Jean-Michel Bony

Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés

Annales de l'institut Fourier, tome 19, nº 1 (1969), p. 277-304

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_277_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
19,1 (1969), 277-304

PRINCIPE DU MAXIMUM, INÉGALITÉ DE HARNACK ET UNICITÉ DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES DÉGÉNÉRÉS

par Jean-Michel BONY

Les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre ont fait l'objet de nombreux travaux, consacrés essentiellement au problème de Dirichlet : existence, unicité, régularité des solutions (voir [10], [7] et [2]), et à l'hypoellipticité [6]. Nous nous intéressons ici principalement aux diverses propriétés intervenant en théorie classique du potentiel.

L'opérateur L, défini dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$, étant du type suivant

$$Lu = \sum_{k=1}^{r} X_k^2 u + Yu + au ,$$

où $X_1, \ldots, X_r$, Y sont des opérateurs différentiels homogènes du premier ordre, nous obtenons les résultats les plus importants sous l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

1) L'algèbre de Lie engendrée par $X_1, \ldots, X_r$ et Y est en tout point de rang n.

2) L'algèbre de Lie engendrée par $X_1, \ldots, X_r$ est en tout point de rang n.

Sous l'hypothèse 1), Hörmander [6] a démontré que l'opérateur L est hypoelliptique. Nous montrons ici que l'on peut résoudre le problème de Dirichlet dans des ouverts convenables, (§ 5) et qu'il existe une fonction de Green régulière (§ 6). Nous obtenons ensuite, pour ces opérateurs, la forme affaiblie de l'inégalité de Harnack connue pour les opérateurs paraboliques (§ 7).

Sous l'hypothèse 2), nous montrons que toute solution u de $Lu = 0$ qui atteint son maximum en un point est constante (§ 3) et nous obtenons la forme classique de l'inégalité de Harnack (§ 7). Si, de plus, les coefficients de L sont analytiques, nous démontrons que toute solution u de $\text{L}u = 0$ est identiquement nulle dès qu'elle est nulle au voisinage d'un point (§ 4).

Ces théorèmes sont conséquences de résultats précis sur la propagation des maximums et la propagation des supports des solutions u de $\text{L}u = 0$ pour un opérateur L quelconque (§ § 3 et 4). Leur démonstration repose sur des considérations de géométrie infinitésimale (§ 2).

Enfin, nous étudions les relations des résultats précédents avec les théories axiomatiques du potentiel (§ 8). Pour que les solutions u de $\text{L}u = 0$ satisfassent aux axiomes de Brelot (resp. de Bauer) il suffit que l'hypothèse 2) (resp. l'hypothèse 1)) soit réalisée, ces conditions étant d'ailleurs presque nécessaires. Du point de vue de la théorie du potentiel, sous l'hypothèse 2) (resp. l'hypothèse 1)), l'opérateur L a exactement les mêmes propriétés qu'un opérateur elliptique (resp. parabolique).

1. Quelques définitions.

Dans tout ce travail, nous désignerons par L un opérateur différentiel du second ordre, à coefficients réels de classe C^∞, défini dans un ouvert connexe Ω de $\mathbf{R}^n$,

$$\text{L}u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u''_{ij}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u'_i(x) + a(x)\, u(x) ,$$

et possédant les trois propriétés suivantes :

1) La forme quadratique $(a_{ij}(x))$ est positive pour chaque x, mais non nécessairement définie positive (L est un opérateur elliptique dégénéré)

$$\forall x \in \Omega ,\ \forall \xi \in \mathbf{R}^n ,\ \Sigma a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geqslant 0 .$$

2) On a $a(x) \leqslant 0$ dans Ω.

3) Il existe des champs de vecteurs[1] $X_1, \ldots, X_r$ et Y, de classe C^∞, tels que

[1] Nous identifierons toujours un champ de vecteurs X de composantes

$$\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x) ,$$

avec l'opérateur différentiel homogène du premier ordre $\text{X}u(x) = \Sigma \alpha_i(x)\, u'_i(x)$. On note $\text{X}^2 u = \text{X}(\text{X}u)$.

$$\mathrm{L}u = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{X}_k^2\, u + \mathrm{Y}u + au\,.$$

Remarquons qu'un opérateur possédant la première propriété ne possède pas nécessalrement la troisième. On ne peut pas toujours décomposer la forme quadratique $(a_{ij}(x))$ en somme de carrés qui soient des fonctions de x de classe C^∞. Il en est cependant ainsi lorsque le rang de la matrice $(a_{ij}(x))$ est constant.

Lorsque la seconde propriété n'est pas réalisée, on peut s'y ramener localement moyennant une hypothèse supplémentaire assez faible (cf. proposition 5.1)

Les opérateurs elliptiques dégénérés possèdent la propriété suivante (forme faible du principe du maximum).

PROPOSITION 1.1. – *Si une fonction u de classe* C^2 *atteint en un point x un maximum local positif, on a* $\mathrm{L}u(x) \leqslant 0$. *Si ce maximum est strictement positif et si* $a(x) < 0$, *on a* $\mathrm{L}u(x) < 0$.

En effet, la forme quadratique $(u''_{ij}(x))$ est négative au point x, d'où $\Sigma a_{ij}(x)\, u''_{ij}(x) \leqslant 0$. D'autre part, $u'_i(x) = 0$, d'où résulte la proposition.

