ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAURICE GARANÇON

Le rang de certaines variétés closes

Annales de l'institut Fourier, tome 20, nº 1 (1970), p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1970__20_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
20,1 (1970), 1-19

LE RANG DE CERTAINES VARIÉTÉS CLOSES

par Maurice GARANÇON

Le rang d'une n-variété différentiable M est le nombre maximal de champs de vecteurs linéairement indépendants sur M qui commutent deux à deux. Lorsque M est close, c'est aussi le plus grand entier k tel qu'il existe une action du groupe additif de R^k sur M dont toutes les orbites sont de dimension k ; une telle action est dite localement libre de dimension k ou codimension $n - k$.

Le but de ce travail est de montrer que si la n-variété M admet une action localement libre de R^{n-1} et si son groupe fondamental n'a pas d'éléments d'ordre fini alors il contient des sous-groupes isomorphes aux groupes fondamentaux des orbites.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma gratitude envers mon directeur de thèse le professeur K. Srinivasacharyulu qui m'a dirigé durant toute la préparation de ce travail, ainsi qu'aux professeurs B. Reinhart et H. Rosenberg qui ont bien voulu lire le manuscrit et me donner leurs impressions.

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES

1. Définition et propriétés élémentaires des actions.

Nous nous placerons dans le cas C^∞ de telle sorte que le mot différentiable signifiera toujours indéfiniment différentiable. Une action φ d'un groupe de Lie G sur M est une application différentiable $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ telle que (*i*) $\varphi(gh, x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$ pour tout $g, h \in G$ et $x \in M$ (*ii*) $\varphi(e, x) = x$ pour $x \in M$ et e l'identité de G. Pour $x \in M$, le groupe d'isotropie de x est $I_x = \{g \in G / \varphi(g, x) = x\}$, c'est un sous-groupe fermé de G. L'*orbite,* ou *feuille* de x est $F_x = \{\varphi(g, x) / g \in G\}$. L'action φ induit par passage au quotient une application continue injective de G/I_x sur F_x. Lorsque $G = R^k$ et M est close, une telle action φ est équivalente à k champs $X_1 \dots X_k$ *commutant* sur M(*ie* $[X_i, X_j] = 0$ $i, j = 1, \dots, k$). On dit que φ est *localement libre* si toutes les orbites sont de dimension k (ce qui est équivalent à dire que les champs $X_1, \dots, X_k$ sont linéairement indépendants) ; on peut encore remarquer que φ est localement libre si et seulement si I_x est *discret* dans R^k pour tout $x \in M$.

Donc si φ est une action localement libre de R^k sur M et x un point de M les différents groupes d'isotropies que nous pouvons rencontrer sont soit $I_x = \{0\}$, soit un sous groupe abélien libre de R^k à p générateurs où $1 \leqslant p \leqslant k$. Par conséquent les différentes formes que peut prendre R^k/I_x se résument à R^k dans le premier cas et $R^{k-p} \times T^p$, ou T^p est un tore à p dimensions, dans le second cas.

PROPOSITION 1.1. – *Soient* M *et* N *deux variétés différentiables munies d'actions localement libres* $\Phi : R^k \times M \longrightarrow M$ *et* $\Psi : R^p \times N \longrightarrow N$ *alors l'action* $\chi : R^{k+p} \times (M \times N) \longrightarrow M \times N$ *définie par*

$$\chi((r, r'), (x, y)) = (\Phi(r, x), \Psi(r', y))$$

est localement libre.

Démonstration. – On prouve facilement que $I(x, y)$ le groupe d'isotropie de χ au point $(x\,,\,y)$ est égal à $\mathrm{I}(x) \times \mathrm{I}(y)$ donc est discret dans R^{k+p}.

Si nous notons par $\mathrm{R(M)}$ le rang de la variété M on a

COROLLAIRE 1.2. – *Si* M *et* N *sont deux variétés closes on a*

$$\mathrm{R(M \times N)} \geqslant \mathrm{R(M)} + \mathrm{R(N)}\ .$$

PROPOSITION 1.3. – *Soit* M *une n-variété différentiable connexe et* Φ *une action différentiable de* R^m *sur* M.

Si $\widetilde{\mathrm{M}}$ *est un revêtement connexe différentiable de* M, *alors* Φ *admet un relèvement unique à une action différentiable* Ψ : $\mathrm{R}^m \times \widetilde{\mathrm{M}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{M}}$. *C'est-à-dire que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R}^m \times \widetilde{\mathrm{M}} & \xrightarrow{\quad\Psi\quad} & \widetilde{\mathrm{M}} \\ {\scriptstyle 1 \times p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{R}^m \times \mathrm{M} & \xrightarrow{\quad\Phi\quad} & \mathrm{M} \end{array}$$

où 1 *désigne l'identité de* R^m *et p la projection de revêtement, est commutatif* : $p \circ \Psi = \Phi \circ (1 \times p)$.

On trouvera une démonstration de ceci en [2].

PROPOSITION 1.4. – *Avec les mêmes hypothèses et notations que dans la proposition 1.3, si* $x \in \mathrm{M}$ *et* $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathrm{M}}$ *sont tels que* $p(\widetilde{x}) = x$, *et si* $\mathrm{I}(x)$ *est le groupe d'isotropie de* Φ *en* x *et* $\mathrm{I}(\widetilde{x})$ *celui de* Ψ *en* $\widetilde{x}$ *on a* $\mathrm{I}(\widetilde{x}) \subset \mathrm{I}(x)$.

