Annales de l'institut Fourier

Arnaud De La Pradelle

À propos du mémoire de Vincent-Smith sur l'approximation des fonctions harmoniques

Annales de l'institut Fourier, tome 19, nº 2 (1969), p. 355-370

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_2_355_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
19, 2 (1969), 355-370.

A PROPOS DU MÉMOIRE DE G.F. VINCENT-SMITH SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS HARMONIQUES

par Arnaud de La PRADELLE

Introduction.

Soient $\mathcal{S}$ et W deux cônes convexes. $\mathcal{S} \subset W \subset \mathcal{C}(\Omega)$ ([1]) (Ω compact), stables par enveloppe inférieure finie et tels qu'il existe $p, q \in \mathcal{S}$, p et $-q$ strictement positives sur Ω. Soient M l'ensemble des fonctions W-affines continues et L un sous-espace de fonctions $\mathcal{S}$-affines continues tel que (L, $\mathcal{S}$) soit un simplexe géométrique. Dans [12] G. F. Vincent-Smith montre que L est uniformément dense dans M si $\partial W(\Omega) \subset \partial\mathcal{S}(\Omega)$ et si $\mathcal{S}$ sépare linéairement les points de $\partial W(\Omega)$ qui sont linéairement séparés par W, où ∂W et $\partial\mathcal{S}$ désignent les frontières de Choquet de W et de $\mathcal{S}$ respectivement. Dans le cadre axiomatique des fonctions harmoniques, G. F. Vincent-Smith en déduit une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace des traces sur l'adhérence d'un ouvert relativement compact ω, des fonctions harmoniques au voisinage de $\overline{\omega}$ soit dense dans l'espace des fonctions de $\mathcal{C}(\overline{\omega})$, harmoniques dans ω, pour la norme uniforme.

Nous nous proposons ici d'étendre les résultats de G. F. Vincent-Smith au cas où l'espace de base Ω est non compact. Nous trouvons ainsi une variante de son théorème d'approximation dans le cas où Ω est à base dénombrable. La condition de séparation est plus forte mais on exige seulement qu'en un point $x \in \Omega$, il existe une fonction v du cône $\mathcal{S}$ telle que $v(x)$ soit strictement négatif. La démonstration en est

([1]) $\mathcal{C}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions numériques continues sur Ω.

aussi différente. Nous appliquons le théorème d'Hahnn-Banach comme dans le cas classique ([7] et [8]). Nous utilisons pour cela la théorie des espaces adaptés introduite par G. Choquet ([6]) et développée par G. Mokobodski et D. Sibony ([10]). Nous donnons dans les préliminaires surtout des résultats. Les démonstrations dans le cas non compact ne diffèrent pas essentiellement de celles du cas compact. C'est pourquoi, à défaut de démonstrations, nous donnerons seulement quelques indications et des références qui aideront le lecteur. Nous terminons en donnant l'application axiomatique en vue. Nous supposons pour cela la métrisabilité de la frontière de l'ouvert ω et l'existence en tout point-frontière x d'une fonction surharmonique v au voisinage de $\overline{\omega}$, continue sur $\overline{\omega}$ et strictement négative en x.

Préliminaires (voir essentiellement [10] et [4]).

L'espace de base Ω est localement compact, et dénombrable à l'infini. P désigne un cône convexe adapté de fonctions continues.

Rappelons que P est dit adapté si :

1° pour tout $x \in \Omega$ il existe $p \in \mathrm{P}$ tel que $p(x) > 0$;

2° pour tout $p \in \mathrm{P}$ il existe $q \in \mathrm{P}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{x \in \Omega,\ p(x) \geqslant \varepsilon q(x)\}$ soit compact.

Si $p \in \mathrm{P}$ on note H_p l'espace de Banach des fonctions continues φ sur Ω telles que $|\varphi| \leqslant \lambda p$ pour un $\lambda \geqslant 0$, muni de la norme $\|\varphi\|_p = \operatorname*{Sup}_{x \in \Omega} \left|\frac{\varphi(x)}{p(x)}\right|$ est muni de la topologie limite inductive des H_p. De façon analogue $\mathcal{F}_p$ désigne l'espace des fonctions numériques f telles qu'il existe un $\lambda \geqslant 0$ pour lequel on ait $|f| \leqslant \lambda p$ et $\mathcal{F}_{\mathrm{P}} = \bigcup_{p \in \mathrm{P}} \mathcal{F}_p$.

On note par $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}}$ l'espace des mesures μ P-intégrables c'est-à-dire telles que $\int |p|\, d|\mu| < +\infty$ pour toute $p \in \mathrm{P}$.

Toute forme linéaire positive sur H_{P} est représentable par une mesure de $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}}^+$. $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}}$ est le dual de H_{P} et $\mathfrak{M}_{\mathrm{P}} = \mathfrak{M}_{\mathrm{P}}^+ - \mathfrak{M}_{\mathrm{P}}^+$.

Si C est un cône convexe de fonctions semi-continues inférieurement sur Ω et si μ et $\nu \in \mathfrak{M}_C^+$ on dit que μ est balayée de ν (notée $\mu \underset{(C)}{\prec} \nu$) si

$$\int \varphi \, d\mu \leqslant \int \varphi \, d\nu \qquad \text{pour toute} \qquad \varphi \in C$$

$\mu \underset{(C)}{\prec} \nu$ définit une relation de préordre sur $\mathfrak{M}_C^+$.

Nous supposerons pour la suite que C est un cône convexe stable par enveloppe inférieure finie, et contenue dans H_P où P est un cône convexe adapté contenu dans C^+.

Ces conditions sont plus fortes qu'il n'est nécessaire pour parler de frontière de Choquet, mais elles sont réalisées dans les applications que nous avons en vue ([2]).

Nous supposerons de plus, l'existence d'une fonction φ, $\varphi \in C$, strictement positive ($\varphi > 0$) dans Ω.