Le crochet $[\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}]$ de deux champs de vecteurs X et Y étant défini par la relation $[\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}]\,u = \mathrm{Y}(\mathrm{X}u) - \mathrm{X}(\mathrm{Y}u)$, nous introduisons la notation suivante

DEFINITION 1.1. – *Etant donnée une famille de champs de vecteurs* $\mathrm{X}_1\,,\dots,\mathrm{X}_r$, *nous désignerons par* $\mathcal{L}(\mathrm{X}_1\,,\dots,\mathrm{X}_r)$ *l'algèbre de Lie engendrée par* $\mathrm{X}_1\,,\dots,\mathrm{X}_r$, *c'est-à-dire le plus petit* C^∞*-module, stable par l'opération crochet et contenant* $\mathrm{X}_1\,,\dots,\mathrm{X}_r$.

Pour que Z appartienne à $\mathcal{L}(\mathrm{X}_1\,,\dots,\mathrm{X}_r)$, il faut et il suffit que Z soit égal à une somme finie de termes de la forme

$$\lambda[\mathrm{X}_{i_1}\,,[\mathrm{X}_{i_2}\,,\dots,[\mathrm{X}_{i_{k-1}}\,,\mathrm{X}_{i_k}]]]$$

Le rang de $\mathcal{L}(\mathrm{X}_1\,,\dots,\mathrm{X}_r)$ en un point x est la dimension de l'espace vectoriel formé par les vecteurs $\mathrm{Z}(x)$ lorsque Z parcourt $\mathcal{L}(\mathrm{X}_1\,,\dots,\mathrm{X}_r)$. Si ce rang est constamment égal à p au voisinage d'un point, on peut, d'après le théorème de Frobenius, trouver des coordonnées locales $y_1\,,\dots,y_n$ telles que $\mathcal{L}(\mathrm{X}_1\,,\dots,\mathrm{X}_r)$ soit identique à l'ensemble des champs de vecteurs dont les composantes suivant $y_{p+1}, \ldots, y_n$ sont nulles. Si ce rang est égal à n en tout point, tout champ de vecteurs appartient à $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$.

2. Quelques résultats de géométrie infinitésimale directe.

Dans le cas particulier où les ensembles fermés considérés sont limités par des surfaces régulières, les résultats démontrés dans ce paragraphe sont des propriétés élémentaires des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre. Pour souligner ces analogies, nous introduisons les deux définitions suivantes, dans lesquelles F désigne un sous-ensemble fermé quelconque de l'ouvert Ω.

DEFINITION 2.1. – *Un vecteur v est dit normal (extérieurement) à* F *en un de ses points x_0, s'il existe une boule ouverte contenue dans $\Omega \setminus$ F, centrée en un point x_1, telle que x_0 soit adhérent à cette boule, et que $v = \lambda(x_1 - x_0)$, avec $\lambda > 0$.*

Remarquons que, en diminuant au besoin le rayon de la boule, on peut toujours supposer que x_0 est le seul point de F adhérent à cette boule.

DEFINITION 2.2. – *Un champ de vecteurs $X(x)$ est dit tangent au fermé* F *si, pour tout point x_0 de* F *et tout vecteur v normal à* F *en x_0, les vecteurs $X(x_0)$ et v sont orthogonaux.*

THEOREME 2.1. – *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et* F *un fermé de Ω. Soit $X(x)$ un champ de vecteurs lipschitzien dans Ω et tangent à* F. *Alors, toute courbe intégrale de* X *qui rencontre* F *en un point est entièrement contenue dans* F.

La démonstration de ce théorème est très voisine de la démonstration classique du théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz pour les solutions des équations différentielles ordinaires.

En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe une courbe $x(t)$ vérifiant $x'(t) = X(x(t))$, rencontrant F et non contenue dans F. On peut alors trouver un intervalle $[t_0, t_1]$ tel que

$$x(t_0) = x_0 \in F \quad \text{et} \quad x(t) \notin F \quad \text{pour} \quad t \in]t_0, t_1] .$$

Démontrons les deux lemmes suivants.

LEMME 2.1. – *Soit* $\delta(t)$ *la distance de* $x(t)$ *à* F. *Il existe une constante positive* K *telle que, pour* t *appartenant à* $]t_0, t_1]$ *on ait*

$$\liminf_{h \to 0} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{|h|} \geqslant -K\,\delta(t).$$

Soit h_n une suite tendant vers 0 et soient $x = x(t)$ et

$$x_n = x(t + h_n).$$

Pour chaque n soit y_n une projection de x_n sur F. En extrayant au besoin une sous-suite, on peut supposer que y_n converge vers un point y de F qui est alors une projection de x. On a

$$\frac{1}{|h_n|}\,(\delta(t+h_n) - \delta(t)) \geqslant \frac{1}{|h_n|}\,(|y_n - x_n| - |y_n - x|)$$

d'où

$$\liminf \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{|h|} \geqslant -\,|X(x)|\,|\cos\alpha|\,,$$

où α désigne l'angle des vecteurs $X(x)$ et $(y - x)$. Par hypothèse, les vecteurs $(y - x)$ et $X(y)$ sont orthogonaux, d'où, X étant lipschitzien :

$$|\cos\alpha| \leqslant |\sin(X(x), X(y))| \leqslant K'\,\delta(t)\,,$$

ce qui démontre le lemme.

LEMME 2.2. – *Soit* f *une fonction numérique continue sur un intervalle et vérifiant en tout point* t *de cet intervalle*

$$\liminf_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{|h|} \geqslant -M \quad \textit{avec} \quad M > 0$$

alors f *est lipschitzienne de rapport* M.

