.3. – U *sera dit un voisinage de* U *dans* E *relatif à* $h \in S$, *si* U *est cerclé et si les* $h^{(n)}(a)$ *forment une famille uniforme lorsque* n *décrit les entiers naturels et* a *décrit un compact quelconque intérieur à* U.

COROLLAIRE 14.1. – $\forall x \in X$, $B(O\,, d(x))$ *est un voisinage de* O *relatif à* $\hat{x}$. Il suffit de constater que l'on peut prendre $(A_\tau) = \{x\}$ quel que soit τ, et par conséquent $\varepsilon = d(x)$.

PROPOSITION 14.2. – *Soit* U *un voisinage de* O *relatif à* $h \in S$. *Alors la série* (1) $\Sigma\, h^{(n)}(a)\,(f)$ *converge absolument quel que soit* f *dans* $\mathcal{O}_X$ *et* a *dans* U, *et définit un élément noté* $h(a)$ *de* S.

Démonstration. – Soit $a \in U$, il existe $r > 1$ tel que $r\,a \in U$. Soit (A_τ) un support à distance finie commun aux $h^{(n)}(r\,a)$; on a donc :

$$|h^{(n)}(r\,a)\,(f)| \leqslant \|f\|_{A_\tau} \cdot \forall f \in \mathcal{F}_\tau(X)\ .$$

Il résulte de l'homogénéité du polynôme $a \rightsquigarrow f_n(x\ ;\ a)$:

$$\sum_{n \geqslant 0} |h^{(n)}(a)\,(f)| \leqslant \frac{r}{r-1}\ \|f\|_{A_\tau}$$

Le même calcul montre que la série double

$$\sum_{n \geqslant 0\,,\, m \geqslant 0} h^{(n)}(a)\,(f) \cdot h^{(m)}(a)\,(g)$$

converge absolument quels que soient f et g dans $\mathcal{F}_r(X)$; sa somme est d'une part $h(a)\,(f)\cdot h(a)\,(g)$; d'autre part la formule de Leibnitz donne, par sommation diagonale, $h(a)\,(f\cdot g)$ comme somme.

On a donc $|h(a)\,(f)|^k \leqslant \dfrac{1}{r-1}\ \|f\|^k_A$, quel que soit l'entier k ; on obtient en faisant tendre k vers l'infini, l'inégalité :

$$|h(a)\,(f)| \leqslant \|f\|_{A_r}$$

$h(a)$ est donc une forme linéaire multiplicative sur $\mathcal{O}_X$ partable par les (A_r).

Proposition 14.3. – *Pour tout* $h \in S$, *pour tout voisinage* U *de* O *relatifs à* h, *désignons par* $V(h\,,U)$ *l'ensemble des* $h(a)$ *lorsque* a *décrit* U. *Les* $V(h\,,U)$ *forment une base de voisinages de* h *pour une topologie* $\mathcal{C}$ *séparée sur* S, *pour laquelle :*

i) *l'application* $\varphi_h\ :\ w \longrightarrow h(a)$ *est continue sur* U, *de sorte que* S *est localement connexe.*

ii) *les homomorphismes ponctuels* $\hat{x}$ *forment un ouvert* $\hat{X}$ *dans* S, *et* $\{\hat{x}\,|\,x \in B(x_0))\}$ *est un voisinage de* $\hat{x}_0$.

Lemme 14.3. – *Soit* U *un voisinage de* O *relatif à* h, *soit* $a \in U$, *soit* U_a *un voisinage de* O *relatif à* $h(a)$, *soit* V *un voisinage cerclé de* O *contenu dans* $U_a \cap (U - a)$. *Alors :*

$$h(a)\,(b) = h(a + b)\quad,\ \forall b \in V\,. \tag{2}$$

Démonstration. – Si $b \in V$, $|t| \leqslant 1$, $f \in \mathcal{O}_X$, les séries :

$$h(a)\,(t\,b)\,(f) = \Sigma\, h(a)\,[f_n(t\,b)] \quad \text{et} \quad h(a + t\,b)\,(f) = \Sigma\, h[f_n(a + t\,b)]$$

convergent uniformément sur le cercle $|t| \leqslant 1$ d'après la proposition 14.1 et définissent donc deux fonctions holomorphes dans ce cercle. Le lemme sera démontré si on vérifie l'égalité de leurs sommes pour $|t|$ petit. Utilisons l'égalité remarquable suivante sur les polynômes homogènes :

$$f_n(a + t\,b) = \sum_{k+m=n} t^k\,[f_k(b)]_m\,(a)\,.$$

Si la série double de terme général $h\cdot[t^k\cdot[f_k(b)]_m(a)]$ est sommable, la sommation en k puis m et la sommation diagonale fourniront le résultat. Or si (A_τ) est un support commun aux $h^m(r\,a)$ avec $r > 1$ et $r\,a \in U$, on a les majorations suivantes :

$$|h[t^k \cdot [f_k(b)]_m(a)] \leqslant t^k \frac{1}{r^m} |f_k(b)|_{A_\tau} \leqslant \|f\|_{A'_\tau} \cdot t_k \cdot \frac{1}{r^m} \cdot \left\|\frac{b}{\varepsilon}\right\|^k ,$$

$\varepsilon > 0$ et A'_τ étant fournis par le lemme 12.1. Il suffit de prendre : $|t| < \dfrac{\varepsilon}{\|b\|}$.

Démonstration de la proposition. – La relation (2) montre que $V(h\,, U)$ est un voisinage de chacun des $h(a)$ qui lui appartient. Les $V(h\,, U)$ définissent bien une topologie.

La série (1) définissant $h(a)$ montre que $h(a)$ converge simplement vers h lorsque a tend vers 0. La topologie $\mathcal{C}$ est donc plus fine que celle de la convergence simple sur $\mathcal{O}_X$, elle est donc séparée. La continuité de φ_h résulte de (2). ii) résulte du corollaire 14.1.

THEOREME 14.1. – *Soit* $\mathcal{S}(X)$ *la composante connexe de* $\hat{X}$ *dans* S. *Il existe une projection* $\widetilde{p}$ *de* $\mathcal{S}(X)$ *dans* E *définissant sur* $\mathcal{S}(X)$ *une structure de variété étalée sur* E *telle que* $\hat{X}$ *soit isomorphe localement à* X *par la correspondance entre* x *et* $\hat{x}$.

Démonstration. – $\forall u \in E'$, $u \circ p$ est dans $\mathcal{F}_\tau(X)$; étant donné $h \in S$, il existe donc A dans $\mathcal{B}_\tau(X)$ tel que

$$h(u \circ p) \leqslant \|u \circ p\|_A \leqslant \|u\|_{p(A)} ;$$

or $p(A)$ est une partie bornée de E, l'application $u \rightsquigarrow h(u \circ p)$ définit donc un élément $\widetilde{p}(h)$ du bidual E'' de E tel que :

$$\widetilde{p}(h)\,[u] = h\,[u \circ p] \quad , \quad \forall u \in E' . \tag{3}$$

En particulier : $\widetilde{p}(\hat{x})\;[u] = u[p(x)]$, donc :

$$\widetilde{p}(\hat{x}) = p(x) . \tag{4}$$

Soit $a \in V(h\,, U)$; $\widetilde{p}[h(a)]\,(u) = h(a)\,[u \circ p] = h\,[u \circ p] + u(a)$, car $[u \circ p]_1(a)$ est la constante $u(a)$. Il en résulte :

$$\widetilde{p}\,[h(a)] = \widetilde{p}(h) + a . \tag{5}$$

Pour tout ouvert U relatif à h, $\widetilde{p}$ transforme $V(h, U)$ en $\widetilde{p}(h) + U$; $\widetilde{p}$ est donc continu ; d'autre part (5) montre que φ_h, qui est continu d'après la proposition 14.3, est l'application inverse de la restriction de $\widetilde{p}$ à $V(h, U)$. $\widetilde{p}$ est donc un homéomorphisme de $V(h, U)$ sur $\widetilde{p}(h) + U$.