A l'aide du lemme de Zorn et d'un argument de compacité comme dans ([4]) et en s'aidant des résultats de [10] ([3]), on montre que toute mesure $\mu \in \mathfrak{M}_C^+$ possède une mesure $\nu \in \mathfrak{M}_C^+$ minimale, $\nu \underset{(C)}{\prec} \mu$, c'est-à-dire telle que toute mesure $\sigma \in \mathfrak{M}_C^+$, $\sigma \underset{(C)}{\prec} \mu$ vérifie $\int \varphi \, d\sigma = \int \varphi \, d\nu$ pour toute $\varphi \in C$.

Pour toute mesure $\mu \in \mathfrak{M}_P^+$, et pour toute $f \in H_P$ on a la relation fondamentale

$$(1) \qquad \operatorname{Inf} \{\mu(\varphi),\ \varphi \in C,\ \varphi \geqslant f\} = \operatorname{Sup} \{\nu(f),\ \nu \underset{(C)}{\prec} \mu\}.$$

Proposition 1. — *$\mu \in \mathfrak{M}_P^+$ est minimale si et seulement si pour toute $t \in -C$, on a :*

$$(2) \qquad \int t \, d\mu = \operatorname{Inf} \left\{ \int \varphi \, d\mu,\ \varphi \in C,\ \varphi \geqslant t \right\}.$$

Si C est stable par enveloppe inférieure finie ceci est équivalent à

$$(2') \quad \int t \, d\mu = \int \hat{t} \, d\mu \qquad \text{où} \qquad \hat{t} = \operatorname{Inf} \{\varphi \in C,\ \varphi \geqslant t\}.$$

On en déduit que les mesures minimales forment un cône convexe contenu dans $\mathfrak{M}_P^+$.

([2]) La condition $\operatorname{Inf}(C, 0) \subset 0(C^+)$ suffirait à des modifications de détails près à entraîner les propriétés relatives au balayage et à la frontière de Choquet. Voir ([10]) dans le cas où il y a séparation linéaire.

([3]) On utilise la compacité de $A_\mu = \{\nu \in \mathfrak{M}_P^+,\ \nu \prec \mu\}$ pour la topologie faible $\sigma(\mathfrak{M}_P, H_P)$.

Définition 2. — *Une fonction* $f \in \mathcal{F}_P$ *est dite* C-*concave ou concave si pour tout* $x \in \Omega$ *et toute* $\mu \in \mathfrak{M}_P^+$, $\mu \prec \varepsilon_x$ *on a* $\overline{\int} f\, d\mu \leqslant f(x)$.

On note $\hat{C}$ le cône convexe des fonctions concaves continues. $\hat{C}$ est stable par enveloppe inférieure finie et il est équivalent de parler de balayage par rapport à C ou à $\hat{C}$. Ceci se démontre comme dans le cas compact (voir [4] p. 484).

Proposition 3. — $f \in H_P$ *est concave si et seulement si* $f = \hat{f}$.

Démonstration. — Si $f = \hat{f}$ il existe un ensemble filtrant décroissant $\mathcal{F} \subset C$ tel que $\inf_{v \in \mathcal{F}} v = \hat{f}$. On en déduit que si $\mu \in \mathfrak{M}_P^+$, $\mu \prec \varepsilon_x$ on a $\int \hat{f}\, d\mu = \inf_{v \in \mathcal{F}} \int v\, d\mu \leqslant \inf_{v \in \mathcal{F}} v(x) = \hat{f}(x)$.

Réciproquement $f(x) \leqslant \hat{f}(x) = \sup_{\mu \prec \varepsilon_x} \int f\, d\mu \leqslant f(x)$.

Corollaire 4. — *Si* μ *et* $\nu \in \mathfrak{M}_P^+$ *sont minimales et vérifient*

$$\int v\, d\mu = \int v\, d\nu \qquad \textit{pour toute} \qquad v \in C$$

alors on a

$$\int w\, d\mu = \int w\, d\nu \qquad \textit{pour toute} \qquad w \in \hat{C}$$

Démonstration. — On utilise la relation (2) et la proposition 3.

Définition 5. — *Un ensemble fermé* $A \subset \Omega$ *est un fermé stable (ou une* C-*face) si pour tout* $x \in A$ *et toute mesure* $\mu \in \mathfrak{M}_P^+$, $\mu \underset{(C)}{\prec} \varepsilon_x$ μ *est portée par* A.

Toute intersection de fermés stables est un fermé stable et tout compact stable contient un compact stable minimal.

On note $\Omega^-(C)$ l'ouvert $\Omega^- = \bigcup_{v \in C} \{v < 0\}$.

Définition 6 ([43], p. 493). — *On appelle frontière de Choquet de* C *l'ensemble, noté* ∂C *des points* x *de* Ω^- *qui appartiennent à un compact stable minimal.*

Il résulte de [10] lemme 3, que la frontière de Choquet n'est pas vide, et qu'elle vérifie la propriété

$$(\varphi \in \mathrm{C},\ \varphi(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \partial\mathrm{C} \Longrightarrow \varphi(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \Omega).$$

Il résulte de [10], lemme 4, que tout compact stable minimal K tel que $\Omega^- \cap \mathrm{K} \neq \emptyset$, est contenu dans Ω^-.

Lemme 7. — *$x, y \in \Omega^-$ appartiennent à deux compacts stables minimaux disjoints si et seulement si x et y sont linéairement séparés par* C *(ou par* $\hat{\mathrm{C}}$*)* (4).

Démonstration. — Soient K_x et K_y les compacts stables minimaux contenant respectivement x et y. Si $\varphi(x) = \lambda\varphi(y)$ $(\lambda > 0)$ pour toute $\varphi \in \mathrm{C}$ on a $\lambda\varepsilon_y \prec \varepsilon_x$ et donc $y \in \mathrm{K}_x$.

La réciproque est une conséquence immédiate de [10], lemme 5.

