

ALAIN PIRIOU

## **Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels du type de Volterra**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 20, n° 1 (1970), p. 77-94

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1970\\_\\_20\\_1\\_77\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1970__20_1_77_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UNE CLASSE D'OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS DU TYPE DE VOLTERRA

par Alain PIRIOU

Soient  $I_1$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  et  $X'$  une variété  $C^\infty$  ; nous définissons une classe d'opérateurs pseudo-différentiels anisotropes  $P$  dans  $X = I_1 \times X'$  (l'anisotropie étant définie par la donnée d'un poids sur  $x_1 \in I_1$ ) qui sont de Volterra par rapport à  $x_1$  en ce sens que pour tout  $t \in I_1$ , la nullité de  $u$  pour  $x_1 < t$  implique la nullité de  $Pu$  pour  $x_1 < t$ . Dans cette classe, certains opérateurs admettent non seulement des paramétrix, mais de vrais inverses.

Ainsi, nous retrouvons en partie l'existence des solutions élémentaires pour les systèmes d'opérateurs différentiels paraboliques au sens de Petrovski, et nous pouvons effectuer très simplement l'étude des problèmes aux limites pour les systèmes d'opérateurs différentiels paraboliques dans un cylindre borné (voir [1] et [15]) en nous ramenant à un problème pseudo-différentiel sur le bord latéral du cylindre ; cette méthode permet d'établir un théorème d'existence pour les problèmes paraboliques à droite, d'unicité et régularité pour les problèmes paraboliques à gauche, en reliant la solution aux données par des formules ne faisant intervenir que des opérateurs de la classe en question, et des traces ; d'où la discussion quand les données sont des distributions, en particulier dans les espaces  $H_s$ ,  $W_{s,p}$ ,  $\mathcal{C}_a$ .

Le présent article est consacré à l'étude de la classe d'opérateurs du type de Volterra. Dans le § 1, nous rappelons les définitions relatives aux opérateurs pseudo-différentiels anisotropes  $P$  correspondant à des symboles  $p = p(x, i\eta_1, \eta')$  admettant à l'infini un développement asymptotique en série de fonctions quasi-homogènes  $p_j(x, i\eta_1, \eta')$  (avec  $\eta_1 \in \mathbf{R}$ ,  $\eta' \in \mathbf{R}^{n-1}$ , et un poids  $a_1$  sur  $\eta_1$  ; voir [7], [8], [13]). Puis nous montrons que si  $P$  est de Volterra, alors les composantes  $p_j$  du symbole de  $P$  admettent pour  $\xi_1 > 0$  un prolongement

$$p_j(x, \xi_1 + i\eta_1, \eta')$$

holomorphe en  $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ .

Dans le § 2, nous montrons que, réciproquement, étant donnée une suite  $(p_j)$  de fonctions  $p_j$  vérifiant cette propriété, il existe un opérateur de Volterra  $P$  de symbole  $\Sigma p_j$ ; il est à noter que les méthodes habituelles de construction de  $P$  (voir par exemple [4], théorème 3, et [9]) sont ici en défaut. Le résultat est obtenu en les transposant par transformation de Fourier inverse, c'est-à-dire en utilisant localement les noyaux des opérateurs (voir [11]). Nous en déduisons, grosso-modo, que si le symbole principal  $p_0$  de  $P$  est inversible pour  $\xi_1 \geq 0$ , alors  $P$  admet une paramétrix de Volterra.

Dans le § 3, nous montrons qu'un tel opérateur  $P$  est en réalité inversible quand on se restreint à un compact de  $X$ ; la démonstration utilise le théorème des noyaux dans sa forme globale: si  $Q$  est une paramétrix de  $P$ , nous posons  $QP = I - R$ , et un inverse (à gauche) de  $P$  est défini par  $(I + S)Q$ , où  $S$  est l'opérateur de noyau  $\sum_{\nu \geq 1} N_\nu$ ,  $N_\nu$  désignant la  $\nu^{\text{ième}}$  itération du noyau  $N$  de  $R$ ; remarquons que, formellement, cette méthode est exactement la "méthode de la paramétrix" de E.E. Levi (1907) (voir [12]).

L'application des résultats précédents aux problèmes aux limites paraboliques sera l'objet d'un article ultérieur. Les résultats principaux ont été énoncés dans [14].

Nous remercions vivement P. Krée, dont les conseils nous ont très efficacement aidé.

### 1. Définitions et propriétés générales.

(1) *Notations.* — Un point  $y$  de  $\mathbf{R}^n$  est noté  $y = (y_1, y')$ , où  $y_1 \in \mathbf{R}$  et  $y' = (y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^{n-1}$ ; on pose de même  $\eta = (\eta_1, \eta')$ .

$$\text{Soient } C^+ = \{\xi_1 + i\eta_1 \in \mathbf{C} \mid \xi_1 > 0, \eta_1 \in \mathbf{R}\}$$

$$\bar{C}^+ = \{\xi_1 + i\eta_1 \in \mathbf{C} \mid \xi_1 \geq 0, \eta_1 \in \mathbf{R}\}$$

$$\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$$

La transformation de Fourier est définie formellement par :

$$\mathfrak{F}u(\eta) = \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} u(y) dy, \text{ où } \langle y, \eta \rangle = y_1 \eta_1 + \dots + y_n \eta_n.$$

La transformation de Laplace est définie formellement par :

$$\mathcal{L}u(\xi_1, \eta') = \int e^{-y_1 \xi_1 - i\langle y', \eta' \rangle} u(y) dy,$$

si  $u(y) = 0$  pour  $y_1 < 0$ , et pour  $\xi_1 \in \bar{C}^+$ .

L'anisotropie (voir [7]) est définie par le système

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

où  $a_1$  est un entier pair fixé,  $a_2 = \dots = a_n = 1$ .