En effet, supposons qu'il existe deux points s_1 et s_2 tels que

$$f(s_1) - f(s_2) = N(s_1 - s_2) \quad \text{avec} \quad |N| > M\,.$$

Soit alors $\Phi(t) = f(t) - N(t - s_1)$. Cette fonction admet un maximum sur l'intervalle $[s_1, s_2]$ et, au point où ce maximum est atteint, on aboutit facilement à une contradiction en considérant la quantité

$$\liminf \frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{|h|} \, .$$

Fin de la démonstration du théorème 2.1. – Posons

$$\theta = \inf\left((t_1 - t_0), \frac{1}{2K}\right) \quad \text{et} \quad \varepsilon = \sup \delta(t) \quad \text{pour} \quad t \in [t_0, t_0 + \theta]$$

D'après les deux lemmes précédents, la fonction δ est, dans cet intervalle, lipschitzienne de rapport $K\varepsilon$. D'où $\sup \delta(t) \leqslant \theta K \varepsilon \leqslant \varepsilon/2$ pour $t \in [t_0, t_0 + \theta]$, ce qui est la contradiction cherchée.

PROPOSITION 2.1. – *Soient $X_1, \ldots, X_r$ des champs de vecteurs de classe C^∞ et soit Z appartenant à $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$. Toute courbe intégrale de Z peut être approchée uniformément par des courbes différentiables par morceaux, dont chaque arc différentiable est une courbe intégrale de l'un des champs de vecteurs X_i.*

Il suffit de démontrer la proposition dans les deux cas suivants :

$$Z = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \qquad \text{et} \qquad Z = [X_1, X_2] \, .$$

On utilisera le lemme classique suivant.

LEMME 2.3. – *Soit $x(t)$ la solution de*

$$x'(t) = Z(x(t)) \; ; x(0) = x_0 \, ,$$

et soit d'autre part une fonction lipschitzienne $y(t)$ vérifiant presque partout

$$y'(t) = Z(y(t)) + \omega(t) \; ; y(0) = x_0 \, .$$

Alors $|x(t) - y(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}(e^{Mt} - 1)$, *où* $\varepsilon = \sup |\omega(t)|$ *et où* M *est la constante de Lipschitz de* Z.

Pour une démonstration, voir par exemple [8] (chapitre V, § 4).

1^er^ cas. – $Z(x) = \lambda_1(x)\, Z_1(x) + \lambda_2(x)\, Z_2(x)$.

Considérons la courbe différentiable par morceaux Γ décrite par le point $x(t)$ et définie de la façon suivante, θ désignant un nombre positif, et k parcourant l'ensemble des entiers :

$$x(0) = x_0$$
$$x'(t) = \lambda_1(2k\theta)\,X_1(x(t)) \quad \text{pour} \quad t \in [2k\theta\,,(2k+1)\theta]$$
$$x'(t) = \lambda_2(2k\theta)\,X_2(x(t)) \quad \text{pour} \quad t \in [(2k+1)\theta\,,(2k+2)\theta]\,.$$

Soit d'autre part Γ_1 la ligne brisée décrite par le point $y(t)$, parcourant d'un mouvement uniforme le segment joignant les points $x(2k\theta)$ et $x[(2k+2)\theta]$ lorsque t est compris entre $k\theta$ et $(k+1)\theta$. D'après le lemme 2.3., lorsque θ tend vers 0, la courbe Γ_1 converge uniformément vers la courbe intégrale de Z issue de x_0. D'autre part, la distance entre Γ et Γ_1 tend vers 0 avec θ, ce qui démontre la proposition dans ce premier cas.

2ème cas. – $Z(x) = [X_1(x)\,,X_2(x)]$.

Considérons la courbe différentiable par morceaux Γ décrite par le point $x(t)$ et définie par les conditions suivantes :

$$x(0) = x_0$$
$$x'(t) = X_2(x(t)) \quad \text{pour} \quad t \in [4k\theta, (4k+1)\theta]$$
$$x'(t) = X_1(x(t)) \quad \text{pour} \quad t \in [(4k+1)\theta, (4k+2)\theta]$$
$$x'(t) = -X_2(x(t)) \quad \text{pour} \quad t \in [(4k+2)\theta, (4k+3)\theta]$$
$$x'(t) = -X_1(x(t)) \quad \text{pour} \quad t \in [(4k+3)\theta, (4k+4)\theta]\,.$$

Un calcul élémentaire montre que

$$x((4k+4)\theta) - x(4k\theta) = \theta^2 Z(4k\theta) + 0(\theta^3)\,,$$

où la majoration du terme $0(\theta^3)$ ne dépend que d'une borne des dérivées secondes de X_1 et X_2.

Soit alors Γ_1 la ligne brisée décrite par le point $y(t)$ parcourant d'un mouvement uniforme le segment joignant les points $x(4k\theta)$ et $x((4k+4)\theta)$ lorsque t varie entre $k\theta^2$ et $(k+1)\theta^2$. Lorsque θ tend vers 0, il résulte du lemme 2.3. que la courbe Γ_1 converge uniformément vers la courbe intégrale de Z issue du point x_0. D'autre part, la distance entre Γ et Γ_1 tend vers 0 avec θ, ce qui démontre la proposition.