Démonstration. – Par définition de Ψ on a $p \circ \Psi = \Phi \circ (1 \times p)$, si $r \in \mathrm{I}(\widetilde{x})$ on a $\Psi(r\,,\,\widetilde{x})) = \widetilde{x}$ donc $\Phi(r\,,\,p(\widetilde{x})) = p(\widetilde{x})$ c'est-à-dire $\Phi(r\,,\,x) = x$ d'où $r \in \mathrm{I}(x)$.

COROLLAIRE 1.5. – *Toujours avec les mêmes hypothèses que dans la proposition 1.3, si* Φ *est localement libre alors* Ψ *est localement libre. Si de plus* M *et* $\widetilde{\mathrm{M}}$ *sont closes et connexes on a* $\mathrm{R(M)} \geqslant \mathrm{R(M)}$.

Démonstration. – Φ étant localement libre $\mathrm{I}(x)$ est discret dans R^m pour tout x dans M, donc pour tout $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathrm{M}}$ on a $\mathrm{I}(\widetilde{x}) \subset \mathrm{I}(x) \subset \mathrm{R}^m$ et $\mathrm{I}(\widetilde{x})$ est discret dans R^m donc Ψ est localement libre.

2. Les feuilles d'une action localement libre.

PROPOSITION 2.1. — *Soit* M *une n-variété close et connexe munie d'une action localement libre* Φ: $\mathrm{R}^m \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$. *Soit* $p : \widetilde{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathrm{M}$ *un revêtement compact de* M *et* $\Psi : \mathrm{R}^m \times \widetilde{\mathrm{M}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{M}}$ *l'action induite par* Φ *sur* $\widetilde{\mathrm{M}}$. *Alors si* $x_0 \in \mathrm{M}$ *et* $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{\mathrm{M}}$ *avec* $p(\widetilde{x}_0) = x_0$ *les groupes d'isotropie* $\mathrm{I}(x_0)$ *et* $\mathrm{I}(\widetilde{x}_0)$ *ont le même nombre de générateurs.*

Démonstration. — Puisque $\mathrm{I}(\widetilde{x}_0) \subset \mathrm{I}(x_0)$, le nombre de générateurs de $\mathrm{I}(\widetilde{x}_0)$ est plus petit ou égal à celui de $\mathrm{I}(x_0)$. Rappelons que par définition de Ψ on a $p \circ \Psi = \Phi \circ (1 \times p)$. Soient $u_1, \ldots, u_r$ les générateurs de $\mathrm{I}(x_0)$, $0 < r \leqslant m$.

On a $p \circ \Psi(n\, u_i, \widetilde{x}_0) = \Phi(n\, u_i, x_0) = x_0$ donc

$$\Psi(n\, u_i, \widetilde{x}_0) \in p^{-1}(x_0)$$

pour tout entier n, et comme $p^{-1}(x_0)$ est fini il existe un entier $n_i \geqslant 1$ tel que $\Psi(n_i u_i, \widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_0$ donc $n_i u_i \in \mathrm{I}(\widetilde{x}_0)$ qui contient ainsi r vecteurs linéairement indépendants donc $\mathrm{I}(\widetilde{x}_0)$ possède r générateurs. Si $\mathrm{I}(x_0) = \{0\}$ alors $\mathrm{I}(\widetilde{x}_0) = \{0\}$ et la proposition est démontrée.

COROLLAIRE 2.2. — *L'orbite de* Ψ *passant par* $\widetilde{x}_0$ *est de même type que l'orbite de* Φ *passant par* x_0, *c'est-à-dire :*

i) Si F_{x_0} est un tore T^m alors $\mathrm{F}_{\widetilde{x}_0}$ est aussi un tore T^m.

ii) Si F_{x_0} est l'image injective de $\mathrm{T}^{m-i} \times \mathrm{R}^i$ avec $0 \leqslant i \leqslant m$, $\mathrm{F}_{\widetilde{x}_0}$ aussi.

Remarque. — Nous avons prouvé que l'identité $\mathrm{I}d : \mathrm{R}^m \longrightarrow \mathrm{R}^m$ est telle que $\mathrm{I}d(\mathrm{I}(\widetilde{x}_0)) \subset \mathrm{I}(x_0)$ elle induit donc une application $\mathrm{R}^m/\mathrm{I}(\widetilde{x}_0) \longrightarrow \mathrm{R}^m/\mathrm{I}(x_0)$ qui est évidemment un revêtement à un nombre fini de feuillets ($\mathrm{I}(x_0)$ et $\mathrm{I}(\widetilde{x}_0)$ ayant le même nombre de générateurs).

3. Le tore à m dimensions T^m.

Considérons le tore T^m comme l'espace quotient de son revêtement universel, l'espace euclidien R^m, par un sous-groupe discret G à m générateurs linéairement indépendants $u_1, \ldots, u_m \in R^m$. Le groupe G est donc l'ensemble des points de R^m de la forme $x_1 u_1 + \cdots + x_m u_m$ ou les x_i sont des entiers. Si $p : R^m \longrightarrow T^m$ est la projection canonique on a $p(u) = p(v)$, $u, v \in R^m$ si $u - v$ est un élément de G. Choisissons

$$u_0 = (0, 0, \ldots, 0) \in R^m \quad \text{et} \quad x_0 = p(u_0) \in T^m$$

comme points de base.