Nous posons  $\rho(\xi_1, \eta') = |\xi_1|^{1/a_1} + |\eta'|$ , où

$$|\eta'|^2 = \eta_2^2 + \dots + \eta_n^2, \text{ et } \rho(\eta) = \rho(i\eta_1, \eta').$$

Si  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  est un multi-indice, nous posons

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha'), \langle a, \alpha \rangle = a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n;$$

si  $m$  est un réel, soit  $m' = -|a| - m$  (où  $|a| = a_1 + n - 1$ ); pour

$1 \leq j \leq n$ , on pose  $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_j}$ ; soient  $\mathbf{R}_*^n = \mathbf{R}^n - \{0\}$ .

$$\Delta = \{(\xi_1, \eta') \mid \xi_1 \in \bar{C}^+, \eta' \in \mathbf{R}^{n-1}\}$$

$$\Delta_* = \{(\xi_1, \eta') \in \Delta \mid \rho(\xi_1, \eta') > 0\}$$

(2) Soient  $m$  un réel,  $d_1$  et  $d_2$  deux entiers  $\geq 1$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ ;  $S^{m,a}(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2})$  désigne l'espace des fonctions  $p = p(x, i\eta_1, \eta')$  de classe  $C^\infty$  dans  $\Omega_x \times \mathbf{R}_*^n$ , à valeurs dans  $\mathcal{L}(C^{d_1}, C^{d_2})$ , telles qu'il existe une suite de fonctions  $p_j = p_j(x, i\eta_1, \eta')$  satisfaisant :

i)  $p_j$  est  $C^\infty$  dans  $\Omega \times \mathbf{R}_*^n$ , à valeurs dans  $\mathcal{L}(C^{d_1}, C^{d_2})$ .

ii)  $p_j$  est quasi-homogène de degré  $m - j$  par rapport à  $\eta$ , c.a.d :

$$p_j(x, \lambda^{a_1} i\eta_1, \lambda \eta') = \lambda^{m-j} p_j(x, i\eta_1, \eta') \text{ pour } \lambda > 0, x \in \Omega, \eta \in \mathbf{R}_*^n.$$

iii)  $p \sim \sum p_j$ , c.a.d : pour tous multi-indices  $\alpha, \beta$ , pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , pour tout entier  $N \geq 1$ , il existe une constante  $C$  vérifiant :

$$|D_{\eta}^{\alpha} D_x^{\beta} (p(x, i\eta_1, \eta') - \sum_{j < N} p_j(x, i\eta_1, \eta'))| \leq C \rho(\eta)^{m-N-\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

pour  $x \in K$  et  $\rho(\eta) \geq 1$ .

(3) Si  $p \in S^{m,a}(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2})$ , on définit l'opérateur

$$P = p \left( x, \frac{\partial}{\partial x_1}, D_x \right)$$

par  $(P\varphi)(x) = (2\pi)^{-n} \int p(x, i\eta_1, \eta') e^{i\langle x, \eta \rangle} \mathfrak{F}\varphi(\eta) d\eta$

lorsque  $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, C^{d_1})$ .

$L^{m,a}(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2})$  désigne la classe des opérateurs

$$P : \mathcal{O}(\Omega, C^{d_1}) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega, C^{d_2})$$

tels que : pour toute  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , il existe  $p_f \in S^{m,a}(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2})$  vérifiant  $P(f\varphi) = p_f \left( x, \frac{\partial}{\partial x_1}, D_x \right) \varphi$  pour  $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, C^{d_1})$ .

(4) Soient  $I_1$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ ,  $X'$  une variété  $C^{\infty}$  de dimension  $n - 1$ , deux fibrés  $E, F$  sur la variété  $X = I_1 \times X'$ ;  $L^{m,a}(X, E, F)$  désigne la classe des opérateurs  $P : \mathcal{O}(X, E) \longrightarrow \mathcal{E}(X, F)$  tels que : pour toute carte  $\theta$  de  $X$  de la forme  $\theta = (\theta_1, \theta')$ ,  $\theta_1$  carte de  $I_1$ ,  $\theta'$  carte de  $X'$ , au-dessus de laquelle  $E$  et  $F$  sont triviaux,  $P$  est traduit en un opérateur de  $L^{m,a}(\Omega, \dim E, \dim F)$ , où  $\Omega$  est l'image de la carte  $\theta$ .

(5) *Remarque.* — Nous avons

$$S^{m,a}(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2}) \subset S_{1,0}^{m,a}(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2}),$$

$$L^{m,a}(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2}) \subset L_{1,0}^{m,a}(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2})$$

(voir [7], [8]).

Nous utiliserons les propriétés de calcul symbolique et les majorations énoncées dans [7], [8].

Nous pouvons maintenant définir la classe d'opérateurs qui sera l'objet de notre travail.

(6) DEFINITION. —  $V^m(X, E, F)$  désigne la sous-classe des opérateurs  $P$  de  $L^{m,a}(X, E, F)$  ayant la propriété de Volterra par rapport à  $x_1$ , c'est-à-dire :

Si  $t \in I_1$ , si  $\varphi \in \mathcal{O}(X, E)$  est nulle pour  $x_1 < t$ , alors  $P\varphi$  est nulle pour  $x_1 < t$ .

On définit de même  $V_-^m(X, E, F)$  en remplaçant  $x_1 < t$  par  $x_1 > t$  dans la condition précédente ; on désigne par  $V_c^m(X, E, F)$  la sous-classe des opérateurs de type compact (voir [4]) de  $V^m(X, E, F)$ .

Les résultats suivants sont immédiats :

(7) PROPOSITION. — Soient  $P \in V^m(X, E, F)$ ,  $Q \in V^\mu(X, F, G)$ ,  $P$  ou  $Q$  étant de type compact ; alors  $QP \in V^{m+\mu}(X, E, G)$ .

Soit  $P \in V^m(X, E, F)$  ; alors le noyau-distribution de  $P$  est nul dans  $\{(x, y) \in X \times X \mid x_1 < y_1\}$  ; le transposé de  $P$  est dans

$$V_-^m(X, F^*, E^*) ;$$

si  $\theta : I \times X'_1 \longrightarrow \tilde{I}_1 \times \tilde{X}'$  est un difféomorphisme de la forme  $\theta = (\theta_1, \theta')$ , alors le transporté de  $P$  par  $\theta$  est dans  $V^m(\tilde{I}_1 \times \tilde{X}', E, F)$  si  $\theta_1$  est croissant, et dans  $V_-^m(\tilde{I}_1 \times \tilde{X}', E, F)$  si  $\theta_1$  est décroissant.

Nous aurons besoin par la suite de :

(8) LEMME. — Soit  $p \in S^{m,a}(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2})$  ; on suppose que  $p$  admet un prolongement  $p(x, \xi_1 + i\eta_1, \eta')$  holomorphe en

$$\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 \in C^+$$

et continu pour  $\xi_1 \geq 0$ , tel que pour tout  $x \in \Omega$ , il existe des constantes  $C$  et  $\mu$  vérifiant :

$$|p(x, \zeta_1, \eta')| \leq C(1 + \rho(\zeta_1, \eta'))^\mu \quad \text{pour } \xi_1 \geq 0, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Alors  $P = p\left(x, \frac{\partial}{\partial x_1}, D_{x'}\right)$  est dans  $V^m(\Omega, C^{d_1}, C^{d_2})$ .