(5) a aussi pour conséquence que l'ensemble W des $h \in S$ tel que $p(\widetilde{h})$ soit dans E et à la fois ouvert et fermé car E l'est dans E''. W contenant $\hat{X}$ d'après (4), W contient $\mathcal{E}(X)$.

$\mathcal{E}(X)$ est bien une variété étalée sur E. Enfin (4) signifie que X et $\hat{X}$ sont localement isomorphes.

Remarque. – Si $\mathcal{O}_X$ sépare les points de X, en particulier si X est un ouvert d'un espace de Banach, alors X et $\hat{X}$ sont isomorphes car l'application $x \rightsquigarrow \hat{x}$ est alors injective.

THEOREME 14.2. – *Toute fonction analytique sur* $\hat{X}$ *à valeurs dans un espace de Banach* F *se prolonge d'une manière unique en une fonction analytique sur* $\mathcal{E}(X)$ *à valeurs dans* F.

Démonstration. – Il suffit d'après le théorème 13.2, de vérifier que $(\hat{X}, \mathcal{E}(X))$ est un couple de prolongement scalaire.

Soit f dans $\mathcal{O}_{\hat{X}}$, soit $\psi : x \rightsquigarrow \hat{x}$, alors $f \circ \psi$ est analytique sur X d'après le théorème précédent. Posons $f(h) = h(f \circ \psi)$ et montrons que $\hat{f}$ est analytique sur $\mathcal{E}(X)$. Soit U un voisinage de O relatif à h dans E ; $\forall a \in U$, on a :

$$\hat{f}[\widetilde{p}_U^{-1}(a)] = \hat{f}[h(a)] = h(a)\,(f \circ \psi) = \sum_{n \geq 0} h[f \circ \psi)_n(a)] \;.$$

Chaque terme de cette série est un polynôme homogène en a de degré n, il reste à vérifier que la série converge normalement par rapport à a, pour $\|a\|$ assez petit. Il suffit pour cela d'appliquer le lemme 12.1.

$\mathcal{E}(X)$ est-il un domaine de prolongement maximal ? Le théorème suivant donne un résultat dans ce sens moyennant des hypothèses sur le couple (X, Y).

THEOREME 14.3. – *Soit* (X, Y) *un couple de prolongement tel que :* $\mathcal{O}_Y$ *sépare les points de* Y, *et* Y *soit réunion d'une famille* Y_i

de domaines à chacun desquels on puisse associer un domaine X_i *de* X *vérifiant :* $d(X_i) > 0$ *et* (X_i, Y_i) *est un couple de prolongement ; alors* Y *est isomorphe à un ouvert de* $\mathcal{E}(X)$.

Démonstration. – Soit $y \in Y$ et soit $Y_i \ni y$; y est un homomorphisme continu sur $\mathcal{O}_{X_i}$ d'après le théorème 13.1. Soit un espace $\mathcal{F}_\tau(X)$ et posons $\tau_1 = \inf(\tau, d_{X_i})$, il existe $A \in \mathcal{B}_{\tau_1}(X_i)$ tel que $|\hat{y}(f)| \leqslant \|f\|_{A'}$, $\forall f \in \mathcal{F}_{\tau_1}(X_i)$; puisque τ_1 minore τ sur X_i et que $d(A) \geqslant d(X_i) > 0$, $\hat{y}$ est dans S. Il reste à vérifier que $\Phi : y \rightsquigarrow \hat{y}$ réalise un isomorphisme entre Y et un ouvert de S, la continuité de Φ prouvant de surcroît que $\hat{y}$ est dans $\mathcal{E}(X)$. Φ étant injective puisque $\mathcal{O}_Y$ sépare les points de Y, il suffit de vérifier localement l'isomorphisme.

Soit U un voisinage de O relatif à $\hat{y}$, $\forall a \in U$, $\forall f \in \mathcal{O}_X$, on a : $\hat{y}(a)(f) = \Sigma \hat{y}[f_n(a)] = \Sigma \bar{f}_n(a, y)$, où $\bar{f}$ est le prolongement de f à Y. On a donc $\bar{y}(a) = \widehat{p_\omega^{-1}[p(y) + a]}$, où ω est un voisinage convenable de y ; après projection sur E, Φ devient localement :

$$a \rightsquigarrow p(y) + a\,.$$

THEOREME 14.4. – *Si* $\mathcal{O}_X$ *sépare les points de* X *une condition nécessaire pour que* X *soit un domaine d'holomorphie est que* $\hat{X} = \mathcal{E}(X)$.

Démonstration. – Supposons que $\hat{X}$ diffère de $\mathcal{E}(X)$ et soit h un point frontière de $\hat{X}$. Lorsque $\hat{x}$ tend vers h, $d(x)$ tend vers 0, car dans le cas contraire, il existerait un ouvert U relatif à h, et $\hat{x} \in B(h, U)$ tels que $B(\hat{x}, d(x))$ et U soient deux ouverts connexes dont les projections sur E contiendraient $\tilde{p}(h)$ en commun ; $\tilde{p}$ serait injective sur leur réunion et h serait dans $B(\hat{x}, d(x))$ qui est contenu dans $\hat{X}$ d'après la proposition 14.3 ii). Si ψ est l'isomorphisme entre X et $\hat{X}$, $\forall f \in \mathcal{O}_X$, $\forall x \in X$ les fonctions f et $f \circ \psi^{-1}$ ont même développement taylorien aux points x et $\hat{x}$, on a donc

$$\rho(x, f) = \rho(\hat{x}, f \circ \psi^{-1})\,.$$

Lorsque f décrit un espace $\mathcal{F}_\tau(X)$, $f \circ \psi^{-1}$ varie dans un espace $\mathcal{F}_{\tau_1}[\mathcal{E}(X)]$ d'après le lemme 13.1. On a donc d'après [12] :

$$\rho(x, f) = \rho(\hat{x}, f \circ \psi^{-1}) \geqslant \tau_1(\hat{x}) \quad , \quad \forall f \in \mathcal{F}_\tau(X)\,.$$

On aurait en définitive :

$$\lim_{d(x)\to 0} \inf_{f\in\mathcal{F}_\tau(X)} \rho(x\,,f) \geqslant \overline{\lim_{\hat{x}\to h}}\ \tau_1(x) \geqslant \tau_1(h) > 0\ ,$$

ce qui est contraire à la définition 12.1 d'un domaine d'holomorphie.

CHAPITRE V

APPLICATION DES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES A UNE GENERALISATION DES ESPACES DE HARDY AUX DOMAINES DISQUES DE C^n

15. Premières propriétés.

– D est un ouvert de C^n tel que toute droite complexe issue de l'origine O, coupe D suivant un disque centré en O.

– $d\sigma$ désigne l'élément d'aire normalisé d'une sphère fixée une fois pour toutes, centrée en O et toute entière dans D.

– Pour toute fonction f, continue dans D, pour tout $p > 0$, on pose : $\|f\|_p = \left[\int u(z)\, d\sigma \right]^{1/p}$ où u est la plus petite majorante plurisurharmonique de $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z\, e^{i\theta})|^p\, d\theta$, si une telle majorante existe, $u = +\infty$ dans le cas contraire.

– $H_p(D)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur D telles que $\|f\|_p < +\infty$.

– $H_p(D)$ contient les fonctions holomorphes f telles que $|f|^p$ soit majoré par une fonction plurisurharmonique ; $H_p(D)$ est invariant par les automorphismes linéaires de D conservant l'origine.