LEMME 3.1. – *Toute classe d'homotopie de $\Pi_1(T^m, x_0)$ contient un représentant qui est la projection par $p : R^m \longrightarrow T^m$ d'un segment de R^m.*

Démonstration. – Soit $\alpha : I \longrightarrow T^m$ un lacet basé en $x_0(\alpha(0) = \alpha(1) = x_0)$; alors α admet un relèvement unique $\bar{\alpha}$: $I \longrightarrow R^m$ tel que $\bar{\alpha}(0) = u_0$; soit $u = \bar{\alpha}(1)$, alors $\bar{\alpha}$ est homotope au chemin $c : I \longrightarrow R^m$ donné par $c(t) = t\,u$ ainsi $c(I) = [u_0, u]$ (segment d'origine u_0 et extrémité u) et α est homotope à la projection de c.

DEFINITION. – *Nous appellerons "lacet de type linéaire" un lacet de T^m qui est la projection par $p : R^m \longrightarrow T^m$ d'un segment de R^m.*

Considérons de nouveau les m générateurs $u_1, \ldots, u_m$ du groupe G et les m chemins de R^m définis de la manière suivante :

$$\tilde{\alpha}_i : I \longrightarrow R^m \quad \text{où} \quad \tilde{\alpha}_i(t) = t\,u_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m.$$

ce sont des chemins de R^m d'origine u_0 et extrémité u_i, $i = 1, \ldots, m$ et comme $u_0, u_i \in G$ on a $p(u_0) = p(u_i)$ pour tout i. Ainsi les $\tilde{\alpha}_i$ se projettent sur des lacets α_i de $T^m(\alpha_i = p \circ \tilde{\alpha}_i : I \longrightarrow T^m)$ basés en x_0.

LEMME 3.3. – *Soit* $\bar{\alpha} \in \Pi_1(T^m, x_0)$ *une classe d'homotopie et* α *un lacet basé en* x_0 *qui la représente ; alors on a*

$$\bar{\alpha} = x_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + x_m\bar{\alpha}_m$$

(x_i *entier si et seulement si le relèvement de* α *d'origine* u_0 *a pour extrémité* $u = x_1 u_1 + \cdots + x_m u_m$.

Démonstration. – Supposons que $\bar{\alpha} = x_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + x_m\bar{\alpha}_m$ et considérons dans R^m le chemin polygonal suivant

$$\beta(t) = \begin{cases} m\,t\,x_1 u_1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{m} \\[2mm] x_1u_1 + m\left(t - \dfrac{1}{m}\right)x_2 u_2 & \text{si } \dfrac{1}{m} \leqslant t \leqslant \dfrac{2}{m} \\[2mm] x_1u_1 + \cdots + x_{i-1}u_{i-1} + m\left(t - \dfrac{i-1}{m}\right)x_i u_i & \text{si } \dfrac{i-1}{m} \leqslant t \leqslant \dfrac{i}{m} \\[2mm] x_1u_1 + \cdots + x_{m-1}u_{m-1} + m\left(t - \dfrac{m-1}{m}\right)x_m u_m & \text{si } \dfrac{m-1}{m} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

c'est un chemin d'origine $\beta(0) = u_0$ et d'extrémité

$$\beta(1) = x_1u_1 + \cdots + x_m u_m$$

et on vérifie facilement que sa projection $p \circ \beta$ représente $\bar{\alpha}$, i.e.

$$p \circ \beta = x_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + x_m\bar{\alpha}_m \ .$$

Inversement si α se relève en un chemin d'origine u_0 et extrémité $u = x_1u_1 + \cdots + x_m u_m$ ce chemin est homotope à β et ainsi α est homotope à $p \circ \beta$ et d'après la première partie on aura

$$\bar{\alpha} = x_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + x_m\bar{\alpha}_m .$$

LEMME 3.4. – *Les classes* $\bar{\alpha}_i$ $i = 1, \ldots, m$ *forment une base du groupe* $\Pi_1(T, x_0)$.

Démonstration. – D'après le lemme précédent il suffit de prouver que les $\bar{\alpha}_i$ sont linéairement indépendants, pour cela soit

$x_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + x_m\bar{\alpha}_m = 0$ le lacet constant se relève donc en un lacet d'origine u_0 et extrémité $u = x_1u_1 + \cdots + x_mu_m$ on doit donc avoir $u = u_0$ c'est-à-dire $x_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.