Démonstration. — Il suffit de montrer que si  $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega, C^{d_1})$  est nulle pour  $x_1 < 0$ , alors  $P\varphi$  aussi.

$\mathcal{L}\varphi(\zeta_1, \eta')$  est une fonction continue et à décroissance rapide à l'infini dans  $\Delta$  et holomorphe en  $\zeta_1 \in C^+$ . Donc :

$$P\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\xi_1 \rightarrow 0_+} \int p(x, \xi_1 + i\eta_1, \eta') e^{x_1(\xi_1 + i\eta_1) + i\langle x', \eta' \rangle} \mathcal{L}\varphi(\xi_1 + i\eta_1, \eta') d\eta.$$

La formule de Cauchy montre que cette dernière intégrale est indépendante de  $\xi_1$  ( $\xi_1 > 0$ ), et on vérifie facilement qu'elle tend vers 0 si  $\xi_1 \longrightarrow +\infty$ ; donc  $P\varphi(x) = 0$ .

(9) DEFINITION. —  $\sigma_{m-j}(\Omega, d_1, d_2)$  désigne l'espace des fonctions  $p_j = p_j(x, i\eta_1, \eta')$  vérifiant les conditions i), ii) de (2), et admettant dans  $\Omega \times \Delta_*$  un prolongement  $p_j(x, \xi_1 + i\eta_1, \eta')$  holomorphe en  $\xi_1 \in \mathbb{C}^+$ , de classe  $C^\infty$  par rapport à  $(x, \eta)$  avec des dérivées continues dans  $\Omega \times \Delta_*$ .

On remarquera que le prolongement vérifie nécessairement :

$$p_j(x, \lambda^{a_1} \xi_1, \lambda \eta') = \lambda^{m-j} p_j(x, \xi_1, \eta') \text{ pour } x \in \Omega, (\xi_1, \eta') \in \Delta_*$$

(10) Exemple. — Prenons  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ,  $d_1 = d_2 = 1$ .

Soit  $p(i\eta_1, \eta') = (1 + i\eta_1 + |\eta'|^{a_1})^{m/a_1}$ ; alors  $p$  vérifie les hypothèses de (8); son symbole principal  $p_0(i\eta_1, \eta') = (i\eta_1 + |\eta'|^{a_1})^{m/a_1}$  est dans  $\sigma_m$ : il admet le prolongement  $p_0(\xi_1, \eta') = (\xi_1 + |\eta'|^{a_1})^{m/a_1}$ ; nous remarquons qu'il est  $\neq 0$  dans  $\Delta_*$ .

Nous établissons un premier résultat :

(11) THEOREME. — Soit  $P \in V^m(\Omega, \mathbb{C}^{d_1}, \mathbb{C}^{d_2})$  et  $\Sigma p_j$  le symbole de  $P$ . Alors, pour  $j \geq 0$ ,  $p_j \in \sigma_{m-j}(\Omega, d_1, d_2)$ .

Démonstration. — En remplaçant  $P$  par  $\varphi P \Psi$ , où  $\varphi, \Psi \in \mathcal{O}(\Omega)$  sont égales à 1 au voisinage d'un point donné de  $\Omega$ , on se ramène au cas  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

En composant  $P$  avec un opérateur du type de l'exemple (10), on peut supposer  $m$  non entier. On peut se limiter au cas  $d_1 = d_2 = 1$ , et  $P = p\left(x, \frac{\partial}{\partial x_1}, D_x\right)$ , où  $p \in S^{m,a}(\mathbb{R}^n)$ ; le noyau  $K(x, y)$  de  $P$  est égal à  $b(x, x - y)$ , où  $b(x, y)$  est, pour  $x \in \mathbb{R}^n$  fixé, la transformée de Fourier inverse  $\mathcal{F}^{-1}$  de la fonction (de  $\eta$ )  $p = p(x, i\eta_1, \eta')$ ; on a  $b(x, y) = 0$  pour  $y_1 < 0$ . Comme fonction de  $\eta$ ,  $p_j$  est  $C^\infty$  et

quasi-homogène de degré  $m - j$  dans  $\mathbf{R}_x^n$  ; mais  $(m - j)' \notin \mathbf{N}$ , donc la distribution (en  $\eta$ ) P.f.  $p_j$  (voir [10]) est quasi-homogène de degré  $m - j$  dans  $\mathbf{R}^n$  ; posons  $b_j(x, y) = \overline{\mathfrak{F}}_\eta$  P.f.  $p_j(x, i\eta_1, \eta')$  ; alors, pour  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $b_j$  est une distribution (en  $y$ ) quasi-homogène de degré  $(m - j)'$  dans  $\mathbf{R}^n$ , et de plus  $b_j \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n, \mathfrak{S}'(\mathbf{R}_y)) \cap C^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_{*y}^n)$ , avec :

$$(12) : \quad D_y^\alpha D_x^\beta b_j(x, y) = D_y^\alpha \overline{\mathfrak{F}}_\eta \text{ P.f. } D_x^\beta p_j$$

Choisissons une fonction  $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^n)$  telle que  $\varphi(y) = 1$  si  $\rho(y) < \frac{1}{2}$ ,  $\varphi(y) = 0$  si  $\rho(y) > 1$ , et une suite  $K_\nu$  de compacts de  $\mathbf{R}^n$  telle que tout compact de  $\mathbf{R}^n$  soit contenu dans au moins un  $K_\nu$ .

Par transposition des techniques habituelles, on construit une suite  $\varepsilon_j \searrow 0$  telle que :

$$(13) : \quad |D_y^\alpha D_x^\beta \left( \varphi\left(\frac{y_1}{\varepsilon_j^{a_1}}, \frac{y'}{\varepsilon_j}\right) b_j(x, y) \right)| \leq \frac{1}{2^j} \rho(y)^{(m-j+1)' - \langle a, a \rangle}$$

pour  $y \neq 0, x \in K_\nu, |\alpha| + |\beta| + \nu \leq j$ .

Nous poserons  $\varphi\left(\frac{y_1}{\varepsilon_j^{a_1}}, \frac{y'}{\varepsilon_j}\right) = \varphi_j(y)$ , et :

$$(14) : \quad \tilde{b}(x, y) = \sum_{j \geq 0} \varphi_j(y) b_j(x, y)$$

Nous remarquons que  $\tilde{b} \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n, \mathfrak{S}'(\mathbf{R}_y^n)) \cap C^\infty(\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_{*y}^n)$  et nous déduisons de (13) :

$$(15) : \quad |D_y^\alpha D_x^\beta (\tilde{b}(x, y) - \sum_{j < \mathbf{N}} b_j(x, y))| \leq C \rho(y)^{(m-\mathbf{N})' - \langle a, a \rangle}$$

si  $y \neq 0$  est assez petit et si  $x$  reste dans un compact  $K$  de  $\mathbf{R}^n$ .