PROPOSITION 15.1. – *Soit* $f \in H_p$; *alors les droites complexes* d *issues de l'origine* O, *sur lesquelles* f *n'est pas dans* $H_p(d \cap D)$, *coupent tout hyperplan* H *ne contenant pas* O, *suivant un ensemble* A R^{2n-2}*-polaire.*

Démonstration. – Remarquons que si $f \notin H_p(d \cap D)$ toute majorante plurisurharmonique $u(z)$ de $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2} |f(z\, e^{i\theta})|^p\, d\theta$ vaut $+\infty$ sur $d \cap D$. Soit $x_0 \in A$, soit d la droite passant par x_0 et O. Soit B une boule centrée en x_0, toute entière dans D, elle contient x_1 où : $u(x_1) > -\infty$; soit λ tel que le segment $[x_1, \lambda x_0]$ soit parallèle à H ;

$u(\lambda z)$ est sousharmonique sur $\frac{1}{\lambda}[\lambda \cdot \mathrm{H} \cap \mathrm{B}]$ qui contient $\frac{1}{\lambda} \cdot x_1$ et x_0, $u(\lambda z)$ vaut $+\infty$ sur $\mathrm{A} \cap \frac{1}{\lambda} \cdot [\lambda \mathrm{H} \cap \mathrm{B}]$. A est donc localement polaire donc polaire.

PROPOSITION 15.2. — *On a les inclusions* : $\mathrm{H}_p \subset \mathrm{H}_q$ *si* $p \geqslant q$. Elle est conséquence immédiate de $x^q < x^p + 1$.

PROPOSITION 15.3.

i) *pour* $p > 0$, *les ensembles* $\{\|f-g\|_p < r\}$ *forment un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme définissant sur* H_p *une structure d'e.v.t. métrisable.*

ii) *pour* $p \geqslant 1$, $\|\cdot\|_p$ *est une norme.*

Démonstration. — Si u, v sont les plus petites majorantes plurisurharmoniques de $\int |f(z\,e^{i\theta})|^p\,d\theta$, $\int |g(z\,e^{i\theta})|^p\,d\theta$, les inégalités suivantes résultent de la géométrie des espaces L^p.

$$\int |f+g(z\,e^{i\theta})|^p\,d\theta \leqslant \mathrm{Max}(2^{p-1}, 1)\left[\int |f(z\,e^{i\theta})|^p\,d\theta + \right.$$
$$\left. + \int |g(z\,e^{i\theta})|^p\,d\theta \leqslant \mathrm{Max}\cdot(2^{p-1}, 1)\cdot[u+v](z)\,.\right.$$

Il en résulte que $\int |f+g(z\,e^{i\theta})|^p\,d\theta$ admet une plus petite majorante plurisurharmonique w, et :

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p = \int w(z)\,d\sigma &\leqslant \mathrm{Max}(2^{p-1}, 1)\,(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^p \\ &\leqslant \mathrm{Max}(2^{p-1}, 1)\cdot \mathrm{Max}(2^{1-p}), 1)\,(\|f\|_p + \|g\|_p)^p\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Il en résulte (1) : $\|f+g\|_p \leqslant 2^{\frac{|p-1|}{p}}(\|f\|_p + \|g\|_p)$, qui conduit directement à i). Si $p \geqslant 1$; $\int |f+g(z\,e^{i\theta})|^p\,d\theta \leqslant (u^{1/p} + v^{1/p})^p$; cette majorante étant plurisurharmonique, ω est donc majoré par $(u^{1/p} + v^{1/p})^p$.

Il en résulte : $\|f+g\|_p^p \leqslant \int (u^{1/p} + v^{1/p})^p\,d\sigma \leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)^p$.

PROPOSITION 15.4. – *Pour tout compact* K, $K \subset D$, *il existe une constante* M_K *telle que :*

$$\forall f \in H_p(D) \quad , \quad \sup_{x \in K} |f(x)| \leqslant M_K \, \|f\|_p \ .$$

Démonstration. – Il existe $r > 1$, $\rho > 0$ tels que, quel que soit $a \in K$, la boule fermée $B'(a, \rho)$ et son homothétique $r \cdot B'(a, \rho)$ soient contenues dans D ; de la sousharmonicité de la fonction $t \longrightarrow |f(tx)|^p$ dans le cercle $|t| \leqslant r$, quel que soit $x \in B'(a, \rho)$, on déduit :

$$|f(x)|^p \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{r+1}{r-1} \int_0^{2\pi} |f(r \times e^{i\theta})|^p \, d\theta \quad \forall x \in B'(a, \rho) \ .$$

Si $u(x)$ désigne la plus petite majorante plurisurharmonique de $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x\, e^{i\theta})|^p \, d\theta$, si $d\alpha_a(x)$ désigne la mesure harmonique de $B'(a, \rho)$ en a, on a :

$$|f(a)|^p \leqslant \int |f(x)|^p \, d\alpha_a(x) \leqslant \frac{r+1}{r-1} \int u(r\,x) \, d\alpha_a(x) \ .$$

Or, lorsque a décrit K, les moyennes d'une fonction surharmonique positive sur la boule $B'(a, \rho)$ et sur une boule fixée, fermée, contenue dans D, sont dans un rapport borné supérieurement par un nombre indépendant de a et de la fonction surharmonique.

On obtient la proposition en appliquant cette propriété aux moyennes $d\alpha_a$ et celles définissant $\|f\|_p$.

16. Etude comparée des topologies : normiques, compactes, faibles.

K désigne un élément de N^n, $D_{k,x}(f)$ est la valeur en x d'une dérivée partielle d'ordre k de f, $\gamma_{m,x}(f)$ est la valeur en x du polynôme homogène de degré m du développement de f en polynômes homogènes. Enfin le dual H'_p de H_p est un espace de Banach lorsqu'on le norme par :

$$\|\gamma\| = \sup_{\|f\|_p \leqslant 1} |\gamma(f)| \ .$$

THEOREME 16.1.

a) La topologie de la convergence compacte est moins fine que celle de la convergence en norme.

b) $D_{k,x} \in H'_p$, et quel que soit k, $\|D_{k,x}\|$ est borné sur tout compact.

c) $\gamma_{m,x} \in H'_p$ et pour tout compact K, il existe $\rho < 1$ et une constante M_K tels que :

$$\|\gamma_{m,x}\| \leqslant M_K \cdot \rho^m \quad , \quad \forall x \in K \, .$$

Démonstration. – a) et b) résultent de la proposition 15.4 et des inégalités de Cauchy.

Quant à c), il existe $\rho < 1$ tel que $\frac{1}{\rho} \cdot z \cdot e^{i\theta}$ décrive un compact K' de D lorsque z décrit K et θ : $[0,2\pi]$. Dans ces conditions :

$$\gamma_{m,z}(f) = \frac{1}{2\pi} \int \rho^m f\left(\frac{1}{\rho} \, z \, e^{i\theta}\right) e^{-mi\theta} \, d\theta \ ,$$

il suffit alors d'appliquer la proposition 15.4.

COROLLAIRE 16.1. – *La topologie faible sur* H_p *est séparée.*

COROLLAIRE 16.2. – *Toute suite faiblement convergente de* H_p *converge uniformément sur tout compact.*

Démonstration. – Soit (f_n) une suite de H_p convergeant faiblement vers $f \in H_p$, alors d'après le théorème de Banach-Steinhauss $\sup\limits_{n,\gamma \in H'_p(D)} \frac{|\gamma(f_n)|}{\|\gamma\|} < +\infty$. En prenant pour γ les formes linéaires $D_{O,z}$ et en appliquant le théorème 16.1 b), on s'aperçoit que la suite f_n est bornée dans son ensemble sur tout compact. D'autre part, la convergence faible appliquée aux formes $D_{O,z}$ entraîne la convergence simple de f_n vers f.

La conjonction de ces deux résultats entraîne la convergence uniforme sur tout compact.

THEOREME 16.2. – *Soit* f_n *une suite bornée pour la topologie "normique" dans* H_p, *convergente vers* f *uniformément sur tout compact, alors* f *est dans* H_p.

LEMME. – *Soit* $\mathcal{T}$ *la topologie de Cartan-Brelot sur le cône des fonctions surharmoniques positives dans* D ; *l'ensemble des fonctions plurisurharmoniques positives u telles que* $\int u\, d\sigma \leqslant$ *un nombre donné est relativement compact pour* $\mathcal{T}$.