Proposition 8 ([4], th. 2.1, p. 490). — *Si $x \in \Omega$ et si A_x désigne le plus petit fermé stable contenant x, les propositions suivantes sont équivalentes :*

a) A_x *est un compact minimal;*

b) $\mu(\varphi) = \varphi(x)$ *pour toute* $\varphi \in \hat{\mathrm{C}}$ *et toute mesure* $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathrm{P}}^+$, $\mu \prec \varepsilon_x$;

c) $\mu(\varphi) = \varphi(x)$ *pour toute* $\varphi \in \mathrm{Inf}\,(\mathrm{C},\ 0)$ *et toute mesure* $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathrm{P}}^+$, $\mu \prec \varepsilon_x$.

Démonstration. — *a)* $\Longrightarrow$ *b)*. Soit $t \in \mathrm{C}$ telle que $\varphi(x) + t(x) = 0$ on a alors $\varphi + t = 0$ sur A_x d'après le lemme 7. Si $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathrm{P}}^+$ $\mu \prec \varepsilon_x$ on a :

$$0 = s(x) + t(x) \geqslant \mu(s) + \mu(t) = \mu(s + t) = 0$$

et $\mu(s) = s(x)$.

b) $\Longrightarrow$ *c)* est évident

c) $\Longrightarrow$ *a)* se démontre comme dans [4] th. 2.1, g $(\Longrightarrow a)$.

On en déduit la relation (cas compact voir [4] p. 495)

$$(3)\quad \partial\mathrm{C} = \Omega^- \cap \Bigl(\bigcap_{t \in -\mathrm{Inf}(\mathrm{C},\,0)} \{\hat{t} = t\}\Bigr) = \Omega^- \cap \Bigl(\bigcap_{t \in -\hat{\mathrm{C}}} \{\hat{t} = t\}\Bigr)$$

(4) Les balayages par rapport à C ou à $\hat{\mathrm{C}}$ sont les mêmes ([4], p. 484).

Si x vérifie $\hat{t}(x) = t(x)$ pour toute $t \in -\mathrm{C}$ (resp. $t \in -\hat{\mathrm{C}}$) et si $v, s \in \mathrm{C}$ (resp. $v, s \in \hat{\mathrm{C}}$) on a

$$v(x) - s(x) \leqslant \widehat{v - s}(x) \leqslant \widehat{v(x)} + \widehat{(-s(x))} = v(x) - s(x)$$

et $f(x) = \hat{f}(x)$ pour toute $f \in \mathrm{C} - \mathrm{C}$ (resp. $f \in \hat{\mathrm{C}} - \hat{\mathrm{C}}$).

On en déduit que

$$\bigcap_{f \in \mathrm{C}-\mathrm{C}} \{f = \hat{f}\} \supset \bigcap_{t \in -\mathrm{C}} \{t = \hat{t}\} \supset \bigcap_{t \in -\hat{\mathrm{C}}} \{t = \hat{t}\} = \bigcap_{t \in \hat{\mathrm{C}}-\hat{\mathrm{C}}} \{t = \hat{t}\}$$

On a aussi $\mathrm{Inf}\,(\mathrm{C}, 0) \subset \mathrm{C} - \mathrm{C}$ d'après la relation

$$\mathrm{Inf}\,(v, 0) = \mathrm{Inf}\,(v + u, u) - u.$$

On a donc les inclusions :

$$\bigcap_{t \in \hat{\mathrm{C}}} \{\hat{t} = t\} = \bigcap_{t \in \hat{\mathrm{C}}-\hat{\mathrm{C}}} \{\hat{t} = t\} \subset \bigcap_{t \in \mathrm{C}-\mathrm{C}} \{\hat{t} = t\} \subset \bigcap_{t \in -\mathrm{Inf}(\mathrm{C},0)} \{\hat{t} = t\}$$

De (3) on tire :

$$(3') \quad \partial\mathrm{C} = \Omega^- \cap \Big(\bigcap_{t \in \mathrm{C}-\mathrm{C}} \{\hat{t} = t\}\Big) = \Omega^- \cap \Big(\bigcap_{t \in -\mathrm{C}} \{\hat{t} = t\}\Big).$$

Si Ω est à base dénombrable, il existe suivant un argument classique une suite $\{f_n\} \subset \mathrm{H_P}$ dense dans $\mathrm{C} - \mathrm{C}$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et il est facile de voir que si $f \in \mathrm{C} - \mathrm{C}$, $f = \lim f_{n_p}$ on a $\hat{f} = \lim \hat{f}_{n_p}$ pour cette topologie.

On conclut que $\partial\mathrm{C} = \Omega^- \cap \Big(\bigcap_n \{f_n = \hat{f}_n\}\Big)$ est un G_δ.

Si $\Omega^- = \Omega$, une mesure $\mu \in \mathfrak{M}_\mathrm{P}^+$ est minimale si et seulement si elle est portée par $\partial\mathrm{C}$ d'après (2′) et (3′).

Proposition 9. — *Si* $\mathrm{C} \subset \mathrm{H_P}$ *est un cône convexe stable par enveloppe inférieure finie, linéairement séparant et si* $\mathrm{P} \subset \mathrm{C}^+$ *est un cône convexe adapté, l'espace vectoriel* $\mathrm{C} - \mathrm{C}$ *est dense dans* $\mathrm{H_P}$.

Démonstration. — Adaptation immédiate de celle du théorème 12 de [11].

On désigne par $\mathcal{H}$ un ensemble de fonctions C-affines continues ([5]).

([5]) u est C-affine si u et $-u$ sont C-concaves.

DÉFINITION 10. — ([4] p. 517) *le couple* $(\mathcal{H}, \mathrm{C})$ *est un simplexe semi-géométrique si pour toutes mesures* μ, ν *minimales telles que*

$$\mu(h) = \nu(h) \qquad \textit{pour toute} \qquad h \in \mathcal{H}$$

on a

$$\mu(\varphi) = \nu(\varphi) \qquad \textit{pour toute} \qquad \varphi \in \mathrm{C}.$$

DÉFINITION 11. — ([4], p. 513), *le couple* $(\mathcal{H}, \mathrm{C})$ *est appelé simplexe géométrique si pour toutes* $\varphi \in \mathrm{C}$, $t \in -\mathrm{C}$ *telles que* $t < \varphi$ *il existe* $h \in \mathcal{H}$ *vérifiant*

$$t \leqslant h \leqslant \varphi.$$

Tout simplexe géométrique est semi-géométrique d'après (2). Dans le cas compact les deux définitions coïncident, lorsqu'il existe $\varphi \in \mathrm{C}$, $\varphi < 0$.

