ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PHILIPPE NOVERRAZ

Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes

Annales de l'institut Fourier, tome 19, n° 2 (1969), p. 419-493

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_2_419_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
19, 2 (1969), 419-493.

FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES ET ANALYTIQUES DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES COMPLEXES

par Philippe NOVERRAZ

Introduction.

La théorie des fonctions plurisousharmoniques a été introduite et développée dans $\mathbf{C}^n$ par P. Lelong ([17], et suivants).

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier la notion de fonction plurisousharmonique définie sur les espaces vectoriels topologiques complexes (la définition est formellement la même qu'en dimension finie) ainsi que la notion de fonction analytique. La notion de fonction plurisousharmonique sera utilisée constamment dans l'étude des fonctions analytiques et nous serons amenés à donner une grande importance aux fonctions sous-médianes et G-analytiques que nous définirons par des propriétés portant sur leurs restrictions aux droites complexes; ces fonctions présentent l'intérêt de ne pas dépendre de la topologie d'espace vectoriel sur E.

Nous considérerons toujours des espaces vectoriels de dimension infinie sur le corps des complexes et de topologie séparée; de plus les notions étudiées seront de nature locale et, comme l'a montré P. Lelong [22.*b*] la composée d'une fonction analytique par une fonction plurisousharmonique est encore en dimension infinie une fonction plurisousharmonique, certains des résultats démontrés ici sont encore valables, par exemple, pour les variétés banachiques où une théorie algébrique des fonctions analytiques basée sur le théorème de préparation de Weierstrass a été développée par Ramis [29] voir aussi [10].

Dans le chapitre I nous introduisons une classe de fonctions, que nous appelons sous-médianes, caractérisées par la propriété de la moyenne de leurs restrictions aux droites complexes. Cette classe contient la classe des fonctions plurisousharmoniques ainsi que la classe M. Nous montrons, que pour toute topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel, la régularisée d'une telle fonction (i.e. la plus petite majorante semi-continue supérieurement) est, lorsqu'elle existe, une fonction plurisousharmonique, ce qui généralise des résultats antérieurs [16] et [7]. Puis en utilisant la notion de polycercle dans un espace de Fréchet introduite par Cœuré [7], nous prouvons un lemme de Hartogs démontré en dimension finie par J. Deny et P. Lelong [9].

Le point délicat de la démonstration est de montrer que, pour les fonctions sous-médianes, les opérations de régularisation et de passage à la limite des suites décroissantes peuvent encore permuter lorsque E est un espace de Fréchet. Pour des espaces de Fréchet E_1 et E_2, ce lemme permet de montrer que toute fonction définie sur un ouvert de $E_1 \times E_2$ et séparément analytique est analytique [c'est, dans $\mathbf{C}^n$, le théorème de Hartogs]. Nous ne le ferons pas ici car, suivant une idée de M. A. Zorn [34] qui nous semble avoir été perdue de vue, ce théorème se déduira simplement des résultats du chapitre suivant. Toujours à l'aide des polycercles nous montrons en reprenant et simplifiant une démonstration de P. Lelong [17] (voir aussi Avanissian [2]) qu'une fonction séparément plurisousharmonique sur $E_1 \times E_2$ est semi-continue supérieurement.

Dans le chapitre II nous étudions les applications f: $\Omega \subset E \to F$ (E et F sont des espaces vectoriels topologiques séparés, F étant supposé de plus localement convexe) et étudions les diverses manières d'introduire la notion d'application analytique. Nous ferons jouer un rôle important aux applications G-analytiques (i.e. dont les restrictions aux droites complexes sont analytiques au sens de Grothendieck [11]). Leur propriété fondamentale mise en évidence dans le cadre des espaces de Banach par Zorn (à savoir que pour une telle application la continuité en un point entraîne la continuité dans toute la composante connexe contenant ce point de l'ouvert où elle est définie) est étendue à des espaces, plus généraux. Le théorème de Hartogs s'en déduira alors aisément. Pour de telles fonctions on sera alors amené à remplacer la condition de fonction continue par celle de fonction localement bornée en prenant garde au fait que cette condition, équivalente lorsque F est normé, et plus forte lorsque F est seulement supposé localement convexe. On notera, au passage, l'analogie de ces propriétés avec celles des applications linéaires ou plus généralement polynomiales. A partir du corollaire du lemme de Hartogs nous retrouvons un théorème de Vitali. Enfin nous montrons que si $R(x)$ désigne le rayon de majoration d'une fonction analytique sur un espace de Banach [i.e. la borne supérieure des rayons des boules centrées en ce point où la fonction est bornée] la fonction $-\operatorname{Log} R(x)$ est plurisousharmonique continue ou identique à $-\infty$.

Le chapitre III établi des théorèmes de prolongement des fonctions plurisousharmoniques ou analytiques en dimension infinie, suivant en cela l'idée du mémoire de P. Lelong: « Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques » [18] qui consiste à déduire le prolongement des fonctions analytiques du prolongement de fonctions plurisousharmoniques associées. On sera amené à introduire une classe d'ensembles que nous appelons classe P et qui joue un rôle analogue à la classe des ensembles $\mathbf{R}^{2n}$-polaires dans $\mathbf{C}^n$. Moyennant des hypothèses de régularité que l'on précisera, le prolongement d'une fonction plurisousharmonique ou analytique sur un ensemble de classe P est possible et unique. Nous donnerons une généralisation du théorème de Rado. Un théorème de prolongement permettra de retrouver — suivant une idée de Schapira — à l'aide de la transformée de Fourier non linéaire [16] un théorème classique de Malgrange [23].

Dans le chapitre IV nous généralisons un théorème de Rubel [30] prouvant que la croissance d'une fonction entière d'une variable complexe est entièrement déterminée par la croissance de ses coefficients de Fourier (pris sur les cercles centrés à l'origine et de rayon r) et réciproquement. Nous montrons, par une méthode que nous avons exposée au Séminaire d'Analyse [24], que cette propriété se généralise aux fonctions sousharmoniques d'une variable complexe, puis aux fonctions qui sont définies comme différence de deux fonctions sousharmoniques (étudiées par Arsove [1] et appelées δ-sousharmoniques) enfin aux fonctions plurisousharmoniques ou plus généralement n-sousharmoniques.

Nous terminons en montrant comment une telle méthode de coefficients de Fourier peut se généraliser aux fonctions plurisousharmoniques de type borné (i.e. bornées sur les ensembles bornés) sur un espace de Banach et permet, dans ce cadre, de retrouver un théorème de Lindelöf sur la croissance du quotient de deux fonctions analytiques scalaires de croissance donnée.

Nous sommes heureux d'exprimer ici notre reconnaissance à M. Pierre Lelong dont les travaux ont inspiré nos recherches. Ce mémoire n'aurait pas vu le jour sans ses conseils, ses critiques et encouragements lors de son élaboration.

Le chapitre IV a été fait lors du séjour de M. L. A. Rubel à Paris que nous remercions pour les entretiens qu'il nous a accordés.

Nos remerciements vont à M. J. Deny qui a accepté de se joindre à notre jury de thèse ainsi qu'à M. J. Neveu qui en outre nous a proposé le second sujet.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES ET FONCTIONS SOUS-MÉDIANES

1. Notion de fonction sous-médiane.

DÉFINITION 1.1. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique séparé. Une fonction* v, *définie sur un ouvert connexe* Ω *de* E *à valeurs réelles, est dite* plurisousharmonique *si :*

1) v *est semi-continue supérieurement* i.e. *l'ensemble* $\{a \in \Omega | v(a) < c\}$ *est un ouvert pour tout* c *réel.*

2) *La restriction de* v *aux droites complexes est une fonction sousharmonique ou* $-\infty$ *sur les composantes connexes où elle est définie.*

Pour toute fonction satisfaisant à la condition 1 on peut remplacer la condition 2 par la condition suivante, qui lui est alors équivalente :

2′) Pour tous points a et b de Ω tels que $a + bu$ appartienne à Ω pour tout $|u| \leqslant 1$, la fonction $v(a + be^{i\theta})$ est intégrable en θ (éventuellement identique à $-\infty$) et

$$v(a) \leqslant \int_0^{2\pi} v(a + be^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

La classe des fonctions plurisousharmoniques contient la constante $-\infty$.

Cette définition est formellement la même que celle qu'a donné P. Lelong [17] en dimension finie.

On notera que la plurisousharmonicité d'une fonction est conservée par toute opération conservant à la fois la semi-continuité supérieure et la sousharmonicité de la restriction aux droites complexes. Par exemple : prendre la borne supérieure d'un nombre fini de fonctions, passer à la limite d'une suite décroissante, etc.

Enfin la régularisée supérieure w^* d'une fonction à valeur réelle désignera la plus petite fonction semi-continue supérieurement qui majore w. Si $\mathcal{F}$ est le filtre des voisinages de l'origine on a :

$$w^*(a) = \limsup_{a' \in a+\mathcal{F}} w(a').$$

En dimension finie P. Lelong [19] a défini à partir des fonctions plurisousharmoniques des classes de fonctions appelées classe M et M_0. De la même manière appelons *classe* $M(\Omega)$, dans un ouvert Ω connexe d'un espace vectoriel topologique séparé, la réunion des ensembles $C_k(\Omega)$ définis par récurrence comme suit :

1) $C_0(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques sur Ω.

2) $C_{k+1}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions qui sont :

a) borne supérieure d'une famille localement bornée supérieurement de fonctions de $C_k(\Omega)$.

b) limite décroissante de fonctions définies en *a*).

On définit de même la *classe* $M_0(\Omega)$ [et $C_k^0(\Omega)$] en se restreignant en *a*) aux familles dénombrables.

Introduisons une classe de fonctions que nous appelons sous-médianes qui contient la classe M; de telles fonctions ne dépendent pas de la topologie sur E compatible avec la structure d'espace vectoriel.

Définition 1.2. — *Une fonction à valeurs dans* $[-\infty, +\infty[$ *définie sur un ouvert connexe* Ω *d'un espace vectoriel topologique séparé est dite* sous-médiane *si pour tout* a *et* b *tels que* $a + bu$, $|u| \leqslant 1$, *soit dans* Ω, $v(a + be^{i\theta})$ *est une fonction de* θ *intégrable sur* $[0, 2\pi]$ *ou* $-\infty$ *et*

$$v(a) \leqslant \int_0^{2\pi} v(a + be^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

La propriété caractéristique des fonctions sous-médianes est l'inégalité de la moyenne sur les droites complexes et nous avons fait les hypothèses minimales pour que cette inégalité ait un sens. Sur les droites complexes les fonctions ainsi définies diffèrent légèrement des fonctions appelées aussi sous-médianes en théorie du Potentiel où la moyenne est alors prise sur les disques. Notons qu'une fonction sous-médiane est plurisousharmonique si et seulement si elle est semi-continue supérieurement.

En considérant la restriction aux droites complexes les résultats classiques dans le plan montrent que toute fonction de classe M est une fonction sous-médiane. Notons enfin que la restriction d'une fonction sous-médiane aux sous-espaces de dimension finie peut ne pas être une fonction mesurable pour la mesure de Lebesgue.

PROPOSITION 1.1. — *Soit* E *un espace vectoriel topologique séparé,* μ *une mesure de Radon positive à support compact sur un espace* T *localement compact et* $f(a, t)$ *une fonction semi-continue supérieurement sur* $E \times T$ *à valeurs réelles, la fonction* $F(a) = \int f(a, t)\, d\mu(t)$ *est semi-continue supérieurement en* a.

Démonstration. — Notons U le support de la mesure μ. Pour tout ε donné il existe une partition finie de U par des compacts $(F_i)_{\iota \in I}$ telle que :

$$\int f(a, t)\, d\mu(t) \geqslant \Sigma\mu(F_i)M_i(a) - \varepsilon \tag{1}$$

où $M_i(a) = \sup\limits_{t \in F_i} f(a, t)$, est une fonction semi-continue supérieurement de a et l'ensemble

$$V_i = \{a' | M_i(a') < M_i(a) + \varepsilon\}$$

est un ouvert qui contient a. Pour tout $a' \in V = \bigcap\limits_i V_i$ on a :

$$\begin{aligned} F(a') = \int f(a', t)\, d\mu(t) &< \Sigma[M_i(a) + \varepsilon]\mu(F_i) \\ &= \Sigma M_i(a)\mu(F_i) + \varepsilon\mu(F) \\ &\leqslant \int f(a, t)\, d\mu(t) + \varepsilon[1 + \mu(F)] = F(a) + \varepsilon' \quad \text{d'après (1)} \end{aligned}$$

ce qui montre la semi-continuité supérieure de la fonction F.

Remarque. — Lorsque la mesure est bornée il n'est pas nécessaire de supposer que la mesure μ est à support compact si l'on ajoute la condition suivante : « Pour tout a il existe un voisinage ω_a et une constante M ne dépendant que du voisinage tels que pour tout a de ω_a on ait :

$$\sup_{t\in T} |f(a, t)| \leqslant M < +\infty \text{ ».}$$

En effet pour un point a_0 quelconque de E soient ω_0 et M_0 le voisinage et la borne supérieure définis par la condition précédente; ε étant donné, soit K_0 un compact de T tel que $\int_{K_0} d\mu(t) \geqslant \|\mu\| - \frac{\varepsilon}{4M_0}\cdot$ La fonction

$$F_{K_0}(a) = \int_{K_0} f(a, t)\, d\mu(t)$$

est, d'après la proposition 1.1., une fonction semi-continue supérieurement, il existe donc un voisinage ω_0' de a_0 sur lequel on a : $F_{K_0}(a) - F_{K_0}(a_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot$

Pour tout point a du voisinage $\omega_0' \cap \omega_0$ de a_0 on aura alors :

$$F(a) - F(a_0) = F_{K_0}(a) - F_{K_0}(a_0) + \int_{T-K_0} [f(a, t) - f(a_0, t)]\, d\mu(t) \leqslant \varepsilon$$

qui prouve la semi-continuité supérieure de la fonction F.

Rappelons qu'une fonction à valeur dans un espace vectoriel est dite bornée sur un ouvert Ω si $f(\Omega)$ est un ensemble borné (i.e. absorbé par tout voisinage de l'origine); une fonction est dite *localement bornée* dans Ω si tout point de Ω admet un voisinage où la fonction est bornée. Toute fonction continue à valeurs dans un espace normé est localement bornée.

Souvent il sera utile de supposer que l'espace E est métrisable pour pouvoir se servir du lemme suivant :

LEMME 1.1. — *Si* E *est un espace vectoriel topologique métrisable et* F *normé, une application* f *d'un ouvert* Ω *de* E *dans* F *est localement bornée sur* Ω *si et seulement si elle est bornée sur tout compact de* Ω.

Dans un sens c'est évident.

Dans l'autre sens supposons que f est bornée sur tout compact de Ω mais n'est pas localement bornée en un point x de Ω. Soit ω_n une base dénombrable de voisinages de x; par hypothèse quel que soit n, l'ensemble $f(\omega_n)$ n'est pas borné c'est-à-dire qu'il existe un point x_n de ω_n tels que $\|f(x_n)\| \geqslant n$. La suite x_n forme avec sa limite x un compact sur lequel la fonction ne serait pas bornée d'où la contradiction. Remarquons qu'il aurait suffit de supposer la fonction bornée sur les suites convergentes.

Théorème 1.1. — *Dans un espace vectoriel topologique séparé (resp. métrisable séparé) toute fonction sous-médiane w localement bornée supérieurement (resp. bornée sur tout compact) à une régularisée supérieure plurisousharmonique.*

En effet les hypothèses entraînent que w^* est localement bornée supérieurement et

$$w(a) \leqslant \int_0^{2\pi} w(a+be^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \int_0^{2\pi} w^*(a+be^{i\theta})\,\frac{2\pi}{d\theta}$$

et l'intégrale de droite est, d'après la proposition 1.1., une fonction semi-continue supérieurement de a, d'où

$$w^*(a) \leqslant \int_0^{2\pi} w^*(a+be^{i\theta})\,\frac{2\pi}{d\theta}.$$

Corollaire. — *Soit $(v_t)_{t\in\mathcal{F}}$ une famille localement bornée supérieurement de fonctions plurisousharmoniques dans un espace vectoriel topologique séparé. Les fonctions suivantes ont des régularisées plurisousharmoniques:*

1) $w_1 = \sup\limits_{\mathcal{F}} v_t$

2) $w_2 = \limsup\limits_{\mathcal{F}} v_t$ *si le filtre $\mathcal{F}$ est à base dénombrable.*

Remarque. — La première partie du corollaire donne une réponse positive à une conjecture de Bremermann. Kiselman [16] a établi 1) et 2) dans le cas des espaces de Fréchet, de son côté Cœuré [7] a démontré 1) pour les espaces localement convexes séparés. Dans le cas général où on suppose seulement que la topologie est séparée P. Lelong a donné dans [21] une démonstration de 1) indépendamment de la nôtre.

2. Étude des polycercles dans les espaces de Fréchet.

Dans ce paragraphe nous nous restreindrons aux espaces de Fréchet et utiliserons la notion de polycercle (centré à l'origine pour simplifier les notations) introduite par Cœuré [7] comme suit : Soit p_n une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de l'espace E. Pour toute suite $e = \{e_n\}$ d'éléments de E telle que $\Sigma p_n(e_n) < +\infty$, appelle polycercle (P_e) associé à la suite e le compact image du tore T^N par l'application $\theta = (\theta_n)_{n \in N} \to \sum_{n=1}^{\infty} e_n e^{i\theta_n}$. Soient $(N_\lambda)_{\lambda \in L}$ une partition finie de l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels et, pour tout λ de L, T^{N_λ} le tore sur $[0, 1]$ dont les variables sont notées $\Phi_\lambda = (\varphi_{\lambda_1}, \ldots, \varphi_{\lambda_n}, \ldots)$ où $0 \leqslant \varphi_{\lambda_n} \leqslant 1$ et muni de la mesure de Lebesgue produit $d\Phi_\lambda = \bigotimes_{N_\lambda} d\varphi_{\lambda_n}$; de même soient $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_\lambda, \ldots)$ les variables de T^N et $d\Phi$ sa mesure de Lebesgue. On sait [3] que $d\Phi = \bigotimes_{\lambda \in L} d\Phi_\lambda$ et que pour toute fonction mesurable négative sur T^N l'intégrale existe (éventuellement égale à $-\infty$) et est obtenue en intégrant dans n'importe quel ordre par rapport aux variables Φ_λ.

On trouvera dans [8] une démonstration simple du résultat suivant de Jensen [15] :

Lemme 1.2. — *Soit f une fonction mesurable bornée sur le tore T^N posons*

$$f_k(\varphi) = \int f(\varphi) \bigotimes_{i=1}^{k} d\varphi_i \qquad \text{où} \qquad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_i, \ldots).$$

Alors $f_k(\varphi)$ tend vers la constante (finie ou non) $\int f(\varphi)\, d\varphi$ sauf pour des φ appartenant à un ensemble de T^N de mesure de Lebesgue nulle.

Nous dirons qu'une fonction définie sur un espace vectoriel de dimension infinie et à valeur réelle est *f-mesurable* si sa restriction à tout sous-espace vectoriel de dimension finie est mesurable pour la mesure de Lebesgue.

Notons qu'une fonction de classe M est f-mesurable puisque sur tout sous-espace de dimension finie E′ elle ne diffère de sa régularisée (dans E′) que par un ensemble négligeable qui coupe donc les frontières des polycercles suivant un ensemble de $\mathbf{R}^n$-mesure nulle.

LEMME 1.3. — *Pour toute fonction sous-médiane f-mesurable* u *et pour tout polycercle* P *la fonction* u_P *définie sur le tore* T^N *par :*

$$u_\mathrm{P}(\theta) = u\left[\sum_1^\infty e^{i\theta_n}e_n\right] \quad \textit{est mesurable.}$$

En effet $u_\mathrm{P}(\theta)$ est la limite des fonctions $u_k(\theta) = u\left[\sum_1^k e^{i\theta_n}e_n\right]$ qui ne dépendent que des n premières coordonnées $\theta_1, \ldots, \theta_k$ de θ et sont mesurables par rapport à celles-ci comme composées des fonctions mesurables $(\theta_1, \ldots, \theta_n, \ldots) \rightarrow \sum_1^k e^{i\theta_n}e_n$ et de la restriction de u au sous-espace de dimension finie engendré par $e_1, \ldots, e_k$; d'où le résultat car toute fonction ne dépendant que d'un nombre fini de variables et mesurable par rapport à celles-ci est mesurable sur le tore T^N.