DEFINITION. – *Nous appellerons classe d'homotopie de type premier une classe* $\bar{\alpha} \in \Pi_1(T^m, x_0)$ *telle que* $\bar{\alpha} = x_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + x_m\bar{\alpha}_m$ *ou les* x_i *sont premiers entre eux.*

LEMME 3.5. – *Toute classe d'homotopie de type premier dans* $\Pi_1(T^m, x_0)$ *est représentable par un lacet de type linéaire sans points multiples.*

Démonstration. – Soit $\bar{\alpha} = x_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + x_m\bar{\alpha}_m$ une classe d'homotopie de type premier, elle est représentable par un lacet de type linéaire α qui a pour relèvement $\beta : I \longrightarrow R^m$ donné par

$$\beta(t) = t\,u \qquad \text{ou} \qquad u = x_1u_1 + \cdots + x_mu_m$$

Supposons qu'il existe $0 \leqslant t_1, t_2 < 1$ tels que $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ on aurait $p \circ \beta(t_1) = p \circ \beta(t_2)$ donc $t_1u - t_2u \in G$ et $(t_1 - t_2)u \in G$ ce qui implique $(t_1 - t_2)x_i$ entier pour tout i, comme x_i est entier c'est que $t_1 - t_2$ est rationnel de la forme p/q ou p et q sont premier entre eux donc q divise x_i pour tout i et $q = 1$ ainsi $t_1 - t_2$ est entier or $-1 < t_1 - t_2 < 1$ donc $t_1 = t_2$.

CHAPITRE II

ACTIONS LOCALEMENT LIBRES DE CODIMENSION 1

1. Le Lemme Fondamental.

Soit $V'_{m-1}(R^m)$ la variété de tous les systèmes de $(m-1)$ vecteurs linéairement indépendants de R^m. On sait que

$$\Pi_1(V'_{m-1}(R^m)) \cong \Pi_1(S\,O(m)) \cong Z_2$$

le groupe cyclique à deux éléments $(m \geqslant 3)$.

LEMME 1.1. (Rosenberg [4]). – *Soit*

$$S' = \{(x_1, x_2, 0, \dots, 0) \in R^m \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

ou $m \geqslant 3$, et $f_0 : S^1 \longrightarrow V'_{m-1}(R^m)$ *définie par*

$$f_0(x_1, x_2, 0, \dots, 0) = \{e_1, \dots, e_{m-1}\} \in V'_{m-1}(R^m)$$

où

$$e_1(x_1, x_2, 0, \dots, 0) = (-x_2, x_1, 0, \dots, 0) \in R^m$$

$$e_2(x_1, x_2, 0, \dots, 0) = (0, 0, 1, 0, \dots, 0) \in R^m$$

$$e_{m-1}(x_1, x_2, 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, 1) \in R^m$$

alors f_0 *représente l'élément non nul de* $\Pi_1(V'_{m-1}(R^m)) \cong Z_2$.

Considérons maintenant une n-variété différentiable M close connexe et de dimension $n \geqslant 3$, $\Phi : R^{n-1} \times M \longrightarrow M$ une action différentiable localement libre et supposons que Φ possède une orbite F non simplement connexe. Ceci signifie en particulier que le groupe d'isotropie de Φ en un certain point $x \in M$ est non nul c'est-à-dire $I(x) \neq \{0\}$. Soient $u_1, \dots, u_i \in R^{n-1}$ les générateurs de $I(x)$ et $u_{i+1}, \dots, u_{n-1}$ des vecteurs de R^{n-1} tels que $u_1, \dots, u_{n-1}$ forment une base de R^{n-1} alors les champs $X_j = \Phi'_{u_j}$ (dérivée directionnelle) sont des champs linéairement indépendants qui commutent sur M. Si $u_j \, . \, R$ est le sous-espace vectoriel de R^{n-1} engendré par u_j l'orbite passant par x du champ X_j est alors $\{\Phi(u_j \, . \, R, x)\}$.

PROPOSITION 1.2. – *Soit* M *une variété orientable de dimension* $n = \dim M \geqslant 5$, *alors si* $C_j(x)$ *est la courbe intégrale, passant par* x, *du champ* X_j, $1 \leqslant j \leqslant i$, $C_j(x)$ *représente un élément non nul de* $\Pi_1(M, x)$.

Démonstration. – Soit

$$D^2 = \{(x_1, x_2, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$$

le disque de rayon unité et

$$A = \{(x_1, x_2, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n \mid \frac{1}{2} \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$$

une couronne et on a $\partial A = \partial D^2 \cup B$ où B est le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ dans D^2.

Soit N_x la variété intégrale, passant par x, des champs

$$X_1, \ldots, X_{n-1},$$

M et N_x étant orientables il existe un difféomorphisme

$f : N_x \times (-1, 1) \longrightarrow M$ sur un voisinage ouvert de N_x tel que $f(y, 0) = y$ pour tout y dans N_x ; considérons

$$g : A \longrightarrow N_x \times (-1, 1)$$

un difféomorphisme de A sur $C_j(x) \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que

$$g(\partial D^2) = C_j(x) \times \{0\} \quad \text{et} \quad g(B) = C_j(x) \times \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Alors si nous supposons que $C_j(x)$ est déformable en un point dans M, d'après le théorème de Whitney il existe un plongement

$$h : D^2 \longrightarrow M$$

qui est une extension de $f \circ g$, ainsi par construction $h(D^2)$ est transverse à N_x le long de $C_j(x)$.

Soit maintenant $\overline{h} : D^2 \times \mathbf{R}^{n-2} \longrightarrow M$ un voisinage tubulaire de $h(D^2)$ dans M, c'est-à-dire que $\overline{h}$ est un difféomorphisme et

$\bar{h}(x, 0) = h(x)$ pour tout $x \in D^2$. Alors les champs $X_1, \ldots, X_{n-1}$ induisent sur $D^2 \subset \mathbf{R}^n$ $(n-1)$ champs qui sur ∂D^2 coïncident avec les champs du lemme 1.1 ce qui est contradictoire.