THÉORÈME 12. — *Soient* $\mathcal{S}_{\mathrm{P}} \subset \mathrm{W}_{\mathrm{P}}$ *deux cônes convexes, stables par enveloppe inférieure finie, contenus dans* $\mathcal{C}(\Omega)$ (Ω *à base dénombrable*), *et* P *un cône convexe adapté contenu dans* $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$. *On suppose que* $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$ *contient une fonction* s_0 *strictement positive sur* Ω *et que, en tout point* x *de* Ω *il existe* $\varphi \in \mathcal{S}_{\mathrm{P}}$ *telle que* $\varphi(x)$ *soit strictement négatif* (6). *Soient* M_{P} *l'espace des fonctions* W_{P}*-affines contenues dans* H_{P} *et* L_{P} *un sous-espace de fonctions* $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$*-affines contenues dans* H_{P}. *Si* $(\mathrm{L}_{\mathrm{P}}, \mathcal{S}_{\mathrm{P}})$ *est un simplexe semi-géométrique, si* $\partial \mathrm{W}_{\mathrm{P}} \subset \partial \mathcal{S}_{\mathrm{P}}$ *et si* $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$ *sépare linéairement les points de* $\overline{\partial \mathrm{W}_{\mathrm{P}}}$ *qui sont linéairement séparés par* W_{P}, *alors* L_{P} *et* M_{P} *ont même adhérence dans* H_{P}.

On utilisera le lemme suivant :

LEMME 13. — *Si* C *est un cône convexe contenu dans* $\mathcal{C}(\Omega)$, Ω *localement compact et s'il existe une* $p \in \mathrm{C}$ *telle que* $1 \in \mathrm{O}(p)$ (7) *alors la relation d'équivalence*

$$x \sim y \Longleftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \qquad \textit{pour toute} \qquad \varphi \in \mathrm{C}$$

est fermée et l'espace quotient $\tilde{\Omega}$ *est localement compact.*

(6) Hypothèses simplificatrices. P adapté entraîne l'existence d'une $s_0 \in \hat{\mathrm{P}}$, $s_0 > 0$ (cf. (4)). D'autre part il suffit de $\Omega^-(s_{\mathrm{P}}) \neq \emptyset$. L'approximation sur $\Omega^-(s_{\mathrm{P}})$, pris comme espace de base (pour les restrictions) s'étend à Ω d'après la propriété $(\varphi \in \hat{\mathrm{C}}^+ \Longleftrightarrow \varphi(x) \geqslant 0 \ \forall x \in \partial \mathrm{C})$.

(7) $1 \in \mathrm{O}(p)$ signifie que $\forall \varepsilon > 0$ l'ensemble $\{x \in \Omega, \varepsilon p x) \leqslant 1\}$ est compact.

Démonstration. — Soient F fermé $\subset \Omega$, $\tilde{F}$ son saturé par la relation d'équivalence et $x \in \tilde{\tilde{F}}$. Pour toute suite finie $\omega = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $f_i \in C$, $i = 1, 2, \ldots, n$ les ensembles

$$A_\omega(\varepsilon) = \{y \in \Omega, \ |f_i(y) - f_i(x)| \leqslant \varepsilon, \ i = 1, 2, \ \ldots, \ n\}$$

sont fermés dans Ω et $A_\omega(\varepsilon) \cap \tilde{F}$ est non vide. Il existe donc $z \in A_\omega(\varepsilon)$ tel que $\tilde{z} \cap F \neq \emptyset$, c'est-à-dire $A_\omega(\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Comme les $A_\omega(\varepsilon)$ forment une base de filtre, il suffit de montrer qu'il existe un $A_{\omega_0}(\varepsilon)$ compact, pour conclure que $\left(\bigcap_{\omega, \varepsilon} A_\omega(\varepsilon)\right) \cap F \neq \emptyset$ et que $x \in \tilde{F}$. Si on prend $\omega_0 = \{p\}$, l'ensemble $\{y \in \Omega, \ p(y) \leqslant p(x) + \varepsilon\}$ est compact et à fortiori $A_{\omega_0}(\varepsilon)$.

Si i est l'injection canonique $\Omega \rightsquigarrow \tilde{\Omega}$. Si $y \in \tilde{\Omega}$ et si O est un ouvert de $\tilde{\Omega}$, $O \ni y$. $i^{-1}(y)$ est compact dans Ω et il existe un voisinage compact K de $i^{-1}(y)$ tel que $i^{-1}(O) \supset \tilde{K} \supset V = \mathring{\tilde{K}} \supset i^{-1}(y)$. $\complement V$ est fermé et $\complement V \cap i^{-1}(y)$ est vide. On en déduit que $\tilde{\complement} V \cap i^{-1}(y)$ est vide et si on pose $B = \tilde{\complement} V$, $\complement B = U$ est un ouvert saturé tel que

$$i^{-1}(O) \supset U \supset i^{-1}(y)$$

et comme $U \subset V \subset \tilde{K}$, $i(U)$ est un ouvert contenu dans $i(\tilde{K})$ qui est quasi-compact. On vérifie de même que $\tilde{\Omega}$ est séparé [8].

Démonstration du Théorème 12. — Nous allons montrer que L_P et M_P ont même orthogonal. Soit $\mu \in \mathfrak{M}_P$ telle que $\mu(l) = 0$ pour toute $l \in L_P$. $\mu = \alpha - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}_P^+$ et $\alpha(l) = \beta(l)$ pour toute $l \in L_P$.

Soient λ et $\nu \in \mathfrak{M}_P^+$ minimales par rapport à W_P. $\lambda \underset{(W_P)}{\prec} \alpha$ et $\nu \underset{(W_P)}{\prec} \beta$. Elles sont portées par ∂W_P, donc par $\partial \mathcal{G}_P$. Elles sont donc aussi minimales par rapport à $\mathcal{G}_P$. $(L_P, \mathcal{G}_P)$ étant un simplexe semi-géométrique on déduit de la relation $\lambda(l) = \nu(l)$ pour toute $l \in L_P$, que $\lambda(\varphi) = \nu(\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{G}_P$.