DÉFINITION 1.3. — *Nous dirons qu'une fonction* u *est* fortement sous-médiane *si elle est sous-médiane, f-mesurable et localement bornée supérieurement.*

LEMME 1.4. — *Pour toute fonction fortement sous-médiane et tout polycercle tel que l'intégrale ait un sens on a :*

$$u(x) \leqslant \int u\left(x + \lambda \sum_{n=1}^\infty e^{i\theta_n}e_n\right)d\theta.$$

En effet supposons $u \leqslant 0$ sur P; pour tout k fini on a :

$$\begin{aligned} u(x) &\leqslant \int_0^{2\pi} \mathrm{V}\left(x + \lambda e^{i\psi} \sum_{n=1}^\infty e^{i\theta_n}e_n\right)\frac{d\psi}{2\pi} \\ &\leqslant \int_0^{2\pi} \mathrm{V}\left(x + \lambda e^{i\psi} \sum_{n=1}^\infty e^{i\theta_n}e_n\right)\frac{d\psi}{2\pi} \bigotimes_1^k \frac{d\theta_n}{2\pi} \end{aligned}$$

et d'après le lemme 1.2. l'intégrale de droite tend presque partout pour la mesure de Lebesgue sur le tore vers $\int \mathrm{V}\left(x + \lambda e^{i\psi} \sum_1^\infty e^{i\theta_n}e_n\right)d\theta$ lorsque k tend vers l'infini. Il suffit donc de choisir un θ où la limite est atteinte et de remarquer que cette limite ne dépend pas de ψ.

LEMME 1.5. — *Si* u *est de classe* M_0 *dans un voisinage disqué* $x_0 + V$ *de* x_0. *Pour tout polycercle* P *contenu dans* V *et* $0 < \lambda \leqslant 1$ *la fonction* $W(\lambda) = \int u\left(x_0 + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\theta_n} e_n\right) d\theta$ *est une fonction convexe croissante de* $\log \lambda$ *ou identique à* $-\infty$.

Démonstration. — Si u est plurisousharmonique la proposition 1.1. montre que, $u(\lambda e^{i\psi}, \theta) = u\left(x_0 + \lambda e^{i\psi} \sum_1 e^{i\theta_n} e_n\right)$ étant s.c.s., en intégrant par rapport à θ on obtient une fonction sousharmonique de $z = \lambda e^{i\psi}$ (ou $-\infty$) qui ne dépend pas de ψ donc convexe croissante de $\log \lambda$. D'où la proposition puisque toute fonction de classe M_0 s'obtient à partir des fonctions plurisousharmoniques par une suite de passage à la limite de suites monotones.

PROPOSITION 1.2. [7]. — *Pour toute fonction* u *fortement sous-médiane dans un voisinage de l'origine d'un espace de Fréchet il existe un polycercle* P *tel que :*

$$u^*(0) = \lim_{\lambda=0} \int u_{\lambda P}(\theta)\, d\theta.$$

Notons que :

1) La quantité $\Sigma p_n(e_n)$ peut être choisie arbitrairement petite.

2) Si (e_n) est la suite qui définit le polycercle P toute sous-suite infinie définit un polycercle P′ qui est tel que :

$$u^*(0) = \lim_{\lambda=0} \int u_{\lambda P'}(\theta)\, d\theta.$$

On s'est placé à l'origine pour simplifier les notations. Donnons la démonstration initiale de Cœuré qui, comme on le vérifie ici, est encore valable pour les fonctions fortement sous-médianes.

Démonstration. — Soit (x_n) une suite tendant vers zéro telle que $u^*(0) = \lim_{n\infty} u(x_n)$ et — en prenant au besoin une sous-suite — telle que $\Sigma p_n(nx_n) < +\infty$. Soit P le polycercle défini par les $e_n = nx_n$ on peut supposer que u est négatif sur P. Notons $\tilde{u}$ la fonction de $N + 1$ variables complexes fortement sous-médiane définie par

$$\tilde{u}(z_1, \ldots, z_N, z) = u\left(\lambda \sum_{1}^{N} z_n e_n + \lambda z \sum_{N+1}^{\infty} e^{i\theta_n} e_n\right)$$

alors :

$$\tilde{u}\left(0, \ldots, \frac{1}{\lambda N}, 0\right) = u(x_N)$$

$$\leqslant \frac{1 - \dfrac{1}{\lambda N}}{1 + \dfrac{1}{\lambda N}} \int \tilde{u}(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_N}, e^{i\varphi}) \frac{d\varphi}{2\pi} \bigotimes_{1}^{N} \frac{d\theta_n}{2\pi}$$

$$\leqslant \frac{1 - \dfrac{1}{\lambda N}}{1 + \dfrac{1}{\lambda N}} u_{N+1}(\theta)$$

(u_{N+1} correspond aux notations du lemme 1.2) donc

$$u(x_N) \leqslant \frac{1 - \dfrac{1}{\lambda N}}{1 + \dfrac{1}{\lambda N}} u_{N+1}(\theta)$$

et en passant à la limite compte tenu du lemme 1.2.

$$u^*(0) \leqslant \int u_{\lambda P}(\theta)\, d\theta.$$

A cause de la semi-continuité de u^* qui majore u l'intégrale de droite est majorée par $u^*(0) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$; d'où le résultat.

On peut démontrer maintenant la proposition suivante dont nous aurons besoin par la suite :

Proposition 1.3. — *Pour toute suite décroissante de fonction u_n fortement sous-médiane, définie sur un espace de Fréchet, le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} u_n & \xrightarrow{\text{reg. sup.}} & u_n^* \\ \lim\downarrow \Big\downarrow & & \Big\downarrow \lim\downarrow \\ u & \xrightarrow{\text{reg. sup.}} & v = u^* \end{array}$$

Démonstration. — Posons $w = \lim u_n^*$ et montrons que $w = u^*$.

1) $u \leqslant u_n \leqslant u_n^*$ d'où $u \leqslant w$ et $u^* \leqslant w$ puisque w est plurisousharmonique comme limite décroissante de fonctions plurisousharmoniques.

2) Montrons l'inégalité en sens inverse en nous plaçant pour simplifier au point $x = 0$. On peut supposer que les fonctions u_n sont négatives dans un même voisinage Ω de 0. D'après la proposition 1.2. pour tout n il existe un polycercle $P_n = (e_k^n)_k$ contenu dans Ω tel que :

$$u_n^*(0) = \lim_{\lambda=0} \int u_{n,\lambda P_n}(\theta)\, d\theta.$$

Pour tout n choisissons, ce qui est toujours possible, une sous-suite infinie notée encore $(e_k^n)_k$ telle que

$$\sum_k p_{k'_n}(e_k^n) \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{où} \qquad k'_n = \frac{1}{2}(n+k)(n+k-1).$$

On définit une nouvelle suite (f_α) en réordonnant les (e_k^n) de la manière suivante :

$$f_1 = e_1^1, \qquad f_2 = e_2^1, \qquad f_3 = e_1^2, \qquad f_4 = e_3^1 \qquad \text{etc.}$$

c'est-à-dire que dans le tableau suivant on réordonne suivant les colonnes de gauche à droite et dans chaque colonne en descendant

$$\begin{array}{lcccccccc}
n = 1 & e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 & e_4^1 & \dots & e_k^1 & \dots \\
n = 2 & & e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 & \dots & e_{k-1}^2 & \dots \\
n = 3 & & & e_1^3 & e_2^3 & \dots & e_{k-2}^3 & \dots \\
 & & & & & \dots & \dots & \dots \\
n = k & & & & & & e_1^k & \dots
\end{array}$$

On obtient ainsi un polycercle car chaque f_α de la forme e_k^n est situé dans la $(n+k-1)$-ième colonne et a un rang $\alpha \leqslant \frac{1}{2}(n+k)(n+k-1) = k'_n$. La suite des semi-normes p_n étant croissante tout f_α situé dans la $(n+k-1)$-ième colonne est tel que

$$p_\alpha(f_\alpha) \leqslant p_{k'_n}(e_k^n)$$

d'où
$$\Sigma p_\alpha(f_\alpha) \leqslant \sum_{n,k} p_{k'_n}(e_k^n) \leqslant \Sigma \frac{1}{2^n} < +\infty.$$

Le lemme 1.4. et le théorème de Fubini entraînent donc que

$$u_n^*(0) \leqslant \int u_n(\lambda \Sigma e^{i\theta_k} e_k^n)\, d\theta \leqslant \int u_n\left(\lambda \sum_\alpha f_\alpha e^{i\theta_\alpha}\right) d\theta$$

et le polycercle noté, P^1, défini par les (f_α) est tel que pour tout n on ait :

$$u_n^*(0) \leqslant \int u_{n,\lambda P^1}(\theta)\, d\theta$$

d'où en passant à la limite des suites $u_n^*(0)$ et u_n décroissantes en n :

$$w(0) \leqslant \int u_{\lambda P^1}(\theta)\, d\theta$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ l'intégrale peut être grâce à la s.c.s. de u^* majorée pour λ assez petit par $u^*(0) + \varepsilon$ d'où l'inégalité cherchée $w(0) \leqslant u^*(0)$.

L'exemple suivant montre que la propriété de commutativité du diagramme peut ne pas être vérifiée si l'espace n'est pas complet même lorsque sa topologie est métrisable : Soit une fonction de classe M_0 définie sur le disque unité $|z| < 1$ du plan complexe telle que $v(0) = -1$ et $v^* \equiv 0$.

Soit $E = l_0$ l'espace des suites infinies de nombres complexes $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ nuls sauf un nombre fini d'entre eux et muni de la norme $\|a\| = \sup |a_i|$. Définissons dans la boule unité B une suite [décroissante car $v \leqslant 0$] de fonctions de classe M_0 par :

$$v_1(a) = v(a_1) \quad \text{et} \quad v_n(a) = \sum_{k=1}^{n} v(a_k) \quad \text{pour} \quad n > 1.$$

Pour tout n on a $v_n^*(a) = 0$ donc $w \equiv 0$ sur B; or $v(a) = \lim v_n(a) = \sum_{k=1}^{\infty} v(a_k) = -\infty$ car il y a une infinité de a_k nuls et $v(0) = -1$ d'où $v \equiv -\infty$ sur B ce qui montre bien que $w \not\equiv v^*$.

3. Application au lemme de Hartogs et aux fonctions séparément plurisousharmoniques.

Nous allons maintenant généraliser aux espaces de Fréchet un lemme de majoration uniforme établi par Hartogs en 1906 pour les fonctions $\log |f|$ où f est une fonction analytique d'une variable complexe, et généralisé aux fonctions sousharmoniques par J. Deny et P. Lelong dans [9].

LEMME DE HARTOGS. — *Soient dans un espace Fréchet une suite* (u_n) *localement bornée supérieurement de fonctions plurisousharmoniques et une fonction* g *continue telle qu'en tout point d'un ouvert* Ω :

$$\limsup_{n\infty} v_n(a) \leqslant g(a).$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ *et tout compact* K *contenu dans* Ω *il existe un entier* $N_{K,\varepsilon}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N_{K,\varepsilon}$ *on ait sur* K :

$$u_n(a) \leqslant g(a) + \varepsilon.$$

La démonstration est la même qu'en dimension finie, le point délicat en étant la proposition 1.3. : Posons $u_p^1 = \sup_{n\geqslant 0} u_{n+p}$ c'est une suite décroissante de fonctions de classe M_0 et d'après la proposition 1.3. $(\lim u_p^1)^* = \lim u_p^{1*}$.
L'ensemble $F_p = \{a | u_p^{1*}(a) - g(a) \geqslant \varepsilon\}$ est fermé et $K_p = K \cap F_p$ compact, de plus $K_p \supset K_{p+1}$ et $\cap K_p = \emptyset$ donc à partir d'un certain rang $N_{K,\varepsilon}$ les compacts K_p sont vides d'où le résultat.

COROLLAIRE. — *Si* u_n *est une suite localement bornée de fonctions plurisousharmoniques telle que* $\limsup_{n\infty} u_n \equiv -\infty$. *Alors la suite* u_n *tend vers* $-\infty$ *uniformément sur tout compact.*

Il suffit de prendre pour g des constantes négatives de module arbitrairement grand.

Comme l'a fait remarquer P. Lelong [22 *b*], du fait que la suite des F_p est décroissante on peut déduire le résultat plus fort suivant :

pour tout $\varepsilon > 0$ *et tout point* a *il existe un voisinage* Ω_a *et un entier* $N_{a,\varepsilon}$ *tels que pour tout* $n \geqslant N_{a,\varepsilon}$ *on ait sur* Ω_a :

$$u_n(a^1) \leqslant g(a^1) + \varepsilon.$$

On peut maintenant énoncer le lemme de Hartogs pour les fonctions sous-médianes :

THÉORÈME 1.2. — (Lemme de Hartogs). *Soit dans un espace de Fréchet une famille* $(u_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *bornée supérieurement sur tout compact de fonctions fortement sous-médianes indexées par un*

filtre $\mathcal{F}$ *à base dénombrable* $\mathcal{F}$ *et telle que dans un ouvert* Ω :
$\limsup_{\mathcal{F}} u_t \leqslant g$ *où* g *est une fonction continue.*

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ *et tout compact* K *de* Ω *il existe* N_K, *tel que si* $n \geqslant N_{K,\varepsilon}$ *et* $t \in \mathcal{F}_n$ *on ait sur* K *l'inégalité suivante :*

$$u_t(a) \leqslant g(a) + \varepsilon.$$

On se ramène au lemme déjà démontré par le résultat suivant :

Lemme 1.6. — *Avec les mêmes hypothèses sur la famille* $(u_t)_{t\in\mathcal{F}}$ *et pour toute fonction* g s.c.s. *l'inégalité* $\limsup_{\mathcal{F}} u_t \leqslant g$ *entraîne* $\limsup u_t^* \leqslant g$.

Soit u la limite décroissante des $w_n = \sup_{t\in\mathcal{F}_n} u_t$ on a par la proposition 1.3. $u^* = \lim w_n^*$ et si l'on pose $w_n^1 = \sup_{\mathcal{F}_n} u_t^*$ il est facile de voir que $w_n^* = w_n^{1*}$, donc :

$$w_n^* = \left[\sup_{\mathcal{F}_n} u_t^*\right]^* \geqslant \sup_{\mathcal{F}_n} u_t^*;$$

en passant à la limite décroissante en n on obtient $u^* \geqslant \limsup_{\mathcal{F}_n} u_t^*$ d'où le résultat en remarquant que g étant s.c.s. l'inégalité $u \leqslant g$ entraîne $u^* \leqslant g$.

L'exemple suivant montre que le lemme de Hartogs n'est pas toujours vérifié dans un espace métrisable non complet. Reprenons l'espace $E = l_0$ et la fonction considérée dans l'exemple qui suit la démonstration de la proposition 1.3. : dans B on a $\limsup_{n\infty} v \equiv -\infty$, donc pour un $M > 1$ arbitraire $\limsup v_n \leqslant -M$. Soit a_0 un point de B, pour tout $n \geqslant 1$ notons a_n^k une suite de points de B tendant vers a_0 et tels que $\lim_{k\infty} u_n(a_k^n) = u_n^*(a_0)$.

Notons Ω_j une base décroissante de voisinage de a_0, et prenons des sous-suites, notées encore a_k^n, telles que pour tout n le premier terme de la suite $(a_k^n)_k$ soit dans Ω_n. En ajoutant à la réunion de ces suites le point a_0 on obtient un compact K auquel on applique le lemme de Hartogs avec $\varepsilon = 1$. Il existe un entier N tel que sur K :

$$v_n(a) \leqslant -M + 1 \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant N.$$

Le choix de K entraîne que pour $n \geqslant N$ on a

$v_n^*(a_0) \leqslant -M+1$ d'où en faisant tendre n vers l'infini $\lim v_n^*(a_0) = w(a_0) \leqslant -M+1 < 0$ ce qui est impossible puisque $w(a_0) = 0$.

Donnons une application de la notion de polycercle aux fonctions *séparément plurisousharmoniques* définie sur un domaine Ω d'un produit $E \times E'$ d'espaces vectoriels topologiques et plurisousharmoniques par rapport à chaque variable lorsqu'on fixe l'autre variable. Remarquons que pour une telle fonction l'ensemble $\{v = -\infty\}$ est, soit d'intérieur vide, soit Ω tout entier. Il suffit de le montrer dans le cas où $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_0'$ (Ω_0 et Ω_0' ouverts connexes); soit $\omega = \omega_0 \times \omega_0'$ un ouvert de Ω contenu dans l'ensemble $\{v = -\infty\}$. Pour tout a de ω_0, la fonction $v(a, a')$ de a' est plurisousharmonique et égale à $-\infty$ sur l'ouvert ω_0' donc identique à $-\infty$ sur tout Ω_0'. La fonction $v(a, a')$ est donc identique à $-\infty$ sur $\omega_0 \times \Omega_0'$. En recommençant le raisonnement pour tout a' de Ω_0' on voit que v est identique à $-\infty$ sur $\Omega_0 \times \Omega_0'$. Démontrons maintenant :

Théorème 1.3. — *Toute fonction définie sur un domaine Ω d'un produit d'espaces de Fréchet séparément plurisousharmonique et bornée sur tout compact de Ω est, soit identique à $-\infty$, soit une fonction semi-continue supérieurement de l'ensemble des variables et l'ensemble $\{v = -\infty\}$ est d'intérieur vide.*

La méthode de démonstration que nous utilisons ici s'inspire de celle de P. Lelong [17], reprise par V. Avanissian [2] pour les fonctions doublement sousharmoniques, que nous simplifions. Elle consiste à montrer que la régularisée v^* est égale à la limite décroissante de l'intégrale de v prise sur une famille de produits de polycercles que l'on précisera; puis à montrer que cette limite n'est autre que la fonction v elle-même.

Supposons que la fonction v n'est pas identique à $-\infty$; remarquons que si $v(a, a')$ est séparément plurisousharmonique, les fonctions $v_n = \sup(v, -n)$ forment une suite décroissante de fonctions séparément plurisousharmoniques bornées sur tout compact et finies en tout point. Supposons le théorème démontré pour de telles fonctions. Si v est une fonction séparément plurisousharmonique il s'ensuit alors que pour tout n, $v_n = \sup(v, -n)$ est une fonction semi-continue supérieurement de l'ensemble des variables d'où le résultat car φ est la limite décroissante des φ_n et la semi-continuité supérieure se conserve par passage à la limite décroissante.

Supposons donc $\varphi(a, a')$ doublement plurisousharmonique, bornée sur tout compact de Ω et $\varphi(a, a') > -\infty$ en tout point. L'espace $E \times E'$ étant métrisable φ est, d'après le lemme 1.1., localement bornée supérieurement. Plaçons-nous à l'origine pour simplifier les notations et supposons que φ est négative dans un voisinage de l'origine.

Soient (a_n, a'_n) une suite tendant vers zéro telle que $\lim_{n\infty} \varphi(a_n, a'_n) = \varphi^*(0, 0)$, P et P′ les polycercles définis par les suites de terme général $e_n = na_n$ et $e'_n = na'_n$. Notons $\tilde{\varphi}$ la fonction plurisousharmonique des deux groupes de $N+1$ variables $(z_1, \ldots, z_N, z)$ et $(z'_1, \ldots, z'_N, z')$ définie par :

$$\tilde{\varphi}(z_1, \ldots, z_N, z; \ z'_1, \ldots, z'_N, z') = \varphi\left[\lambda \sum_1^n z_n e_n + \lambda z \sum_{N+1}^{\infty} e^{i\theta_n} e_n, \ \lambda' \sum_1^N z'_n e'_n + \lambda' z' \sum_{N+1}^{\infty} e^{i\theta'_n} e'_n\right]$$

On obtient comme dans la démonstration de la proposition 1.2.;

$$\varphi(a_N, a'_N) = \tilde{\varphi}\left(0, \ldots, \frac{1}{\lambda N}, 0; 0, \ldots, \frac{1}{\lambda' N}, 0\right)$$
$$\leqslant \left(\frac{1-\frac{1}{\lambda N}}{1+\frac{1}{\lambda N}}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{\lambda' N}}{1+\frac{1}{\lambda' N}}\right) \iint \tilde{\varphi}[e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_N}, e^{i\varphi}; e^{i\theta'_1}, \ldots, e^{i\theta'_N}, e^{i\varphi'}] \left(\frac{d\varphi}{2\pi} \bigotimes_1^N \frac{d\theta_n}{2\pi}\right)\left(\frac{d\varphi'}{2\pi} \bigotimes_1^N \frac{d\theta'_n}{2\pi}\right)$$
$$\leqslant \left(\frac{1-\frac{1}{\lambda N}}{1+\frac{1}{\lambda N}}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{\lambda' N}}{1+\frac{1}{\lambda' N}}\right) \iint \varphi[\lambda \Sigma e^{i\theta_n}, e_n, \lambda' \Sigma e^{i\theta'_n} e'_n] \bigotimes_1^{N+1} \frac{d\theta_n}{2\pi} \bigotimes_1^{N+1} \frac{d\theta'_n}{2\pi}$$

d'où en passant à la limite pour N tendant vers l'infini compte tenu du lemme 1.2. :

$$\varphi^*(0) \leqslant \iint \varphi_{\lambda P \times \lambda' P'}(\theta, \theta')\, d\theta\, d\theta'.$$

L'intégrale de droite est une intégrale double car v est négatif et mesurable sur le produit $\lambda P \times \lambda' P'$ des polycercles, c'est de plus par le lemme 1.5. une fonction croissante de λ et λ'. La semi-continuité supérieure de v^* entraîne alors l'égalité :

$$v^*(0) = \lim_{\substack{\lambda=0\\ \lambda'=0}} \iint v_{\lambda P \times \lambda' P'}(\theta, \theta')\, d\theta\, d\theta'.$$

Montrons maintenant que

$$v(0, 0) = \lim_{\substack{\lambda=0\\ \lambda'=0}} \iint v_{\lambda P \times \lambda' P'}(\theta, \theta')\, d\theta\, d\theta'.$$

Nous utiliserons le résultat classique suivant : Si une fonction $f_t(x)$ dépendant d'un paramètre t, $0 < t \leqslant t_0$, est sommable pour une mesure de Radon μ positive à support compact pour tout t et si $f_t(x)$ tend en décroissant vers zéro lorsque t décroît vers zéro on a :

$$\lim_{t=0} \int f_t(x)\, d\mu(x) = 0.$$

La fonction $I_{\lambda'}(a) = \int v(a, \lambda' \Sigma e^{i\theta'_n} e'_n)\, d\theta' - v(a, 0)$ est définie en tout point d'un voisinage ω de $a = 0$, positive, finie en tout point et croissante en λ' d'après le lemme 1.5. Pour tout a de ω on a $\lim\limits_{\lambda'=0} I_{\lambda'}(a) = 0$ car la proposition 1.2. est vraie pour tout polycercle lorsque la fonction est plurisousharmonique [7]; la quantité

$$\int I_{\lambda'}(\lambda \Sigma e^{i\theta_n} e_n)\, d\theta = \iint v_{\lambda P \times \lambda' P'}(\theta, \theta')\, d\theta\, d\theta' - \int v(\lambda \Sigma e^{i\theta_n} e_n, 0)\, d\theta$$

tend donc vers zéro avec λ'. Écrivons :

$$\iint v_{\lambda P \times \lambda' P'}(\theta, \theta')\, d\theta\, d\theta' - v(0, 0) = \int I_{\lambda'}(\lambda \Sigma e^{i\theta_n} e_n)\, d\theta + \int v(\lambda \Sigma e^{i\theta_n} e_n, 0)\, d\theta - v(0, 0)$$

ε étant donné, choisir λ_0 tel que $\lambda < \lambda_0$ entraîne :

$$\int v(\lambda \Sigma e^{i\theta_n} e_n, 0)\, d\theta - v(0, 0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puis choisir λ'_0 tel que $\lambda' < \lambda'_0$ entraîne :

$$\int I_{\lambda'}(\lambda \Sigma e^{i\theta_n} e_n)\, d\theta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

d'où, pour tout $\lambda < \lambda_0$ et $\lambda' < \lambda'_0$

$$0 \leqslant \iint v_{\lambda P \times \lambda' P'}(\theta, \theta')\, d\theta\, d\theta' - v(0, 0) \leqslant \varepsilon$$

qui termine la démonstration.