Cette propriété est connue [6] lorsqu'il s'agit des fonctions surharmoniques, il suffit donc de démontrer que le cône des fonctions plurisurharmoniques positives est fermé, pour $\mathcal{T}$, dans celui des fonctions surharmoniques positives. Or si u_n tend vers v pour $\mathcal{T}$, v = rég. s.c.i. de lim. u_n [6]. v est donc plurisurharmonique si les u_n le sont.

Démonstration du théorème. – Soit u_n la plus petite majorante plurisurharmonique de $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f_n(z\, e^{i\theta})|^p\, d\theta$.

On peut extraire, d'après le lemme précédent, une suite u_{n_i} convergente vers une fonction plurisurharmonique v pour la topologie $\mathcal{T}$. Si ω désigne un ouvert régulier relativement compact dans D, on a donc quel que soit z_0 dans ω :

$$\frac{1}{2\pi}\int |f_{n_i}(z_0\, e^{i\theta})|^p\, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\iint |f_{n_i}(z\, e^{i\theta})|\, d\alpha_{z_0}(z)\cdot d\theta \leqslant$$
$$\leqslant \int u_{n_i}(z)\, d\alpha_{z_0}(z) \ ,$$

où $d\alpha_{z_0}$ est la mesure harmonique de ω en z_0. Lorsque n_i tend vers l'infini, on obtient par passage à la limite uniforme à gauche, pour la topologie $\mathcal{T}$ à droite :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0\, e^{i\theta})|^p\, d\theta \leqslant \int \mathrm{V}(z)\, d\alpha_{z_0}(z) \leqslant v(z_0)\ .$$

v est donc une majorante plurisurharmonique de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z\, e^{i\theta})|^p\, d\theta\ .$$

THEOREME 16.3. – *Soit* f_k *une suite bornée dans* H_p, *soit f holomorphe sur* D. *Si* $\forall m$, $\forall z \in \mathrm{D}$ $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_{m,z}(f_k) = \gamma_{m,z}(f)$ *alors f est dans* H_p *et* f_k *tend vers f uniformément sur tout compact.*

Démonstration. – La série $\sum_{m \geqslant 0} |\gamma_{m,z}(f_k)|$ converge uniformément par rapport à k, car d'après le théorème 16.1, c), il existe deux constantes M et ρ ($\rho < 1$) telles que :

$$|\gamma_{m,z}(f_k)| \leqslant \|f_k\|_p \cdot \|\gamma_{m,z}\| \leqslant \mathrm{M} \cdot \rho^m .$$

$f_k(z) - f(z)$ est somme de la série $\sum_{m \geqslant 0} [\gamma_{m,z}(f_k) - \gamma_{m,z}(f)]$ qui converge donc uniformément en k. Il résulte donc de l'hypothèse que f est limite simple des f_k.

D'autre part, la suite f_k est, d'après la proposition 15.4, bornée dans son ensemble sur tout compact, f_k converge donc vers f uniformément sur tout compact. Enfin f est dans H_p d'après le théorème 16.2.

THEOREME 16.4. – H_p *est complet.*

LEMME. – *Soit* f_n *une suite de fonctions continues sur* D *telle que la série* $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ *converge uniformément vers* f *sur tout compact, alors :*

si $$p \geqslant 1 \quad \|f\|_p \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \|f_n\|_p$$

si $$0 < p < 1 \quad \|f\|_p^p \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \|f_n\|_p^p .$$

Démonstration. – Soit $\mathrm{F_N} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} f_n$, soit u_N la plus petite majorante plurisurharmonique de $\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{F}_\mathrm{N}^p \, d\theta$; u_N est une suite croissante qui converge simplement vers une fonction u qui est plurisurharmonique ou identique à $+\infty$.

$$\int u \, d\sigma = \lim \int u_\mathrm{N} \, d\sigma = \lim \|\mathrm{F_N}\|_p^p \leqslant \left[\sum_{n \geqslant 0} \|f_n\|\right]^p \quad \text{si} \quad p \geqslant 1 ,$$

$$\sum_{n \geqslant 0} \|f_n\|_p^p \quad \text{si} \quad p < 1 .$$

Si $u \equiv +\infty$, les inégalités sont alors trivialement vérifiées.

Si $u \not\equiv +\infty$, il suffit alors de prouver que u est une majorante plurisurharmonique de $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z\,e^{i\theta})|^p\,d\theta$; or :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z\,e^{i\theta})|^p\,d\theta \leqslant \lim \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}_{\mathrm{N}}(z\,e^{i\theta})^p\,d\theta\ ,$$

qui est majoré par u.

Démonstration du théorème. – Soit f_n une suite de Cauchy dans H_p, f_n est une suite de Cauchy pour la topologie de la convergence compacte d'après la proposition 15.4, f_n converge donc vers une fonction holomorphe f uniformément sur tout compact. Les propriétés de convexité dénombrable de $\|\cdot\|_p$ si $p \geqslant 1$ ou $\|\cdot\|_p^p$ si $p < 1$ démontrés dans le lemme précédent, permettent, par un procédé standard d'espace L^p, d'extraire une suite f_{n_i} telle que f_{n_i} converge vers f en "norme". La suite f_n converge donc vers f en norme qui est de plus dans H_p d'après le théorème 16.2.

17. Un contre-exemple.

Si D est borné, les fonctions holomorphes sur D et continues sur $\overline{\mathrm{D}}$ forment un sous-espace de $\mathrm{H}_p(\mathrm{D})$, noté A(D). On suppose de plus que le rayon du cercle section de D avec une droite complexe issue de O, est une fonction continue de la direction de d. Alors $\overline{\mathrm{D}} \subset \frac{1}{\rho}\,\mathrm{D}$, $\forall \rho < 1$, et $f_\rho(z) = f(\rho z)$ est dans A(D), tout $\rho < 1$, si f est holomorphe sur D.

PROPOSITION 17.1. – *$\|f_\rho\|_p$ tend en croissant vers $\|f\|_p$ lorsque ρ tend vers un.*

Il suffit de remarquer que la fonction

$$z \leadsto \int |f(\rho\,z\,e^{i\theta})|^p\,d\theta$$

tend en croissant vers $\int |f(z\,e^{i\theta})|^p\,d\theta$.

PROPOSITION 17.2. – *Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dans l'adhérence de* A(D) *dans* $\mathrm{H}_p(\mathrm{D})$ *est que f_ρ converge en "norme" vers f.*

Démonstration. – La suffisance est évidente.

Soit f_n une suite dans A(D) convergente vers f en "norme" dans $H_p(D)$. $(f_n)_\rho$ converge vers f_ρ, uniformément par rapport à ρ, lorsque n tend vers l'infini, en "norme" car d'après la proposition précédente

$$\|(f_n)_\rho - f_\rho\|_p = \|(f_n - f)_\rho\|_\rho \leqslant \|f_n - f\|_p .$$

D'autre part $(f_n)_\rho$ converge, uniformément sur $\overline{D}$ donc en "norme", vers f_n lorsque ρ tend vers un. On peut donc intervertir les limites $p \longrightarrow 1$ et $n \longrightarrow +\infty$ pour obtenir dans H_ρ :

$$\lim_{\rho\to 1} (f - f_\rho) = \lim_{\rho\to 1} \lim_{n\to\infty} [f_n - (f_n)_\rho] = \lim_{n\to\infty} \lim_{\rho\to 1} [f_n - (f_n)_\rho] = 0.$$

L'exemple suivant montre que A(D) n'est pas dense dans H_p en général ; pour cela D étant la boule unité de C^2, on construit une fonction f dans H_2 telle que f_ρ ne converge pas vers f.