Notons $\mathcal{G}_{P, s_0}$ l'ensemble

$$\mathcal{G}_{P, s_0} = \{f \in \mathcal{C}(\Omega), \ f = \varphi/s_0, \ \varphi \in \mathcal{G}_P\}$$

[8] Il est aussi simple d'appliquer la prop. 9 p. 122 du livre III, 3e édition de N. Bourbaki.

et introduisons de même les cônes W_{P,s_0} et P_{s_0}. P_{s_0} est encore adapté et on a $\mathcal{G}_{P,s_0} \subset W_{P,s_0} \subset H_{P_{s_0}}$. Définissons sur W_{P,s_0} les formes linéaires

$$\lambda'(\varphi/s_0) = \lambda(\varphi), \qquad \nu'(\varphi/s_0) = \nu(\varphi) \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in W$$

μ' et ν' s'étendent en des formes linéaires sur $H_{P_{s_0}}$, représentables par des mesures du même nom. λ' et ν' sont minimales par rapport à W_{P,s_0}. En effet, si $t \in -W_P$, $t/s_0 \in -W_{P,s_0}$ et $\lambda'(t/s_0) = \lambda(t)$ par définition.

$$\begin{aligned}\lambda'(t/s_0) = \lambda(t) = \lambda(\hat{t}) &= \operatorname{Inf}\{\lambda(\varphi),\ \varphi \in W_P,\ \varphi \geqslant t\} \\ &= \operatorname{Inf}\{\lambda'(\varphi/s_0),\ \varphi/s_0 \in W_{P,s_0},\ \varphi/s_0 \geqslant t/s_0\}\end{aligned}$$

λ' est donc minimale d'après (2). Il en est de même de ν'. λ' et ν' sont donc portées par $\partial W_{P,s_0} = \partial W_P$.

Les points de Ω sont séparés par W_{P,s_0} si et seulement s'ils sont linéairement séparés par W_P.

On considère donc la relation d'équivalence

$$x \sim y \Longleftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \qquad \text{pour toute} \qquad \varphi \in W_{P,s_0}.$$

L'espace quotient $\tilde{\Omega}$ est localement compact d'après le lemme 13 $(1 \in \mathcal{G}_{P,s_0} \subset W_{P,s_0})$. $\mathcal{G}_{P,s_0}$, W_{P,s_0}, P_{s_0} définissent de façon naturelle des cônes $\tilde{\mathcal{G}}_{P,s_0}$, $\tilde{W}_{P,s_0}$, $\tilde{P}_{s_0}$ sur $\tilde{\Omega}$; λ' et ν' donnent naissance aux mesures $\tilde{\lambda}'$ et $\tilde{\mu}'$, définies par $\tilde{\lambda}'(\tilde{\varphi}/s_0) = \lambda'(\varphi/s_0)$, $\tilde{\nu}'(\tilde{\varphi}/s_0) = \nu'(\varphi/s_0)$ pour toute $\varphi/s_0 \in \tilde{W}_{P,s_0}$.

En particulier, on a :

$$\tilde{\lambda}'(\tilde{\varphi}/s_0) = \tilde{\nu}'(\tilde{\varphi}/s_0) \qquad \text{pour toute} \qquad \tilde{\varphi}/s_0 \in \tilde{\mathcal{G}}_{P,s_0}.$$

D'après la proposition 9, et du fait que l'application i est fermée, $\underline{\tilde{\mathcal{G}}_{P,s_0}}$ engendre un espace $\underline{\text{vectoriel}}$ dense dans l'espace $H_{P_{s_0}}(\partial \tilde{W}_{P,s_0})$ des restrictions à $\partial \tilde{W}_{P,s_0}$ des fonctions de $H_{\tilde{P}_{s_0}}$, on conclut que $\tilde{\lambda}' = \tilde{\nu}'$ [9].

On en déduit que

$$\lambda(\varphi) = \lambda'(\varphi/s_0) = \tilde{\lambda}'(\tilde{\varphi}/s_0) = \tilde{\nu}'(\varphi/s_0) = \varphi'(\varphi/s_0) = \nu(\varphi)$$

pour toute $\varphi \in W_P$ et d'après le corollaire 4, il vient

$$\mu(m) = \lambda(m) - \nu(m) \qquad \text{pour toute} \qquad m \in M_P.$$

[9] $\tilde{\lambda}'$ et $\tilde{\nu}'$ sont minimales par rapport à $\tilde{W}$ et $\tilde{\Omega}_{P,s_0}$ est mêtrisable.

Application axiomatique.

L'espace de base X muni de l'axiomatique des Roumains [3, H_0, ..., H_4] ou de Bauer [1; 1, ..., IV], est un K_0.

Soit $\omega \subset X$ un ouvert à frontière ω^* non vide vérifiant les propriétés H_1 ou H_2 suivantes :

H_1) ω est relativement compact et il existe un voisinage U de $\overline{\omega}$ de type M.P.

H_2) $\overline{\omega}$ est non compact et il existe un potentiel fini continu de X strictement positif au voisinage de $\overline{\omega}$.

On prend les définitions de Vincent-Smith pour les ensembles W, $\mathcal{G}$, L et M relativement à $\overline{\omega}$ (10). P désigne l'ensemble des potentiels continus sur X. On pose $W_P = W \cap H_P$, $\mathcal{G}_P = \mathcal{G} \cap H_P$ etc..., W^+, les éléments positifs ($\geqslant 0$) de W etc...

Pour tout fermé $E \subset \overline{\omega}$, $H_P(E)$ désigne l'ensemble des restrictions à E des éléments de H_P et de même $W_P(E) = W_P \cap H_P(E)$, etc...

Nous supposerons dans la suite que :

Dans le cas H_1) il existe un élément $v \in \mathcal{G}$, strictement positif et que $\mathcal{G}$ sépare ω^*.