Considérons maintenant un espace de Fréchet *séparable* on peut appliquer un lemme de Choquet pour montrer qu'il est possible de remplacer les fonctions de classe M par des fonctions de classe M_0 ayant même régularisée.

Lemme de Choquet. — *Soit Ω un espace topologique à base dénombrable d'ouverts et $(v_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions numériques définies sur Ω. Il existe une sous-famille dénombrable I_0 de I telle que la relation « g est* s.c.s. *et $\sup_{i \in I_0} v_i \leqslant g$ » entraîne « $\sup_{i \in I} v_i \leqslant g$ ».*

En appliquant ceci à une famille de fonctions plurisousharmoniques on voit que les régularisées supérieures des fonctions $\sup_{i \in I} v_i$ et $\sup_{i \in I_0} v_i$ sont identiques.

Proposition 1.4. — *Soit E un espace de Fréchet séparable.*

1) *Pour toute fonction u de classe M il existe une fonction u de classe M_0 telle que $u_0 \leqslant u \leqslant u_0^* = u^*$.*

2) *Pour toute famille $(u_i)_{i \in I}$ de fonctions de classe M on peut trouver une famille dénombrable $(u_i^0)_{i \in I}$ de fonctions de classe M_0 telle que si $u^0 = \sup_{i \in I_0} u_0^i$ et $u = \sup_{i \in I} u_i$ on ait $u^0 \leqslant u \leqslant u^{0*} = u^*$.*

2′) *Pour toute suite décroissante v_n de fonctions de classe M on peut trouver une suite décroissante de fonctions v_n^0 de classe M_0 telle que si $v^0 = \lim v_n^0$ et $v = \lim v_n$ on ait*

$$v^0 \leqslant v \leqslant v^{0*} = v^*.$$

Montrons par récurrence sur k entier positif un résultat un peu plus précis que 1) à savoir :

1′) Pour toute fonction u de classe C_K il existe une fonction u_0 de classe C_K^0 telle que $u_0 \leqslant u \leqslant u^* = u_0^*$.

C'est évident pour $k = 0$ car $C_0 = C_0^0$ est l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques.

Soit maintenant $u \in C_k$ alors

(a) soit $u = \sup_{i \in I} u_i$ où $u_i \in C_{k-1}$;

(b) soit u est la limite décroissante d'une suite de fonctions définie en (a).

Démonstration de (a). — Par hypothèse de récurrence pour chaque i de I il existe un élément u_i^0 de C_{k-1}^0 tel que $u_i^0 \leqslant u_i \leqslant u_i^{0*} = u_i^*$. Soit $u' = \sup_{i \in I} u_i^0$; le lemme de Choquet montre qu'il existe une sous-famille dénombrable I_0 de I telle que si $u_0 = \sup_{i \in I_0} u_i^0$ on ait : $u_0 \leqslant u' \leqslant u'^* = u_0^*$. Or pour une famille f_i on a rég. sup $(\sup f_i) =$ rég. sup $(\sup f_i^*)$ d'où pour $f_i = u_i^0$ on voit que $u'^* = u^*$ donc

$$u_0 \leqslant u' \leqslant u = u_0^* \qquad \text{et} \qquad u_0 \leqslant u$$

ce qui entraîne $u_0 \leqslant u \leqslant u^* = u_0^*$.

Démonstration de (b). — Soit $u_n = \sup_{i \in I} u_{n,i}$ une suite décroissante où $u_{n,i}$ appartiennent à C_{k-1}. D'après $a)$ il existe pour tout n et pour tout i une fonction $u'_{n,i}$ de C_{k-1}^0 telle que :

$$u'_{n,i} \leqslant u_{n,i} \leqslant u'^*_{n,i} = u^*_{n,i}.$$

Soit d'après le lemme de Choquet, pour tout n, une sous-famille dénombrable I_n^0 de I_n et posons $u_n^0 = \sup_{i \in I_n^0} u'_{n,i}$ qui est un élément de C_k^0 tel que $u_n^0 \leqslant u_n \leqslant u_n^{0*} = u_n^*$. La suite u_n^0 n'est pas nécessairement décroissante. Notons

$$U_n = \bigcup_{k \geqslant n} \{(u'_{k,i})_{i \in I_k^0}\}$$

c'est une famille dénombrable d'éléments de C_{k-1}^0 et posons $u_n'^0 = \sup_{v \in U_n} v$ on a :

$$u_n^0 \leqslant u_n'^0 \leqslant u_n \qquad \text{d'où} \qquad u_n^{0*} = u_n'^{0*} = u_n^0.$$

De plus comme $U_{n+1} \subset U_n$ la suite $u_n'^0$ est décroissante et on peut lui appliquer la proposition 1.3. d'où la fonction $u_0 = \lim u_n'^0$ est un élément de C_k^0 et

$$u_0^* = \lim u_n'^{0*} = \lim u_n^* = u^*;$$

on a bien montré que $u_0 \leqslant u \leqslant u_0^* = u^*$.

Les parties 2 et 2' de la proposition se démontrent exactement de la même manière aussi nous ne le ferons pas ici.

CHAPITRE II

APPLICATIONS ANALYTIQUES ET G-ANALYTIQUES

1. Définitions.

Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques séparés et une application $f : \Omega \subset E \to F$. Il y a plusieurs manières que nous allons préciser d'introduire la notion d'application analytique. Lorsque l'espace F n'est pas complet on sera amené à considérer son complété $\hat{F}$; une application f à valeur dans F sera dite analytique si, considérée comme application à valeur dans $\hat{F}$, elle est analytique.

Soient E et F deux espaces vectoriels, une application f de E dans F est dite polynomiale homogène de degré n s'il existe une application n-linéaire u de $E \times \cdots \times E$ dans F telle que $f(x) = u(x, \ldots, x)$.

Nous parlerons de fonction analytique lorsque $F = C$ et d'application analytique dans les autres cas.

Définition 2.1. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels topologiques séparés, une application* f *d'un ouvert* Ω *de* E *dans* F *est dite analytique en un point* a *de* Ω *s'il existe une suite d'applications polynomiales, homogènes de degré* n *et continues, de* E *dans le complété faible* F'^{*} *de* F *telle que*

$$f(a + x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),$$

la série convergeant uniformément dans un voisinage de a.

Si F n'est pas complet, la série converge dans $\hat{F}$ et sa somme est en fait un élément de F. La fonction f sera dite analytique dans un ouvert si elle est analytique en tout point a de Ω.

Cette définition est à la base de la théorie algébrique des applications analytiques développée par Ramis [29] lorsque E et F sont des espaces de Banach. Nous serons amenés à introduire lorsque F est localement convexe une définition plus maniable dans le cadre des problèmes que nous étudions et équivalente lorsque F est normé.

Lorsque $E = \mathbf{C}$ Grothendieck [11] a introduit la notion de fonction analytique à valeurs vectorielles et démontré le théorème suivant auquel nous nous référons constamment :

THÉORÈME 2.1. — *Une application $f : \Omega \subset \mathbf{C} \to F$, où F est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, est dite analytique dans Ω si elle satisfait à une des conditions suivantes qui sont équivalentes :*

(i) *pour tout u du dual topologique F' de F la fonction $z \to u \circ f(z)$ est analytique scalaire dans Ω.*

(ii) *pour tout point z de Ω le rapport $\frac{1}{h}[f(z+h) - f(z)]$ a une limite (dans $\hat{F}$) lorsque h tend vers 0.*

(iii) *tout point z_0 de Ω possède un voisinage où f est somme d'une série*

$$f(z) = \Sigma a_k (z - z_0)^k$$

avec

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-n-1}\, d\zeta \quad (a_k \in \hat{F}).$$

(iv) *f est continue et pour toute courbe Γ rectifiable homotope à zéro dans Ω*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Une telle fonction satisfait à la formule de Cauchy (avec les hypothèses habituelles sur Γ)

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

ainsi qu'au

LEMME D'ABEL. — *Si la série $\Sigma a_k (z_1 - z_0)^k$ converge, la suite $\{a_k (z_1 - z_0)^k\}$ est bornée et si F est complet la série $\Sigma a_k (z - z_0)^k$ converge uniformément sur tout compact du disque $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.*

Remarquons que pour que a_k défini en (iii) soit un élément de F il faut supposer, ce qui est toujours vérifié lorsque F est quasi-complet (i.e. les parties fermées et bornées sont complètes), que l'enveloppe convexe fermée d'un compact est compacte.

DÉFINITION 2.2. — *Une application* $f : \Omega \subset E \to F$, *où* F *est un espace localement convexe, est dite* G-analytique [*analytique au sens de Gateaux*] *si sa restriction à toute droite complexe de* E *est analytique au sens du théorème* 2.1.

Autrement dit pour tout couple (a, b) d'éléments de Ω la fonction $z \to f(a + zb)$ est analytique en $z = 0$.

Dans la suite de ce travail nous ferons jouer un rôle important à cette classe de fonctions.

DÉFINITION 2.3. — *Une application* $f : \Omega \subset E \to F$, *où* F *est un espace localement convexe, est dite* analytique [*analytique au sens de Fréchet*] *si elle est* G-*analytique* et *continue.*

L'exemple d'une forme linéaire non continue montre (avec $F = \mathbf{C}$) qu'en dimension infinie une fonction G-analytique peut ne pas être analytique. On verra plus loin des conditions simples pour qu'une fonction G-analytique soit continue ou localement bornée.

Donnons la proposition suivante qu'on trouvera dans [13] lorsque E et F sont des espaces de Banach.

PROPOSITION 2.1. — *Si* $f : \Omega \subset E \to F$ *est* G-*analytique dans* Ω (E *et* F *séparés,* F *localement convexe), pour tout* x_0 *de* Ω *il existe des applications polynomiales homogènes de degré* n *non nécessairement continues* f_n *telles que, dans un voisinage de* x_0 *qui est le plus grand ouvert disqué en* x_0 *contenu dans* Ω, *la série converge en tout point :*

$$f(x_0 + h) = \sum_{n \geqslant 0} f_n(x_0 ; h).$$

Les applications f_n *sont uniques et données par la représentation intégrale suivante :*

$$f_n(x_0 ; h) = \int_{|\zeta|=1} f(x_0 + \zeta h) \zeta^{-n-1} \frac{d\zeta}{2i\pi}.$$

Démonstration. — Soit x_0 un point de Ω ; pour tout h du plus grand ouvert ω_0 disqué en x_0 contenu dans Ω, la fonction $f(x_0 + zh)$ est analytique de la variable complexe

z au voisinage de $z = 0$ et la partie (iii) du théorème 2.1. montre que si on pose $F(z) = f(x_0 + zh)$ on a :

$$F(z) = \sum_{n=0} l_n z^n$$

où l_n est une fonction de x_0 et h donnée par

$$l_n(x_0 ; h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} f(x_0 + \zeta h) \zeta^{-n-1} \, d\zeta.$$

La convergence de la série est uniforme sur le disque $|z| < \varphi(x, h)$, qui contient le point $z = 1$ puisqu'on a choisi $x_0 + h$ dans ω_0, d'où l'égalité cherchée en faisant $z = 1$:

$$f(x_0 + h) = \Sigma l_n(x_0 ; h),$$

la série convergeant en tout point h tel que $x_0 + h$ appartienne à ω_0. Montrons que $l_n(x_0, h)$, notée $l_n(h)$, est une application polynômiale en h homogène de degré n ce qui équivaut à montrer que la restriction de l_n à toute droite complexe est un polynôme de degré n et que $l_n(\alpha h) = \alpha^n l_n(h)$ pour tout α de $\mathbf{C}$. (C'est un résultat de [13], chapitre XXVI, où le calcul — purement formel — fait dans le cadre des espaces de Banach conserve un sens pour des espaces vectoriels topologiques séparés.)

En faisant un changement de variables $\zeta' = \alpha\zeta$, α complexe, dans l'intégrale on vérifie que l_n est homogène complexe d'ordre n; de plus pour tout élément u du dual F' de F la restriction de $u \circ l_n$ à toute droite complexe est un polynôme d'une variable complexe de degré n; en effet :

$$u \circ l_n(h' + zh'') = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} u \circ f(x_0 + \zeta h' + \zeta z h'') \zeta^{-n-1} \, d\zeta$$

et l'application $z \to u \circ f(x_0 + \zeta h' + \zeta z h'')$ est une fonction analytique (de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$) au voisinage de $z = 0$.

On en déduit que pour tout u de F' l'application $u \circ l_n(h' + zh'')$ notée $u \circ l'_n(z)$ est un polynôme de degré n ce qui prouve que l'application l'_n de $\mathbf{C}$ dans F est analytique et s'écrit d'après le théorème 2.1.

$$l'_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{avec} \quad a_k \quad \text{dans} \quad \hat{F},$$

la convergence étant uniforme dans un disque $|z| < \rho$.

Montrons que $a_k = 0$ pour $k > n$; pour tout u de F′ on a :

$$u(a_k) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=\frac{\rho}{2}} u \circ l'_n(z) z^{-k-1} \, dz$$

ce qui entraîne $u(a_k) = 0$ pour tout $k > n$ puisque $u \circ l'_n$ est un polynôme de degré n au plus, d'où le résultat.

Proposition 2.2. — *Lorsque l'espace* F *est normé, les définitions* 2.1 *et* 2.3 *des applications analytiques sont équivalentes.*

La définition 2.1. entraîne 2.3. Réciproquement, supposons f continue donc localement bornée et, pour tout u de F′, la fonction $u \circ f$ G-analytique. D'après ce qu'on vient de voir les applications

$$f_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} f(a + \zeta x) \zeta^{-n-1} \, d\zeta$$

sont polynomiales homogènes de degré n; elles sont de plus localement bornées uniformément donc continues dans Ω; d'après la proposition 2.1 la série $\Sigma f_n(x)$ converge pour tout x d'un voisinage disqué de 0 et a pour somme $f(a + x)$.

Soit $a + \omega$ un voisinage disqué de a où f est bornée, $\|f(a + \omega)\| < +\infty$ et la série $\Sigma f_n(x)$ converge uniformément dans $(1 - \varepsilon)\omega$.

Remarque importante : Lorsque F sera localement convexe nous prendrons comme définition des applications analytiques la définition 2.3.

2. Théorème sur la continuité d'une application G-analytique.

Maintenant nous allons nous restreindre au cas où E est un espace métrisable complet pour utiliser la propriété de Baire.

En dimension finie, le lemme de Hartogs permet de montrer que toute fonction séparément analytique de $z_1, \ldots, z_n$ est analytique de l'ensemble des variables (théorème de Hartogs). On peut généraliser aux espaces de Fréchet la démonstration classique [14] de ce théorème grâce au lemme démontré au chapitre précédent, mais nous ne le ferons pas ici car, suivant une idée de Zorn [34] qui nous semble avoir été perdue de vue, nous donnerons une démonstration plus directe basée sur le théorème suivant qui sera démontré à la fin de ce chapitre (voir [34] pour le cas des espaces de Banach). Ce théorème est d'une grande utilité dans la pratique car il permettra lorsqu'on a une fonction analytique de ne la considérer que comme une fonction G-analytique — la continuité étant assurée — donc de ne considérer que ses restrictions aux droites complexes. Ce sera en particulier le cas dans les problèmes de prolongement.

Théorème 2.2. — *Soit* Ω *un domaine d'un espace vectoriel topologique métrisable et complet et* f *une application* G-*analytique sur* Ω *à valeur dans un espace* F *localement convexe. L'ensemble des points où la fonction* f *est continue est à la fois ouvert et fermé. (La continuité en un point entraîne donc la continuité dans* Ω *tout entier.)*

Démontrons d'abord le

Lemme 2.1. — *Soient* E_1 *et* E_2 *des espaces de Baire métrisables et* f *une fonction à valeur complexe séparément continue sur* $E_1 \times E_2$. *Tout ouvert* Ω *de* $E_1 \times E_2$ *contient un ouvert* ω *où la fonction est bornée.*

Faisons la démonstration pour un ouvert de la forme $\Omega_1 \times \Omega_2$ où Ω_i est un ouvert de E_i. Pour tout y de Ω_2 l'ensemble $E_y(N) = \{x \in \Omega_1, \ |f(x, y)| \leqslant N\}$ est fermé et soit ω_n une base strictement décroissante de voisinages d'un point y_0 de Ω_2, notons $E_{n,N} = \bigcap_{y \in \omega_n} E_y(N)$ ce sont des ensembles fermés ou éventuellement vides dont la réunion est Ω_1 tout entier. En effet soit x un point de Ω_1 la fonction $y \to f(x, y)$ est continue en $y = y_0$ donc bornée dans un voisinage ω de y_0 par exemple :

$$|f(x, y)| \leqslant M \qquad \text{si} \qquad y \in \omega.$$

Soit n_0 tel que $\omega_{n_0} \subset \omega$ et $N_0 \geqslant M$ ce qui prouve que x appartient à E_{n_0}, N_0. On applique alors le théorème de Baire qui montre qu'il existe un $E_{n', N'}$ d'intérieur non vide d'où le résultat.

Remarquons que si la fonction est à valeurs dans un espace non normé la conclusion du lemme peut être fausse comme le montre l'exemple suivant où $F = E \times E$ et $f = i \times i$ (i étant l'application identique de $E = E_1 = E_2$ espaces de Fréchet).

Du théorème 2.2. et du lemme 2.1. on déduit le théorème de Hartogs :

THÉORÈME DE HARTOGS. — *Soit Ω un domaine de $E_1 \times E_2$ (espaces métrisables complets) et f une fonction définie sur Ω à valeurs dans un espace localement convexe, séparément analytique des variables x_1 et x_2. La fonction f est alors analytique de l'ensemble des variables.*

Démonstration. — La fonction f est G-analytique. En effet pour tout couple (a, b) et (a', b') de points de $E_1 \times E_2$ la fonction $f(a + zb, a' + z'b')$ est séparément analytique en z et z' donc (théorème de Hartogs en dimension finie) analytique de l'ensemble (z, z') d'où l'analyticité en z sur la diagonale $z = z'$. Pour tout u de F', $u \circ f$ est G-analytique dans Ω et séparément continue donc analytique dans Ω tout entier par le lemme 2.1 et le théorème 2.2. D'où l'analyticité de f dans Ω par la proposition 2.5 démontrée plus loin. Dans la fin de ce paragraphe nous démontrons le théorème 2.2. ainsi que diverses propriétés des fonctions G-analytiques.

La proposition suivante se démontre en considérant la restriction de la fonction aux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E où le résultat est connu [20].

LEMME 2.2. — *Soit E un espace vectoriel topologique quelconque et v une fonction plurisousharmonique homogène d'ordre $\rho > 0$ alors v est positive et $\log v$ plurisousharmonique.*

COROLLAIRE. — *Si p est une semi-norme continue sur E la fonction $\log p(a)$ est plurisousharmonique.*

Rappelons le résultat suivant de P. Lelong [22 *b*] qui permet d'introduire la notion de fonction plurisousharmonique sur les variétés Banachiques.