THEOREME 2.2. – *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et* F *un fermé de Ω. Soient $X_1, \ldots, X_r$ des champs de vecteurs de classe C^∞ dans Ω, chacun d'entre eux étant tangent au fermé* F. *Soit d'autre* *part* Z *appartenant à* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$. *Alors,* Z *est tangent au fermé* F *et toute courbe intégrale de* Z *qui rencontre* F *en un point est entièrement contenue dans* F.

En effet, soit Γ une courbe intégrale de Z passant par le point $x_0 \in F$. On peut l'approcher par des courbes différentiables par morceaux dont chaque arc est une courbe intégrale de l'un des X_i. D'après le théorème 2.1., ces courbes sont contenues dans F, et à la limite, $\Gamma \subset F$. Le champ de vecteurs Z est alors nécessairement tangent à F. En effet, s'il existait une sphère extérieure à F et ne le rencontrant qu'en un point x, et si la normale à la sphère en ce point n'était pas orthogonale à $Z(x)$, la courbe intégrale de Z passant par x, pénètrerait dans la sphère et ne serait plus contenue dans F.

Le résultat suivant est un raffinement du théorème 2.2., nous nous bornerons à donner quelques indications sur sa démonstration.

THEOREME 2.3. – *Soient* $X_1, \ldots, X_r$ *des champs de vecteurs tangents au fermé* F, *et soit* Y *un champ de vecteurs possédant la propriété suivante : pour tout point* x_0 *de* F *et tout vecteur n normal extérieurement à* F *en* x_0, *le produit scalaire n.* $Y(x_0)$ *est négatif. Soient* λ *une fonction positive de classe* C^∞, Z *un champ de vecteurs appartenant à* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$, *et* $x(t)$ *une solution de*

$$x'(t) = Z(x(t)) + \lambda Y(x(t)) .$$

Alors, si on a $x(t_0) \in F$, *on a* $x(t) \in F$ *pour* $t \geqslant t_0$.

Compte tenu de la proposition 2.1, on peut se ramener au cas où on a $x'(t) = Y(x(t))$. La démonstration est alors semblable à celle du théorème 2.1., les lemmes 2.1. et 2.2. étant remplacés par les résultats suivants ($\delta(t)$ désignant toujours la distance du point $x(t)$ à F) :

1) $$\liminf_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{|h|} \geqslant - K\delta(t)$$

2) Si une fonction continue $f(t)$, nulle pour $t = 0$, vérifie

$$\liminf_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(t+h) - f(t)}{|h|} \geqslant - M , \ M \geqslant 0 ,$$

on a $f(t) \leqslant Mt$ pour $t \geqslant 0$.

3. Propagation des maximums.

Rappelons que L possède les propriétés énoncées au paragraphe 1.

$$Lu = \Sigma X_k^2 u + Yu + au = \Sigma a_{ij} u''_{ij} + \Sigma a_i u'_i + au .$$

La proposition suivante généralise la démonstration classique de Hopf de la forme forte du principe du maximum pour les opérateurs elliptiques (cf. [9]).

PROPOSITION 3.1. – *Soit u une fonction de classe C^2 dans Ω, telle que $Lu \geqslant 0$. Supposons que le maximum de u soit positif, et qu'il soit atteint en au moins un point de Ω. Soit F l'ensemble des points où u atteint son maximum. Chacun des champs de vecteurs X_k est alors tangent à F.*

Soit en effet B une boule fermée de centre x_0, de rayon ρ rencontrant F en un *unique* point x_1. Nous allons montrer que la quantité suivante :

$$\alpha = \Sigma a_{ij}(x_1)\,(x_0^i - x_1^i)\,(x_0^j - x_1^j)$$

est nécessairement nulle, ce qui établit la proposition.

Supposons au contraire $\alpha > 0$. Considérons la fonction suivante, où k est un nombre positif

$$v(x) = e^{-k|x-x_0|^2} - e^{-k\rho^2} .$$

On a

$$Lv(x_1) = e^{-k\rho^2}\,[4k^2\alpha - 2k\,\Sigma(a_{ii} + a_i(x_1^i - x_0^i))] .$$

Si k est choisi suffisamment grand, Lv est strictement positif au point x_1, et donc aussi dans un voisinage convenable V de x_1. Considérons la fonction suivante, où λ est strictement positif :

$$w(x) = u(x) + \lambda v(x) .$$

On a $Lw > 0$ dans V. Si on désigne par m le maximum de u, on a $w < m$ hors de B. D'autre part, à condition de choisir λ assez petit, on a $w < m$ sur la partie de ∂V située dans B par raison de compacité. Comme $w(x_1) = m$, la fonction w atteint un maximum positif en au moins un point de V. Ceci est incompatible avec $Lw > 0$ d'après le principe du maximum (proposition 1.1.).

THEOREME 3.1. – *Soit u une fonction de classe C^2 dans Ω, vérifiant $Lu \geqslant 0$. Soit Z un champ de vecteurs appartenant à*

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$$

et soit Γ une courbe intégrale de Z. Si le maximum de u est positif et est atteint en un point de Γ, ce maximum est atteint en tout point de Γ.