PROPOSITION 1.3. – *Soit* M *une variété de dimension* $n \geqslant 3$, *alors si* $C_j(x)$ *est la courbe intégrale passant par* x *du champ* X_j, $1 \leqslant j \leqslant i$, $C_j(x)$ *représente un élément non nul de* $\Pi_1(M, x)$.

Démonstration. – Supposons M orientable, alors si on muni le tore T^2 de deux champs linéairement indépendants et d'un point de base x_0, on peut appliquer la proposition précédente à $M \times T^2$ et ainsi $C_j(x) \times \{y_0\}$ représente un élément non nul de $\Pi_1(M \times T^2, (x, y_0))$ donc $C_j(x)$ représente un élément non nul de $\Pi_1(M, x)$. Ainsi le théorème est vrai dans le cas orientable. Dans le cas où M est non orientable, choisissons

$$f : S^1 \longrightarrow C_j(x) \subset M$$

un difféomorphisme, et soit $\widetilde{M}$ le revêtement à deux feuillets de M, $\widetilde{x} \in M$ un point tel que $p(\widetilde{x}) = x$. D'après le corollaire 2.2 chap. I et la remarque qui le suit, il existe une application de revêtement

$$q : S^1 \longrightarrow S^1 \quad \text{et une application} \quad f : S^1 \longrightarrow \widetilde{M}$$

de telle sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "q'"'] & \widetilde{M} \arrow[d, "p"] \\ S^1 \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

soit commutatif. D'après la 1ère partie de la démonstration $\widetilde{f}$ représente un élément non trivial de $\Pi_1(\widetilde{M}, \widetilde{x})$ donc $p \circ \widetilde{f}$ et $f \circ q$ représentent un élément non trivial de $\Pi_1(M, x)$ ainsi f ne peut pas être homotope à l'application constante, la proposition 1.3 est ainsi démontrée.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la démonstration du :

LEMME FONDAMENTAL. – *Soit*

$$i : \mathrm{R}^{n-1}/\mathrm{I}(x) = \mathrm{L}_x \longrightarrow \mathrm{M}$$

l'application induite par l'action localement libre Φ et

$$i_* : \Pi_1(\mathrm{L}_x) \longrightarrow \Pi_1(\mathrm{M})$$

l'homomorphisme induit. Alors le noyau de i_* ne contient pas de classe d'homotopie de type premier.

Démonstration. – Supposons que le noyau de i_* contienne une classe d'homotopie de type premier, alors puisque $\mathrm{L}_x = \mathrm{T}^i \times \mathrm{R}^{n-i-1}$ cette classe contient un lacet α de type linéaire, c'est-à-dire que $\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{L}_x$ se relève à $\beta : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{R}^{n-1}$ avec $\beta(t) = tu$ où $u = x_1^1 u_1 + \cdots + x_i^1 u_i$ avec les x_j^1 des entiers premiers entre eux, choisissons alors des nombres x_l^k $k = 2, \ldots, n-1$, $l = 1, \ldots, n-1$, de telle sorte que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1^1 \ldots\ldots x_i^1 & 0 \ldots\ldots 0 \\ x_1^2 \ldots\ldots & \ldots\ldots x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} \ldots\ldots & \ldots\ldots x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Les champs $\mathrm{Y}_k = \sum_{l=1}^{n-1} x_l^k \mathrm{X}_l$ sont alors linéairement indépendants et commutent deux à deux. D'autre part l'orbite de Y_1 est exactement le lacet sans points multiples $i \circ \alpha$ qui d'après la proposition 1.3 ne peut être homotope à l'application constante.

2. Les principaux résultats.

THEOREME 2.1. – *Soit* M *une n-variété close connexe avec $n \geqslant 3$ telle qu'il existe une action localement libre différentiable*

$$\Phi : \mathrm{R}^{n-1} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}.$$

Alors si $\Pi_1(\mathrm{M})$ *est sans élément d'ordre fini, l'application*

$$i : \mathrm{L}_x = \mathrm{R}^{n-1}/\mathrm{I}(x) \longrightarrow \mathrm{M}$$

induit un monomorphisme $i_* : \Pi_1(\mathrm{L}_x) \longrightarrow \Pi_1(\mathrm{M})$ *pour tout* x.

Démonstration. – Si L_x est simplement connexe, il n'y a rien à prouver. Si $\mathrm{L}_x = \mathrm{T}^m \times \mathrm{R}^{n-1-m}$ avec $m \geqslant 1$ on a $\Pi_1(\mathrm{L}_x) = \Pi_1(\mathrm{T}^m)$, soit alors $\bar{\alpha} \in \Pi_1(\mathrm{L}_x)$ et supposons $i_*(\bar{\alpha}) = 0$. D'après le lemme 3.4, chap. I, on peut écrire $\bar{\alpha} = x_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + x_m\bar{\alpha}_m$ où les $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m$ forment la base de $\Pi_1(\mathrm{T}^m)$ considérée au lemme 3.4, chap. I. $\bar{\alpha}$ n'est pas une classe de type premier en vertu du lemme fondamental, soit alors $p > 1$ le plus grand commun diviseur des $x_1, \ldots, x_m$ on a alors $x_i = py_i$ ou $y_1, \ldots, y_m$ sont des entiers premier entre eux et donc $y_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + y_m\bar{\alpha}_m$ est une classe de type premier on a donc