PROPOSITION 2.3. — *Soient $\varphi : E \to F$ une application analytique (où E et F sont des espaces vectoriels topologiques séparés, F complet) et v une fonction plurisousharmonique sur F. Alors $v \circ \varphi$ est une fonction plurisousharmonique.*

Corollaire. — *Si* p *est une semi-norme continue sur* F *la fonction* $\log p \circ \varphi$ *est plurisousharmonique.*

Nous aurons besoin du

Lemme de Schwarz. — *Soit* $\varphi: \mathbf{C} \rightarrow \mathrm{F}$ *une fonction analytique dans* $|z| \leqslant 1$ *à valeur dans* F *espace vectoriel topologique localement convexe séparé et supposons que pour une semi-norme* p *sur* F, $p \circ \varphi(e^{i\theta}) \leqslant \mathrm{M} < +\infty$ *et* $\varphi(0) = 0$.

Alors pour tout $|z| \leqslant 1$, *on a* $p \circ \varphi(z) \leqslant \mathrm{M}|z|$.

Démonstration. — φ est analytique au voisinage de 0 et nulle en 0 donc $\varphi(z) = a_1 z + \cdots$ La fonction $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{z} = a_1 + a_2 z + \cdots$ est analytique dans le disque $|z| \leqslant 1$; la fonction $p \circ f$ est sousharmonique dans $|z| \leqslant 1$ et $p \circ f(e^{i\theta}) \leqslant \mathrm{M}$.

Le principe du maximum entraîne $p \circ f(z) \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $|z| \leqslant 1$ et $p \circ f(z) = p\left[\dfrac{\varphi(z)}{z}\right] = \dfrac{1}{|z|}\, p \circ \varphi(z)$ d'où le résultat.

La proposition suivante permet lorsque F est normé de remplacer la notion d'application continue par celle plus maniable d'« application localement bornée ».

Proposition 2.4. — *Soient* $f: \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{F}$ *une application* G-*analytique,* F *un espace localement convexe et* E *séparé. Si* f *est localement bornée elle est continue. La réciproque est vraie lorsque* F *est normé.*

Démonstration. — Montrons que si f est localement bornée en a_0 elle est continue en a_0, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute semi-norme p sur F il existe un voisinage V de l'origine dépendant de ε et p tel que

$$p[f(a + a_0) - f(a_0)] \leqslant \varepsilon$$

pour tout point a de V.

Soit $a_0 + \mathrm{V}_1$ un voisinage disqué de a_0 où la fonction f est localement bornée; $p \circ f(\mathrm{V}_1) \leqslant \mathrm{M}_p < +\infty$ pour toute semi-norme p sur F. Posons $\varphi_a(\lambda) = f(\lambda a + a_0) - f(a_0)$ c'est une fonction analytique de $\lambda \in \mathbf{C}$ ou identiquement nulle dans $|\lambda| \leqslant 1$ et pour tout a de V_1 on a

$$p[\varphi_a(e^{i\theta})] = p[f(e^{i\theta}a + a_0) - f(a_0)] \leqslant 2\mathrm{M}_p \quad \text{et} \quad \varphi_a(0) = 0.$$

Le lemme de Schwarz entraîne que, pour tout

$$|\lambda| \leqslant 1, \ p \circ \varphi(\lambda) \leqslant |\lambda| 2M_p$$

c'est-à-dire que $p[f(\lambda a + a_0) - f(a_0)] \leqslant 2M_p|\lambda|$ pour tout a de V_1 et $|\lambda| \leqslant 1$. Ayant fixé ε choisir un λ_p tel que $|\lambda_p| = \dfrac{\varepsilon}{2M_p} \leqslant 1$.

Pour tout a' de l'ensemble $\dfrac{\varepsilon}{2M_p} V_1$ le point $a = \dfrac{a'}{\lambda_p}$ appartient à V_1 donc

$$p \circ [f(a' + a_0) - f(a_0)] \\ = p\left[f\left(\lambda_p \frac{a'}{\lambda_p} + a_0\right) - f(a_0)\right] \leqslant 2M_p|\lambda_p| = \varepsilon$$

d'où la proposition en prenant $V = \dfrac{\varepsilon}{2M_p} V_1$;

Notons l'exemple suivant qui montre que lorsque F n'est pas normé une application G-analytique peut être continue sans être localement bornée : E = F sont des espaces de Fréchet et f est l'application identique.

Le résultat suivant permet de se ramener à l'étude des fonctions analytiques à valeurs scalaires.

PROPOSITION 2.5. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels topologiques séparés* E *métrisable et* F *localement convexe. Pour qu'une application f de $\Omega \subset E$ dans* F *soit analytique il faut et il suffit que $u \circ f$ soit une fonction analytique pour tout u de* F'.

La condition est évidemment nécessaire. Montrons que lorsque F est normé elle est suffisante : on sait d'après le théorème 2.1. que f est G-analytique, il reste à montrer que c'est une fonction continue; l'espace E étant métrisable et F normé il suffit d'après la proposition 2.4. de montrer que f est bornée sur tout compact. Soit K un compact quelconque de Ω. L'ensemble $u \circ f(K)$ est compact donc borné pour tout u de F'; l'ensemble $f(K)$ étant faiblement borné [i.e. borné pour la topologie faible $\sigma(F, F')$] est alors fortement borné d'après le théorème de Banach-Mackey.

Rappelons maintenant le résultat suivant de [4] : si F est un espace vectoriel localement convexe séparé et (p_i) un famille de semi-normes définissant sa topologie, désignon par F_i l'espace de Banach complété de l'espace normé associé à la semi-norme p_i et par φ_i l'application canonique de F dans F_i. La topologie de F peut être alors définie comme la moins fine des topologies qui rendent continues les applications φ_i et pour qu'une application f de E dans F soit continue il faut et il suffit que pour tout i l'application $\varphi_i \circ f$ de E dans F_i soit continue.

Pour tout i $f_i = \varphi_i \circ f$ est une application à valeurs dans l'espace normé F_i et pour tout élément l de F'_i l'application $l \circ f_i$ est analytique car $l \circ f_i = l \circ \varphi_i \circ f$ et $l \circ \varphi_i$ est un élément de F'. D'après la première partie de la démonstration l'application f_i est analytique donc continue ce qui prouve, par ce qu'on vient de rappeler, la continuité de f.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "l \circ \varphi_i"'] & F_i \arrow[d, "l"] \\ & & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

Le lemme suivant sera utile plus loin :

Lemme 2.3. — *Soit $f_n(x)$ une suite de fonctions continues de $\Omega \subset E \to F$ (E espace de Baire, F normé) ayant une limite $f(x)$ en tout point de Ω. Alors l'ensemble des points où f est localement bornée est un ouvert partout dense dans Ω.*

Soit p la norme de F, l'ensemble des points où la famille $(p \circ f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est localement bornée supérieurement est partout dense; en effet montrons que tout ouvert ω de Ω contient un ouvert où $p \circ f_n$ est une fonction bornée. Pour tout entier k l'ensemble

$$F_{k,n} = \{a \in \omega | p \circ f_n(a) \leqslant k\}$$

est fermé dans ω et $F_k = \bigcap_n F_{k,n}$ est un ensemble fermé et comme $\omega = \cup F_k$ il existe un indice k_0 tel que $\mathring{F}_{k_0} \neq \emptyset$.

Corollaire. — *Soit (f_n) une suite d'applications analytiques $\Omega \subset E \to F$ telle que la suite $f_n(x)$ a une limite $f(x)$ en tout point de Ω. Alors $f(x)$ est analytique sur un ouvert partout dense de Ω.*

Lemme 2.4. — *Soit* (E *métrisable complet,* F *normé) d'applications continues $f_n : \Omega \subset E \to F$ telle que $\Sigma f_n(x)$*

converge en tout point de Ω. *Alors l'ensemble* A *des points de* Ω *où la famille* (f_n) *est localement bornée est un ouvert partout dense de* Ω.

C'est évidemment un ensemble ouvert. Pour le reste, on se base sur le fait que la suite $p \circ f_n(x)$ tend vers 0 en tout point de Ω lorsque n tend vers ∞. Donc pour tout x de Ω et $\sup_n p \circ f_n(x) < +\infty$.

Le théorème classique de Baire entraîne que l'ensemble des points où la famille $p \circ f_n(x)$ est localement bornée est un ouvert partout dense.

Donnons maintenant quelques propriétés des applications définies comme somme d'application polynomiales homogènes continues.

Soit $A_1 = \bigcup_{|\lambda| \leqslant 1} \lambda A$ l'enveloppe disquée d'un ensemble A, notons tout de suite que toute application polynomiale homogène l bornée sur un ensemble A est aussi bornée sur son enveloppe disquée A_1; plus précisément pour toute semi-norme p sur F l'inégalité $p \circ l(A) \leqslant M$ entraîne $p \circ l(A_1) \leqslant M$.

Proposition 2.6. — *Soit* $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} l_n(x)$ *une série convergeant pour tout* x *d'un ouvert* Ω *disqué à l'origine où les fonctions* l_n *sont des applications polynomiales homogènes de degré* n *de* E *dans* F (E *séparé,* F *localement convexe séparé). Si la fonction* f *est bornée dans* Ω *la famille* (l_n) *est uniformément bornée dans* Ω *et réciproquement si* (l_n) *est une famille uniformément bornée dans* Ω, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *la fonction* f *est bornée dans* $(1 - \varepsilon)\Omega$.

Démonstration. — *a*) Supposons la fonction f bornée dans Ω; pour toute semi-norme continue p sur F on a: $p \circ f(\Omega) \leqslant M_p < +\infty$

$$l_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(xe^{i\theta}) e^{-ni\theta} \, d\theta.$$

Donc pour toute semi-norme p sur F on a

$$p \circ l_n(x) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p \circ f(xe^{i\theta}) \, d\theta \leqslant M_p < +\infty$$

puisque $xe^{i\theta}$ appartient à Ω pour tout x de Ω. Ce qui montre que la famille (l_n) est bornée sur Ω.

b) Réciproquement supposons que pour toute semi-norme p sur F on ait $p \circ l_n(\Omega) \leqslant M_p < +\infty$ où M_p ne dépend pas de n. Pour tout $\varepsilon > 0$ soit $\Omega_\varepsilon = (1-\varepsilon)\Omega$. Pour tout x' de Ω_ε le point $x = \dfrac{x'}{1-\varepsilon}$ appartient à Ω donc $p \circ l_n(x') \leqslant (1-\varepsilon)^n p \circ l_n(x) \leqslant (1-\varepsilon)^n M_p$. On en déduit que $p \circ f(x') = p \circ [\Sigma l_n(x')] \leqslant \Sigma p \circ l_n(x') \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon} M_p$ pour tout x' de Ω_ε c'est-à-dire que la fonction f est bornée sur Ω_ε.

Proposition 2.7. — *Soit* l_n *une suite d'applications polynomiales homogènes de degré* n *de* E *dans* F, F *localement convexe, telle que* $f(x) = \Sigma l_n(x)$ *converge pour tout* x *d'un ouvert* Ω *de* E *disqué à l'origine. La fonction* f *est alors* G-*analytique dans* Ω.

Démonstration. — Le lemme d'Abel montre que la restriction de f aux droites complexes D passant par 0 est analytique sur $D \cap \Omega$. Soit D une droite complexe ne passant pas par l'origine, notons E_D l'espace vectoriel engendré par la droite D et l'origine. L'ensemble $\Omega \cap D$ est un ouvert de D et sur son enveloppe disquée qui est égale à $\Omega \cap E_D$ la fonction f est analytique. On applique le lemme à la fonction de deux variables complexes $f(\zeta a + \pi b)$ pour des points a et b pris dans une même composante connexe de $D \cap \Omega$, la restriction de la fonction f à $D \cap \Omega$ est alors analytique sur chaque composante connexe d'où le résultat en faisant $\zeta = 1$.

Lemme 2.5. — *Une application polynomiale homogène* $l(x)$ *de* E *dans* F *(*E *quelconque,* F *localement convexe) bornée sur un ensemble* $x_0 + A$ *où* A *est disqué en* 0 *est bornée sur l'ensemble* $A' = \bigcup_{|\lambda| \leqslant 1} \{\lambda x_0 + A\}$. *De manière plus précise pour toute semi-norme continue l'inégalité*

$$p \circ l(x_0 + A) \leqslant M_p < +\infty$$

entraîne $p \circ l(A') \leqslant M_p < +\infty$.

Démonstration. — [13]; soit un élément a de A, la fonction $l(\lambda x_0 + A)$ est analytique pour $|\lambda| \leqslant 1$ donc $p \circ l$ est sousharmonique et atteint son maximum sur la frontière en un point λ_0 tel que $|\lambda_0| = 1$, d'où, A étant disqué,

$$p \circ l(\lambda x_0 + a) \leqslant p \circ l(\lambda_0 x_0 + a) = p \circ l(x_0 + \lambda_0^{-1}a) \leqslant M_p < +\infty.$$

COROLLAIRE DE LA PROPOSITION 2.7. — *Lorsque* E *est métrisable complet,* F *normé et les* l_n *continues il existe un voisinage disqué de l'origine où la fonction* f *est analytique.*

En effet c'est une fonction G-analytique et d'après le lemme 2.4. la famille (l_n) est bornée dans un ouvert $x_0 + A$ qu'on peut supposer disqué en x_0.

La famille est alors bornée sur l'ensemble

$$A_1' = \bigcup_{|\lambda| \leqslant 1} (\lambda x_0 + A)$$

qui est un voisinage ouvert et disqué de l'origine. La proposition 2.6. entraîne que f est bornée dans le voisinage $(1 - \varepsilon)A_1$ de l'origine donc analytique.

Montrons maintenant qu'en fait la fonction f est analytique dans Ω tout entier.

THÉORÈME 2.3. — *Soit* (l_n) *une famille d'applications polynomiales continues et homogènes de degré* n *d'un ouvert* Ω *de* E *disqué à l'origine à valeur dans* F *(*E *espace métrisable complet et* F *espace de Banach) telle que pour tout* x *de* Ω *la série* $f(x) = \Sigma l_n(x)$ *converge. La fonction* f *est alors analytique dans* Ω.

Démonstration. — On sait déjà que la fonction f est G-analytique dans Ω et localement bornée sur un ensemble partout dense de Ω. Soit x un point quelconque de Ω, la fonction f admet un développement $f(x + h) = \Sigma l_n'(h)$ qui converge, d'après la proposition 2.1., en tout point d'un ouvert disqué $x + \omega$ de Ω et comme ce développement est unique on en conclut, par comparaison avec $\Sigma l_n(x + h)$ ordonné en polynôme homogène de h, que les fonctions l_n' sont continues. Le corollaire de la proposition 2.7. montre que la fonction f est analytique dans un voisinage de $h = 0$ donc en x.

THÉORÈME 2.4. — *Soit* f *une fonction* G-*analytique dans un domaine* Ω *d'un espace métrisable, complet* E *à valeurs dans un espace de Banach* F. *L'ensemble des points où la fonction* f *est continue* [*ou, ce qui revient au même, localement bornée*] *est à la fois ouvert et fermé.*

Démonstration. — Notons Ω' l'ensemble des points de Ω où f est localement bornée et $\Omega'' = \Omega - \Omega'$ et montrons d'abord une propriété de Ω' plus forte que le fait d'être un ouvert : « si a appartient à Ω' le plus grand ouvert disqué en a, noté $a + \theta_a$, contenu dans Ω est en fait contenu dans Ω' ».

En effet, pour a dans Ω' la série $f(a + h) = \Sigma l_n(h)$ qui converge pour tout h de θ_a, comme f est bornée au voisinage de $h = 0$, les l_n sont continues et la fonction $f(a + h)$ est d'après le théorème 2.3. analytique donc localement bornée dans $a + \theta_a$.

Supposons maintenant que $\Omega'' \neq \emptyset$ et soit b un point de Ω''; l'ensemble des points x tels que $x - b$ appartient à θ_x ne peut pas être contenu dans Ω' par le raisonnement précédent. Or c'est un ouvert contenant b ce qui montre que Ω'' est ouvert.

Le théorème 2.2. énoncé au début de ce paragraphe se démontre aisément. En effet, si f est à valeurs dans un espace F localement convexe pour tout u du dual F′ on applique le théorème 2.4. à la fonction $u \circ f$ qui est alors analytique scalaire; la proposition 2.5. entraîne que la fonction f est analytique.

Remarquons pour terminer que nous ne nous sommes pas servi de l'hypothèse de convexité pour l'espace E sur lequel sont définies les fonctions.

Le problème est ouvert de savoir si dans le Théorème 2.2. on peut remplacer « continue » par « localement bornée ».

3. Applications.

Nous allons nous servir de la proposition 2.6. pour retrouver par une autre méthode le résultat suivant de [22 a] :

THÉORÈME 2.5. — *Pour toute application analytique* f *de* E *dans* F [*espaces de Banach*] *le rayon de majoration* R(x) *est* *tel que* $-\log \mathrm{R}(x)$ *est une fonction plurisousharmonique continue ou identique à* $-\infty$.

En tout point x le rayon de majoration $\mathrm{R}(x)$ d'une application désigne la borne supérieure des rayons des boules centrées en x sur lesquelles l'application est bornée. C'est, lorsque f est continue, une fonction strictement positive et continue car pour tout $\|x - x'\| < \varepsilon$ on a

$$\mathrm{R}(x) - \varepsilon \leqslant \mathrm{R}(x') \leqslant \mathrm{R}(x) + \varepsilon.$$

Soit Ω un domaine où la fonction est définie; pour tout point x de Ω développons la fonction en série

$$f(x + h) = \Sigma l_n(x; h)$$

qui converge pour tout h de la plus grande boule B centrée en 0 telle que $x + \mathrm{B}$ soit contenu dans Ω; de plus les applications $l_n(x; h)$ sont analytiques de l'ensemble (x, h) et polynomiales en h homogène de degré n. Pour tout x de Ω, soit $\mathrm{R}(x)$ la borne supérieure des rayons des boules centrées en 0 sur lesquelles la famille $(l))$ de fonctions de la variable h est bornée, cela équivaut à dire d'après la proposition 2.6. que $\mathrm{R}(x)$ est la borne supérieure des rayons des boules centrées en 0 sur lesquelles $f(x + h)$ est bornée. Le rayon de majoration est alors donné par la « formule d'Hadamard » :

$$-\log \mathrm{R}(x) = \limsup_{n\infty} \frac{1}{n} \log \Big[\sup_{\|h\|=1} \|l_n(x; h)\|\Big]$$

qui prouve, la continuité étant déjà acquise, la plurisousharmonicité de $-\log \mathrm{R}(x)$.

Montrons maintenant qu'il y a la même relation qu'en dimension finie entre les fonctions v pluriharmoniques (i.e. v et $-v$ sont plurisousharmoniques) et les fonctions analytiques :

THÉORÈME 2.6. — *Pour toute fonction* v *définie sur un ouvert connexe* Ω *d'un espace vectoriel topologique, telle que* v *et* $-v$ *soient plurisousharmoniques, il existe dans* Ω *une fonction analytique* f *telle que* $\mathrm{Re}\, f = v$.

Démonstration. — On peut supposer que Ω contient l'origine; soit alors D une droite complexe passant par 0, la restriction de φ à $D \cap \Omega$ notée $\varphi_{|D}$ est harmonique et il existe une fonction f_D analytique dans D unique telle que $\operatorname{Re} f_D = \varphi_D$ et $\operatorname{Im} f_D(0) = 0$. Si D ne passe pas par 0 on considère le sous-espace de dimension finie engendré par D et l'origine. Sur ce sous-espace, φ est pluriharmonique et on sait (on est en dimension finie) qu'il existe une fonction analytique notée encore f_D unique telle que $\operatorname{Re} f_D = \varphi_{|D}$ et $\operatorname{Im} f_D(0) = 0$. Montrons que ceci définit bien une fonction f sur E.

Soit a un point de E, D et D' deux droites quelconques passant par 0, f_D et $f_{D'}$ les fonctions définies précédemment, il faut montrer que $f_D(a) = f_{D'}(a)$. Pour cela on considère la fonction analytique f_1 sur le sous-espace E_1 engendré par $D \cup D' \cup \{0\}$ unique telle que $\operatorname{Re} f_1 = \varphi|_{E_1 \cap \Omega}$ et $\operatorname{Im} f_1(0) = 0$. En prenant ses restrictions successivement à D et D' on obtient l'égalité cherchée. La fonction f est donc G-analytique et il reste à montrer qu'elle est continue c'est-à-dire localement bornée. En tout point a de Ω la fonction $\operatorname{Re} f = \varphi$ est continue donc bornée dans un voisinage disqué ω en a, $|\varphi(\omega)| \leqslant M < +\infty$. La fonction e^f est G-analytique et bornée dans ω puisque $|e^f| = e^{\operatorname{Re} f}$. C'est donc une fonction analytique et il en est de même de f.

On peut en se servant du corollaire du lemme de Hartogs, retrouver de manière simple un théorème de Vitali [voir [13] dans le cas où F et F sont des espaces de Banach].