Ce résultat se déduit simplement de la proposition précédente et du théorème 2.2. On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.1. – *Supposons que $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ soit en tout point de rang n. Une fonction u de classe C^2 et vérifiant $Lu \geqslant 0$ ne peut atteindre son maximum positif en un point sans être constante dans la composante connexe de ce point.*

Remarque 3.1. – Un opérateur vérifiant l'hypothèse du corollaire 3.1 peut être tel que la forme quadratique $(a_{ij}(x))$ soit "très dégénérée" en chaque point. Il en est ainsi, par exemple, de l'opérateur suivant, défini dans $\mathbf{R}^{n+1}$ (les coordonnées étant notées $x_0, x_1, \ldots, x_n$) :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_0^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_0^n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 .$$

Remarque 3.2. – Le résultat précédent admet presque une réciproque. Supposons en effet que, dans un ouvert non vide, le rang de $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ soit égal à $p < n$. Il résulte du théorème de Frobenius que l'on peut trouver des coordonnées locales $\eta_1, \ldots, \eta_n$ telles que l'opérateur L se mette sous la forme :

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i \, \partial \eta_j} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial \eta_i} + au .$$

En changeant au besoin η_n en $-\eta_n$, on peut trouver un sous-ouvert non vide où $\alpha_n \leqslant 0$. La fonction v définie par $v = 0$ pour $\eta_n \leqslant 0$ et par $v = -\eta_n^3$ pour $\eta_n \geqslant 0$, vérifie $Lv \geqslant 0$ et atteint un maximum positif sans être constante.

Pour un opérateur possédant la propriété forte de maximum énoncée dans le corollaire 3.1, le rang de $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ est donc nécessairement égal à n sur un ouvert dense.

De la même manière, on peut montrer que le théorème 3.1 est (presque) le meilleur résultat possible, lorsque Y appartient à $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$. Dans le cas général, le rôle de Y dans la propagation des maximums est précisé de la façon suivante.

THEOREME 3.2. – *On suppose que le rang de* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ *est constant. Soit* u *une fonction de classe* C^2 *dans* Ω, *vérifiant* $Lu \geqslant 0$. *Soit* Z *un champ de vecteurs appartenant à* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ *et soit* $x(t)$ *une courbe vérifiant* $x'(t) = Z(x(t)) + \lambda Y(x(t))$ *où* λ *est une fonction positive de classe* C^∞. *Supposons que le maximum de* u *soit positif, et qu'il soit atteint au point* $x(t_0)$. *Ce maximum est alors atteint au point* $x(t)$ *pour* $t \geqslant t_0$.

Compte tenu du théorème 3.2, en désignant par F l'ensemble des points où u atteint son maximum, il suffit de montrer que pour tout vecteur ν normal à F en x_0, le produit scalaire $\nu \,.\, Y(x_0)$ est négatif. En désignant par p le rang de $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$, on peut trouver des coordonnées locales $\eta_1, \ldots, \eta_n$ telles que

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i \, \partial \eta_j} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial \eta_i} + au ,$$

et que la boule(²) de rayon 1, centrée au point d'abscisse 1 sur l'axe des η_n ne rencontre F qu'à l'origine. Le théorème sera démontré si on peut prouver que α_n est nécessairement négatif.

Les maximums se propageant selon les directions $\eta_1, \ldots, \eta_p$, il en résulte que le cylindre défini par

$$\eta_{p+1}^2 + \cdots + \eta_{n-1}^2 + (\eta_n - 1)^2 \leqslant 1$$

ne contient pas de points de F en son intérieur. Soit δ la fonction définie par

$$\delta^2 = \varepsilon(\eta_1^2 + \cdots + \eta_p^2) + \eta_{p+1}^2 + \cdots + \eta_{n-1}^2 + (\eta_n - 1)^2 ,$$

où $0 < \varepsilon < 1$. L'ellipsoïde d'équation $\delta \leqslant 1$ ne rencontre F qu'à l'origine. Considérons la fonction

(²) Les termes "origine", "boule", ... sont ici relatifs aux nouvelles coordonnées.

$$\nu(x) = e^{-\delta^2} - 1 \ .$$

On a

$$\mathrm{L}\nu(0) = -2\,\varepsilon \sum_1^p \alpha_{ii} + 2\alpha_n \ .$$

Si α_n était strictement positif, on pourrait choisir ε assez petit pour que Lν soit strictement positif au voisinage de l'origine. On aboutirait alors à une contradiction de la même manière que dans la proposition 3.1. On a donc $\alpha_n \leqslant 0$, ce qui démontre le théorème.

4. Unicité du problème de Cauchy.

Pour ne pas introduire de notations supplémentaires, nous nous bornons à l'étude des opérateurs L considérés jusqu'ici, bien que les résultats de ce paragraphe s'étendent de façon immédiate à toute une classe d'opérateurs différentiels d'ordre quelconque (cf. remarque 4.2).

Rappelons qu'une surface définie au voisinage d'un point x_1 par $f(x) = f(x_1)$, où f est une fonction de classe C^1 telle que

$$\operatorname{grad} f(x_1) \neq 0 \ ,$$

est *caractéristique* en x_1 si

$$\Sigma a_{ij}(x_1) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1) = 0$$

Il est équivalent de dire que le vecteur grad $f(x_1)$ est orthogonal aux vecteurs $X_k(x_1)$ pour $k = 1, \ldots, r$.

Le théorème d'unicité de Holmgren (voir [5] théorème 5.3.1) peut s'énoncer ainsi :

On suppose que les coefficients de L sont analytiques. Soit $f(x) = f(x_1)$ une surface non caractéristique en x_1, et soit u une distribution vérifiant L$u = 0$. Si u est nulle pour $f(x) < f(x_1)$, u est nulle au voisinage de x_1.

DEFINITION 4.1. – *Nous dirons que la surface définie par*

$$f(x) = f(x_1)$$

est fortement caractéristique au point x_1 *si le vecteur* grad $f(x_1)$ *est orthogonal à* $Z(x_1)$ *pour tout* Z *appartenant à* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$.