Soit $f(z_1, z_2) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}} z_1^k$, on pose $|z_1| = r_1$, $|z_2| = r_2$.

a) $f \in H_2(D)$.

f est holomorphe dans D et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z\, e^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} r_1^{2k} = \operatorname{Log} \frac{1}{1 - r_1^2} \leqslant \operatorname{Log} \frac{1}{r_2^2},$$

cette dernière fonction étant plurisurharmonique dans D.

b) Posons $u_\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z\, e^{i\theta}) - f\rho(z\, e^{i\theta})|^2\, d\theta$, $\overline{u}_\rho$: la plus petite majorante plurisurharmonique de u_ρ sur D, $V_\rho = \operatorname{Log}\frac{1}{r_2^2} - \overline{u}_\rho$ sur $D - \{r_2 = 0\}$.

Montrons que V_ρ, qui est déjà plurisousharmonique sur $D - \{r_2 = 0\}$, peut-être prolongé en une fonction plurisousharmonique sur D. $\{r_2 = 0\}$ étant C^2-polaire, il suffit de montrer que V_ρ est borné supérieurement au voisinage de tout point de $\{r_2 = 0\}$:

$$u_\rho = \sum_1^{\infty} \frac{1}{k} (1 - \rho^k)^2\, r_1^{2k} = \operatorname{Log} \frac{(1 - \rho\, r_1^2)^2}{(1 - r_1^2)(1 - \rho^2 r_1^2)} .$$

Soit a tel que $0 < |a| < 1$.

$\overline{u}_\rho(z_1, a)$ est une fonction surharmonique en z_1 ou $(\equiv +\infty)$ supérieure à $u_\rho(z_1)$; $\overline{u}_\rho(z_1, a)$ est donc minoré par la plus petite majorante harmonique de $u_\rho(z_1, a)$ sur le cercle $|z_1|^2 < 1 - |a|^2$; u étant sousharmonique, cette minorante harmonique est la constante :

$$u_\rho(\sqrt{1 - |a|^2}) = \mathrm{Log}\ \frac{[1 - \rho(1 - |a|^2)]^2}{|a|^2[1 - \rho^2(1 - |a|^2)} .$$

On obtient donc l'inégalité :

$$\mathrm{V}_\rho(z_1, a) \leqslant \mathrm{Log}\ \frac{1 - \rho^2(1 - |a|^2}{[1 - \rho(1 - |a|^2]^2} ,$$

qui est borné supérieurement lorsque a tend vers O.

Soit B la boule contenue dans D servant à définir la norme de H_2 ; on a :

$$\|f - f_\rho\|^2 = \int_{\mathrm{B}} \overline{u}_\rho\, d\sigma = \int_{\mathrm{B}} \mathrm{Log}\ \frac{1}{r_2^2}\, d\sigma - \int_{\mathrm{B}} \mathrm{V}_\rho\, d\sigma .$$

Puisque V_ρ est sousharmonique, $\int_{\mathrm{B}} \mathrm{V}_\rho\, d\sigma$ est majoré par $\int_{\mathrm{D}^*} \mathrm{V}_\rho\, d\sigma$, donc :

$$\lim_{\rho \to 1} \|f - f_\rho\|^2 \geqslant \int_{\mathrm{B}} \mathrm{Log}\frac{1}{r_2^2} - \lim_{\rho \to 1} \int_{\mathrm{D}^*} \mathrm{Log}\ \frac{1 - \rho^2(1 - r_2^2)}{[1 - \rho(1 - r_2^2)]^2}\, d\sigma$$

$$\geqslant \int_{\mathrm{B}} \mathrm{Log}\frac{1}{r_2^2}\, d\sigma - \int_{\mathrm{D}^*} \mathrm{Log}\frac{1}{r_2^2}\, d\sigma > 0 .$$

Si $p \geqslant 1$, $\mathrm{H}_p(\mathrm{D})$ n'est pas réflexif en général, en effet :

PROPOSITION 17.3. – *Une condition nécessaire pour que* $\mathrm{H}_p(\mathrm{D})$ *soit réflexif est que* A(D) *y soit dense.*

Démonstration. – Soit $f \in \mathrm{H}_p(\mathrm{D})$, les f_ρ forment une partie bornée de H_p (Proposition 17.1) qui sera donc faiblement relativement compacte. Il existe g dans H_p, adhérent au filtre $f_\rho(\rho \longrightarrow 1)$ pour la topologie de la convergence faible et à fortiori (théorème 16.1) pour la convergence simple sur D ; g est donc identique à f et toute forme linéaire continue, nulle sur A(D), annulera f. A(D) est donc dense dans H_p d'après le théorème de Hahn-Banach.

18. Etude à la frontière.

S(D) désigne la frontière de Silow de D relativement à l'algèbre des fonctions holomorphes sur D et continues sur $\overline{D}$. On suppose que D est un domaine d'holomorphie borné, disqué, qui vérifie

$$D^* \subset \rho D \quad (\forall \rho > 1) .$$

La proposition suivante connue [21] sous des hypothèses légèrement différentes est nécessaire à la suite.

PROPOSITION 18.1. – *(Principe du maximum). Toute fonction plurisousharmonique u dans* D, *telle que* $\lim\limits_{z \to x} u(z) \leqslant 0$, $\forall x \in S(D)$ *est négative ou nulle dans* D.

Démonstration. – Comme D^* est contenu dans $\rho \cdot D\,(\rho > 1)$, par compacité, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $r < 1$ tel que $u(z) < \varepsilon$, $\forall z \in S(r \cdot D) = r\, S(D)$. Il suffit d'appliquer le lemme d'approximation suivant pour conclure que $u \leqslant \varepsilon$ sur $r\,D$:

LEMME (Bremermann [8]). – *Pour tout compact* K *contenu dans un domaine d'holomorphie* D, *la frontière de Silow relativement à la restriction à* K *des fonctions plurisousharmoniques dans* D *est confondue avec celle relative aux restrictions à* K *des fonctions holomorphes sur* D.

DEFINITION. – *Pour toute fonction h, continue sur* S(D), $\overline{h}$ *désignera la régularisée s.c.i. de l'enveloppe inférieure de la famille* Φ_h *des fonctions plurisurharmoniques sur* D, *s.c.i. sur* $D \cup S(D)$, $\geqslant h$ *sur* S(D). *La famille* Φ_h *étant bornée inférieurement* (Proposition 18.1), $\overline{h}$ *est plurisurharmonique sur* D.

PROPOSITION 18.2. – *Si h est plurisousharmonique sur* D, *continue sur* S(D), *alors* $\overline{h}$ *est la plus petite majorante plurisurharmonique de h sur* D.

Démonstration. – Si

$$\varphi \in \Phi_h,\ \lim_{y \to x}\,(\varphi - h)\,(y) = \varphi(x) - h(x) \geqslant 0 \quad , \quad \forall x \in S(D) ;$$

φ majore donc h sur D ; il en est ainsi pour l'enveloppe inférieure u des φ. Or si $\mathfrak{C}$ est un n-cercle centré en y de D, si dt est la mesure circulaire sur $\mathfrak{C}$, on sait [24] que $\overline{h}$ ne diffère de u sur $\mathfrak{C}$ que sur un ensemble de mesure nulle :

$$\overline{h}(y) \geqslant \int_{\mathfrak{C}} h(t)\, dt = \int_{\mathfrak{C}} u(t)\, dt \geqslant \int_{\mathfrak{C}} h(t)\, dt \geqslant h(y)\ .$$

Enfin si ν est une majorante plurisurharmonique de h sur D, sa régularisée s.c.i. $\hat{\nu}$ sur $D \cup S(D)$ est dans Φ_h et est identique à ν sur D.

19. Une classe remarquable de mesures de Choquet sur S(D).

dg désigne la mesure de Haar invariante à droite du groupe compact G formé par les automorphismes de D conservant l'origine.

Toute fonction de la forme $f(g \cdot x)$, où f est plurisurharmonique sur D, est intégrable par rapport à la mesure $d\sigma(x) \cdot dg$.

Cette propriété résulte du lemme suivant, beaucoup plus fort, qui sera utile dans la suite.