Théorème de Vitali. — *Soient* E *et* F *des espaces de Fréchet,* Ω *un ouvert connexe de* E *et* (f_n) *une suite de fonctions analytiques localement uniformément bornées de* E *dans* F *telle que pour tout* x *dans un ouvert* $\omega \subset \Omega$ *la suite* $f_n(x)$ *tend vers une limite. Alors la suite* (f_n) *tend vers une limite uniformément sur tout compact de* Ω *et cette limite est une fonction analytique.*

Démonstration. — On va montrer que $f_p(x) - f_q(x)$ tend vers zéro uniformément sur tout compact de Ω. Pour toute semi-norme N continue sur F et pour tous entiers positifs p et q les fonctions $V^N_{p,q} = \log N[f_p(x) - f_q(x)]$ forment une famille localement bornée de fonctions plurisousharmoniques. Pour tout N la fonction $\limsup\limits_{p,q \quad \infty} V^N_{p,q}(x) = W^N(x)$

est donc une fonction de classe M_0 qui, d'après l'hypothèse, est égale à $-\infty$ sur ω; cela entraîne que W^N est identique à $-\infty$ sur Ω : en effet, soit a un point de $\Omega - \omega$, considérons une droite complexe passant par a et coupant ω. La restriction de W^N à $D \cap \Omega$ est de classe M_0 i.e. quasi-sousharmonique (ou $-\infty$) or $D \cap \omega$ est un ouvert et il est bien connu que pour une fonction quasi-sousharmonique l'ensemble $\{W = -\infty\}$ ne peut contenir aucun ouvert du plan.

Donc $V^N_{p,q}(x) \to -\infty$ pour tout $p,q \to +\infty$. Le corollaire du lemme de Hartogs entraîne pour toute semi-norme N sur F la fonction $V^N_{p,q}$ tend vers $-\infty$ uniformément sur tout compact i.e. $f_p(x) - f_q(x)$ tend vers 0 uniformément sur tout compact de Ω. La fonction limite existe donc en tout point, elle est localement bornée et ses restrictions aux droites complexes sont analytiques d'où le résultat.

Remarque. — On aurait pu prendre une condition plus générale, par exemple : « la suite $f_n(x)$ a une limite en tout point d'un ensemble A qui n'est pas de classe P ». (La notion d'ensemble de classe P sera définie au paragraphe suivant).

CHAPITRE III

PROLONGEMENT DES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES OU ANALYTIQUES

1. Notion d'ensemble de classe P.

Nous généralisons ici aux espaces de dimension infinie des résultats du mémoire de P. Lelong [18] « Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques » en reprenant l'idée directrice qui consiste à étudier le prolongement des fonctions plurisousharmoniques et en déduire des théorèmes de prolongement pour les fonctions analytiques.

On essayera de se ramener aux fonctions analytiques scalaires pour lesquelles les résultats sont plus simples en étudiant les fonctions $u \circ f$ où u est une forme linéaire continue sur F en se servant des résultats du Chapitre II.

Le problème consiste d'abord à déterminer une classe d'ensembles « assez petits » sur laquelle on puisse, moyennant certaines hypothèses, prolonger une fonction plurisousharmonique. Dans $\mathbf{C}^n$ cette classe est celle des ensembles $\mathbf{R}^{2n}$-polaires [i.e. contenus dans l'ensemble des points où une fonction sousharmonique vaut $-\infty$] qui est une classe contenant les ensembles $\mathbf{C}^n$-polaires (définis de la même manière à l'aide d'une fonction plurisousharmonique). Dans un espace vectoriel topologique séparé E introduisons la classe d'ensembles suivante qui va jouer un rôle analogue à la classe des ensembles $\mathbf{R}^{2n}$-polaires dans $\mathbf{C}^n$:

Définition 3.1. — *Un ensemble sera dit de* classe P *dans un ouvert connexe* Ω *d'un espace vectoriel séparé s'il est contenu dans un ensemble* A *de* Ω *tel que* $\mathrm{A} \not\equiv \Omega$ *et pour* *toute droite complexe* D *l'ensemble* $A \cap D$ *est un ensemble polaire (dans* D*) ou une composante connexe de* $A \cap D$.

Exemple d'ensembles de classe P : tout hyperplan, tout sous-espace de dimension finie ou plus généralement tout sous-espace admettant un supplémentaire topologique.

En reprenant un raisonnement de Sierpinski (Fund. Math. 1-1920) on peut, dans $\mathbf{C}^n$, construire un ensemble qui coupe toute droite complexe en deux points (c'est donc un ensemble de classe P) mais qui n'est pas mesurable.

On peut donner en dimension finie la précision suivante :

PROPOSITION 3.1. — *Soit* A *un ensemble mesurable de classe* P *dans un domaine* Ω *de* $\mathbf{C}^n$. *L'intersection de* A *avec le sous-espace réel* $\mathbf{R}^n$ *est de* $\mathbf{R}^n$*-mesure nulle.*

Démonstration. — Identifions $\mathbf{C}^n$ à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ et montrons, en posant $\Omega_0 = \Omega \cap \mathbf{R}^n$, que $\operatorname{mes}(A \cap \Omega_0) > 0$ entraîne $\Omega_0 \cap A \equiv \Omega_0$. Soit B un ensemble mesurable de $\mathbf{R}^n$, s'il existe un point a_0 de $\mathbf{R}^n$ tel que pour toute droite D' passant par a_0 l'ensemble $B \cap D'$ est de mesure nulle sur D', l'ensemble B est alors de mesure nulle. Supposons donc que $\operatorname{mes}(A \cap \Omega_0) > 0$ et soit a' un point quelconque de Ω, d'après ce que l'on vient de voir il passe par a' au moins une droite D' telle que $\operatorname{mes}(A \cap D') > 0$ sinon $A \cap \Omega_0$ serait de mesure nulle; la complexifiée de D', notée D, contient a' et coupe A suivant un ensemble de mesure linéaire non nulle. L'ensemble $A \cap D$ ne peut donc être un ensemble polaire de D d'où $A \cap D = \Omega_0 \cap D$ ce qui montre bien que a' appartient à Ω_0. Soit $\omega_0 \times \omega_0'$ un ouvert convexe de Ω on vient de voir que si $\operatorname{mes}(A \cap \omega_0) > 0$ on aura $A \cap \omega_0 = \omega_0$ (nous écrivons ω_0 pour $\omega_0 \times \{0\}$). Pour tout a de $\omega_0 \times \omega_0'$ soit D une droite complexe passant par a et un point a' de ω_0; elle coupe A suivant un ensemble qui est de mesure linéaire positive donc $A \cap (\omega_0 \times \omega_0') = D \cap (\omega_0 \times \omega_0')$ qui prouve que a appartient à A. On a donc une contradiction car A ne peut contenir un ouvert de $\mathbf{C}^n$.

Dans tout ce qui suit Ω désignera un ouvert connexe d'un espace vectoriel topologique séparé de dimension infinie.

Comme en dimension finie on dira que A est *polaire* dans Ω ouvert d'un espace vectoriel topologique séparé s'il existe une une fonction plurisousharmonique V dans Ω telle que

$A \subset \{x \in \Omega | V(x) = -\infty\}$. L'ensemble A sera dit localement polaire dans Ω si tout point de A admet un voisinage $\Omega_i \subset \Omega$ tel que $A \cap \Omega_i$ soit polaire dans Ω_i. On voit qu'un ensemble polaire ou localement polaire est de classe P mais que la réciproque n'est pas toujours vraie. Il suffit de considérer l'hyperplan $\{x | \log |u(x)| = -\infty\}$ où u est une forme linéaire non continue sur E.

Donnons quelques propriétés simples de ces ensembles.

PROPOSITION 3.2. — *Toute réunion dénombrable d'ensemble de classe* P *dans un ouvert* Ω *est de classe* P *ou* Ω *tout entier.*

La démonstration se fait en considérant les intersections de Ω avec les droites complexes et en appliquant le résultat connu dans le cas du plan.

Une proposition semblable se démontre exactement de la même manière qu'en dimension finie pour les ensembles strictement polaires dans Ω (i.e. définis à partir d'une fonction plurisousharmonique $V \leqslant 0$ dans Ω). La réunion dénombrable est alors strictement polaire dans Ω (ou éventuellement, si Ω n'est pas un espace de Baire, Ω tout entier) [8].

Appelons *ensemble négligeable* dans Ω un ensemble A tel qu'il existe une suite croissante de fonctions V_n plurisousharmonique dans Ω telle que $W = \lim V_n$ ait une régularisée W^* bornée en tout point et que $A \subset \{W < W^*\}$.

PROPOSITION 3.3. — *Tout ensemble polaire dans* Ω *est négligeable.*

Démonstration. — Soit $A \subset \{V = -\infty\} = A'$ un ensemble polaire dans Ω et notons

$$A_1 = \{x \in \Omega | V(x) \geqslant 0\} \quad \text{c'est un ensemble fermé,}$$
$$A_2 = \{x \in \Omega | V(x) < 0\} = \Omega - A_1.$$

La fonction

$$W(a) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} V(a) \begin{cases} = V(a) & \text{si} \quad a \in A_1 \\ = 0 & \text{si} \quad a \in A_2 - A' \\ = -\infty & \text{si} \quad a \in A' \end{cases}$$

est limite d'une suite croissante de fonctions plurisousharmoniques dans Ω et

$$W^* = \begin{cases} V(a) & \text{si} \quad a \in A_1 \\ 0 & \text{si} \quad a \in A_2. \end{cases}$$

c'est-à-dire que $W^* = \sup(V, 0)$ est une fonction plurisousharmonique avec $A \subset A' = \{W < W^*\}$.

On sait que si l'ensemble négligeable $\{W \subset W^*\}$ est tel que W^* est pluriharmonique (W^* et $-W^*$ plurisousharmonique) la réciproque est vraie (même démonstration qu'en dimension finie). Si on ne fait aucune restriction sur l'espace E un ensemble négligeable peut ne pas être polaire (ou même de classe P) puisque l'exemple de [7] montre qu'un ensemble négligeable peut être l'espace E tout entier.

Notons l'exemple suivant d'ensemble polaire dans un espace de Fréchet E qui est un sous-espace partout dense :

Soit E l'espace des suites de nombres complexes tendant vers 0. Notons E_n l'espace des suites de nombres complexes nuls à partir du rang n; la réunion des E_n est un sous-espace dense de E Montrons que c'est un ensemble polaire dans E : soit $\varphi(z)$ une fonction sousharmonique dans $\mathbf{C}$ telle que :

$$\begin{aligned} &\varphi(0) = -\infty \\ &\varphi(z) \leqslant 0 \qquad \text{si} \qquad |z| < 1. \end{aligned}$$

Définissons $V(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \varphi(z_n)$ où $Z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots)$ et $\varepsilon_n \geqslant 0$ c'est une fonction plurisousharmonique puisque en tout point c'est la limite d'une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques : Choisissons la suite ε_n pour que $V > -\infty$ en un point, donc $V \not\equiv -\infty$; pour un point a qui n'appartient pas à $\cup E_n$ on choisit ε_n tel que $\Sigma \varepsilon_n \varphi(a_n) > -\infty$. D'où le résultat cherché puisque l'ensemble $\{V = -\infty\}$ contient la réunion des E_n.

De même les espaces E_n définis ici et considérés comme plongés dans l'espace l_0 des suites de nombres complexes nuls sauf un nombre fini sont polaires et $\cup E_n = l_0$ ce qui montre que la réunion dénombrable d'ensembles polaires peut, dans le cas métrisable non complet, être l'espace tout entier.

Le lemme suivant est important pour la suite.

Lemme 3.1. — *Tout ensemble* A *de classe* P *dans un domaine* Ω *de* E *est d'intérieur vide. De plus si* A *est fermé* $\Omega - A$ *est connexe.*

Démonstration. — Supposons que A ne soit pas d'intérieur vide c'est-à-dire qu'il existe un ouvert ω non vide contenu dans A. Soit a_0 un élément quelconque de A. Pour tout élément a de Ω il existe un chemin de sommets $a_0, a_1, \ldots, a_n = a$ contenu dans Ω. Soit D_i la droite complexe définie par les points a_{i-1} et a_i; la composante connexe de $A \cap D_1$ contenant a_0 est identique à celle de $\Omega \cap D_1$ contenant a puisque c'est un ensemble polaire du plan et qu'il contient un ouvert. La composante connexe de $A \cap D_2$ contenant a_1 contient aussi un segment $(\Omega \cap D_1 \cap D_2)$ du plan donc n'est autre que la composante connexe contenant a_1 de $\Omega \cap D_2$ d'où $a_2 \in A$. En continuant le raisonnement un nombre fini de fois on voit que a appartient à A d'où la contradiction car $A \not\equiv \Omega$.

Supposons maintenant que A est fermé et montrons que $\Omega - A$ est connexe : s'il ne l'était pas il existerait deux ouverts non vides Ω_1 et Ω_2 tels que

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega - A;$$

de plus $A = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$ puisque A est un ensemble fermé d'intérieur vide. Pour tout élément a de A soit D_a une droite complexe passant par a dont la composante Ω' de $\Omega \cap D_a$ contenant a soit polaire. C'est un ouvert du plan et les ouverts $\omega_i = \Omega' \cap \Omega_i$ ne sont pas vides; en effet si ω_1 par exemple était vide cela entraînerait que $\omega_2 \cap \Omega' = \Omega'$ or a appartient à Ω' mais pas à ω_2 d'où la contradiction, car on sait que dans le plan l'ensemble $A \cap \Omega'$ est polaire et fermé donc de complémentaire connexe.

Proposition 3.4. — *Soit* V *une fonction semi-continue supérieurement dans un domaine de* E *et plurisousharmonique sauf peut-être aux points où la fonction vaut* $-\infty$. *Alors* V *est plurisousharmonique dans tout* Ω.

Il suffit de remarquer que les fonctions $V_p = \sup(V, -p)$ définissent, lorsque p tend vers $+\infty$, une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques. La limite, qui n'est autre que la fonction V, est alors plurisousharmonique.

PROPOSITION 3.5. — *Soient deux fonctions* V *et* W *plurisousharmoniques dans* Ω *telles que* $V \leqslant W$ *sauf peut-être sur un ensemble* A *de classe* P *dans* Ω. *L'inégalité a alors lieu partout.*

Il en résulte que deux fonctions plurisousharmoniques égales sauf peut-être sur un ensemble de classe P sont identiques.

C'est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 3.2. — *Pour tout ensemble* A *de classe* P *dans* Ω, *l'ensemble* $\Omega - A$ *est non effilé en tout point.*

Rappelons qu'un ensemble B est dit *effilé en* x_0 s'il existe une fonction plurisousharmonique V dans un voisinage de x_0 telle que, si $\mathcal{F}$ désigne le filtre des voisinages de x_0 :

$$\limsup_{\substack{x \in \mathcal{F} \\ x \in B}} V(x) < V(x_0).$$

On voit, en prenant les restrictions aux droites complexes D, que si B est effilé en x_0 l'ensemble $B \cap D$ est $\mathbf{C}$-effilé en x_0 (ou $\Omega \cap D$). Si donc $\Omega - A$ était effilé en $x_0 \in A$ il existerait une droite D telle que $(\Omega - A) \cap D$ soit effilé en x_0 ce qui contredit le résultat classique dans le plan.

Soit donc un point quelconque a_0 de A, on a

$$V(a_0) = \limsup_{\substack{a \in \mathcal{F} \\ a \in D - D \cap A}} V(a)$$

et la même chose pour W; donc $V(a_0) \leqslant W(a_0)$ puisque sur $D - D \cap A$ on a l'inégalité $V \leqslant W$.

PROPOSITION 3.6. — *Soient* V *et* W *deux fonctions sousmédianes,* W *localement bornée supérieurement sur* Ω *et* A *un ensemble de classe* P; *l'inégalité* $V \leqslant W$ *sur* $\Omega - A$ *entraîne* $V^* \leqslant W^*$ *sur* Ω. *Si de plus* W *est plurisousharmonique,* $V \leqslant W$ *sur* $\Omega - A$ *entraîne* $V^* \leqslant W$ *sur* Ω.

Démonstration. — Remarquons — c'est utile pour les applications — que l'ensemble A n'est pas nécessairement fermé.

Soit a un point quelconque de A. Sur $\Omega - A$ on a $V \leqslant W \leqslant W^*$. Soit D une droite complexe passant par a telle que $D \cap A$ soit un ensemble polaire; notons V' la régularisée de la restriction de V à D; $V'(a)$ est, dans le plan, la limite de la moyenne de V prise sur les disques centrés en a lorsque le rayon tend vers zéro [car un ensemble polaire est de mesure linéaire nulle] donc sur D on a $V(a) \leqslant V'(a) \leqslant W^*(a)$ ce qui montre que $V \leqslant W^*$ en tout point de Ω; d'où $V^* \leqslant W^*$.

2. Théorèmes de prolongement.

THÉORÈME 3.1. (de Riemann). — *Soient* A *un ensemble fermé localement polaire dans un domaine* $\Omega \subset E$ *et* V *une fonction plurisousharmonique dans* $\Omega - A$. *Si en tout point* a *de* A *il existe une fonction* U *plurisousharmonique dans un voisinage de* a *telle que: « pour tout* $\varepsilon > 0$ *la fonction* $V + \varepsilon U$ *tend vers* $-\infty$ *suivant le filtre des voisinages de* a_0 *dans* $\Omega - A$ ».
Alors V *se prolonge de manière unique en une fonction plurisousharmonique dans* Ω.

Démonstration. — L'unicité résulte de la proposition 3.5. Montrons qu'on peut prolonger V en tout point de A. Soit $a_0 \in A$ et U la fonction plurisousharmonique bornée dans un voisinage ω de a_0.
Posons

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(a) &= V(a) + \varepsilon U(a) \qquad \text{si} \qquad a \neq a_0, \quad a \in \omega \\ W_\varepsilon(a_0) &= -\infty \end{aligned}$$

c'est une fonction s.c.s. dans ω et plurisousharmonique sauf peut-être aux points où $W_\varepsilon = -\infty$. C'est donc une fonction plurisousharmonique dans ω tout entier. La fonction $W = \lim_{\varepsilon = 0} W_\varepsilon$ est limite d'une suite croissante (on peut, en restreignant ω, supposer $U \leqslant 0$) localement bornée de fonctions plurisousharmoniques donc sa régularisée W^* existe et est plurisousharmonique. On a $W^*(a) = V(a)$ dans $\omega - A$ sauf peut-être sur $\{U = -\infty\}$ qui est un ensemble polaire; l'égalité a donc lieu dans $\omega - A$ ce qui montre que W^* est le prolongement cherché.

Corollaire. — *Soient* A *un ensemble polaire (ou plus généralement localement polaire) fermé dans* Ω *et* V *une fonction plurisousharmonique dans* $\Omega - A$. *Si en tout point de* A *la fonction* V *est localement bornée supérieurement sur* $\Omega - A$ *elle se prolonge de manière unique à* Ω *tout entier.*

En effet il suffit d'appliquer le théorème en prenant pour U la fonction qui définit l'ensemble polaire.

Plutôt que le théorème de Riemann ou son corollaire c'est la proposition suivante qui nous sera utile :

Proposition 3.7. — *Soient dans un domaine* Ω *un ensemble fermé* A *de classe* P *et une fonction plurisousharmonique dans* $\Omega - A$. *Si en tout point de* A *la fonction* V *est localement bornée supérieurement sur* $\Omega - A$ *elle se prolonge de manière unique en une fonction plurisousharmonique dans* Ω *tout entier.*

En effet posons

$$\begin{aligned} V_1(a) &= -\infty \qquad \text{si} \qquad a \in A \\ &= V(a) \qquad \text{si} \qquad a \notin A. \end{aligned}$$

C'est une fonction localement bornée qui coïncide avec V dans $\Omega - A$ et qui est sous-médiane car sur toute droite complexe sa restriction est identique à $-\infty$ ou coïncide avec une fonction sousharmonique sauf sur un ensemble $D \cap P$ de capacité nulle où elle lui est inférieure; sa régularisée supérieure est donc d'après le théorème 1.1. une fonction plurisousharmonique V_1^* qui coïncide avec la fonction V sur $\Omega - A$ et définit le prolongement cherché. L'unicité résulte de la proposition 3.5.

Corollaire. — *Toute fonction* V *semi-continue supérieurement dans* Ω *et plurisousharmonique dans* $\Omega - A$ *où* A *est un ensemble fermé de classe* P *est plurisousharmonique dans* Ω *tout entier.*

Nous allons maintenant démontrer des résultats pour les fonctions analytiques à valeurs vectorielles en se ramenant aux fonctions analytiques scalaires grâce au fait qu'alors la fonction $\log |f|$ est plurisousharmonique.

Théorème 3.2. — *Soient* A *un ensemble fermé de classe* P *dans un domaine* Ω *et* f *une fonction analytique scalaire dans*

$\Omega - A$. *Si en tant que fonction plurisousharmonique* $V = \log|f|$ *se prolonge à* Ω *tout entier, la fonction* f *se prolonge par continuité en une fonction analytique* $\tilde{f}$ *dans* Ω.

En dimension finie, ce théorème est dû à P. Lelong [18] lorsque l'ensemble A est $\mathbf{R}^{2n}$-polaire. Reprenons ici dans $\mathbf{C}^n$ la démonstration originale dans le cadre des ensembles de classe P.