Remarquons que (15) implique, dans les mêmes conditions :

$$(16) : \quad |D_y^\alpha D_x^\beta b(x, y)| \leq C \rho(y)^{m' - \langle a, a \rangle}$$

Considérons  $\overline{\mathfrak{F}}_y \tilde{b}(x, y) = \langle \tilde{b}(x, y), e^{-i\langle y, \eta \rangle} \rangle$  ; c'est une fonction  $C^\infty$  dans  $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\eta^n$ , et posons :

$$\tilde{p}(x, i\eta_1, \eta') = \overline{\mathfrak{F}}_y \tilde{b}(x, y)$$



Nous allons montrer que  $\tilde{p} \sim \sum p_j$ .

Pour  $\alpha, \beta, N$  donnés, choisissons un entier  $\mu$  assez grand pour que :

$$(17) : (|\eta_1| + \dots + |\eta_n|)^\mu \geq \rho(\eta)^{-(m-N-\langle a, a \rangle)} \text{ si } \rho(\eta) \geq 1,$$

puis un entier  $M \geq N$  assez grand pour que :

$$(18) : |a| - m - a_1 \mu + M > 0. \text{ Alors :}$$

$$(19) : D_\eta^\alpha D_x^\beta \left( \tilde{p} - \sum_{j < N} p_j \right) = E_1 + E_2 + E_3, \text{ où :}$$

$$E_1 = D_\eta^\alpha D_x^\beta \sum_{j < M} (\mathfrak{F}_y(\varphi_j b_j) - p_j)$$

$$E_2 = D_\eta^\alpha D_x^\beta \sum_{j=N}^{M-1} p_j, \quad E_3 = D_\eta^\alpha D_x^\beta r_M, \text{ avec}$$

$$r_M(x, i\eta_1, \eta') = \mathfrak{F}_y \tilde{b}_M(x, y), \quad \tilde{b}_M(x, y) = \sum_{j \geq M} \varphi_j(y) b_j(x, y).$$

Majoration de  $|E_1|$ . — Pour  $\eta \neq 0$ , on a :

$$D_\eta^\alpha D_x^\beta (\mathfrak{F}_y(\varphi_j b_j) - p_j) = D_\eta^\alpha D_x^\beta \mathfrak{F}_y(\Psi_j b_j) = \mathfrak{F}_y((-y)^\alpha \Psi_j D_x^\beta b_j),$$

où  $\Psi_j = \varphi_j - 1$  est nulle au voisinage de 0 et égale à  $-1$  au voisinage de l'infini. Puisque  $b_j \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_{*y}^n)$  est quasi-homogène en  $y$ , il existe une constante  $C_\gamma$  et un entier  $s$  tels que

$$\int |D_y^\gamma (y^\alpha \Psi_j D_x^\beta b_j)| dy \leq C_\gamma \text{ pour } x \in K, \quad |\gamma| \geq s,$$

donc

$$|\eta^\gamma \mathfrak{F}_y (y^\alpha \Psi_j D_x^\beta b_j)| \leq C_\gamma \text{ pour } x \in K, \quad |\gamma| \geq s$$

ce qui prouve :

(20) : pour tout entier  $q$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$|D_\eta^\alpha D_x^\beta (\mathfrak{F}_y(\varphi_j b_j) - p_j)| \leq \frac{C}{\rho(\eta)^q} \text{ si } x \in K, \quad \rho(\eta) \geq 1$$

Majoration de  $E_3$ . On a

$$|\eta^\gamma D_\eta^\alpha D_x^\beta r_M(x, i\eta_1, \eta')| = \left| \int y^a D_x^\beta \tilde{b}_M(x, y) D_y^\gamma e^{-i\langle y, \eta \rangle} dy \right|$$

Si  $|\gamma| = \mu$ , nous pouvons intégrer par parties, puisque  $|\gamma'| \leq \mu$  implique, d'après (16) et (18), pour  $y$  assez petit :

$$|D_y^{\gamma'} D_x^\beta \tilde{b}_M(x, y)| \leq C \rho(y)^{-|\alpha| - m + M - \langle a, \gamma' \rangle} \leq C \rho(y)^{-|\alpha| - m + M - a_1 \mu}$$

qui tend vers 0 avec  $y$ .

On obtient par (17) :

$$(21) : |D_\eta^\alpha D_x^\beta r_M(x, i\eta_1, \eta')| \leq C \rho(\eta)^{m - N - \langle a, \alpha \rangle}$$

si  $x \in K$  et  $\rho(\eta) \geq 1$ .

(20), (21) et la majoration évidente de  $E_2$  prouvent que  $\tilde{p} \sim \sum p_j$ . On en déduit  $\tilde{p} - p \in \mathfrak{S}(R_\eta^n)$ , et donc que  $\tilde{b} - b = \varphi'$ ,  $\varphi' \in \mathfrak{S}(R_\eta^n)$  ; remarquons que  $\tilde{b} = \varphi'$  pour  $y_1 < 0$ , et montrons que  $b_0(x, y) = 0$  pour  $y_1 < 0$  : considérons un entier  $\gamma$  tel que  $-|\alpha| - m - \gamma < 0$ , et appliquons (15) pour  $N = 1$ ,  $|\alpha| = \gamma$ , ce qui montre que  $D_y^\alpha \tilde{b}(x, y)$  est équivalent à  $D_y^\alpha b_0(x, y)$  quand  $y \rightarrow 0$  ;  $D_y^\alpha b_0(x, y)$  étant quasi-homogène en  $y$  de degré négatif et  $D_y^\alpha \tilde{b}(x, y)$  étant bornée pour  $y_1 < 0$ , cette équivalence implique  $D_y^\alpha b_0(x, y) = 0$  pour  $y_1 < 0$ ,  $|\alpha| = \gamma$ . Donc  $b_0(x, y)$  est un polynôme en  $y$  pour  $y_1 < 0$  ; mais  $b_0$  étant quasi-homogène en  $y$  de degré non entier, ce polynôme est nul. On montre de même que  $b_j(x, y) = 0$  pour  $y_1 < 0$ ,  $j \geq 0$ .