LEMME 19.1. – *Le rapport* $\dfrac{\int u(g \cdot x)\, d\sigma}{\int u(x)\, d\sigma}$ *reste compris entre deux nombres strictement positifs indépendant de g dans* G *et de u dans le cône des fonctions surharmoniques positives.*

Démonstration. – *Si* $\dfrac{\int u(g \cdot x)\, d\sigma(x)}{\int u(x)\, d\sigma(X)}$ n'était pas borné supérieurement, il existerait deux suites u_n et g_n telles que :

$\int u_n(g \cdot x)\, d\sigma$ tende vers $+\infty$ et $\int u_n(x)\, d\sigma = 1$ quel que soit x.

Rappelons maintenant la propriété suivante qui servira plusieurs fois : “Si B et B′ sont deux boules fermées contenues dans D, d'éléments d'aire $d\sigma$ et $d\sigma'$, le rapport $\dfrac{\int u \cdot d\sigma'}{\int u\, d\sigma}$ reste compris entre deux nombres strictement positifs indépendants de u dans le cône des fonctions surharmoniques dans D″. On extrait une suite telle que g_n tende vers g uniformément sur tout compact, ce qui est possible puisque G est compact. Soit x_0 le point fixe par G. Soit B la boule dont la frontière supporte $d\sigma$, soit B′ une boule contenant x_0 et contenue dans D dont l'élément d'aire normalisé est $d\sigma'$. La propriété rappelée fait que $\lim \int u_n(g_n \cdot x)\, d\sigma' = +\infty$ tandis que $\int u_n \cdot d\sigma'$ sera borné supérieurement.

Soit H_n la plus grande minorante harmonique de $u_n \circ g_n$ sur B′, H_n tendra vers $+\infty$ en O donc uniformément sur tout compact de B′ ; il existe d'autre part $r > 0$ tel que $g_n[B(x_0, r)]$ contienne $\left[B\left(x_0, \frac{r}{2}\right)\right]$ pour n assez grand ; H_n tendant vers $+\infty$ uniformément sur $B(x_0, r)$, il en sera ainsi pour $u_n \circ g_n$ et u_n sur $B\left(x_0, \frac{r}{2}\right)$; $\int u_n\, d\sigma'$ tendrait donc vers $+\infty$ d'après la propriété indiquée plus haut. C.Q.F.D.

$\mathfrak{M}$ désigne l'ensemble des mesures positives μ, portées par S(D), telles que pour toute fonction f, plurisurharmonique sur D, s.c.i. sur $D \cup S(D)$, on ait :

$$\int f\, d\mu \leqslant \int f(g \cdot x)\, d\sigma(x)\, dg .$$

THEOREME 19.1.

a) *les mesures de* $\mathfrak{M}$ *sont de masse totale* 1.

b) *pour qu'une forme linéaire* μ *sur* $C_{\mathbf{R}}(S(D))$ *soit dans* $\mathfrak{M}$, *il faut et il suffit que pour tout* $h \in C_{\mathbf{R}}(S(D))$, *on ait* :

$$\mu(h) \leqslant \int \overline{h}(g \cdot x)\, d\sigma(x)\, dg .$$

Démonstration.

a) est évident.

b) *nécessité* : soit h continue sur S(D). D'après un lemme de Choquet $\overline{h}$ est aussi la régularisée s.c.i. de l'enveloppe inférieure d'une suite φ_n décroissante dans Φ_h. D'autre part, si φ_n^g est la fonction : $\varphi_n^g(x) = \varphi_n(g \cdot x)$, elle est plurisurharmonique et

$$(\text{rég. s.c.i. inf} \cdot \varphi_n)\,(g \cdot x) = (\text{rég. s.c.i. inf} \cdot \varphi_n^g)\,(x)\ ;$$

On a donc $\int(\text{rég. s.c.i. inf} \cdot \varphi_n)\,(g \cdot x)\, d\sigma(x) = \int \inf \cdot \varphi_n^g(x)\, d\sigma(x)$. Enfin :

$$\int \overline{h}\,(g \cdot x)\, d\sigma \cdot dg = \int \inf \varphi_n^g(x)\, d\sigma(x) \cdot dg = \lim \int \varphi_n^g(x)\, d\sigma\, dy$$

$$\geqslant \lim \int \varphi_n \cdot d\mu \geqslant \int h\, d\mu\ .$$

c) *suffisance* : si h est négative, alors $\overline{h}$ l'est et μ est bien une mesure portée par S(D).

Soit f, plurisurharmonique sur D, s.c.i. sur $\mathrm{D} \cup \mathrm{S(D)}$, alors :

$$\int f\, d\mu = \sup \left\{ \int h\, d\mu \mid h \leqslant f\,,\ h \in \mathrm{C_{\mathbf{R}}(S(D))} \right\} \leqslant \sup \left\{ \int \overline{h}(g \cdot x)\, d\sigma \cdot dg \right.$$

dans les mêmes conditions. Or $\overline{h}$ minore f.

THEOREME 19.2. – *Pour tout* h_0 *dans* $\mathrm{C_{\mathbf{R}}(S(D))}$, *il existe* $\mu \in \mathcal{M}$ *tel que :*

$$\int \overline{h}_0(g \cdot x)\, d\sigma \cdot dg = \int h_0 \cdot d\mu\ .$$

$p(h) = \int \overline{h}(g \cdot x)\, d\sigma \cdot dg$ étant une fonction convexe de h positivement homogène, raisonnement standard utilisant le théorème de Hahn-Banach, montre qu'il existe une mesure μ telle que $\mu(h) \leqslant p(h)$ avec égalité en h_0. μ est dans $\mathcal{M}$ d'après le théorème précédent.

COROLLAIRE. – $\mathcal{M}$ *est vaguement fermé et est réduit à la moyenne sur* D* *si* D *est un disque dans le plan.*

THEOREME 19.3. – *Si* G *agit transivement sur* S(D), *l'image de* dg *sur* S(D) *est dans* $\mathcal{M}$.

Démonstration. – Soit $g_0 \in \mathrm{G}$, la fonction $f(g_0 \cdot x)$ est plurisurharmonique sur D et s.c.i. sur $\mathrm{D} \cup \mathrm{S(D)}$ si f l'est ; on a donc, si μ est une mesure de $\mathcal{M}$:

$$\int f(g_0 \cdot x)\, d\mu(x) \leqslant \int f(g_0 \cdot g \cdot x)\, d\sigma \cdot dg\ .$$

Intégrons les deux membres par rapport à g_0 :

$$\int \left[\int f(g_0 \cdot x)\, dg_0 \right] d\mu(x) \leqslant \int f(g_0 \cdot g \cdot x)\, d\sigma\, dg \cdot dg_0 =$$
$$= \int f(g_0 \cdot x)\, dg_0 \ .$$

Or le crochet est indépendant de x dans S(D) puisque G agit transitivement sur S(D) et que dg_0 est invariante à droite par G. Comme μ est de masse 1, il en résulte :

$$\int f(g \cdot y)\, dg \leqslant \int f(g \cdot x) \quad , \quad \forall y \in S(D) \ .$$

L'exemple suivant montre qu'en général les mesures de $\mathfrak{M}$ ne sont pas toutes invariantes par G, même si G agit transitivement sur S(D).

On prend pour D la boule unité de C^2 ; alors S(D) = D* et le groupe des automorphismes conservant l'origine est le groupe des transformations unitaires [3]. On a donc :

$$\int f(g \cdot x)\, d\sigma \cdot dg = \int f(x) \cdot d\sigma \ .$$

Soit : $f(x) = \mathrm{Re}\, \dfrac{x_1^2 \cdot \overline{x}_2}{\|x\|^2}$, $h(x) = \left[\dfrac{\partial}{\partial \theta} f(x\, e^{i\theta}) \right]_{\theta = 0} = - \mathrm{Im}\, \dfrac{x_1^2 \cdot x_2}{\|x\|^2}$.

a) les fonctions f et h sont continues sur $\overline{D}$.

b) sur chaque droite complexe issue de O, h est harmonique et nulle à l'origine ; en effet si $x_1 = \alpha\, t$, $x_2 = \beta t$ $h(x)$ vaut

$$- \mathrm{Im}\, \frac{\alpha^2\, \overline{\beta}\, t}{|\alpha|^2 + |\rho|^2} \ .$$

c) h étant impaire, $\int h(x)\, d\sigma = 0$.