Écrivons $f = u + iv$, les fonctions u et v sont pluriharmoniques dans $\Omega - A$ et l'hypothèse entraîne que $|f|$, $|u|$ et $|v|$ sont localement bornées au voisinage de tout point de $\Omega - A$. Les fonctions u et v se prolongent par la proposition 3.7. en des fonctions $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ plurisousharmoniques dans Ω; le procédé étant linéaire $-u$ et $-v$ se prolongent en $-\tilde{u}$ et $-\tilde{v}$ ce qui prouve que $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont pluriharmoniques dans Ω. Ce sont des fonctions analytiques réelles (en posant $z_j = x_j + iy_j$) qui vérifient dans $\Omega - A$ les relations de Cauchy :

$$\varphi_j = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_j} = 0, \quad \psi_j = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Pour tout j on a donc $\varphi_j \equiv 0$ et $\psi_j \equiv 0$ sur Ω puisque φ_j et ψ_j sont dans Ω des fonctions harmoniques des (x_j, y_j) nulles sur $\Omega - A$. Pour tout $j = 1, \ldots, n$ on a donc dans $\Omega : \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \dfrac{1}{2}\varphi_j + \dfrac{i}{2}\psi_j \equiv 0$ ce qui montre que la fonction $f = \tilde{u} + i\tilde{v}$ est analytique dans Ω. Démontrons maintenant le théorème lorsque Ω est un domaine d'un espace vectoriel topologique de dimension infinie. Soit a un point quelconque de A et D_1 une droite complexe passant par a telle que la composante connexe de $A \cap D_1$ qui contient a soit un ensemble polaire. On peut appliquer le théorème de P. Lelong qui montre que la restriction de f à $(\Omega - A) \cap D_1$ se prolonge à $\Omega \cap D_1$ en une fonction analytique que nous noterons $\tilde{f}_1$. Il faut maintenant montrer que ce procédé définit bien une fonction $\tilde{f}$ dans Ω c'est-à-dire que toute droite D passant par a les fonctions $\tilde{f}_D$ sont les restrictions à D d'une fonction unique définie sur Ω.

Soit D_2 une autre droite complexe passant par a et possédant les mêmes propriétés que D_1; montrons que

$\tilde{f}_1(a) = \tilde{f}_2(a)$. Soit E' le sous-espace de dimension finie engendré par D_1 et D_2 on peut appliquer le théorème à $f_{|E'}$ qui se prolonge alors par continuité en une fonction f' et sur $E' \cap \Omega$. On a $\tilde{f}'(a) = \tilde{f}_1(a) = \tilde{f}_2(a)$ puisque sur $D_i - A \cap D_i$ les fonctions $\tilde{f}$ et $\tilde{f}_i$ coïncident.

Soit maintenant une droite D' passant par a telle que $D' \cap A = D' \cap \Omega$. Prenons un point a'' de Ω qui appartient au complémentaire de $A \cup D_1 \cup D'$ et appelons E'' le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par $\{a''\} \cup D_1 \cup D'$. L'ensemble $A \cap E''$ est un ensemble de classe P dans $E'' \cap \Omega$ sur lequel on peut prolonger la fonction $f_{|E''}$ en une fonction f'' analytique sur $E'' \cap \Omega$ telle que $f''(a) = \tilde{f}_1(a)$. En considérant un autre point a''_1 un raisonnement identique montrerait que la restriction de f'' à D' ne dépend pas du point a'' choisi. On a donc défini une fonction $\tilde{f}$ qui est G-analytique dans Ω tout entier. Si maintenant on appelle $\tilde{\varphi}$ la prolongée à Ω de la fonction $\varphi = \log|f|$, la fonction $\log|\tilde{f}|$ est sous-médiane dans Ω et coïncide avec $\tilde{\varphi}$ dans le complémentaire d'un ensemble de classe P. D'après la proposition 3.6. leurs régularisées sont égales en tout point de Ω ce qui montre que $\log|\tilde{f}| \leqslant \tilde{\varphi}$ sur Ω. La fonction $\tilde{f}$ étant G-analytique et localement bornée est donc analytique dans Ω.

Démontrons maintenant :

THÉORÈME 3.3. — *Soient* A *un ensemble fermé de classe* P *dans un domaine* Ω *de* E *et* f *une fonction analytique dans* $\Omega - A$ *à valeurs dans un espace* F *localement convexe quasi-complet. Si pour tout* u *du dual topologique* F' *de* F *la fonction* $\log|u \circ f|$ *se prolonge en une fonction plurisousharmonique dans* Ω *la fonction* f *se prolonge en une fonction* $\tilde{f}$ *qui est* G-*analytique dans* Ω. *De plus si* E *est métrisable* $\tilde{f}$ *est une fonction analytique.*

Remarque. — Le théorème est encore vrai si on remplace « quasi-complet » par : « l'enveloppe convexe équilibrée fermée d'un compact est compacte ».

D'après le théorème précédent, pour tout u de F', la fonction $u \circ f$ se prolonge en une fonction analytique scalaire $\tilde{f}_u$ dans Ω et il reste à montrer que ce prolongement définit une fonction $\tilde{f}$ sur Ω telle que $u \circ \tilde{f} \equiv \tilde{f}_u$.

Soit a un point de A et $\mathcal{F}$ un filtre convergent vers a dans $\Omega - A$. Pour tout u de F', $u \circ f(\mathcal{F})$ est un filtre de Cauchy dans F donc $f(\mathcal{F})$ est un filtre de Cauchy dans F_σ [i.e. F muni de la topologie faible $\sigma(F, F')$] et a une limite notée $l_f(a)$ dans le complété faible $\hat{F}_\sigma = F'^*$ de F. Considérons l'application $\tilde{f}: \Omega \to \hat{F}_\sigma$ définie en tout point de Ω comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(a) &= f(a) \qquad \text{si} \qquad a \in \Omega - A \\ &= l_f(a) \qquad \text{si} \qquad a \in A. \end{aligned}$$

Comme $(\hat{F}_\sigma)' \subset F'$ la fonction $\tilde{f}$ de Ω dans $\hat{F}_\sigma$ est G-analytique car $u \circ \tilde{f}$ est analytique pour tout u de $(\hat{F}_\sigma)'$. Pour terminer la démonstration il faut montrer qu'en fait $\tilde{f}$ est à valeurs dans F et non dans $\hat{F}_\sigma$ (i.e. $\tilde{f}(E) \subset F$). Soit b assez voisin de a pour que la droite complexe D définie par les points a et b coupe A suivant un ensemble polaire et que le cercle Γ des points de la forme $a + be^{i\theta}$ pour θ variant de 0 à 2π soit contenu dans $\Omega \cap D$. La fonction $\tilde{f}$ étant G-analytique, on a dans $\hat{F}_\sigma$:

$$\tilde{f}(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(a + be^{i\theta})\, d\theta.$$

Or $A \cap \Gamma$ est de mesure nulle sur Γ et de plus sur $\Gamma - A \cap \Gamma$ les fonctions f et $\tilde{f}$ coïncident, d'où $\tilde{f}(a)$ est égale à l'intégrale de la fonction f sur $\Gamma - A \cap \Gamma$, ce qui montre bien que $\tilde{f}(a)$ est un élément de F.

COROLLAIRE. — *Soient* A *un ensemble fermé de classe* P *dans un ouvert* Ω *de* E *et* f *une fonction à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe* F, *analytique dans* $\Omega - A$. *Si* f *est continue dans* Ω *elle se prolonge en une fonction analytique dans* Ω.

La continuité de la fonction f rend inutile l'hypothèse « quasi-complet » et le théorème montre que f se prolonge en une fonction G-analytique $\tilde{f}$ qui coïncide avec la fonction f dans Ω d'où le résultat.

THÉORÈME 3.4. — *Soient* A *un ensemble fermé de classe* P *dans un domaine* Ω *de* E, F *un espace localement convexe* *quasi-complet et* f *une fonction de* Ω *dans* F *analytique dans* $\Omega - A$ *telle que tout point de* A *admette un voisinage* (*dans* $\Omega - A$) *où* f *est bornée. La fonction* f *se prolonge alors de manière unique en une fonction analytique dans* Ω.

Démonstration. — Les hypothèses entraînent par la proposition 3.7. que pour tout u de F' la fonction $\log |u \circ f|$ se prolonge en une fonction plurisousharmonique dans Ω; on applique alors le théorème 3.3. à la prolongée $\tilde{f}$ de f qui est G-analytique et localement bornée supérieurement dans Ω donc analytique.

COROLLAIRE. — *Avec les mêmes hypothèses sur* A *si on suppose de plus que* F *est un espace normé la fonction* f *définie et analytique sur* $\Omega - A$ *se prolonge en une fonction analytique* $\tilde{f}$ *sur* Ω *si et seulement si la fonction* $V = \log \|f\|$ *se prolonge en une fonction plurisousharmonique sur* Ω.

En effet soit a un point quelconque de A. Il existe un voisinage de a où la prolongée $\tilde{V}_p$ de $\log \|f\|$ est bornée; tout a de A admet donc un voisinage dans $\Omega - A$ où f est bornée et on applique le théorème.

THÉORÈME DE RADO. — *Soit* f *une fonction continue dans un ouvert* Ω *de* E *à valeur dans* F *localement convexe et analytique sauf peut-être aux points où la fonction s'annule; la fonction* f *est analytique dans* Ω.

Démonstration. — Pour tout u de F' la fonction $V = \log |u \circ f|$ est semi-continue supérieurement dans Ω et plurisousharmonique sauf peut-être aux points où $V = -\infty$ elle est donc plurisousharmonique dans tout Ω. La fonction $u \circ f$ est analytique sauf peut-être aux points de l'ensemble polaire $\{\log |u \circ f| = -\infty\}$ et f est continue sur Ω; $u \circ f$ est donc analytique dans Ω tout entier d'où le résultat.

Prouvons en dimension infinie une généralisation, due à P. Lelong [18] en dimension finie, du théorème de Rado :

THÉORÈME 3.5. — *Soit* f *une application d'un domaine* Ω *de* E *dans un espace* F *normé, continue sur* Ω *et analytique sauf peut-être aux points* a *de* Ω *tels que les points corres-*

pondants $(a, f(a))$ *du graphe* G *de* f *appartiennent à un sous-ensemble* e *de* G *tel que* :

1) e *est fermé et localement polaire dans* $E \times F$
2) *tout point de* e *est adhérent* (dans G) *à* $G - e$.

La fonction f *est alors analytique dans* Ω.

Remarquons d'abord que si $U(a, w)$ est une fonction plurisousharmonique dans un voisinage θ_0 d'un point (a_0, w_0) de $E \times F$ et $f : E \to F$ une fonction analytique dans un voisinage ω_0 de a_0 tel que

$$w_0 = f(a_0) \qquad \text{et} \qquad \omega_0 \times f(\omega_0) \subset \theta_0.$$

La fonction $v(a) = U[a, f(a)]$ est une fonction plurisousharmonique dans ω_0 (ou identique à $-\infty$). En effet c'est une fonction semi-continue supérieurement et l'application $(i, f) : a \to (a, f(a))$ est analytique.

Soit maintenant un point quelconque $A_0 = (a_0, w_0)$ de e montrons que la fonction f est analytique en a_0. Par hypothèse il existe un voisinage ω de A_0 et une fonction U plurisousharmonique dans ω tels que $e \cap \omega \subset \{U = -\infty\}$. Soient γ_0 et γ_1 des voisinages assez petits de a_0 dans E et w_0 dans F tels que :

1) $\gamma_0 \subset \Omega$ et la fonction f est bornée sur γ_0;
2) $f(\gamma_0) \subset \gamma_1$;
3) $\gamma_0 \times \gamma_1 \subset \omega$ et la fonction U est bornée sur $\gamma_0 \times \gamma_1$.

Ce qui est toujours possible grâce à la continuité de f.

Considérons la fonction $v(a) = U[a, f(a)]$ qui est alors définie et semi-continue supérieurement dans γ_0; de plus elle est plurisousharmonique sauf peut-être aux points où $v = -\infty$ et la proposition 3.4. entraîne que v est plurisousharmonique dans γ_0 tout entier ou identique à $-\infty$. On ne peut avoir $V \equiv -\infty$ dans γ_0 car alors tout point de G au-dessus de γ_0 [i.e. les points $[a, f(a)]$ où $a \in \gamma_0$] appartiendrait à e et (a_0, w_0) ne pourrait pas être adhérent à $G - e$.

Soit maintenant $e_1 = \gamma_0 \cap (\mathrm{proj}_F e)$; c'est, dans γ_0, un ensemble fermé et polaire puisque $e_1 \subset \{V = -\infty\} \cap \gamma_0$; la fonction f est continue dans γ_0 et analytique en tout point qui n'appartient pas à un ensemble polaire fermé, c'est donc une fonction analytique dans γ_0 donc en particulier au point a_0.

Corollaire. — *Soit* f *une application d'un ouvert connexe* Ω *de* E *dans un espace* F *normé, continue sur* Ω *et analytique sauf peut-être aux points* a *de* Ω *tels que le point* $w = f(a)$ *n'appartient pas à un ensemble localement polaire et fermé* B *de* F. *La fonction* f *est analytique dans* Ω.

Il suffit de montrer que l'ensemble $E \times B$ satisfait aux conditions du théorème. La première condition est évidente; voyons la seconde : soient (a, b) un point de $E \times B$ avec $b = f(a)$ et Ω_1 un ouvert de F contenant b; $\Omega_1 - B$ est un ouvert partout dense de Ω_1, donc pour tout voisinage V de b dans F il existe un point b' dans $V \cap \Omega_1 - B$. Comme f est une fonction continue, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a et il existe un point a' dans la composante connexe de $f^{-1}(V)$ qui contient a tel que $b' = f(a')$ et $(a', b') \in G - e$ (on a posé $e = (E \times B) \cap G$ où G est le graphe de f).

Pour tout voisinage W dans $E \times F$ d'un point (a, b) de G il existe un voisinage V de b tel que $f^{-1}(V) \times V \subset W$. Donc (a, b) étant un point quelconque de e pour tout voisinage W de (a, b) il existe un point (a', b') dans $W \cap (G - e)$ ce qui prouve la condition 2.

Si F est localement convexe la conclusion du Théorème 3.5. et de son corollaire est encore vraie si on suppose de plus que tout point de l'ensemble litigieux admet un voisinage où f est bornée.

On peut en se servant des résultats précédents retrouver le théorème suivant :

Théorème 3.6. — *Soit* Ω *un domaine d'un espace vectoriel topologique séparé* E, f *et* g *des fonctions analytiques scalaires* $(g \not\equiv 0)$ *dans* Ω. *Si pour toute droite complexe* D *où* $g \not\equiv 0$ *la restriction* $f_{|D}$ *est divisible par* $g_{|D}$ *la fonction* f *est divisible par* g.

Soit $A = \{x \in \Omega,\ g(x) = 0\}$; c'est un ensemble polaire fermé de Ω et $\Omega - A$ est connexe. Dans $\Omega - A$ la fonction $\dfrac{f}{g} = h$ est une fonction analytique qui se prolongera à Ω

si elle est localement bornée dans $\Omega - A$ en tout point de A. Soit a un point de A il existe, puisque $g \not\equiv 0$, une droite complexe D telle que a soit un point isolé de $\Omega \cap D$. On peut donc choisir dans $D \cap \Omega$ un point b tel que g ne s'annule en aucun point du compact $K = \{a + tb, |t| = 1\}$; par continuité de g, il existe alors un voisinage ouvert de a dans E tel que g ne s'annule pas sur $\omega + tb, |t| = 1$, avec $\omega + tb \subset \Omega$.

On a donc

$$\frac{f_D}{g_D}(a') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f_D}{g_D}(a' + be^{i\theta})\, d\theta$$

pour tout a' de $\omega - \{a\}$ et les droites D correspondantes définies par a' et b; soit M la borne supérieure de $\left|\frac{f}{g}\right|$ sur $\omega + tb, |t| = 1$ [au besoin on restreint ω] la fonction $\left|\frac{f}{g}\right|$ est donc bornée sur $\omega - \{a\}$ et $\frac{f}{g}$ se prolonge de manière unique en une fonction analytique dans Ω. Ce théorème a été démontré par Gupta [12] lorsque E est un espace de Banach; mais dans ce cas c'est une conséquence du théorème 2.3. puisque par hypothèse $h = \frac{f}{g}$ est une fonction G-analytique dans Ω et continue dans l'ouvert $\{a | g(a) \neq 0\}$.

3. Application à un théorème sur les opérateurs différentiels à coefficients constants.

Nous allons maintenant retrouver un théorème de division en utilisant, suivant une idée de Schapira, la proposition 3.6.

Conservons les notations classiques de [16] et [23] et rappelons quelques définitions :

Étant donné $\mathcal{F}$, un sous-espace (contenant les applications coordonnées) de l'espace des fonctions entières sur $\mathbf{C}^n$ noté $H(\mathbf{C}^n)$, on définit la $\mathcal{F}$-enveloppe $h_{\mathcal{F}}K$ d'un compact K de $\mathbf{C}^n$ par :

$$h_{\mathcal{F}}(K) = \{z \in \mathbf{C}^n | \forall \varphi \in \mathcal{F},\ \operatorname{Re} \varphi(z) \leqslant H_K(\varphi)\}$$

où $H_K(\varphi) = \sup\limits_{z \in K} \operatorname{Re} \varphi(z)$ est une fonction continue, positivement homogène d'ordre 1 et plurisousharmonique si $K \neq \emptyset$. Un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ sera dit $\mathcal{F}$*-convexe* si pour tout compact la condition $K \subset \Omega$ entraîne $h_{\mathcal{F}}K \subset \Omega$.

Soit u une fonctionnelle analytique sur $\mathbf{C}^n$, i.e. un élément du dual topologique $H'(\mathbf{C}^n)$, on définit la transformée de Fourier $\hat{u}$ de u par: $\hat{u}(\varphi) = \langle u, e^{\varphi}\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{F}$, et son indicatrice $p_u(\varphi) = \limsup\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} \log|\langle u, e^{t\varphi}\rangle|$. La fonctionnelle analytique u sera dite portable par le compact K si pour tout voisinage Ω de K on a:

$$|u(\varphi)| \leqslant C\sup_{\Omega}|\varphi| \qquad \text{pour tout} \qquad \varphi \in H(\mathbf{C}^n).$$

Nous partirons de l'énoncé suivant de Kieselman [16]:

THÉORÈME 3.7. — *Soit* K *un compact (ou un ouvert)* $\mathcal{F}$*-convexe de* $\mathbf{C}^n$; *alors* $u \in H'(\mathbf{C}^n)$ *est portable par* K *si et seulement si:*

$$p_u(\varphi) \leqslant H_K(\varphi) \qquad \textit{pour tout} \quad \varphi \textit{ de } \mathcal{F}.$$

Montrons comment on peut utiliser le théorème précédent pour retrouver le résultat suivant de Malgrange:

THÉORÈME 3.8. — *Soit* Ω *un ouvert de Runge de* $\mathbf{C}^n$ *(identifié à* $\mathbf{R}^{2n}$*) et* $P(D_{\bar z})$ *un opérateur différentiel à coefficient constant en* $\dfrac{\partial}{\partial \bar z_j}$ *alors*

$$P(D_{\bar z})\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega).$$

C'est-à-dire que l'équation $P(D)f = g$ à une solution f dans $\mathcal{E}(\Omega)$ pour tout g de $\mathcal{E}(\Omega)$ (espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω). La transposée ${}^tP_u$ sera définie par $\langle {}^tP_u, \varphi\rangle = \langle u, P\varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$. On considèrera Ω comme un ouvert de $\mathbf{R}^{2n}$ que l'on complexifiera en $\mathbf{C}^{2n}$ et on prendra $\mathcal{F} \subset H(\mathbf{C}^{2n})$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$ où $\mathcal{F}_1$ est l'espace des formes linéaires holomorphes sur $\mathbf{C}^{2n}$ et $\mathcal{F}_2$ l'espace des fonctions holomorphes de termes linéaires nuls sur $\mathbf{C}^{2n}$ provenant des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$.

L'ouvert de Runge Ω est bien $\mathcal{F}$-convexe; en effet soit K un compact quelconque de Ω, pour tout point z de $\Omega - K$ soit $z \in \mathbf{R}^{2n}$ auquel cas on sépare z et K par une fonction de $H(\mathbf{C}^n)$ soit $z \notin \mathbf{R}^{2n}$ et on sépare par une forme linéaire holomorphe sur $\mathbf{C}^{2n}$.

Plutôt que le théorème démontrons la proposition suivante qui est équivalente :

PROPOSITION 3.8. — *Avec les mêmes hypothèses sur* Ω *et* P, *pour tout compact* $K_1 \subset \Omega$ *il existe un compact* $K_2 \subset \Omega$ *tel que :* $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ *et* ${}^tP_u \in \mathcal{E}'_{K_1}$ *entraîne* $u \in \mathcal{E}'_{K_2}$.

Remarquons qu'on peut prendre pour K_2 l'enveloppe $\mathcal{F}$-convexe de K_1.