Dans le cas H_2) $\mathcal{G}_P$ sépare déjà linéairement ω^*.

Les principes du minimum suivants sont alors valables.

Dans le cas H_1) :

Toute fonction v hyperharmonique dans ω telle que $\liminf_{\omega \ni x \to y \in \omega^*} v(x) \geqslant 0$ pour tout $y \in \omega^*$ est positive ($\geqslant 0$) (ceci a lieu parce que ω est lui-même de type M.P.).

Dans le cas H_2) :

Toute fonction v hyperharmonique dans ω, $v \geqslant -p$ pour un $p \in P$ telle que $\liminf_{\omega \ni x \to y \in \omega^*} v(x) \geqslant 0$ pour tout $y \in \omega^*$ est positive. Ceci a lieu parce que le critère local des fonctions hyperharmoniques est valable.

Nous allons dans ce qui va suivre appliquer les résultats énoncés dans les préliminaires à l'espace de base constitué par la frontière ω^* de ω. ω^* tiendra donc lieu de Ω et les

(10) W (resp. $\mathcal{G}$) représente les $f \in \mathcal{C}(\overline{\omega})$, surharmoniques dans ω (resp. prolongeable surharmoniquement au voisinage de $\overline{\omega}$). M (resp. L) représente les $f \in \mathcal{C}(\overline{\omega})$, harmoniques dans ω (resp. prolongeable harmoniquement au voisinage de $\overline{\omega}$).

propriétés de densité obtenues sur ω^* seront valables sur $\overline{\omega}$ grâce au principe du minimum. Nous ne traitons que le cas H_2) étant entendu que toutes les propriétés énoncées seront aussi valables dans le cas H_1.

Nous rappelons des définitions et des propriétés qui sont plus ou moins connues ([5], [2] et [9]) sur les problèmes de Dirichlet pour ouvert et pour fermé :

Problème de Dirichlet pour ouvert.

Si f est une fonction de ω^* dans $\overline{\mathbf{R}}$, on pose :

$$\overline{\mathrm{H}}_f^\omega = \mathrm{Inf}\,\{v,\ v \in \overline{\mathscr{H}}_f^\omega\}$$

où $\overline{\mathscr{H}}_f^\omega$ est la famille des fonctions v, hyperharmoniques dans ω et vérifiant les conditions suivantes :

1) $\liminf\limits_{\omega \ni x \to y \in \omega^*} v(x) \geqslant f(y)$ et $> -\infty$ pour tout $y \in \omega^*$.

2) $v \geqslant -p_v$ pour un p_v est un potentiel dans X.

On définit de façon analogue $\underline{\mathrm{H}}_f^\omega$ qui vaut $-\mathrm{H}_{(-f)}^\omega$.

DÉFINITION 14. — *f est dite résolutive si $\underline{\mathrm{H}}_f^\omega = \overline{\mathrm{H}}_f^\omega$.*

En constatant de façon classique que toute $v \in \mathrm{W_P}(\omega^*)$ est résolutive et que $\mathrm{W_P}(\omega^*) - \mathrm{W_P}(\omega^*)$ est dense dans $\mathrm{H_P}(\omega^*)$ on obtient le théorème :

THÉORÈME 15. — *Toute fonction $f \in \mathrm{H_P}(\omega^*)$ est résolutive et pour tout $x \in \omega$ l'application $f \rightsquigarrow \mathrm{H}_f^\omega(x)$ définit une mesure de Radon positive portée par ω^* et notée ρ_x^ω.*

La dernière propriété provient du fait que $f \rightsquigarrow \mathrm{H}_f^\omega(x)$ est une forme linéaire positive sur l'espace adapté $\mathrm{H_P}(\omega^*)$. ρ_x^ω est définie de façon unique parce que $\mathrm{H_P}(\omega^*)$ contient $\mathscr{C}_{\mathrm{K}}(\omega^*)$.

DÉFINITION 16. — *$x_0 \in \omega^*$ est dit régulier si*

$$\lim_{\omega \ni x \to x_0} \mathrm{H}_\varphi(x) = \varphi(x_0)$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathrm{H_P}(\omega^*)$.

THÉORÈME 17. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) *$x_0 \in \omega^*$ est régulier*

2) $\liminf\limits_{\omega \ni x \to x_0} \overline{\mathrm{H}}_s^\omega(x) = s(x_0)$ *pour toute* $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{P}}(\omega^*)$.

Problème de Dirichlet pour fermé.

Soit E un fermé de Ω à frontière E^* non vide.

On pose $\overline{K}_f^E = \text{Inf}\,\{v,\ v \in \overline{K}_f^E\}$ où $\overline{K}_f^E$ est la famille des fonctions v, hyperharmoniques au voisinage de E et vérifiant les conditions

1) $\liminf\limits_{\complement E \ni x \to y \in E^*} v(x) \geqslant f(y)$ pour tout $y \in E^*$;

2) $v \geqslant -p_v$ où p_v est un potentiel dans X.

On définit de façon analogue $\underline{K}_f$ qui vaut $-\overline{K}_{(-f)}$ les propriétés énoncées dans [2] et [9] s'étendent et sont à peu près inchangées. Notons les propriétés suivantes qui nous intéressent :

Théorème 18. — *Pour toute* $\varphi \in H_P(E^*)$, *on a* $\underline{K}_\varphi = \overline{K}_\varphi$ *et pour toute* $s \in \mathcal{S}_P$ *on a* $K_s = \text{Sup}\, H_{s'}^{\omega_i}$ *où* s' *est une fonction surharmonique dans un voisinage* ω_s *de* E *et égale à* s *sur* E *et* ω_i *un ensemble filtrant décroissant d'ouverts de type M.P. contenus dans* ω_s *et tel que* $\cap\, \omega_i = E$.

Corollaire 19. — *Il existe une mesure* $\mu_x \in \mathcal{M}_P^+(\omega^*)$ *telle que* $K_p(x) = \int \varphi\, d\mu_x$ *pour toute* $\varphi \in H_P(E^*)$.