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} = p(y_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + y_m\bar{\alpha}_m) \quad \text{donc} \qquad & \\ i_*(\bar{\alpha}) &= i_*(p(y_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + y_m\bar{\alpha}_m)) \\ &= [i_*(y_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + y_m\bar{\alpha}_m)]^p = 0 \end{aligned}$$

donc puisqu'il n'y a pas d'élément de torsion

$$i_*(y_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + y_m\bar{\alpha}_m) = 0$$

ce qui contredit le lemme fondamental.

THEOREME 2.2. – *Soit* M *une variété différentiable close et connexe de dimension* $n \geqslant 3$ *telle qu'il existe une action différentiable localement libre* $\Phi : \mathrm{R}^{n-1} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$. *Alors si le groupe* $\Pi_1(\mathrm{M})$ *admet une décomposition de la forme* $\Pi_1(\mathrm{M}) = \mathrm{X}(\mathrm{M}) \oplus \mathrm{Y}(\mathrm{M})$ *où* X(M) *est un groupe sans élément d'ordre fini et* Y(M) *un groupe fini, l'application* $i : \mathrm{L}_x \longrightarrow \mathrm{M}$ *induit un monomorphisme*

$$i_* : \Pi_1(\mathrm{L}_x) \longrightarrow \Pi_1(\mathrm{M})$$

pour tout x.

Démonstration. – Soit $\widetilde{\mathrm{M}}$ le revêtement de M tel que

$$\Pi_1(\widetilde{\mathrm{M}}) \cong \mathrm{X}(\mathrm{M})$$

c'est un revêtement à un nombre fini de feuillets puisque Y(M) est fini.

Soit Ψ le relèvement de Φ à $\widetilde{M}$ on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R^{n-1} \times \widetilde{M} & \xrightarrow{\Psi} & \widetilde{M} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle Id \times p} & & \Big\downarrow {\scriptstyle p} \\ R^{n-1} \times M & \xrightarrow{\Phi} & M \end{array}$$

si $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ et $x \in M$ sont tels que $p(\widetilde{x}) = x$ on a un diagramme commutatif induit

$$\begin{array}{ccc} R^{n-1} \times \{\widetilde{x}\} & \xrightarrow{\Psi} & \widetilde{M} \\ {\scriptstyle Id \times p} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle p} \\ R^{n-1} \times \{x\} & \xrightarrow{\Phi} & M \end{array}$$

et puisque $I(\widetilde{x}) \subset I(x)$ en passant au quotient on obtient

$$\begin{array}{ccc} L_{\widetilde{x}} = R^{n-1}/I(\widetilde{x}) & \xrightarrow{\widetilde{i}} & \widetilde{M} \\ {\scriptstyle f} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle p} \\ L_x = R^{n-1}/I(x) & \xrightarrow{i} & M \end{array}$$

comme nous l'avons remarqué après le corollaire 2.2, chap. I, f est un revêtement, en passant aux groupes fondamentaux on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(L_{\widetilde{x}}) & \xrightarrow{\widetilde{i}^*} & \Pi_1(\widetilde{M}) \\ {\scriptstyle f^*} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle p^*} \\ \Pi_1(L_x) & \xrightarrow{i^*} & \Pi_1(M) \end{array}$$

f_* et p_* sont des monomorphismes puisque f et p sont des revêtements et $\widetilde{i}_*$ est un monomorphisme d'après le théorème 2.1. Maintenant d'après le corollaire 2.2, chap. I, L_x et $L_{\widetilde{x}}$ sont de même type donc $\Pi_1(L_x)$ et $\Pi_1(L_{\widetilde{x}})$ sont abéliens libres de même rang, donc $f_*(\Pi_1(L_{\widetilde{x}}))$ est un sous-groupe abélien libre de $\Pi_1(L_x)$ et de même rang, il existe donc des bases $u_1, \dots, u_m$ de $f_*(\Pi_1(L_x))$ et $v_1, \dots, v_m$ de $\Pi_1(L_x)$ telles que $u_i = t_i v_i$ $i = 1, \dots, m$ t_i entier positif.

Supposons que $i_*(v) = 1$ pour $v \in \Pi_1(L_x)$.

on a $\nu = x_1\nu_1 + \cdots + x_m\nu_m$ d'où

$$t_1 \ldots t_m \nu = t_1 \ldots t_m x_1 \nu_1 + \cdots + t_1 \ldots t_m x_m \nu_m$$

Si on pose $k_i = t_1 \ldots t_{i-1}\ t_{i+1} \ldots t_m x_i \quad i = 1, \ldots, m$ on aura

$$t_1 \ldots t_m \nu = k_1 t_1 \nu_1 + \cdots + k_m t_m \nu_m = k_1 u_1 + \cdots + k_m u_m$$

donc $t_1 \ldots t_m \nu \in f_*(\Pi_1(\mathrm{L}_{\tilde{x}}))$ et on a $t_1 \ldots t_m \nu = f_*(\tilde{\nu})$ où $\tilde{\nu} \in \Pi_1(\mathrm{L}_{\tilde{x}})$.