Démonstration. — D'après le théorème de 3.7. il faut montrer que pour tout φ de $\mathcal{F}$ on a l'inégalité : $p_u(\varphi) \leqslant H_{K_2}(\varphi)$. Prenons un compact K qui est $\mathcal{F}$-convexe et montrons que $p_u(\varphi) = p_{t_{P_u}}(\varphi)$ sauf sur un ensemble polaire de $\mathcal{F}$. En effet si on écrit $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ où $\varphi_1(\tilde{z}) = \langle \zeta, \tilde{z} \rangle$ et $\varphi_2 \in \mathcal{F}_2$ on a alors : $Pe^{t(\varphi_1+\varphi_2)} = P(t\zeta)e^{t(\varphi_1+\varphi_2)}$ d'où :

$$p_{t_{P_u}}(\varphi) = \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} [\log |P(t\zeta)| + \operatorname{Log} |\langle u, e^{t(\varphi_1+\varphi_2)} \rangle|].$$

$P(t\zeta)$ est un polynôme de degré m sur $\mathbf{C}^{2n}$ donc l'ensemble A des ζ de $\mathbf{C}^{2n} \sim \mathcal{F}_1$ tels que $\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log |P(t\zeta)| = -\infty$ est polaire.

En effet si on décompose $P = P_n + P_{n-1} + \cdots P_0$ en polynômes homogènes on voit que $A = \bigcap_{k=0}^{m} \{\zeta | P_K(\zeta) = 0\}$. La limite pour $t \to +\infty$ de $\frac{1}{t} \log |P(t\zeta)|$ existe et est nulle en dehors de A qui est un sous-ensemble polaire de $\mathcal{F}_1$; on en déduit que $A' = A \times \mathcal{F}_2$ est un sous-ensemble polaire de $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$ et que, pour tout $\varphi \notin A'$, $p_{t_{P_u}}(\varphi) = p_u(\varphi)$.

Par hypothèse pour tout φ de $\mathcal{F}$, $p_{t_{P_u}} \leqslant H_K(\varphi)$; on déduit de ce qui précède que $p_u(\varphi) \leqslant H_K(\varphi)$ pour tout φ de $\mathcal{F} - A'$. L'ensemble A' étant polaire, H_K une fonction plurisousharmonique et p_u sous-médiane dans $\mathcal{F}$ la proposition 3.6. entraîne que l'inégalité à lieu partout ; ce qui termine la démonstration.

CHAPITRE IV

ÉTUDE D'UNE MÉTHODE DE SÉRIES DE FOURIER

Pour une fonction continue $\lambda(r)$ définie et positive pour $r > 0$, croissante et tendant vers l'infini avec r la fonction entière f est dite de λ-type fini s'il existe des constantes A et B telles que :

$$\log|f(z)| \leqslant A\lambda(B|z|)$$

Rappelons le théorème suivant dû à Rubel :

Théorème [30], [31]. — *Une fonction entière f sur* **C** *est de λ-type fini si et seulement si on a l'inégalité suivante :*

$$|c_k(r, \log|f|)| \leqslant \frac{A\lambda(Br)}{|k|+1}, \quad k = 0, \quad \pm 1, \ \ldots$$

où l'on a posé :

$$c_k(r, \log|f|) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|e^{-ik\theta}\, d\theta.$$

Lorsque $\lambda(r) = r^\rho$ on retrouve les fonctions d'ordre fini ρ au plus, mais la notion de fonction de λ-type fini permet d'obtenir des croissances « intermédiaires », par exemple, $\lambda(r) = r^\rho(\log r)^{\rho'}$ ainsi que des croissances très rapides correspondant à l'ordre infini comme $e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^r}}}}$.

1. Fonctions sousharmoniques.

Soit $V(z)$ une fonction sousharmonique dans C tout entier; pour tout $R > 0$, on a la décomposition de Riesz, à l'aide de la fonction de Green :

$$g_R(z, a) = \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}z}{R(a-z)}\right|,$$

$$V(z) = H_R(z) - \int_{|a|\leqslant R} g(z, a)\, d\sigma(a), \qquad |z| < R.$$

Posons

$$c_k(r,\ V) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})e^{-ik\theta}\,d\theta$$

Pour toute mesure de Radon σ positive, dont le support ne contient pas l'origine, on notera :

$$\sigma(r) = \int_{|a|\leqslant r} d\sigma(a), \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}(r,\ \sigma) = \int_0^r \sigma(t)\,\frac{dt}{t},$$

$$\mathrm{S}(r,\ k,\ \sigma) = \frac{1}{k}\int_{|a|\leqslant r}\frac{d\sigma(a)}{a^k}, \qquad \mathrm{S}'(r,\ k,\ \sigma) = \frac{1}{kr^k}\int_{|a|\leqslant r}(\bar{a})^k\,d\sigma(a),$$

$$\mathrm{S}(r_1,\ r_2,\ k,\ \sigma) = \mathrm{S}(r_1,\ k,\ \sigma) - \mathrm{S}(r_2,\ k,\ \sigma), \qquad r_1 < r_2.$$

Lemme 4.1. — *Soit* $\mathrm{V}(z)$ *une fonction sousharmonique dans* $|z| < \mathrm{R}$, *et harmonique au voisinage de l'origine; alors, si* $2r < \mathrm{R}$:

(1) $$c_0(r,\ \mathrm{V}) = \mathrm{V}(0) + \int_{|a|\leqslant r}\log\frac{r}{|a|}\,d\sigma(a).$$

(2) $$c_k(r,\ \mathrm{V}) = \frac{1}{2}\,b_{\mathrm{R},k}r^k + \frac{1}{2}\,\frac{r^k}{\mathrm{R}^k}\,\mathrm{S}'(\mathrm{R},\ k,\ \sigma) - \frac{1}{2}\,\mathrm{S}'(r,\ k,\ \sigma) - \frac{1}{2}\,r^k\mathrm{S}(r,\ \mathrm{R},\ k,\ \sigma).$$

(3) $$c_{-k} = \bar{c}_k \qquad \text{si} \qquad k < 0$$

où les $b_{\mathrm{R},k}$ *sont donnés par* $\mathrm{H_R}(z) = \mathrm{Re}(\Sigma b_{\mathrm{R},k}z^k)$.

Remarquons, en intégrant par partie, que (1) n'est autre que la formule de Jensen :

$$\mathrm{L}(r,\ \mathrm{V}) = \mathrm{V}(0) + \mathrm{N}(r).$$

Démonstration :

$$c_k(r,\ \mathrm{V}) = c_k(r,\ \mathrm{H_R}) + c_k\left(r,\ -\int g_\mathrm{R}(a,\ z)\,d\sigma(a)\right) = c'_k + c''_k.$$

1) *Calcul de* c'_k. La fonction $\mathrm{H_R}(z)$ est harmonique donc égale à son développement en série de Fourier qui est de la forme :

$$\mathrm{H_R}(z) = b_{\mathrm{R},0} + \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0} b_{\mathrm{R},k}r^ke^{ik\theta} \qquad \text{avec} \qquad b_{\mathrm{R},-k} = \overline{b_{\mathrm{R},k}}$$

de plus

$$\mathrm{H_R}(0) = b_{\mathrm{R},0} = \mathrm{V}(0) + \int_{|a|\leqslant r}\log\frac{\mathrm{R}}{|a|}\,d\sigma(a).$$

2) *Calcul de* $c''_k(r)$.

Notons

$$\begin{array}{lll} I'_k(a) = c_k(r, -g(z, a)) & \text{pour} & |a| \leqslant r,\ z = re^{i\theta}, \\ I''_k(a) = c_k(r, -g(z, a)) & \text{pour} & r < |a| \leqslant R. \end{array}$$

On a :

$$c''_k(r) = \int_{|a|\leqslant r} I'_k(a)\, d\sigma(a) + \int_{r<|a|\leqslant R} I''_k(a)\, d\sigma(a)$$

d'où en écrivant

$$-g_R(z, a) = -\log R - Re\left[\log\left(1 - \frac{\bar{a}z}{R^2}\right)\right] + Re\,[\log(z - a)]$$

et en prenant les coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned} I'_0 &= \log \frac{r}{R} \\ I'_k &= \frac{1}{2k}\left(\frac{\bar{a}r}{R^2}\right)^k - \frac{1}{2k}\left(\frac{\bar{a}}{r}\right)^k, \quad \text{si} \quad k > 0, \\ I''_0 &= \log \frac{|a|}{R} \\ I''_k &= \frac{1}{2k}\left(\frac{\bar{a}r}{R^2}\right)^k - \frac{1}{2k}\left(\frac{r}{a}\right)^k, \quad \text{si} \quad k > 0. \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} c''_k(r) = \frac{1}{2k}\frac{r^k}{R^{2k}}\int_{|a|\leqslant R} \bar{a}^k\, d\sigma(a) &- \frac{1}{2k}\frac{1}{r^k}\int_{|a|\leqslant r} \bar{a}^k\, d\sigma(a) \\ &- \frac{1}{2^k}\, r^k \int_{r<|a|\leqslant R} \frac{d\sigma(a)}{a^k}, \quad \text{si} \quad k > 0. \end{aligned}$$

$$c''_0(r) = \int_{|a|\leqslant r} \log\frac{r}{R}\, d\sigma(a) + \int_{r<|a|\leqslant R} \log\frac{|a|}{R}\, d\sigma(a)$$

d'où la proposition en ajoutant c'_k et c''_k.

Donnons une expression plus simple des coefficients de Fourier de la fonction φ : Soit

$$\begin{aligned} c_k(r, \varphi) = \frac{1}{2}\, b_{R,k} r^k - \frac{1}{2}\, r^k S(R) + \frac{1}{2}\frac{r^k}{R^{2k}} S'(R) \\ + \frac{1}{2}\, r^k S(r) - \frac{1}{2}\, S'(r). \end{aligned}$$

On voit que si on note $A(r, R)$ la somme des trois premiers termes, la quantité $r^{-k}A(r, R)$ est indépendante de r. Soit

$0 < r_0 < d(0, \sup \sigma)$ (un tel r_0 existe puisque v est harmonique au voisinage de l'origine) on a : $S(r_0) = S'(r_0) = 0$ et $c_k(r_0, v) = \frac{1}{2} \alpha'_k r_0^k$ d'où en multipliant $c_k(r, v)$ par r_0^{-k} et en faisant $r = r_0$ on obtient $\alpha'_k = b_{R,k} - S(R) - \frac{1}{R^{2k}} S'(R)$

Proposition 4.1. — *Si $v(z)$ est une fonction sousharmonique pour $|z| < R$, harmonique au voisinage de l'origine, on a pour $r < R$:*

$$c_0(r, v) = v(0) + \int_{|a|\leq r} \log \frac{r}{|a|} d\sigma(a),$$

$$c_k(r, v) = \frac{1}{2} \alpha'_k r^k + \frac{1}{2k} r^k \int_{|a|\leq r} \frac{d\sigma(a)}{a^k} + \frac{1}{2kr^k} \int_{|a|\leq r} \bar{a}^k d\sigma(a) \quad \text{si} \quad k > 0$$

$$c_k(r, v) = \overline{c_{-k}(r, v)} \quad \text{si} \quad k < 0,$$

où σ est la mesure $(1/2\pi)\Delta v$ et les α'_k sont définis par $v(z) = \mathrm{Re}(\Sigma \alpha'_k z^k)$ au voisinage de l'origine.

On dira qu'une fonction sousharmonique est de λ-*type fini* s'il existe des constantes A et B telles que :

$$v(z) \leqslant A\lambda(B|z|).$$

Rappelons un lemme classique de la théorie des fonctions sousharmoniques où $L(v, r)$ désigne la moyenne de v sur le cercle centré à l'origine et de rayon r :

Lemme 4.2. — *Pour toute fonction $v(z)$ sousharmonique telle que $v(0) > -\infty$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) v est de λ-type fini.

(2) $L(v^+, r) \leqslant A'\lambda(B'r)$, $v^+ = \sup(v, 0)$.

(3) $L(|v|, r) \leqslant A''\lambda(B''r)$.

Théorème 4.1. — *Une fonction $v(z)$ sousharmonique dans C et harmonique au voisinage de l'origine, est de λ-type fini, si et seulement si :*

$$|c_k(r, v)| \leqslant \frac{A\lambda(Br)}{|k| + 1}, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

où A et B sont des constantes ne dépendant pas de k.

Il est important de noter que ces constantes ne dépendent que de la fonction de croissance λ et non de φ; i.e. si $\varphi(z) \leqslant A\lambda(B|z|)$ le théorème affirme que $|c_k(r, \varphi)| \leqslant \dfrac{A'\lambda(B'r)}{|k|+1}$ où les constantes A' et B' ne dépendent que de A, B et $\lambda(r)$ et réciproquement.

Pour des fonctions définies sur un espace de Banach, cela nous permettra, au paragraphe 4, d'appliquer ce théorème à la restriction de la fonction aux droits complexes passant par l'origine.

Démonstration :

1) ($\Longrightarrow$) On se base sur l'inégalité :

$$\sigma(r) = \int_{|a|\leqslant r} d\sigma(a) \leqslant \int_r^{er} \sigma(t)\,\frac{dt}{t} \leqslant \int_0^{er} \sigma(t)\,\frac{dt}{t} = L(\varphi, er)$$

et

$$|c_k(r, \varphi)| \leqslant \frac{1}{2}\,|b_{R,k}|r^k + \frac{1}{2k}\left(\frac{r}{R}\right)^k \sigma(R) + \frac{1}{2k}\,\sigma(r) + \frac{1}{2k}\,\sigma(R).$$

Pour $R = 2r$ les trois dernières quantités sont majorées par $C^{te}\,\dfrac{\sigma(2r)}{|k|+1}$. Pour le premier terme on sait que $H_R(z)$ est la plus petite fonction harmonique qui majore φ sur $|z| = R$ c'est-à-dire

$$H_R(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P(r, R, \theta - \varphi)\varphi(Re^{i\varphi})\,d\varphi$$

où le noyau de Poisson $P(r, R, \psi) = \dfrac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\psi}$ satisfait à l'inégalité :

$$|P(r, 2r, \varphi + h) - P(r, 2r, \varphi)| \leqslant 12|h|$$

et d'après un théorème classique [35], les coefficients de Fourier sont majorés en module par $\dfrac{12}{|k|}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,|b_{R,k}|r^k &= |c_k(r, H_R)| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi(re^{i\varphi})|\ \ d\varphi \left|\int_{-\pi}^{+\pi} P(R, r, \theta - \varphi)e^{-ik\theta}\,d\theta\right| \\ &\leqslant \frac{12A\lambda(2Br)}{|k|+1} \qquad \text{si} \qquad R = 2r.\end{aligned}$$

2) ($\Longleftarrow$) l'inégalité de Parseval donne :

$$L(|v|^2, r) = \Sigma|c_k(r, v)|^2 A^2\lambda^2(Br)\Sigma\frac{1}{(|k|+1)^2}$$

d'où le résultat par l'inégalité de Schwarz et le lemme 4.2.

Conséquence du théorème 4.1.

THÉORÈME 4.2. — *Si $v(z)$ est une fonction sousharmonique de λ-type fini, on a, pour tout $1 \leqslant p < +\infty$,*

$$[L(|v|^p, r)]^{1/p} \leqslant A\lambda(Br).$$

Réciproquement, si l'inégalité précédente a lieu pour un $p \geqslant 1$, $v(z)$ est de λ-type fini.

Dans un sens, la démonstration se fait grâce à l'inégalité de Hölder et, en sens contraire, lorsque $q \geqslant 2$, on applique le théorème de Hausdorff-Young [35] qui dit que la norme L^p de v est majorée par la norme l^q des $c_k\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

THÉORÈME 4.3. — *Si $v(z)$ est sousharmonique de λ-type fini, il existe des constantes α et $\beta > 0$ telles que :*

$$L[\exp \alpha\{\lambda^{-1}(\beta r)|v|\}, r] \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Notons que les énoncés des théorèmes 4.2. et 4.3. ainsi que leurs démonstrations reprennent dans le cas sousharmonique ceux de [30].

Démonstration. — Il existe $\beta > 0$ tel que

$$\frac{|c_k(v, r)|}{\lambda(\beta r)} \leqslant \frac{A}{|k|+1}, \quad k \in Z.$$

Posons $F(\theta) = F(\theta, r) = \frac{1}{\lambda(r)}v(re^{i\theta})$, on peut supposer A assez grand pour que $L(F, r) \leqslant A$. D'après [35] (Vol. II, p. 157, exemple 5), il existe une constante α ne dépendant que de A et ε telle que $L(\exp\{\alpha|F|, r) \leqslant 1 + \varepsilon$ d'où le résultat.

Maintenant pour tout r fixé on a l'égalité au sens de L^2 :

$$v(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(r, v)e^{ik\theta}.$$

Le théorème suivant donne un résultat plus précis :

Théorème 4.4. — *La série de Fourier* $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(r, v)e^{ik\theta}$ *d'une fonction sousharmonique converge* $v(z)$, *sauf sur un ensemble* E *de* R^2-*mesure nulle qui coupe les cercles centrés à l'origine suivant des ensembles de mesure linéaire nulle.*

Démonstration. — Pour tout r fixé $\Sigma|c_k|^2 \log(|k| + 1)$ entraîne par le théorème de Plessner ([35]) que la série de Fourier converge presque partout vers v. Or l'ensemble $\{z|v(z) \neq \Sigma c_k(r, v)e^{ik\theta}\}$ est mesurable et coupe les cercles $|z| = r$ suivant un ensemble de mesure linéaire nulle d'où le théorème.

2. Fonctions δ-sousharmoniques et indicatrice de Nevanlinna.

Définition 4.1. — *Une fonction à valeur réelle* $w(z)$ *est dite* δ-sousharmonique *dans* C, *s'il existe deux fonctions sousharmoniques* u *et* v *telles que :*

1) w *est définie sur l'ensemble* E *des points où* u *et* v *ne sont pas simultanément égales à* $-\infty$.

2) $w = u - v$ *sur* E.

On dit que le couple (u, v) est une représentation de w.

Toute fonction δ-sousharmonique admet localement une décomposition de Riesz :

$$w(z) = \mathrm{H}(z) - \int g(z, a)\, d\sigma(a),$$

avec une mesure $\sigma = \frac{1}{2\pi} \Delta w$ de signe quelconque (Δ désignant le Laplacien $\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}}$).

Les fonctions δ-sousharmoniques peuvent être caractérisées comme étant des fonctions localement sommables dont le Laplacien — en tant que distribution — est une mesure et égales en tout point à leur maximum en mesure.

Définition 4.2. — (u, v) *est une représentation canonique de* w, *si les mesures associées à* u *et* v *sont les parties positives et négatives de la mesure associée à* w *et* $u(0) + v(0) = 0$.

Remarquons que « la » représentation est définie à l'addition près d'une fonction harmonique nulle à l'origine.

DÉFINITION 4.3. (équivalente). — (u, v) *est une représentation canonique, si, pour toute représentation* (U, V) *de* w, *il existe une fonction sousharmonique* s *telle que* $U = u + s$ *et* $V = v + s$ *et* $s(0) = \frac{1}{2}[U(0) + V(0)]$.

Pour toute fonction δ-sousharmonique w de représentation canonique (u, v) posons $\lambda' = \sup(u, v)$. On définit avec Arsove [1] *l'indicatrice de Nevanlinna de* w :

$$T(r, w) = L(\lambda', r).$$

Cette indicatrice est alors définie de manière unique en vertu de la propriété de la moyenne des fonctions harmoniques.

Dans tout ce qui suit, on supposera que w est harmonique au voisinage de l'origine et on posera :

$$P(r) = \int_{|a| \leqslant r} d\sigma^{-}(a), \qquad \Phi(r) = \int_{|a| \leqslant r} |d\sigma(a)|.$$

Pour une représentation canonique, on a :

$$\sup(u, v) = w^{+} + v,$$
$$2\sup(u, v) = |w| + u + v,$$

d'où par la formule de Jensen :

$$(1) \qquad T(r, w) = L(w^{+}, r) + \int_{0}^{r} P(t)\frac{dt}{t} + v(0)$$

$$(2) \qquad 2T(r, w) = L(|w|, r) + \int_{0}^{r} \Phi(t)\frac{dt}{t}.$$

DÉFINITION 4.4. — *Une fonction* w δ*-sousharmonique sera dite de* λ-type fini *s'il existe des constantes* A *et* B *telles que :*

$$T(r, w) \leqslant A\lambda(Br).$$

Remarque. — Une fonction δ-sousharmonique est donnée en général par une représentation (U, V) dont il est difficile de savoir si elle est canonique ou non. Or :

$$\sup(U, V) = \sup(u, v) + s,$$

d'où

$$L\,[\sup(U,\ V),\ r] = T(r,\ w) + L(s,\ r) \geqslant T(r,\ w) + s(0),$$

avec $s(0) = \frac{1}{2}\,[U(0) + V(0)]$, w sera donc de λ-type fini, si, pour une décomposition particulière non nécessairement canonique,

$$L\,[\sup(U,\ V),\ r] \leqslant A\lambda(B\ r).$$

On dira qu'une fonction w à valeurs complexes est sousharmonique complexe (resp. δ-sousharmonique complexe) si ses parties réelles et imaginaires sont sousharmoniques (resp. δ-sousharmoniques). De telles fonctions seront dites de λ-type fini si ses parties réelles et imaginaires le sont.