THEOREME 4.1. – *On suppose les coefficients de* L *analytiques. Soit* $f(x) = f(x_1)$ *une surface non fortement caractéristique en* x_1. *Soit* u *une distribution vérifiant* $Lu = 0$ *et nulle pour* $f(x) < f(x_1)$. *Alors* u *est nulle au voisinage de* x_1.

Soit F le support de u. Montrons que les champs de vecteurs X_k sont tangents à F. Pour toute boule rencontrant F en un unique point y_1, la distribution u est nulle à l'intérieur de la boule. Si la sphère n'était pas caractéristique en y_1, on devrait avoir $u = 0$ au voisinage de y_1, ce qui contredit le fait que y_1 appartient au support de u. La sphère est donc caractéristique au point y_1, ce qui prouve que les champs de vecteurs X_k sont tangents à F.

Revenant à l'hypothèse, soit Z un élément de $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ tel que $Z(x_1)$ ne soit pas orthogonal à grad $f(x_1)$. La courbe intégrale de Z passant par x_1 traverse en ce point la surface d'équation $f(x) = f(x_1)$. Si x_1 appartenait à F, cette courbe intégrale devrait être contenue dans F, d'après le théorème 2.2. La distribution u étant nulle d'un côté de la surface, il est donc impossible que le point x_1 appartienne au support de u, ce qui démontre le théorème.

Nous obtenons en fait un résultat un peu plus général que l'unicité du problème de Cauchy, nous montrons que le support d'une solution de $Lu = 0$ se propage le long des courbes intégrales des champs de vecteurs de $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$.

COROLLAIRE 4.1. – *On suppose que les coefficients de l'opérateur* L *sont analytiques, et que* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ *est de rang* n *en tout point. Soit* u *une distribution vérifiant* $Lu = 0$ *dans un ouvert connexe. Si* u *est nulle au voisinage d'un point,* u *est identiquement nulle.*

Cela résulte immédiatement du théorème 4.1. Dans le cas où les coefficients ne sont plus analytiques, nous ne savons pas démontrer ce résultat. La méthode utilisée montre qu'il suffirait de démontrer qu'il y a unicité du problème de Cauchy pour les surfaces non caractéristiques.

Remarque 4.1. – On peut montrer que si le rang de

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$$

est strictement inférieur à n dans un ouvert non vide, il existe une fonction u vérifiant $Lu = 0$ dans un sous-ouvert connexe non vide, nulle au voisinage d'un point et non identiquement nulle.

Remarque 4.2. – Les résultats précédents se généralisent naturellement de la façon suivante. On considère un opérateur différentiel $P(x, D)$(³), d'ordre m quelconque, à coefficients analytiques. On désigne par $P_m(x, D)$ sa partie principale. On suppose que pour tout x, l'ensemble des zéros réels du polynome $P_m(x, .)$ constitue une variété linéaire variant avec x de manière telle qu'elle coïncide en chaque point avec l'ensemble des vecteurs orthogonaux à r champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_r$. Les surfaces fortement caractéristiques étant définies par la définition 4.1, et la démonstration du théorème 4.1 n'utilisant que le théorème d'unicité de Holmgren qui est valable pour l'opérateur $P(x, D)$, on a l'unicité du problème de Cauchy relatif à une surface non fortement caractéristique.

Comme exemples d'opérateurs du type précédent, nous pouvons considérer les opérateurs de la forme $Q(X_1, \ldots, X_r)$, où Q est un polynome en r variables, homogène de degré m, et dont le seul zéro réel est l'origine.

5. Problème de Dirichlet.

En supposant que L vérifie la condition d'hypoellipticité de Hörmander, et pour des ouverts ω convenables, nous résolvons le problème de Dirichlet sous sa forme classique : étant donné une fonction f continue sur $\bar{\omega}$ et une fonction φ continue sur $\partial\omega$, nous montrons l'existence et l'unicité d'une fonction u continue sur ω, égale à φ sur $\partial\omega$, et vérifiant $Lu = -f$ dans ω. Cette hypothèse d'hypoellipticité n'est nullement essentielle. Sous les mêmes conditions sur ω, et pour des opérateurs L généraux, nous avons montré dans [3] l'existence de solutions faibles du problème de Dirichlet continues et même höldériennes dans $\bar{\omega}$. Nous nous bornons ici au cas d'un opérateur hypoelliptique, d'une part parce que les solutions obtenues

(¹) Avec les notations de [5].

sont (au moins lorsque f est assez régulière) des solutions *usuelles* du problème de Dirichlet, d'autre part, parce que les démonstrations sont considérablement simplifiées, l'hypoellipticité garantissant la régularité de la solution à l'intérieur.

Rappelons que l'opérateur différentiel L est dit *hypoelliptique* si toute distribution u est de classe C^∞ dans un ouvert dès que Lu est de classe C^∞ dans cet ouvert. Le résultat suivant est dû à Hörmander [6].

THEOREME 5.1. — *Si* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$ *est de rang* n *en tout point d'un ouvert, l'opérateur* L *est hypoelliptique dans cet ouvert.*

Le corollaire suivant résulte immédiatement du théorème du graphe fermé.