Alors $\quad i_* f_*(\tilde{\nu}) = i_*(t_1 \ldots t_m \nu) = (i_*(\nu))^{t_1 \ldots t_m} = 1$

On en tire $p_* \tilde{i}_*(\tilde{\nu}) = 1$ donc $\tilde{\nu} = 0$ et $t_1 \ldots t_m \nu = 0$

or $t_i \neq 0$ pour tout i et comme $\Pi_1(\mathrm{L}_x)$ est libre on a $\nu = 0$.

COROLLAIRE 2.3. – *Soit* M *une variété différentiable close, connexe de dimension* $n \geqslant 3$ *telle que* $\Pi_1(\mathrm{M})$ *soit abélien, alors si* $\Phi : \mathrm{R}^{n-1} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *est une action localement libre différentiable, alors on a*

$$i_* : \Pi_1(\mathrm{L}_x) \longrightarrow \Pi_1(\mathrm{M}) \textit{ est un monomorphisme pour tout } x \in \mathrm{M}.$$

Démonstration. – Puisque M est compacte $\Pi_1(\mathrm{M})$ est de type fini et comme il est abélien il admet une décomposition en somme directe $\Pi_1(\mathrm{M}) = \mathrm{X}(\mathrm{M}) \oplus \mathrm{Y}(\mathrm{M})$ où X(M) n'a pas d'éléments d'ordre fini et Y(M) est fini, la conclusion s'en suit à l'aide du théorème précédent.

CHAPITRE III

APPLICATIONS

1. Actions localement libres qui possèdent une feuille compacte.

LEMME 1.1. (Rosenberg [4]). – *Soit* φ *une action localement libre de* R^{n-1} *sur une variété close connexe* M, *et supposons que* Φ *n'a pas de feuille compacte. Alors il y a revêtement* $p : R^{n-1} \times S^1 \longrightarrow M$.
On en tire :

COROLLAIRE 1.2. – *Si* M *n'admet pas* $R^{n-1} \times S^1$ *pour revêtement alors toute action localement libre de* R^{n-1} *sur* M *possède une orbite compacte. En particulier dans les cas suivants :*

i) $\Pi_1(M)$ *fini*

ii) $\Pi_i(M) \neq 0$ *pour un* $i > 1$.

THEOREME 1.3. – *Soit* M *une n-variété différentiable close connexe et* $n \geqslant 3$ *telle que* $\Pi_1(M) = X(M) \oplus Y(M)$ *où* X(M) *est un groupe sans torsion et* Y(M) *un groupe fini. Supposons de plus que* $\Pi_1(M)$ *ne contient pas de sous-groupe isomorphe à la somme directe de* $(n-1)$ *copies du groupe des entiers* Z. *Alors si* M *n'admet pas* $R^{n-1} \times S^1$ *pour revêtement le rang de* M *est moins que* $n-1$ (*Notation* : $R(M) < n-1$).

Démonstration. – Supposons $R(M) = n-1$, alors il y a une action localement libre $\Phi : R^{n-1} \times M \longrightarrow M$ qui admet une feuille compacte T^{n-1} d'après le corollaire 1.2, chap. III et d'après le théorème 2.2, chap. II. $i_* : \Pi_1(T^{n-1}) \longrightarrow \Pi_1(M)$ est un monomorphisme ce qui contredit nos hypothèses.

COROLLAIRE 1.4. – *Le théorème* 1.3 *reste valide dans les cas suivants*

i) $\Pi_1(M)$ *sans élément d'ordre fini.*

ii) $\Pi_1(M)$ *abélien.*

2. Calcul du rang de quelques variétés.

THEOREME 2.1. – *Soit* V^n *une variété close simplement connexe de dimension* $n \geqslant 2$ *et* T^m *un tore de dimension* $m \geqslant 1$ *alors le rang de* $V^n \times T^m$ *est plus petit que* $n + m - 1$.

Démonstration. – Supposons $R(V^n \times T^m) \geqslant n + m - 1$ alors il y a une action localement libre de R^{n+m-1} sur $V^n \times T^m$, qui n'a pas de feuille compacte puisque $n + m - 1 \geqslant m + 2 - 1 > m$ et donc $\Pi_1(V^n \times T^m)$ ne contient pas de sous-groupe isomorphe à la somme directe de $n + m - 1$ copies du groupe des entiers, c'est donc que $R^{n+m-1} \times S^1$ est un revêtement de $V^n \times T^m$; on en tire $\Pi_i(V) = 0$ pour $i > 1$ et par hypothèse $\Pi_1(V) = 0$ ce qui est impossible donc $R(V^n \times T^m) < n + m - 1$.

COROLLAIRE 2.2. – *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent on a : si* $\Pi_1(V^n)$ *est fini alors* $R(V^n \times T^m)$ *est moins que* $n + m - 1$.

Démonstration. – Si $R(V^n \times T^m) \geqslant n + m - 1$ et si $\widetilde{V}$ est le revêtement universel de V on aura $R(\widetilde{V} \times T^m) \geqslant n + m - 1$ ce qui contredit le théorème précédent.