Rappelons le lemme :

Lemme 4.3. — *Si* $V(z, t)$ *est sousharmonique en* z, *sommable en* t *pour une mesure* μ *positive à support compact, mesurable pour la mesure produit, et si* $|V(z,\ t)| \leqslant \varphi(z)$ *localement sommable :*

$$w(z) = \int V(z,\ t)\, d\mu(t)$$

est une fonction sousharmonique.

Corollaire. — *Si la mesure* μ *est de signe quelconque (resp. complexe) moyennant les mêmes hypothèses,* $w(z)$ *est une fonction* δ*-sousharmonique (resp.* δ*-sousharmonique complexe).*

Définition 5. — *Une mesure* σ *de signe quelconque sera dite de* λ*-densité finie s'il existe des constantes* A *et* B *telles que :*

$$N(r) = \int_0^r \Phi(t)\,\frac{dt}{t} \leqslant A\lambda(Br)$$

(ce qui équivaut à dire que σ^+ et σ^- sont de λ-densité finie).

Proposition 4.2. — *Soit* $v(z)$ *une fonction* δ*-sousharmonique dont la mesure associée est de* λ*-type fini, alors :*

$$|c_k(r,\ V)| \leqslant A\lambda(Br) \qquad \textit{pour tout} \quad k \in \mathbf{N}$$
$$\Longrightarrow |c_k(r,\ V)| \leqslant \frac{A'\lambda(B'r)}{|k|+1}, \quad k = 0,\ \pm 1,\ \ldots$$

COROLLAIRE. — *Si* $v(z)$ *est sousharmonique, l'inégalité* $|c_k(r, v)| \leqslant A\lambda(Br)$ *pour tout* k *de* $\mathbf{Z}$ *entraîne*

$$|c_k(r, v)| \leqslant \frac{A'\lambda(B'r)}{|k|+1}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

La démonstration se fait suivant un raisonnement de [32]. Les inégalités suivantes sont immédiates :

$$\Phi(r) \leqslant \int_0^{er} \Phi(t)\frac{dt}{t} \leqslant \int_0^{er} \Phi(t)\frac{dt}{t} = N(er)$$

$$|S'(r, k, \sigma)| \leqslant \frac{1}{kr^k}\int_{|a|<r} |\bar{a}|^k |d\sigma(a)| \leqslant \frac{1}{k}\Phi(r) \leqslant \frac{1}{k} N(er).$$

Supposons donc que $N(r) \leqslant A\lambda(Br)$. Il suffit puisque $c_{-k} = \bar{c}_k$ de démontrer la proposition pour $k \geqslant 1$.

Supposons donc que $|c_k(r, V)| \leqslant A\lambda(Br)$ pour tout $k \geqslant 1$. On a : $c_k(r, V) = \frac{1}{2} r^k(\alpha_k + S(r, k, \sigma)) + \frac{1}{2} S'(r, k, \sigma)$. Pour démontrer la proposition il suffit de montrer que

$$r^k|\alpha_k + S(r, k, \sigma)| \leqslant \frac{A\lambda(Br)}{|k|+1}.$$

Or

$$r^k|\alpha_k + S(r, k, \sigma)| \leqslant 2|c_k(r, V)| + |S'(r, k, \sigma)| \leqslant A\lambda(Br);$$

notons $r' = kr^{\frac{1}{k}}$ d'où $r \leqslant r' \leqslant 2r$ pour $k > 1$. On a :

$$\begin{aligned} |\alpha_k + S(r, k, \sigma)| &= |\alpha_k + S(r', k, \sigma) - S(r, r', k, \sigma)| \\ &\leqslant |\alpha_k + S(r', k, \sigma)| + |S(r, r', k, \sigma)| \end{aligned}$$

or

$$|\alpha_k + S(r', k, \sigma)| \leqslant \frac{A\lambda(Br')}{r'^k} \leqslant \frac{A\lambda(2Br)}{kr^k}$$

et

$$|S(r, r', k, \sigma)| \leqslant \frac{1}{k}\int_{r<|a|\leqslant r'} \frac{|d\sigma(a)|}{|a|^k} \leqslant \frac{1}{kr^k}\Phi(r') \leqslant \frac{A\lambda(Br)}{kr^k}$$

d'où le résultat (pour simplifier nous avons toujours noté A et B les constantes).

Remarque. — Pour $k = 0$, l'inégalité $|c_0(r, V)| \leqslant A\lambda(B, r)$ montre, par la formule de Jensen, que si v est sousharmonique sa mesure associée est de λ-type fini et que si v est δ-sous-sous-harmonique pour que sa mesure associée soit de λ-type fini, il faut et il suffit que σ^+ ou σ^- soit de λ-type fini; d'où le théorème :

Théorème 4.5. — *Pour toute fonction δ-sousharmonique, telle que* $0 \notin \operatorname{supp} \sigma$:

1) V *de λ-type fini entraîne que* σ *a une λ-densité finie et*

$$|c_k(r, V)| \leqslant \frac{A\lambda(Br)}{|k|+1}, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots$$

2) σ^+ *ou* σ^- *est de λ-densité finie, et* $|c_k(r, V)| \leqslant A\lambda(Br)$ *entraînent que* V *est de λ-densité finie.*

Les théorèmes 2, 3 et 4 sont encore vrais pour les fonctions δ-sousharmoniques.

3. Fonctions plurisousharmoniques.

Considérons la classe des fonctions $V(z_1, \ldots, z_n) \not\equiv -\infty$ *n-sousharmoniques*, c'est-à-dire semi-continue supérieurement et sousharmoniques séparément par rapport à chaque variable z_j. C'est une classe qui contient celle des fonctions plurisousharmoniques [17].

Lemme 4.4. — *Toute fonction n-sousharmonique est sommable sur l'arête des polycercles.*

En effet, si on suppose $V \leqslant 0$, la majoration de Poisson donne :

$$V(z_1, \ldots, z_n) \leqslant \left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^n L(V, 0, r_k) \quad \text{pour} \quad |z_j| \leqslant \tau r_j, \ \tau < 1,$$

L désignant la moyenne de V sur l'arête du polycercle, centré à l'origine, de rayon $(r_1, \ldots, r_n)$. Si, pour un polycercle π de rayon $(r_1, \ldots, r_n)$, V n'était pas sommable, on aurait :

$$V(z_1, \ldots, z_n) \equiv -\infty \qquad \text{pour tous} \qquad |z_j| \leqslant \tau r_j,$$

donc aussi dans tout ouvert contenant π, ce qui est impossible.

Si $\lambda(r_1, \ldots, r_n)$ est une fonction de croissance de n variable on dira que V est de λ-*type fini* s'il existe des constantes A, $B_1, \ldots, B_n$, telles que :

$$V(z_1, \ldots, z_n) \leqslant A\lambda(B_1|z_1|, \ldots, B_n|z_n|).$$

Notons que pour une fonction n-sousharmonique on peut toujours supposer λ convexe séparément des $\log r_i$.

Posons $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ et $\bar{r} = (r_1, \ldots, r_n)$

$$c_{\bar{k}}(\bar{r}, v) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{+\pi} \cdots \int_{-\pi}^{+\pi} V(r_j \exp i\theta_j) \exp(-i\Sigma k_j\theta_j)\, d\theta_1 \ldots d\theta_n$$

ce qui a un sens d'après le lemme 4.4

THÉORÈME 4.6. — *Une fonction* $V(z_1, \ldots, z_n)$ *n-sousharmonique* $(V(0, \ldots, 0) \neq -\infty)$ *est de λ-type fini si et seulement si*

$$|c_{\bar{k}}[\bar{r}, V]| \leqslant A\lambda(B_1r_1, \ldots, B_nr_n)\Big/\prod_1^n (|k_j| + 1)$$
$$k_j = 0, \quad \pm 1, \ldots; \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Démonstration :

1) ($\Longleftarrow$) se fait comme dans le cas $n = 1$, à l'aide de l'égalité de Parseval et du lemme de Schwarz (l'intégrale étant prise alors sur l'arête des polycercles).

2) ($\Longrightarrow$) Faisons une démonstration par récurrence sur le nombre de variables en supposant pour simplifier les notations que $n = 2$.

Soit z_1 fixé, tel que $V(z_1, z_2)$ soit une fonction de z_2 sousharmonique $\not\equiv -\infty$:

$$w_{k_2, r_2}(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z_1, r_2 \exp i\theta_2) \exp(-ik_2\theta_2)\, d\theta_2$$

est alors une fonction δ-sousharmonique complexe de z_1 d'après le corollaire du lemme 4.3. et satisfait d'après le théorème 4.1. pour z_1 fixé à

$$|w_{k_2, r_2}(z_1)| \leqslant \frac{A\lambda(B_1|z_1|, B_2r_2)}{|k_2| + 1}.$$

Montrons que c'est une fonction de z_1 de λ-type fini pour r_2 fixé.

$$\operatorname{Re} w(z_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{V}(z_1,\ r_2 \exp i\theta_2) \cos k_2\theta_2\, d\theta_2$$
$$= u_{k_2, r_2}(z_1) - u'_{k_2, r_2}(z_1),$$

en écrivant $\cos = \cos^+ - \cos^-$. Le couple $(u,\ u')$ est donc une représentation de w_{k_2, r_2} telle que :

$$\sup(u,\ u') \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathrm{V}(z_1,\ r_2 \exp i\theta_2)|\, d\theta_2,$$

et d'après la remarque 2 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(r_1, \text{Ré}\, w_{k_2 r_2}) &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathrm{V}(r_1 \exp i\theta_1,\ r_2 \exp i\theta_2)|\, d\theta_1\, d\theta_2 \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{V}(0,\ r_2 \exp i\theta_2)| \cos k_2\theta_2|\, d\theta_2) \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathrm{V}(r_1 \exp i\theta_1,\ r_2 \exp i\theta_2)|\, d\theta_1\, d\theta_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\mathrm{V}(0,\ r_2 \exp i\theta_2)|\, d\theta_2 \\
&\leqslant \mathrm{A}'\lambda(\mathrm{B}'_1 r_1,\ \mathrm{B}'_2 r_2).
\end{aligned}$$

Le résultat étant le même pour $\operatorname{Im} w$ la fonction w_{k_2, r_2} est alors de λ-type fini en z_1 et satisfait à :

$$|c_{k_1}(r_1,\ w_{r_2, k_2})| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |w_{k_2, r_2}(r_1 \exp i\theta_1)|\, d\theta_1 \leqslant \frac{\mathrm{A}\lambda(\mathrm{B}_1 r_1,\ \mathrm{B}_2 r_2)}{|k_2| + 1}$$

d'où le résultat en appliquant la proposition 4.2., et en remarquant que $c_{k_1}(r_1,\ w_{r_2, k_2}) = c_{k_1, k_2}(r_1,\ r_2,\ w)$.

Corollaire. — *Si* $\mathrm{V}(z_1,\ \ldots,\ z_n)$ *est plurisousharmonique dans* C^n *avec* $\mathrm{V}(0) \neq -\infty$,

$$\mathrm{V}(z_1,\ \ldots,\ z_n) \leqslant \mathrm{A}\lambda(\mathrm{B}\|z\|)$$
$$\Longleftrightarrow |c_{\bar{k}}(\bar{r},\ \mathrm{V})| \leqslant \mathrm{A}'\lambda(\mathrm{B}'\|r\|)/\prod_1^n (|k_j| + 1).$$

B. A. Taylor a donné dans [32] une démonstration, basée sur le théorème 4.6., du résultat suivant :

Si la fonction $\lambda(r_1,\ \ldots,\ r_n)$ est à croissance lente [(i.e. pour tout j il existe une constante A_j telle que

$$\lambda(r_1,\ \ldots,\ 2r_j,\ \ldots,\ r_n) \leqslant \mathrm{A}_j\lambda(r_1,\ \ldots,\ r_j,\ \ldots,\ r_n)]$$

toute fonction méromorphe dans $\mathbf{C}^n$ de λ-type fini peut s'écrire sous forme de quotient de deux fonctions entières de λ-type fini. (L'indicatrice de croissance d'une fonction méromorphe f étant définie comme la moyenne sur les polycercles de la fonction $\alpha = \sup(\log|g|, \log|h|)$ où $f = \frac{g}{h}$, g et h sont localement irréductibles.)

4. Fonctions plurisousharmoniques dans un espace de Banach.

Ici v désignera une fonction plurisousharmonique définie en tout point d'un espace de Banach complexe E et $\lambda(r)$ une fonction définie positive pour tout r positif, continue, croissante et tendant vers l'infini avec r. Nous supposerons de plus que v est de type borné, c'est-à-dire bornée sur les boules centrées à l'origine et de rayon fini; une telle fonction sera dite de λ-type fini s'il existe des constantes A et B telles que :

$$v(a) \leqslant A\lambda(B\|a\|).$$

Pour tout a de norme égale à 1 nous considérerons les coefficients de Fourier sur les droites complexes passant par l'origine et le point a :

$$c_k(r, v, a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}a)e^{-ik\theta}\, d\theta.$$

Démontrons le résultat suivant :

THÉORÈME 4.7. — *Soit dans un espace de Banach $v(a)$ une fonction plurisousharmonique de type borné et pluriharmonique au voisinage de l'origine. La fonction v est de λ-type fini si et seulement si il existe des constantes A' et B' indépendantes de k et a (avec $\|a\| = 1$) telles que :*

$$|c_k(r, v, a)| \leqslant \frac{A'\lambda(B'r)}{|k|+1}, \qquad k = 0, +1, \ldots$$

Remarque. — On peut choisir $A' = 15A$ et $B' = 4B$.

Démonstration. — Reprenons la démonstration du théorème 4.1. Pour les fonctions $v_a(z) = v(za)$, $z \in \mathbf{C}$ et $\|a\| = 1$, et montrons qu'il est possible d'obtenir des majorations uniformes par rapport à a.

Notons d'abord que, d'après les hypothèses, pour tout a la fonction $v_a(z)$ est sousharmonique non identique à $-\infty$. De plus on peut supposer que $v(0) = 0$. Soit σ_a la mesure associée à la fonction v_a.

On a $\sigma_a(t) \leqslant \mathrm{L}(er, v^+, a)$ où $\mathrm{L}(r, v, a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}a)\, d\theta$. Si $v(ra) \leqslant \mathrm{A}\lambda(\mathrm{B}r)$ pour tout $k > 0$

$$\begin{aligned}|c_k(r, v, a)| &\leqslant \frac{1}{2}|b_{\mathrm{R},k}(a)|r^k + \frac{1}{2k}\left[\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)^k \sigma_a(\mathrm{R}) + \sigma_a(r) + \sigma_a(\mathrm{R})\right]\\ &\leqslant \frac{1}{2}|b_{\mathrm{R},k}(a)|r^k + \frac{3\sigma_a(2r)}{k+1}.\end{aligned}$$

Le deuxième terme est majoré par

$$\frac{3\mathrm{L}(2er, v^+, a)}{k+1} \leqslant \frac{3\mathrm{A}\lambda(4\mathrm{B}r)}{k+1}$$

et le premier, d'après le calcul fait dans la démonstration du théorème 4.1., est majoré par $\dfrac{12\mathrm{A}\lambda(2\mathrm{B}r)}{k+1}$ d'où l'inégalité cherchée pour tout k :

$$|c_k(r, v, a)| \leqslant \frac{15\mathrm{A}\lambda(4\mathrm{B}r)}{|k|+1}.$$

La réciproque est une conséquence de l'égalité de Parseval :

$$\mathrm{L}(r, |v|^2, a) = \Sigma|c_k(r, v, a)|^2 \leqslant \mathrm{A}'^2\lambda^2(\mathrm{B}'r)\Sigma\left(\frac{1}{|k|+1}\right)^2.$$

Corollaire. — *(Théorème de Lindelöf.) Toute fonction entière de type borné définie sur un espace de Banach et à valeurs scalaires qui est quotient de deux fonctions entières de λ-type fini est elle-même de λ-type fini.*

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent en remarquant que $\log\left|\dfrac{f}{g}\right|$, $\log|f|$, $\log|g|$ sont des fonctions plurisousharmoniques et que

$$c_k\left(r, \log\left|\frac{f}{g}\right|, a\right) = c_k(r, \log|f|, a) - c_k(r, \log|g|, a).$$

On peut affaiblir l'hypothèse en supposant seulement que sur toute droite complexe où $g \not\equiv 0$ la restriction de f est divisible par la restriction de g car alors $\frac{f}{g}$ est une fonction G-analytique continue aux points où g ne s'annule pas, qui forme un ensemble connexe ouvert; $\frac{f}{g}$ est alors continue partout, donc analytique d'après le théorème 3.3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. G. Arsove, Functions representable as differences of subharmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 75, (1953), 237-265.

[2] V. Avanissian, Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques, *Ann. E.N.S.*, t. 78, (1961), 101-161.

[3] N. Bourbaki, Intégration, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, 1175, Hermann, Paris (1952).

[4] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, *Activités Scientifiques et industrielles*, 1189, Hermann, Paris, (1966).

[5] N. Bourbaki, Variétés différentielles et analytiques (Résultats), *Activités Scientifiques et Industrielles*, 1333, Hermann, Paris (1967).

[6] H. J. Bremermann, Holomorphic functionnals and complex convexity in Banach spaces, *Pac. J. Math.* 7, 811-831 (1957).

[7] G. Cœuré, Le théorème de convergence dans les espaces localement convexes complexes, *C.R. Acad. Sc.* t. 264, 287-290, (1967).

[8] G. Cœuré, Thèse (à paraître aux Annales de l'Institut Fourier).

[9] J. Deny et P. Lelong, Étude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône. *Bull. Soc. Math. de France*, t. 75, (1947), 89-112.

[10] A. Douady, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, *Annales Institut Fourier*, t. 16, 1-68 (1966).

[11] A. Grothendieck, Sur certains espaces de fonctions holomorphes, *J. Für reine und angew. Math.*, t. 192, (1953), 35-64.

[12] D. P. Gupta, Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on Banach Space. *Notas de Math.* nº 37 (1968) Rio. Brésil.

[13] E. Hille and E. G. Phillips, Functional analysis and semi-groups, Colloquium, A.M.S. édition (1957).

[14] L. Hörmander, An introduction to complexe analysis in several variables, Van Nostrand (1966).

[15] B. Jessen, The theory of Integration in a space of infinity variables, *Acta Math.* 63 (1934) 249-323.

[16] C. O. Kieselman, On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals, *Acta Math.*, 117, (1967), 1-35.

[17] P. Lelong, Les fonctions plurisousharmoniques, *Ann. E.N.S.*, t. 62 (1945), 301-338.

[18] P. Lelong, Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques, *Journal de Math.*, t. 36 (1957), 263-303.

[19] P. Lelong, Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables réelles, *Ann. Inst. Fourier*, t. XI (1961), 515-562.

[20] P. Lelong, Fonctions entières de type exponentiel dans $\mathbf{C}^n$, *Ann. Inst. Fourier*, t. XVI, (1966), 269-318.

[21] P. Lelong, Fonctions entières et fonctionnelles analytiques. Séminaire d'été Montréal (1967).

[22] a) P. Lelong, Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques, *Sem. Lelong*, 8e année (1967-1968).

b) P. Lelong, Fonctions plurisousharmoniques et ensembles polaires dans les espaces vectoriels topologiques, *C.R. Acad. Sc.*, t. 267, (1968), 916-918.

[23] B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. Inst. Fourier*, t. 6, (1955-1956), 271-355.

[24] L. Nachbin, Topology on spaces of holomorphic mappings, Springer. (Ergebnisse n° 47).

[25] Ph. Noverraz, Extension d'une méthode de séries de Fourier aux fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques. *Sem. Lelong* (1965-1966) Exposé n° 3 (Mars 1965) et *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 264, 675-678 (1967).

[26] Ph. Noverraz, Un théorème de Hartogs et théorèmes de prolongement dans les espaces vectoriels topologiques complexes, *C.R. Acad. Sc.*, t. 266, 806-808 (1968).

[27] Ph. Noverraz, Fonctions analytiques et théorèmes de prolongement, *Sem. Lelong* (1968-1969).

[28] J. P. Ramis, Les théorèmes de Weierstrass pour les anneaux polynômes de séries formelles et de séries convergentes sur un espace vectoriel (2 exposés) *Sem. Lelong* (1966-1967).

[29] J. P. Ramis, Thèse (à paraître chez Springer).

[30] L. A. Rubel, A. Fourier series method for entire functions, *Duke Math. J.*, t. 30, (1963), 437-442.

[31] L. A. Rubel et B. A. Taylor, A Fourier series method for meromorphic an entire functions. *Bull. Soc. Math.*, t. 96 (1968), 53-96.

[32] B. A. Taylor, The fields of Quotients of some rings of entire functions. Proc. Of Symposia in Pure Math. Vol 11, Entire functions and related parts of analysis, *AMS* (1968).

[33] M. A. Zorn, Characterisation of analytic functions in Banach space, *Annals of Math.*, 2 (46) (1945), 585-593.

[34] M. A. Zorn, Gateaux differentiability and essential boundedness, *Duke Math. Jour.*, t. 12 (1945), 579-583.

[35] A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge (1959).

(*Thèse, Fac. Sciences, Paris*, 1969.)

Philippe Noverraz,
Institut Elie Cartan,
2, rue de la Craffe,
54-Nancy.