Si les mesures de $\mathfrak{M}$ étaient invariantes par G, on aurait

$$\int [f(x\, e^{i\theta}) - f(x)]\, d\mu(x) = 0 \quad \forall \mu \in \mathfrak{M} \quad , \quad \forall \theta$$

après dérivation en θ, on aurait $\int h(x)\, d\mu(x) = 0 \quad \forall \mu \in \mathfrak{M}$.

Posons $\lambda(\rho) = \int \overline{h}(\rho\, x)\, d\sigma$, $\lambda(\rho)$ est une fonction décroissante de ρ puisque $\overline{h}$ est surharmonique et $\lambda(1) = \int h(x)\, d\mu$ pour une mesure μ convenable dans $\mathfrak{M}$ d'après le théorème 19.2 ; $\lambda(1)$ est donc nulle. Soit r le rapport d'homothétie ($r > 1$) entre D et le support de $d\sigma$: $\lim\limits_{\rho\to r} \lambda(\rho) = \lim\limits_{\rho\to r} \int \overline{h}(\rho x)\, d\sigma \geqslant \int \lim\limits_{\rho\to r} \overline{h}(\rho x)\, d\sigma.$

On a donc $\lim\limits_{\rho\to r} \lambda(\rho) \geqslant \int_{D^*} h(x)\, d\sigma = 0$ d'après c).

$\lambda(\rho)$ est donc nulle pour $\rho \in [1\ , r]$ et $\overline{h}$ est harmonique dans D ; $\overline{h}$ étant déjà plurisurharmonique sera donc pluriharmonique sur D ; h et $\overline{h}$ seront donc harmoniques sur chaque droite complexe issue de O d'après b), comme ces deux fonctions prennent les mêmes valeurs sur D*, h et h' seront égales. Or h n'est pas pluriharmonique. La contradiction est établie.

20. Application à l'espace $H_p(D)$.

Les hypothèses sur D sont les mêmes qu'au paragraphe 19. f est une fonction de $H_p(D)$, E est la réunion des droites issues de O sur lesquelles f appartient à l'espace H_p du disque intersection avec D. Pour tout x dans D* – E, on pose $f^*(x) = \lim\limits_{\rho\to 1} f(\rho x), f^*(x\, e^{i\theta})$ est une fonction de $L^p(d\theta)$.

Proposition 20.1. – $\forall\, \varepsilon > 0$, *il existe un ouvert* ω *contenant* S(D) – E *tel que* $\mu(\omega) < \varepsilon$, $\forall \mu \in \mathfrak{M}$; S(D) – E *est en particulier de* μ*-mesure nulle.*

Démonstration. – Soit u la plus petite majorante plurisurharmonique de $\int |f(x\, e^{i\theta})|^p\, d\theta$; $u(\rho x)$ est pour $\rho < 1$, plurisurharmonique sur D, s.c.i. sur $D \cup S(D)$, et vaut $+\infty$ sur S(D) – E. Il existe donc un ouvert ω contenant S(D) – E sur lequel

$$u(\rho x) > \frac{1}{\varepsilon} \int u(g\cdot \rho x)\, d\sigma \cdot dg = K\ .$$

Or $\mu(\omega) \leqslant \frac{1}{K} \int u(\rho \cdot x)\, d\mu \leqslant \frac{1}{K} \int u(g \cdot \rho x)\, d\sigma\, dg = \varepsilon$, $\forall \mu \in \mathfrak{M}$ par définition de $\mathfrak{M}$.

Theoreme 20.1. – $\sup\limits_{\mu\in\mathfrak{M}} \left[\int |f^*(x\, e^{i\theta})|^p\, d\theta\, d\mu\right]^{1/p}$ *définit sur*

$H_p(D)$ *une "norme" équivalente à* $\|f\|_p$. *En particulier si le groupe* G *conservant l'origine agit transitivement sur* S(D), f^* *est dans* $L^p(dg)$.

Démonstration. – Vérifions que si u est la plus petite majorante plurisurharmonique de $\int |f(x\,e^{i\theta})|^p \, d\theta$, on a :

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}} \int |f^*(x\,e^{i\theta})|^p \, d\theta \, d\mu = \int u(g \cdot x) \, d\sigma \cdot dg \;.$$

Soit u_ρ la plus petite majorante plurisurharmonique de

$$\int u(g \cdot x) \, d\sigma \cdot dg \;.$$

u_ρ tend en croissant vers u puisque $\int |f(\rho\, x\, e^{i\theta})|^p \, d\theta$ tend en croissant vers $\int |f^*(x\,e^{i\theta})|^p \, d\theta$, quel que soit x dans S(D). Il suffit donc d'établir $\sup\limits_{\mu \in \mathcal{M}} \int |f(\rho\, x\, e^{i\theta})|^p \, d\theta \, d\mu = \int u_\rho(g \cdot x) \, d\sigma \, dg$, puis de passer à la limite lorsque ρ tend vers 1. Or cette dernière égalité résulte des théorèmes 19.2, 19.1 et de la proposition 19.2.

Il reste à établir l'équivalence des normes : ce qui résulte immédiatement du lemme 19.1.

Le théorème suivant donne une caractérisation des fonctions de l'adhérence de A(D) dans $H_p(D)$ au moyen des valeurs prises sur S(D).

U désigne le disque unité dans le plan, pour tout x sur D* on pose $f_x(t) = f(t \cdot x)$ avec t dans U ; $\tilde{f} : x \rightsquigarrow f_x$ applique E dans $H_p(U)$.

THEOREME 20.2. – *Pour que* f *soit dans* $\overline{A(D)}$, *il faut et il suffit :*

i) *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ouvert* ω *de* S(D) *tel que :* $\mu(\omega) < \varepsilon, \forall \mu \in \mathcal{M}$ *et tel que* $\tilde{f}$ *soit définie et continue sur* $S(D) - \omega$.

ii) $\|f\|_A^p = \dfrac{1}{2\pi} \sup\limits_{\mu \in \mathcal{M}} \displaystyle\int_A^* \left[\int |f^*(x\,e^{i\theta})|^p \, d\theta \right] d\mu(x)$ *tend vers* O *lorsque* $\sup\limits_{\mu \in \mathcal{M}} \mu^*(A)$ *tend vers* O.

Démonstration. – nécessité de i).

Soit f_n une suite dans A(D) telle que $\|f - f_n\|_p^p < \frac{1}{2^{2n}}$, soit $A_n = \left\{ x \in S(D) \,\middle|\, \frac{1}{2\pi} f^*(x\,e^{i\theta}) - f_n(x\,e^{i\theta}) \middle|^p d\theta > \frac{1}{2^n} \right\}$, on pose

$$B_n = \bigcup_{k \geqslant n} A_k \,.$$

$$\sup_{\mu \in \mathfrak{M}} \mu^*(A_n) \leqslant \frac{2^n}{2\pi} \sup_{\mu \in \mathfrak{M}} \left[\int_{A_n}^* \left[\int |f^*(x\,e^{i\theta}) - f_n(x\,e^{i\theta})|^p \, d\theta \right] d\mu \right].$$

$$\leqslant 2^n \cdot K \cdot \|f_n\|_p^p$$

où K est une constante dont l'existence est assurée par le théorème 20.1.

Il en résulte que $\sup_{\mu \in \mathfrak{M}} \mu^*(B_n) \leqslant \frac{K}{2^{n-1}}$.