Remarque 20. — On a $\int u\, d\mu_x = u(x)$ pour toute $u \in L_P$.

Définition 21. — *Un point* $x_0 \in E^*$ *est dit stable si on a* $K_\varphi(x_0) = \varphi(x_0)$ *pour toute fonction* $\varphi \in H_P(E^*)$ *ou bien de façon équivalente si* $\mu_{x_0} = \varepsilon_{x_0}$.

Proposition 22. — $x_0 \in E^*$ *est stable si et seulement si* $K_s^E(x_0) = s(x_0)$ *pour toute* $s \in \mathcal{S}_P$.

On note $\mathcal{R}_e$ l'ensemble des points-frontière réguliers de ω et $\mathcal{R}_s$ l'ensemble des points-frontière stables de $\overline{\omega}$. Nous supposons de plus dans tout ce qui suit que pour tout $x \in \omega^*$ il existe $v \in \mathcal{S}_P(\omega^*)$, $v(x) < 0$. Notons que les compacts stables minimaux sont alors réduits à des points d'après le lemme 7.

Proposition 23. — $(L_P(\omega^*), \mathcal{S}_P(\omega^*))$ *est un simplexe géométrique.*

Proposition 24. — $\partial\mathcal{S}_P(\omega^*) = \mathcal{R}_s$.

Les démonstrations des propositions 25 et 26 sont les mêmes que celles données par Vincent-Smith dans ces annales pour le cas compact. On utilise le théorème 20 et la proposition 24.

COROLLAIRE 25. — $L_P(\omega^*)$ *est dense dans* $H_P(\omega^*)$ *si et seulement si tout point de* ω^* *est stable pour* $\overline{\omega}$.

Démonstration. — Soit $\mu \in \mathcal{M}_P(\omega^*)$ portée par ω^*, μ orthogonale à $L_P(\omega^*)$. Si $\mathcal{R}_s = \omega^*$ pour toute $t \in -\mathcal{S}_P(\omega^*)$ on a $t(x) = \hat{t}(x)$ $\forall x \in \omega^*$ et $\mu = \mu_1 - \mu_2$, $\mu_i \in \mathcal{M}_P^+(\omega^*)$ $(i = 1, 2)$ minimales

$$\begin{aligned}\mu_1(t) = \mu_1(\hat{t}) &= \operatorname{Inf}\{\mu_1(l),\ l \in L_P,\ l > t\}\\ &= \operatorname{Inf}\{\mu_2(l),\ l \in L_P,\ l > t\} = \mu_2(\hat{t}) = \mu_2(t)\end{aligned}$$

et $\mu = 0$ par densité.

Réciproquement si $x \in \omega^*$, soit $\mu \in \mathcal{M}^+(\omega^*)$, $\mu \prec \varepsilon_x$ on a $\mu(l) = l(x)$ pour toute $l \in L_P(\omega^*)$ et donc $\mu = \varepsilon_x$ et $x \in \partial\mathcal{S}_P(\omega^*)$. On conclut grâce à la proposition 24.

PROPOSITION 26. — *On a les inclusions*

$$\mathcal{R}_e \supset \partial W_P(\omega^*) \supset \partial\mathcal{S}_P(\omega^*) = \mathcal{R}_s.$$

Démonstration. — Si $x \in \partial W_P(\omega^*)$ pour toute $\varphi \in H_P(\omega^*)$ on a $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ (le chapeau étant pris relativement au cône $W_P(\omega^*)$).

Pour toute $t \in -W_P$ on a $t \leqslant \overline{H}_t^\omega \leqslant \hat{t}$ dans ω et $\hat{t}$ est semi-continue supérieurement. Il vient donc

$$t(x) \leqslant \liminf_{y \to x} \overline{H}_t^\omega(y) \leqslant \limsup_{y \to x} \overline{H}_t^\omega(y) \leqslant \hat{t}(x) = t(x)$$

ce qui montre que $x \in \mathcal{R}_e$.

COROLLAIRE 27. — *Si* ω^* *est métrisable et si* $\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_s$, L_P *est dense dans* M_P.

Démonstration. — On a alors $\partial\mathcal{S}_P(\omega^*) = \partial W_P(\omega^*)$ et le corollaire résulte du théorème 14 et du principe minimum.

DÉFINITION 28. — ([4], p. 521) *Un ouvert* ω *non relativement compact à frontière* ω^* *non vide est dit faiblement déterminant s'il existe un potentiel strictement positif au voisinage* *de $\overline{\omega}$ et si pour toute fonction s surharmonique positive localement bornée au voisinage de $\overline{\omega}$, harmonique dans ω, telle que $s|\omega^* \in H_P(\omega)$, il existe une famille filtrante croissante de fonctions h_i, $\{h_i|\omega^*\} \subset H_P(\omega^*)$, h_i harmonique dans ω, continue dans $\overline{\omega}$ et telle que*

$$s(x) = \operatorname*{Sup}_{i \in I} h_i(x) \qquad \textit{pour tout} \qquad x \in \omega^*.$$

Notons $\mathcal{S}'^{+}_{P}(\omega^*)$ le cône des restrictions à ω^* des fonctions surharmoniques positives ($\geqslant 0$) localement bornées au voisinage de $\overline{\omega}$ et qui sont dans $H_P(\omega^*)$.

PROPOSITION 29. — *Si ω est faiblement déterminant et si $\mathcal{S}'^{+}_{P}(\omega^*)$ sépare linéairement ω^* (11) on a :*

$$R_e = \partial W_P(\omega^*).$$

Démonstration. — Comme dans ([4], p. 522) soit $t \in -\mathcal{S}'^{+}_{P}(\omega^*)$ et $v \in W_P(\omega^*)$ tels que :

$$t < v.$$

Il existe une fonction u prolongeant sous-harmoniquement t au voisinage de $\overline{\omega}$. On note t' la régularisée semi-continue supérieurement de la fonction égale à H_t^ω dans ω et à u en dehors. t' est sous-harmonique au voisinage de $\overline{\omega}$ et on a :

$$t(x) \leqslant t'(x) \leqslant \limsup_{y \to x} v(y) = v(x) \qquad \text{pour tout} \qquad x \in \omega^*$$

et donc $t'(x) \leqslant \hat{t}(x)$ pour tout $x \in \omega^*$.