Enfin, P.f.  $p_0(x, i\eta_1, \eta') = \mathfrak{F}_y b_0(x, y) = p'_0 + p''_0$ , où :

$$p'_0 = \mathfrak{F}_y(\varphi b_0) \quad , \quad p''_0 = \mathfrak{F}_y((1 - \varphi) b_0) .$$

$p'_0$  admet le prolongement

$$\mathcal{L}_y(\varphi b_0) = \langle \varphi(y) b_0(x, y), e^{-y_1 \xi_1 - i\langle y', \eta' \rangle} \rangle ,$$

qui vérifie les conditions de régularité et d'analyticité de (9).  $p''_0$  admet le prolongement  $p''_0(x, \xi_1, \eta') = \mathcal{L}_y((1 - \varphi) b_0)$  ; pour  $|\gamma|$  assez grand, il vient :

$$\xi_1^{\gamma_1} \eta'^{\gamma'} D_\eta^\alpha D_x^\beta p''_0 = i^{\gamma_1} \int_{y_1 \geq 0} D_y^\gamma [(1 - \varphi(y)) (-y)^a D_x^\beta b_0(x, y)] e^{-y_1 \xi_1 - i\langle y', \eta' \rangle} dy ,$$

qui est continue pour  $\xi_1 \geq 0$  et holomorphe en  $\xi_1 \in \mathbb{C}^+$  ; on en déduit, en considérant  $(\xi_1 + \eta^2 + \dots + \eta_n^2)^\mu D_\eta^\alpha D_x^\beta p_0''$  pour  $\mu$  assez grand que  $p_0''$  vérifie les conditions de régularité et d'analyticité de (9), et donc que  $p_0 \in \sigma_m$ . On montre de même que  $p_j \in \sigma_{m-j}$ .

## 2. Existence des paramétrix.

Nous établissons d'abord la réciproque de (11) :

(22) PROPOSITION. — Soit une suite arbitraire  $(p_j)$ ,

$$p_j \in \sigma_{m-j}(\Omega, d_1, d_2).$$

Alors il existe  $\tilde{p} \in S^{m,a}(\Omega, d_1, d_2)$  telle que  $\tilde{p} \sim \Sigma p_j$  et

$$\tilde{p} \left( x, \frac{\partial}{\partial x_1}, D_{x'} \right) \in V^m(\Omega, \mathbb{C}^{d_1}, \mathbb{C}^{d_2}).$$

Il suffit de considérer, pour la démonstration, le cas  $d_1 = d_2 = 1$ . Etablissons le lemme suivant, qui généralise au cas  $m' \in \mathbb{N}$  certains résultats précédents :

(23) LEMME. — Soit  $p \in \sigma_m$ , indépendante de  $x$ . Alors  $p$  est la transformée de Laplace d'une distribution  $b \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , nulle pour  $y_1 < 0$ , quasi-homogène de degré  $m'$ , et de la forme :

$$b = \bar{\mathcal{F}}_\eta P.f.p(i\eta_1, \eta') + \sum_{\langle a, \gamma \rangle = m'} c_\gamma y^\gamma, \text{ où les } c_\gamma \in \mathbb{C}.$$

En effet, pour  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha \bar{\mathcal{F}} P.f.p, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle P.f.(\eta^\alpha p), \bar{\mathcal{F}}\varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int \eta^\alpha p(i\eta, \eta') \bar{\mathcal{F}}\varphi(\eta) d\eta \text{ si } |\alpha| \text{ est assez grand.} \end{aligned}$$

Supposons  $\varphi(y) = 0$  pour  $y_1 > 0$  et considérons l'anti-transformée de Laplace de

$$\varphi : \bar{\mathcal{L}}\varphi(\xi_1, \eta') = \int e^{y_1 \xi_1 + i \langle y', \eta' \rangle} \varphi(y) dy.$$

Exactement comme dans (8), on montre que

$$\int \eta^\alpha p(i\eta_1, \eta') \bar{\mathfrak{F}} \varphi(\eta) d\eta = 0.$$

Donc il existe un polynôme  $\Sigma c_\gamma y^\gamma$  tel que, si

$$b = \bar{\mathfrak{F}} P.f.p + \Sigma c_\gamma y^\gamma, \text{ alors } b = 0 \text{ pour } y_1 < 0.$$

Remarquons que  $\mathfrak{F} b = p(i\eta_1, \eta')$  pour  $\eta \neq 0$ , et que d'autre part  $\mathfrak{F} b$  est la limite, dans  $\mathfrak{S}'(\mathbf{R}_\eta^n)$ , de  $\mathcal{L}b(\xi_1, \eta')$  quand  $\xi_1 \longrightarrow 0_+$ . Les deux fonctions  $\mathcal{L}b$  et  $p$ , holomorphes en  $\xi_1$  et ayant même valeur au bord (au sens  $\mathcal{O}'(\mathbf{R}_{*\eta}^n)$ ) quand  $\xi_1 \longrightarrow 0_+$ , sont donc égales.

Enfin, l'égalité  $\mathfrak{F} b = \lim_{\xi_1 \rightarrow 0_+} p(\xi_1 + i\eta_1, \eta')$  montre que  $\mathfrak{F} b$  est quasi-homogène de degré  $m$  dans  $\mathbf{R}_\eta^n$ , d'où la forme précise de  $b$ . (on remarquera que si  $m' \in \mathbf{N}$ , les moments d'ordre  $\alpha$  de  $p$  sont nuls pour  $\langle \alpha, \alpha \rangle = m'$ , puisque  $p(i\eta_1, \eta')$  admet le prolongement quasi-homogène  $\mathfrak{F} b$ ).

Passons à la démonstration de (22) :

Posons, pour  $x \in \Omega$ ,

$$b_j(x, y) = \mathcal{L}^{-1} p_j(x, i\eta_1, \eta').$$

La relation

$$b_j(x, y) = e^{y_1 \xi_1^0} \bar{\mathfrak{F}}_\eta p_j(x, \xi_1^0 + i\eta_1, \eta') \quad (\xi_1^0 > 0, \text{ fixé})$$

montre que  $b_j \in C^\infty(\Omega, \mathfrak{S}'(\mathbf{R}_y^n))$ .

Mais d'après (23),

$$b_j(x, y) = \bar{\mathfrak{F}}_\eta P.f.p_j + \sum_{\langle \alpha, \gamma \rangle = (m-j)'} c_{\gamma, j}(x) y^\alpha,$$

et, d'après (12),

$$\bar{\mathfrak{F}}_\eta P.f.p_j \in C^\infty(\Omega, \mathfrak{S}'(\mathbf{R}_y^n)).$$

Il en résulte que  $c_{\gamma, j} \in C^\infty(\Omega)$ , et donc :

$$(24) : \quad b_j \in C^\infty(\Omega_x, \mathfrak{S}'(\mathbf{R}_y^n)) \cap C^\infty(\Omega_x \times \mathbf{R}_{*y}^n),$$

est quasi-homogène de degré  $(m - j)'$  en  $y$ , et nulle pour  $y_1 < 0$ .