COROLLAIRE 5.1. — *Si* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$ *est de rang* n *en tout point, sur l'espace des solutions* u *de* $Lu = 0$, *la topologie induite par* C^∞ *coïncide avec la topologie induite par* $\mathcal{D}'$ *(convergence au sens des distributions).*

DEFINITION 5.1. — *L'opérateur* L *est dit non totalement dégénéré (n.t.d. en abrégé) si en chaque point* x, *l'un des* $a_{ij}(x)$ *n'est pas nul. Cette condition est équivalente à la non nullité en chaque point* x *de l'un au moins des vecteurs* $X_k(x)$.

Remarquons que cette condition est toujours réalisée si

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$$

est de rang n, mais qu'elle peut être en défaut même si

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$$

est de rang n.

PROPOSITION 5.1. — *Supposons que* L *soit n.t.d. et posons*

$$L'u = [1 - M\,|x - x_0|^2]\, L\, [u(1 - M\,|x - x_0|^2)]\ .$$

Pour M *suffisamment grand et pour* x *suffisamment voisin de* x_0, *l'opérateur* L' *et son adjoint* L'^* *vérifient les relations*

$$L'1(x) < 0, \quad L'^*1(x) < 0\ .$$

La démonstration est immédiate, il suffit de développer la relation ci-dessus. Ce résultat est encore valable lorsque l'opérateur L ne vérifie pas la condition 2 du paragraphe 1 ($a(x) \leqslant 0$).

Cette proposition légitime l'hypothèse que nous ferons fréquemment par la suite : $a(x) = \mathrm{L}1(x) \leqslant a_0 < 0$. Cette propriété appartient à l'opérateur L$'$ d'une part, et, d'autre part, la multiplication ou la division d'une fonction par $[1 - \mathrm{M}\,|x - x_0|^2]$ au voisinage de x_0, n'en altère ni la régularité, ni la positivité.

THEOREME 5.2. – *Supposons que* $\mathcal{L}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r, \mathrm{Y})$ *soit en tout point de rang* n *et que* $a(x) \leqslant a_0 < 0$. *Soit* ω *un ouvert tel que* $\bar{\omega} \subset \Omega$ *et possédant la propriété suivante : en tout point* x *de* $\partial\omega$, *il existe une normale* ν *à* $\bar{\omega}$ *(définition* 2.1) *telle que*

$$\Sigma a_{ij}(x)\, \nu_i\, \nu_j > 0\ .$$

Alors, pour toute fonction f *continue sur* $\bar{\omega}$ *et pour toute fonction* φ *continue sur* $\partial\omega$, *il existe une et une seule fonction* u *continue sur* $\bar{\omega}$ *telle que*

$$\begin{aligned} \mathrm{L}u &= -f \quad \textit{au sens des distributions dans} \quad \omega \\ u &= \varphi \qquad \textit{sur} \quad \partial\omega\ . \end{aligned}$$

Si f *et* φ *sont positives, la fonction* u *l'est aussi. Si* f *est de classe* C^∞ *dans* ω, *il en est de même pour* u.

1) Démontrons d'abord l'unicité. Soit u vérifiant $\mathrm{L}u = 0$ et nulle sur $\partial\omega$. D'après l'hypoellipticité de L, la fonction u est de classe C^∞ dans ω. Si elle atteignait un maximum strictement positif (resp. un minimum strictement négatif) en un point x, on aurait $\mathrm{L}u(x) < 0$ (resp. $\mathrm{L}u(x) > 0$) d'après la proposition 1.1, ce qui est absurde.

2) Dans le cas où f est de classe C^∞ et où φ est nulle, nous allons démontrer l'existence d'une solution par approximation elliptique. Soit u_ε la solution de

$$(\mathrm{L} + \varepsilon\Delta)\, u = -f \quad \text{dans} \quad \omega\ ; u = 0 \quad \text{sur}\ \partial\omega\ .$$

Une telle solution existe, les hypothèses faites impliquant que le complémentaire de ω n'est effilé en aucun de ses points. D'après le principe du maximum, on a

$$\|u_\varepsilon\| \leqslant \frac{\|f\|}{|a_0|}\,.$$

Les fonctions u ont donc une valeur d'adhérence faible u dans L^∞ et celle-ci vérifie $Lu = -f$ dans ω au sens des distributions. D'après l'hypoellipticité, u est de classe C^∞ dans ω.

Nous allons montrer que u tend vers 0 au bord par un argument classique utilisant des fonctions barrières. Pour tout point x_1 de $\partial\omega$, construisons une sphère centrée au point x_0, ne rencontrant $\overline{\omega}$ qu'au point x_1, le point x_0 étant tel que

$$\Sigma a_{ij}(x_1)\,(x_0^i - x_1^i)\,(x_0^j - x_1^j) > 0\,.$$

Posons

$$w(x) = e^{-k|x-x_0|^2} - e^{-k|x_0-x_1|^2}$$

Un calcul analogue à celui de la proposition 3.1 montre que, pour k assez grand, on a $(L + \varepsilon\Delta)w \geqslant c > 0$ dans un voisinage V de x_1, la constante c ne dépendant pas de ε. Soit $M > 0$ tel que

$$Mw \leqslant -\frac{\|f\|}{|a_0|} \quad \text{dans} \quad \omega\setminus V \ ; \ Mc \geqslant \|f\|$$

On a

$$(L + \varepsilon\Delta)\,(Mw \pm u_\varepsilon) \geqslant 0 \quad \text{dans} \quad V \cap \omega$$

$$Mw \pm u_\varepsilon \leqslant 0 \quad \text{au bord de} \quad V \cap \omega\,.$$

Il en résulte que dans $V \cap \omega$, on a $|u_\varepsilon| \leqslant M\,|w|$ et, à la limite, $|u| \leqslant M\,|w|$. Cela entraîne que $u(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_1.