D'autre part, ω est faiblement déterminant et il existe une famille filtrante décroissante de fonctions harmoniques dans ω et continues sur $\overline{\omega}$ telles que leurs restrictions h_i à ω^* appartiennent à $W_P(\omega^*)$ et vérifient

$$t'(x) = \operatorname*{Inf}_{i \in I} h_i(x) \geqslant \hat{t}(x) \qquad \text{pour tout} \qquad x \in \omega^*.$$

On a donc $t' = \hat{t}$ sur ω^*.

Si $x_0 \in \mathcal{R}$, $t(x_0) = t'(x_0) = \hat{t}(x_0)$ pour toute $t \in -\mathcal{S}'^{+}_{P}(\omega^*)$. Comme $\mathcal{S}'^{+}_{P}(\omega^*)$ engendre un espace vectoriel dense dans $H_P(\omega^*)$ on conclut que $\varphi(x_0) = \hat{\varphi}(x_0)$ pour toute $\varphi \in H_P(\omega^*)$. En particulier $s(x_0) = \hat{s}(x_0)$ pour toute $s \in -W_P(\omega^*)$ et $x_0 \in \partial W_P(\omega^*)$.

(11) Si $\overline{\omega}$ est non compact cette séparation a déjà lieu.

COROLLAIRE 30. — $(M_P(\omega^*), W_P(\omega^*))$ *est un simplexe semi-géométrique si* ω *est faiblement déterminant.*

Démonstration. — Soient $\mu, \nu \in \mathcal{M}_P^+(\omega^*)$, minimales pour le cône $W_P(\omega^*)$, vérifiant $\mu(h) = \nu(h)$ pour toute $h \in M_P(\omega^*)$. Pour toute $t \in -\mathcal{S}_P(\omega^*)$ on a :

$$\mu(t) = \mu(\hat{t}) = \mu(t') = \mu(\operatorname{Inf}(h_i)) = \operatorname{Inf} \mu(h_i)$$

et de la même manière

$$\nu(t) = \operatorname{Inf} \nu(h_i)$$

où $\{h_i\} \subset M_P(\omega^*)$ est filtrante décroissante, telle que $\operatorname{Inf} h_i = \hat{t}$. On conclut que $\mu(t) = \nu(t)$.

COROLLAIRE 31. — *Si* ω *est un ouvert faiblement déterminant non relativement compact, à frontière* ω^* *métrisable et si* $\mathcal{S}'_P(\omega^*)$ *sépare linéairement* ω^* (11). L_P *et* M_P *ont même adhérence dans* H_P *si et seulement si* $\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_s$.

Démonstration. — Si x est régulier, $x \in \partial W_P(\omega^*)$ d'après la proposition 29. Soit $\mu \in \mathcal{M}_P^+$, $\mu \underset{\mathcal{S}_P(\omega^*)}{\prec} \varepsilon_x$, μ minimale pour $\mathcal{S}_P(\omega^*)$. μ est portée par $\partial\mathcal{S}_P(\omega^*)$, elle est donc portée par $\partial W_P(\omega^*)$ et minimale par rapport à $W_P(\omega^*)$.

On a $\mu(l) = l(x)$ pour toute $l \in L_P(\omega^*)$ et si $L_P(\omega^*)$ est dense dans $M_P(\omega^*)$ on a aussi

$$\mu(m) = m(x) \qquad \text{pour toute} \qquad m \in M_P(\omega^*)$$

$(M_P(\omega^*), W_P(\omega^*))$ étant un simplexe semi-géométrique on en déduit que

$$\mu(\varphi) = \varphi(x) \qquad \text{pour toute} \qquad \varphi \in W_P(\omega^*)$$

et $\mu = \varepsilon_x$ par densité d'après la proposition 9. On conclut que $x \in \partial\mathcal{S}_P(\omega^*)$ et que $x \in \mathcal{R}_s$, d'après la proposition 24.

La réciproque est le théorème 12.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BAUER, Harmonische Raüme und ihre Potentialtheorie, Lecture notes in Math. Springerverlag, 22 (1966).

[2] H. Bauer, Zum Cauchyschen un Dirichletschen Problem bei elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen, *Math Annalen* 146-153 (1966).

[3] N. Boboc, C. Constantinescu and A. Cornea, Axiomatic theory of harmonic functions. Non negative superharmonic functions, *Ann. Inst. Fourier* Grenoble, 15, 283-312 (1965).

[4] N. Boboc and A. Cornea, Convex cones of lower semicontinuous functions *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, 13 (1967), 471-525.

[5] M. Brelot, Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes, *Bull. Soc. Math.* France t. 73, 55-70 (1945).

[6] G. Choquet, Le problème des moments, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 1e année (1962) no 4, 10 p.

[7] J. Deny, Systèmes totaux de fonctions harmoniques, *Ann. Institut Fourier*, t. I, 103-113 (1949).

[8] T. W. Gamelin and Hugo Rossi, Jensen measures and algebras of analytic functions, Symposium on function algebras, Tulane University (1965), p. 1-35.

[9] A. de La Pradelle, Approximation et caractère de quasi-analyticité en théorie axiomatique des fonctions harmoniques, *Ann. Institut Fourier* t. 17, p. 383-399 (1967).

[10] G. Mokobodzki et D. Sibony, Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du Potentiel, Séminaire Choquet, 6e année (1966-67) no 5 (Initiation à l'analyse).

[11] G. Mokobodkzi et D. Sibony, Cône de fonctions et théorie du Potentiel, 11e année (1966-67) no 9.

[12] G.-F. Vincent-Smith, Uniform approximation of harmonic functions, *Ann. Institut Fourier* (1969) (à paraître).

Manuscrit reçu le 2 octobre 1969.

Arnaud de la Pradelle,
Institut Poincaré, 11, rue P.-Curie,
Paris, 5e.