Or A_n, et B_n par conséquent, est ouvert dans S(D) car

$$\int_0^{2\pi} |f^*(x\,e^{i\theta}) - f_n(x\,e^{i\theta})|^p \, d\theta$$

est s.c.i. en x, comme limite croissante des fonctions continues :

$$|f(\rho\,x\,e^{i\theta}) - f_n(\rho\,x\,e^{i\theta})|^p \, d\theta \quad \text{lorsque } \rho \text{ tend vers } 1 \,.$$

Pour obtenir ii), il suffit de vérifier que $\tilde{f}(x) - \tilde{f}_n(x)$, sur le complémentaire de B_k dans S(D) converge uniformément vers O, $\tilde{f}_n(x)$ étant continue puisque f_n l'est. Or si x est dans $S(D) - B_k$, quel que soit $n \geqslant k$, x n'est pas dans A_n et alors :

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}_n(x)\|_{H_p(U)}^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(x\,e^{i\theta}) - f_n(x\,e^{i\theta})|^p \, d\theta \leqslant \frac{1}{2^n} \,.$$

nécessité de i) : elle résulte immédiatement des inégalités :

$$\|f\|_A \leqslant \|f - f_n\| + \|f_n\|_\infty \, \mu^*(A)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si} \quad p \geqslant 1$$

$$\|f\|_A^p \leqslant \|f - f_n\| + \|f_n\|_\infty^p \cdot \mu^*(A) \quad \text{si} \quad 0 < p < 1 \,.$$

suffisance de i) et ii) : soit

$$u_\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(x\,e^{i\theta}) - f(\rho\,x\,e^{i\theta})|^p\,d\theta\ ,$$

soient x et x' dans $S(D) - \omega$, ω étant conforme à i).

Il résulte de la sousharmonicité de $t \rightsquigarrow |f(t\,x - f(t\,x'))|^p$ pour $|t| < 1$:

$$\int |f(\rho\,x\,e^{i\theta}) - f(\rho\,x'\,e^{i\theta})|^p\,d\theta \leqslant \int |f^*(x\,e^{i\theta}) - f^*(x'\,e^{i\theta})|^p\,d\theta\ .$$

Il en résulte :

$$\|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x') - \widetilde{f}_\rho(x) + \widetilde{f}_\rho(x')\|_{H_p(U)} \leqslant (2 \text{ si } p \geqslant 1,\ 2^{\frac{1}{p}} \text{ si } p < 1)\ \|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x')\|$$

à fortiori :

$$|\,\|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}_\rho(x)\| - \|\widetilde{f}_\rho(x') - \widetilde{f}_\rho(x')\|\,| \leqslant 2\,\|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x')\|$$

$$|\,\|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}_\rho(x)\|^p - \|\widetilde{f}(x') - \widetilde{f}_\rho(x')\|^p\,| \leqslant 2\,\|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x')\|^p$$

c'est-à-dire :

$$|[u_\rho(x)]^{1/p} - [u_\rho(x')]^{1/p}| \leqslant 2\,\|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x')\|^p$$

ou :

$$|u_\rho(x) - u_\rho(x')| \leqslant 2\,\|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x')\|^p\ .$$

Les fonctions u_ρ ou $u_\rho^{1/p}$ sont donc équicontinues sur $S(D) - \omega$ comme $u_\rho(x)$ tend vers 0 simplement sur $S(D) - \omega$ lorsque ρ tend vers 1, u_ρ converge donc uniformément vers 0 sur $S(D) - \omega$ qui est compact.

Enfin

$$\|f - f\|_\rho^p \leqslant K \sup_{\mu\in\mathfrak{M}} \left[\int_{S(D)-\omega} u_\rho(x)\,d\mu(x) + \int_\omega u_\rho(x)\,d\mu(x)\right].$$

où la constante K est fournie par le théorème 20.1.

$$\begin{aligned}\|f - f\|_\rho^p &\leqslant K\left[\sup_{\mu\in\mathfrak{M}} \int_{S(D)-\omega} u_\rho(x)\,d\mu(x) + \|f - f_\rho\|_\omega^p\right]\\ &\leqslant K\left[\sup_{\mu\in\mathfrak{M}} \int_{S(D)-\omega} u_\rho(x)\,d\mu(x) + (2^p \text{ ou } 2)\|_\omega^p\right]\ .\end{aligned}$$

On choisit ω, à l'aide i) puis ii) de telle façon que (2^p ou 2). $\|f\|_\omega^p$ soit inférieur à ε, puis ω étant ainsi choisi, on choisit ρ assez voisin de 1 pour que u_ρ soit inférieur à ε sur $S(D) - \omega$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXANDER, Thèse (multigraphiée) (1968).

[2] S. BOCHNER, Classes of holomorphic functions of several variables. *Proc. Nat. Ac. Sc.* U.S.A. (vol. 46) 720-724. (1960).

[3] S. BOCHNER et W.T. MARTIN, Several complex variables Princeton (1948).

[4] N. BOURBAKI, Intégration Chap. 5.

[5] M. BRELOT, Allure des fonctions sousharmoniques à la frontière, *Math. Nach.* (t. 4) 298-307 (1950).

[6] M. BRELOT, G. CHOQUET, J. DENY, Théorie du Potentiel, Séminaire de la Fac. Sc, de Paris (1958).

[7,a] H.J. BREMERMANN, *Math. Ann.* 173-186 (1958).

[7,b] Die characterisierung von Regulartästreigebieten (Thèse). Munster 1951.

[8] G. CŒURE, *Cr. Ac. Sc.* (t. 267) 473-476 et 816 (1968).

[9] G. CŒURE, *Cr. Ac. Sc.* (t. 267) 440-442 (1968).

[10] G. CŒURE, *Cr. Ac. Sc.* (t. 262) 177-180 (1966).

[11] G. CŒURE, *Cr. Ac. Sc.* (t. 264) 287-290 (1967).

[12] A. DOUADY, (Thèse) *Ann. de l'Institut Fourier* (t. XVI) (1966).

[13] H. FURSTENBERG, A Poisson Formula. *Ann. of Math.* (t.77) 325-385 (1966).

[14] I.M. GEL'FAND et N.YA. VILENKIN, Generalised functions (Vol. 4), Acad. Press (1964).

[15] A. GROTHENDIECK, Espaces vectoriels topologiques, Sao-Paulo Univ. (1964).

[16] G. GUNNING et H. ROSSI, Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall (1966).

[17] G.H. HARDY, *Proc. London Math. Soc.* (T. 14) (1915).

[18] E. HILLE et G. PHILLIPS, Functional analysis and semi-groups, *Am. Math. Soc. Publ.* (Vol. XXXI) (1957).

[19] S. KAKUTANI, *Ann. of Math.* (T. 49) (1948).

[20] C.O. KIESELMAN, On entire functions of exponential type. *Acta Math.* (T. 117) p. 1-35 (1967).

[21] Y. KUSUNOKI, *J. Math. Kyoto Univ,* 123-134 (1964).

[22] P. LELONG, Fonctions plurisousharmoniques, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (t. 62) (p. 301-338) (1945).

[23,a] P. LELONG, Séminaires d'analyse de la Fac. Sc. de Paris (1968) n° 71 et 116.

[23,b] "Fonctionnelles analytiques et fonctions entières" Presse de Montréal (1968).

[24,a] P. LELONG, Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables réelles. *Ann. Inst. Fourier* (t. XI) (1961).

[24,b] Fonctions entières de type exponentielle. *Ann. Inst. Fourier.* (t. 10) fasc. 2 (1966).

[25] P. LELONG, *Cr. Ac. Sc.* (t. 267) *p.* 916-918 (1968).

[26,a] P. LELONG, Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques. *Journal d'Anal. Math.* (V. 2) p. 179-207 (1952).

[26,b] Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. Gordon and Beach (1969).

[27] Ph. NOVERRAZ, Thèse à paraître *Ann. Inst. Fourier* (1969).

[28] M.A. ZORN, Characterisation of analytic functions in Banach spaces. *Ann. of Math.* (t. 12) p. 585-597 (1945).

(Thèse Fac. Sciences Nancy, 1969)

Gérard CŒURÉ
Institut de Mathématiques
2, rue de la Craffe
54 – Nancy