Il suffit maintenant de reprendre (13), (14), . . . , (21) en remplaçant : "compact de  $\mathbf{R}^n$ " par "compact de  $\Omega$ ",  $i\eta_1$  par  $\xi_1 = \xi_1 + i\eta_1$  avec  $\xi_1 \geq 0$ ,  $\eta$  par  $(\xi_1, \eta')$ ,  $\mathfrak{F}_y$  par  $\mathcal{L}_y$  ; on aboutit ainsi à :

$$(25) : |D_\eta^\alpha D_x^\beta (\tilde{p}(x, \xi_1, \eta') - \sum_{j < N} p_j(x, \xi_1, \eta'))| \\ \leq C \rho(\xi_1, \eta')^{m-N-\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

pour  $\xi_1 \geq 0$  ,  $\eta \in \mathbf{R}^n$  ,  $\rho(\xi_1, \eta') \geq 1$  ,  $x \in K$

ce qui montre en particulier que  $\tilde{p}$  vérifie les hypothèses de (8) et que  $\tilde{p} \sim \sum p_j$ .

(26) DEFINITION. — Soit  $P \in V^m(X, E, F)$  ; on dit que  $P$  est parabolique à droite en  $x \in X$  s'il existe en  $x$  une carte  $\theta : U \longrightarrow \Omega$  de  $X$  de la forme  $\theta = (I, \theta')$ , des repères de  $E$  et  $F$  au-dessus de  $U$  tels que : si  $p_0 \in \sigma_m(\Omega, \dim E, \dim F)$  est le symbole principal correspondant de  $P/U$ , alors il existe  $q_0 \in \sigma_{-m}(\Omega, \dim F, \dim E)$  tel que  $p_0(x, \xi_1, \eta') q_0(x, \xi_1, \eta') = I$  pour  $x \in \Omega$ ,  $(\xi_1, \eta') \in \Delta_*$ .

On définit de même la parabolicité à gauche.

(27) PROPOSITION. — Soit  $P \in V^m(X, E, F)$  parabolique à droite (resp : à gauche) dans  $X$ , c.a.d en tout point de  $X$  ; alors il existe  $Q \in V_c^{-m}(X, F, E)$  tel que  $PQ - I$  (resp :  $QP - I$ ) soit dans

$$V^{-\infty}(X, F, F) \text{ (resp : } V^{-\infty}(X, E, E) \text{)} .$$

Par transposition, il suffit, pour la démonstration, de considérer  $P$  parabolique à gauche ; soit  $(U_i)$  un recouvrement de  $X$  localement fini par des ouverts de cartes de  $X$  satisfaisant (26) ; soit  $(\varphi_i)$  une partition de l'unité subordonnée à  $(U_i)$ , et  $(\psi_i)$ ,  $\psi_i \in \mathcal{O}(U_i)$ ,  $\psi_i = 1$  au voisinage de  $\text{Supp } \varphi_i$  ; pour chaque  $i$  nous considérons, d'après (22),  $P_i = P/U_i$ ,

$Q_i \in V^{-m}(U_i, F/U_i, E/U_i)$  tel que  $Q_i P_i - I \in V^{-\infty}(U_i, E/U_i, E/U_i)$

Posons  $Q = \sum_i \varphi_i Q_i \psi_i$  ; alors  $Q \in V_c^{-m}(X, F, E)$ , et, localement, le symbole de  $QP$  est :

$$\sum_{\alpha, \beta, i, j, k} \frac{1}{\alpha!} \left( \varphi_i \frac{1}{\beta!} q_{i,j}^{(\beta)} D_x^\beta \psi_i \right)^{(\alpha)} D_x^\alpha p_k = \sum_i \varphi_i \sum_{\alpha, j, k} \frac{1}{\alpha!} q_{i,j}^{(\alpha)} D_x^\alpha p_k = I$$

(l'indice placé en haut désignant une dérivation en  $\eta$ ).

(28) *Généralisation aux matrices d'opérateurs.*

Pour  $j = 1, 2, \dots, J$  et  $k = 1, 2, \dots, K$ , soient des réels  $s_k$ ,  $t_j$  et des fibrés  $E_k, F_j$  sur  $X$ ; considérons une matrice  $P = (P_{j,k})$ , où  $P_{j,k} \in V^{s_k - t_j}(X, E_k, F_j)$ . Nous appellerons symbole principal de  $P$  la matrice  $P_0 = (p_{j,k}^0)$ , où  $p_{j,k}^0$  désigne le terme de degré  $s_k - t_j$  dans le symbole de  $P_{j,k}$ .  $P$  est dite parabolique à droite en  $x \in X$  s'il existe, dans les mêmes conditions que (26) une matrice  $q_0 = (q_{k,j}^0)$  avec  $q_{k,j}^0 \in \sigma_{t_j - s_k}(\Omega, \dim F_j, \dim E_k)$  et

$$p_0(x, \xi_1, \eta') q_0(x, \xi_1, \eta') = I \text{ pour } x \in \Omega, (\xi_1, \eta') \in \Delta_*$$

Nous avons la généralisation suivante de (27) :

(29) THEOREME. — *Si  $P$  est parabolique à droite (resp : à gauche) dans  $X$ , il existe une matrice  $Q = (Q_{k,j})$ , avec  $Q_{k,j} \in V_c^{t_j - s_k}(X, F_j, E_k)$  telle que  $PQ - I$  (resp :  $QP - I$ ) est une matrice d'opérateurs d'ordre  $-\infty$ .*

*Démonstration.* — Supposons par exemple  $P$  parabolique à droite.

Construisons  $Q' = (Q'_{k,j})$ ,  $Q'_{k,j} \in V_c^{t_j - s_k}(X, F_j, E_k)$ ,

telle que si  $P' = PQ'$

$$(P'_{j,l} \in V^{t_l - t_j}(X, F_l, F_j)),$$

le terme de degré  $t_l - t_j$  dans le symbole de  $P'_{j,l}$  est égal à  $\delta_{j,l} I$ ; nous procédons alors comme dans [5]; lemme 1,0,2' : soient des opérateurs  $B_j \in V_c^{t_j}(X, F_j, F_j)$  et  $A_l \in V_c^{-t_l}(X, F_l, F_l)$  tous paraboliques dans  $X$  (on peut les construire en utilisant localement des opérateurs du type de l'exemple (10)); soit  $P''_{j,l} = B_j P'_{j,l} A_l \in V^0(X, F_l, F_j)$ , et  $P'' = (P''_{j,l})$ ,  $P'' \in V^0(X, \oplus F_l, \oplus F_j)$ ; le symbole principal de  $P''$  est  $(\delta_{j,l} b_j^0 a_l^0)$ , qui admet comme inverse  $(\delta_{i,j} (a_i^0)^{-1} (b_j^0)^{-1})$ ; d'après (27), il existe  $Q''' \in V_c^0(X, \oplus F_l, \oplus F_j)$  tel que  $P'' Q''' - I$  soit d'ordre  $-\infty$ ; définissons la matrice  $Q''$  par  $Q''_{l,k} = A_l Q'''_{l,k} B_k$ ; alors  $Q = Q' Q''$  convient.