COROLLAIRE. – $R(S^r \times T^{n-r}) < n - 1$ *avec* $n \geqslant 3$ et $r > 1$.

COROLLAIRE.

i) $R(S^2 \times T^{n-2}) = n - 2$ $(n \geqslant 3)$ (cf Novikov [3])

ii) $R(S^3 \times T^{n-3}) = n - 2$ $(n \geqslant 4)$

iii) $R(S^3 \times S^1) = 2$

Démonstration. – Nous démontrons ii) la démonstration de i) est analogue et iii) provient de ii) avec $n = 4$.

Par le théorème 2.1 on a $R(S^3 \times T^{n-3}) < n - 1$.

d'autre part $R(S^3 \times T^{n-3}) \geqslant R(S^3) + R(T^{n-3}) = 1 + n - 3 = n - 2$

d'où le résultat.

Remarque. – Rosenberg [5] a démontré $R(S^2 \times S^1) = 1$ qui ici provient de i) avec $n = 3$.

3. Calcul de $\Pi_2(M)$ pour M de rang $n - 1$.

Comme application du théorème principal de ce travail nous donnons une démonstration d'un cas particulier d'un résultat annoncé par Novikov ([3], 1).

THEOREME 3.1. – *Soit* M *une n-variété close et connexe* ($n \geqslant 3$) *telle que* $\Pi_1(M) = X(M) \oplus Y(M)$ *où* $X(M)$ *est un groupe sans élément d'ordre fini et aussi* $\Pi_2(M) \neq 0$; *alors le rang de* M *est plus petit que* $(n - 1)$ $(R(M) < n - 1)$. ($Y(M)$ *étant un groupe fini*).

Démonstration. – On sait que $R(M) \leqslant n - 1$. Supposons

$$R(M) = n - 1,$$

c'est-à-dire qu'il existe une action différentiable localement libre $\Phi : R^{n-1} \times M \longrightarrow M$. On peut supposer M orientable car si elle ne l'est pas on passe au revêtement à deux feuillets $\widetilde{M}$ qui est tel que $\Pi_2(\widetilde{M}) = \Pi_2(M) \neq 0$.

Puisque $\Pi_2(M) \neq 0$ il existe une immersion $f : S^2 \longrightarrow M$ qui représente un élément non nul de $\Pi_2(M)$; soit $g : S^2 \longrightarrow M$ une immersion qui soit une approximation de f, en position générale par rapport au feuilletage F induit par Φ sur M [8]. Posons $S = g(S^2) \subset M$ et soit G le feuilletage induit par F sur S ; toute courbe fermée de G est nulle homotope sur S donc dans M, mais une courbe fermée de G est aussi contenue dans une feuille L de Φ et en vertu du théorème 2.2, chap. II, est nulle homotope dans L (en effet $i_* : \Pi_1(L) \longrightarrow \Pi_1(M)$ est monomorphisme). Rosenberg a alors démontré en [7] que si chaque courbe close de G est nulle homotope dans la feuille de F qui la contient alors on peut déformer S en un point (cf. p. 144 [7]) ce qui contredit le fait que $f : S^2 \longrightarrow M$ n'est pas homotope à constante.

COROLLAIRE 3.2. – *Les conclusions du théorème* 3.1 *restent valables dans les cas suivants :*

i) $\Pi_1(M)$ *abélien*

ii) $\Pi_1(M)$ *sans élément de torsion.*

COROLLAIRE 3.3. – *Si* M *est une variété close et connexe de dimension* $n - 2$ *avec* $n \geqslant 3$ *telle que*

$$\Pi_1(M) = X(M) \oplus Y(M)$$

X(M) *sans élément d'ordre fini et* Y(M) *groupe fini alors*

$$R(M \times S^2) < n - 1 .$$

Le théorème 3.1 peut être réénoncé de la façon suivante

COROLLAIRE 3.4. – *Si* M *est une n-variété close et connexe de rang* $n - 1$, *telle que* $\Pi_1(M) = X(M) \oplus Y(M)$ *où* X(M) *est un groupe sans élément d'ordre fini et* Y(M) *est un groupe fini alors* $\Pi_2(M) = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. LIMA, "Commuting vector fields on S^3", *Annals of Math.* 8, (1965).

[2] E. LIMA, Common singularities of commuting vector fields on 2-manifolds, *Comment. Math. Helv.* 39 (1964), 97-110.

[3] S.P. NOVIKOV, 1) "The Topology Summer inst. Seattle 1963". *Russiom Math. Surveys,* vol. 20 (1965).
2) "Topology of Foliations", Trudy mosk. math. Obshlch 14, n° 513.83.

[4] H. ROSENBERG, "Action of R^n on manifolds" Comm. Math. Helvetici vol. 41 (3) (1966-67).

[5] H. ROSENBERG, "Rank of $S^2 \times S^1$" *American J. of Math.*, vol. 87 (1965).

[6] H. ROSENBERG, "Foliations by planes" Topology, vol. 7 (1968).

[7] H. ROSENBERG, "Singularities of R^2 actions" Topology, vol. 7 (1968).

[8] R. THOM, "Un lemme sur les applications différentiables". *Bol. Soc. Math. Mex.* (2) (1956) 59-71.

Manuscrit reçu le 20 août 1969

Maurice GARANÇON
Université de Montréal
Montréal, Canada.