## 3. Existence des inverses.

Nous précisons d'abord les conditions dans lesquelles auront lieu des résultats d'inversibilité.

Supposons  $0 \in I_1$ , et soit  $t \in I_1$  fixé ( $0 < t < +\infty$ ).

Si  $A'$  est un ensemble et  $A = I_1 \times A'$ , nous poserons

$$A_t = \{(x_1, x') \in I_1 \times A' \mid x_1 < t\}$$

$\mathcal{O}'_+(X_t, E)$  désigne le sous-espace de  $u \in \mathcal{O}'(X_t, E)$  telles que  $u = 0$  pour  $x_1 < 0$ . Si  $P \in V^m(X, E, F)$  dans le cas où  $X'$  est compacte, ou si  $P \in V_c^m(X, E, F)$  dans le cas où  $X'$  n'est pas compacte, nous définissons l'opérateur  $P_t : \mathcal{O}'_+(X_t, E) \longrightarrow \mathcal{O}'_+(X_t, F)$  de la façon suivante : si  $u \in \mathcal{O}'_+(X_t, E)$ ,  $P_t u$  est l'unique distribution de  $\mathcal{O}'_+(X_t, F)$  telle que pour tout  $t' < t$ ,  $P_t u = P(\varphi(x_1)u)$  pour  $x_1 < t'$ ,  $\varphi$  étant une fonction arbitraire vérifiant :  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\varphi(x_1) = 1$  pour  $x_1 < t'$ ,  $\text{Supp } \varphi \subset ]-\infty, t[$ . Dans la suite, nous sous-entendrons l'indice  $t$  dans la notation  $P_t$ . Nous supposons  $X'$  orientée.

(30) THEOREME. — Soit  $P = (P_{j,k})$  une matrice d'opérateurs

$$P_{j,k} \in V^{s_k - t_j}(X, E_k, F_j) ;$$

soient  $K'$  un compact de  $X'$ ,  $w'$  un ouvert relativement compact de  $X'$  ; on pose  $K = I_1 \times K'$ ,  $w = I_1 \times w'$ .

i) On suppose  $P$  parabolique à droite pour  $0 \leq x_1 \leq t$ ,  $x' \in X'$ . Alors il existe une matrice  $T_1 = (T_{k,j}^1)$  d'opérateurs

$$T_{k,j}^1 \in V_c^{t_j - s_k}(X, F_j, E_k)$$

telle que  $PT_1 u = u$  dans  $w_t$  si  $u \in \prod_{j=1}^J \mathcal{O}'_+(X_t, F_j)$

ii) On suppose que  $P$  est parabolique à gauche pour  $0 \leq x_1 \leq t$ ,  $x' \in X'$ . Alors il existe une matrice  $T_2 = (T_{k,j}^2)$  d'opérateurs

$$T_{k,j}^2 \in V_c^{t_j - s_k}(X, F_j, E_k)$$

telle que  $T_2 P u = u$  si  $u \in \prod_{k=1}^K \mathcal{O}'_+(X_t, E_k)$  a son support dans  $K_t$ .

Remarquons que i) et ii) s'échangent par transposition, et établissons par exemple ii). D'après (29), il suffit de considérer le cas d'une matrice réduite à un seul opérateur  $P = I - R$ ,  $R \in V^{-\infty}(X, E, E)$ ,

où  $E = \bigoplus_{k=1}^K E_k$ . Choisissons une forme différentielle  $\lambda$  (de degré  $n - 1$ )

dans l'orientation de  $X'$ . Nous désignons encore par  $\lambda$  la forme  ${}^tpr_1 dx_1 \wedge {}^tpr_2 \lambda$  sur  $X$ , où  $pr_1, pr_2$  sont les projections  $X \longrightarrow I_1, X \longrightarrow X'$ ; soit  $\mu$  la forme sur  $X \times X$  définie par  $\mu = {}^tpr'_1 \lambda \wedge {}^tpr'_2 \lambda$ , où  $pr'_1$  et  $pr'_2$  sont les projections  $X \times X \longrightarrow X$ . Grâce à  $\lambda$  (resp : à  $\mu$ ), nous pouvons identifier une section  $C^\infty$  sur  $X$  (resp : sur  $X \times X$ ) à une section-distribution sur  $X$  (resp : sur  $X \times X$ ). Le noyau-distribution  $N$  de l'opérateur  $R$  est une section  $C^\infty$  sur  $X \times X$  du fibré  $E \boxtimes E^*$ , produit tensoriel externe des fibrés  $E, E^*$  (rappelons que  $(E \boxtimes E^*)_{x,y} = E_x \otimes E_y^*$ ). Si  $u \in \mathcal{D}(X, E)$ , la fonction  $R\tilde{u} \in \mathcal{E}(X, F)$  est définie par :

$$(Ru)(x) = \int_X N(x, y) u(y) \lambda(y) \text{ où } N(x, y) u(y) \in E_x$$

est obtenu canoniquement à partir de l'application trilineaire :  $E_x \times E_y^* \times E_y \longrightarrow E_x$  transformant  $(e, f', f)$  en  $\langle f', f \rangle e$ .

Supposons par exemple  $X'$  non compacte et  $P$  de type compact. Si  $\text{supp } u \subset K_t$ , le calcul de  $Ru$  se fait au moyen de fonctions  $\tilde{u}$  gardant leur support dans un compact fixe de  $X$ ; donc  $R\tilde{u}$  garde aussi son support dans un compact fixe de  $X$ , et nous pouvons remplacer  $R$  par un opérateur de la forme  $\varphi R \psi$ ,  $\varphi$  et  $\psi \in \mathcal{D}(X)$ , ce qui revient à supposer  $N(x, y)$  à support compact dans  $X \times X$ . Alors

$$\begin{aligned} R(Ru)(x) &= \int_X N_2(x, z) u(z) \lambda(z), \text{ où } N_2(x, z) \\ &= \int_X N(x, y) N(y, z) \lambda(y) \end{aligned}$$

$(N(x, y) N(y, z)) \in E_x \otimes E_z^*$  étant obtenu canoniquement à partir de l'application quadri-linéaire de  $E_x \times E_y^* \times E_y \times E_z^*$  dans  $E_x \otimes E_z^*$  transformant  $(e, f', f, g)$  en  $\langle f', f \rangle e \otimes g$ . Nous voyons que

$$N_2 \in C_0^\infty(X \times X, E \boxtimes E^*),$$

et que, pour  $\nu$  entier  $\geq 1$ ,



$$(R^\nu u)(x) = \int_X N_\nu(x, z) u(z) \lambda(z) \quad \text{où :}$$

$$(31) : \begin{cases} N_1 = N \\ N_{\nu+1}(x, z) = \int_X N_\nu(x, y) N(y, z) \lambda(y) \end{cases}$$

Etablissons maintenant :

(32) LEMME. — *La série  $\sum_{\nu \geq 1} N_\nu$  converge dans  $C^\infty(X \times X, E \boxtimes E^*)$  vers une section  $M = M(x, z)$  nulle pour  $x_1 < z_1$ .*

Fixons un atlas  $(U'_i)$  localement fini de  $X'$ , tel que  $E$  et  $E^*$  soient triviaux au-dessus de  $U_i = I_1 \times U'_i$ , et fixons des repères correspondants dans  $E, E^*$ ; soit  $(\varphi_i)$  une partition de l'unité subordonnée à  $(U'_i)$ ; étudions  $\sum_{\nu \geq 1} N_\nu(x, z)$  pour  $x \in U_k, y \in U_l$  ( $k$  et  $l$  ne prenant qu'un nombre fini de valeurs :  $1, 2, \dots, L$ ). Appelons  $N_{\nu, k, l}$  l'expression de  $N_\nu$  dans  $U_k \times U_l$ ;  $N_{\nu, k, l}$  s'identifie à une matrice carrée à coefficients  $C^\infty$ , et  $N(x, y) N(y, z)$  au produit des matrices correspondantes. Démontrons par récurrence sur  $\nu$ : il existe des constantes positives  $A$  et  $C$  telles que, si  $\nu \geq 1$  et  $k, l = 1, \dots, L$ :

$$(33) : \begin{cases} N_{\nu, k, l}(x, z) = 0 \quad \text{pour } x_1 < z_1. \\ |N_{\nu, k, l}(x, z)| \leq A \frac{C^{\nu-1}}{(\nu-1)!} (x_1 - z_1)^{\nu-1} \quad \text{pour } x_1 \geq z_1. \end{cases}$$

En effet, c'est évident pour  $\nu = 1$ . Supposons la propriété vraie au rang  $\nu$ ; posons  $N_{\nu+1}(x, z) = \sum_{i=1}^L N_{\nu+1}^i(x, z)$ , où

$$N_{\nu+1}^i(x, z) = \int_X N_\nu(x, y) N(y, z) \varphi_i(y') \lambda(y).$$

Soient  $\Omega'_i$  l'image de l'ouvert de carte  $U'_i$ ,  $\lambda_i(y') dy'_2 \wedge \dots \wedge dy'_n$  l'expression de  $\lambda'$  dans la carte précédente; notons encore  $\varphi_i(y')$  l'expression dans cette même carte de  $\varphi_i$ . Alors :

$$N_{\nu+1, k, l}^i(x, z) = \int_{I_1 \times \Omega'_i} N_{\nu, k, l}(x, y) N_{1, l, l}(y, z) \varphi_i(y') \lambda_i(y') dy_1 dy',$$

donc  $N_{\nu+1, k, l}^i(x, z) = 0$  pour  $x_1 < z_1$ , et

$$N_{\nu+1, k, l}^i(x, z) = \int_{z_1}^{x_1} \int_{\Omega_i'} N_{\nu, k, l}(x, y) N_{1, l, l}(y, z) \varphi_i(y') \lambda_i(y') dy_1 dy'$$

pour  $x_1 \geq z_1$ , d'où :

$$|N_{\nu+1, k, l}^i(x, z)| \leq A A_i \frac{AC^{\nu-1}}{(\nu-1)!} (x_1 - z_1)^\nu, \text{ où}$$

$$A_i = \int_{\Omega_i'} |\lambda_i(y') \varphi_i(y')| dy',$$

ce qui implique (33) au rang  $\nu + 1$  si C est choisi assez grand pour

que  $A \sum_{i=1}^L A_i \leq C$ .

On établit de même (33) pour les dérivées successives de  $N_{\nu, k, l}$ , d'où (32). Si S est l'opérateur de noyau M, alors  $S \in V^{-\infty}(X, E, E)$ , et il est immédiat que  $(I + S)(I - R)u = u$ .

(34) *Remarque.* — Dans le cas où  $X'$  est compacte (et P non nécessairement de type compact), il est évidemment inutile de considérer  $K'$  et  $w'$  dans (30). De plus, la démonstration précédente montre que (30) se généralise au cas  $t = \text{Sup } I_1$

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.S. AGRANOVITCH et M.I. VISHIK, Russian Math. Surveys, 19, (1964), 53-157.
- [2] M.F. ATIYAH et R. BOTT, *Ann. of Math.* 86, (1967), 374-407.
- [3] L. HÖRMANDER, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18, (1965), 501-517.
- [4] L. HÖRMANDER, Proceedings of Symposia in pure Math., 10, (1967), 138-183.
- [5] L. HÖRMANDER, *Ann. of Math.*, 83, (1966), 129-209.
- [6] L. HÖRMANDER, Cours à Stanford University, juillet 1967.

- [7] C. HUNT et A. PIRIOU, *Comptes Rendus*, série A, 1969, 28-31.
- [8] C. HUNT et A. PIRIOU, *Comptes Rendus*, série A, 1969, 214-217.
- [9] J.J. KOHN et L. NIRENBERG, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18, 1965, 269-305.
- [10] P. KREE, exposé au Séminaire Bourbaki, Novembre 1965.
- [11] P. KREE, à paraître aux *Annales de l'Institut Fourier*.
- [12] E.E. LEVI, *Rend. del Circ. Mat. Palermo*, 24, (1907), 275-317.
- [13] J.E. LEWIS, *Journal of Math. Analysis and Appl.*, 26, 1969, 479-511.
- [14] A. PIRIOU, *Comptes Rendus*, série A, 1969, 692-695.
- [15] M.I. VISHIK et G.I. ESKIN, *Mat. Sbornik*, 71 (113), 1966, 162-190.

Manuscrit reçu le 28 octobre 1969

Alain PIRIOU  
Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences, Parc Valrose  
Av. Valrose, -06- Nice