3) Dans le cas où $f \in C^\infty(\overline{\omega})$ et $\varphi \in C^\infty(\partial\omega)$([4]), on se ramène aisément au cas précédent. Soit Φ une fonction de $C^\infty(\overline{\omega})$ prolongeant φ et cherchons u de la forme $\Phi + v$. Il suffit de prendre pour v la solution de $Lv = -f - L\Phi$ qui s'annule au bord, construite dans l'étape précédente. D'après la proposition 1.1, si f et φ sont positives, u l'est aussi. Cela entraîne que si f et φ tendent uniformément vers 0, il en est de même pour u.

4) Si f et φ sont seulement continues, soient f_n et φ_n convergeant

([4]) Etant donné un fermé F, on désigne par $C^\infty(F)$ l'ensemble des restrictions à F des fonctions de classe C^∞ au voisinage.

uniformément vers f et φ respectivement, et de classe C^∞. Les solutions u_n associées convergent uniformément vers une fonction u. Par passage à la limite, celle-ci vérifie $Lu = -f$ au sens des distributions et est égale à φ sur ω. Enfin, si f est de classe C^∞ dans ω, l'hypoellipticité assure qu'il en est de même pour u.

COROLLAIRE 5.2. – *Supposons que* L *soit* n.t.d. *et que*

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$$

soit en tout point de rang n. Il existe une base de la topologie de Ω formée d'ouverts pour lesquels il y a existence et unicité de la solution du problème de Dirichlet.

Compte tenu de la proposition 5.1, au voisinage d'un point x_0 de Ω, on peut supposer $a(x) \leqslant a_0 < 0$. Soit h un vecteur unitaire tel que $\Sigma a_{ij}(x_0)\, h_i h_j > 0$. L'intersection des deux boules de rayon $M + \varepsilon$ centrées respectivement aux points $x + Mh$ et $x - Mh$ est un ouvert satisfaisant aux hypothèses du théorème 5.2 pourvu que M soit assez grand et ε assez petit.

6. Fonction de Green.

Nous supposerons dans tout ce paragraphe que L est n.t.d., que $a(x) \leqslant a_0 < 0$, (ainsi que la propriété correspondante pour L^*) et que $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$ est en tout point de rang n. On désigne par ω un ouvert satisfaisant aux conditions du théorème 5.2.

DEFINITION 6.1. – *On appelle opérateur de Poisson l'opérateur positif* H *de* $C(\partial\omega)$ *dans* $C(\overline{\omega}) \cap C^\infty(\omega)$ *qui à toute fonction* φ *fait correspondre la solution* $u = H\varphi$ *de*

$$Lu = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega \ ; \ u = 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\omega .$$

DEFINITION 6.2. – *On appelle opérateur de Green l'opérateur positif* G *de* $C(\overline{\omega})$ *dans* $C(\overline{\omega})$ *qui à toute fonction f fait correspondre la solution* $u = Gf$ *de*

$$Lu = -f \quad \textit{dans} \quad \omega \ ; \ u = 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\omega$$

Si f est de classe C^∞ dans un ouvert U contenu dans ω, la fonction Gf est de classe C^∞ dans U.

THEOREME 6.1. – *Il existe une fonction $g(x, y)$, dite fonction de Green, positive et de classe C^∞ dans le complémentaire de la diagonale de $\omega \times \omega$, telle que, pour toute fonction f appartenant à $C(\overline{\omega})$, on ait*

$$Gf(x) = \int g(x, y) f(y)\, dy .$$

Si on désigne par g^* la fonction de Green relative à l'opérateur L^*, on a $g(x, y) = g^*(y, x)$.

1) L'opérateur G étant positif, il existe, pour tout point x de ω, une mesure positive g_x sur $\overline{\omega}$ telle que

$$Gf(x) = \int_{\overline{\omega}} f(y)\, g_x(dy) .$$

Si f est de classe C^∞ et à support compact dans ω, on a $GLf = -f$. Il en résulte que, au sens des distributions, on a

$$L^* g_x = -\delta_x \quad \text{dans} \quad \omega .$$

La mesure g_x possède donc, d'après l'hypoellipticité de L^*, une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue dans l'ouvert $\omega \setminus \{x\}$. Montrons que g_x ne charge ni $\{x\}$, ni $\partial\omega$.

2) Dans ω, la mesure g_x est a priori de la forme

$$g_x = C\delta_x + h$$

où C est une constante positive, et h une fonction de L^1 de classe C^∞ en dehors de x. On a donc

$$C\, L^*\delta_x = -\delta_x - L^* h .$$

L'opérateur L étant n.t.d., la transformée de Fourier du premier membre est le produit par C d'un polynome de degré exactement 2. La transformée de Fourier du second membre est $o(|\xi|^2)$, d'où la nullité de C.

3) Pour montrer que g_x ne charge pas $\partial\omega$, considérons l'ensemble D_ε des points dont la distance à $\partial\omega$ est inférieure à ε. Soit f une fonction continue, comprise entre 0 et 1, à support dans D_ε, égale à 1 sur $\partial\omega$. On a

$$Gf(x) = \int_{\bar{\omega}} f(y)\, g_x(dy) \leqslant \int_{\bar{\omega}} g_x(dy) = G1(x) .$$

La fonction positive Gf vérifiant $LGf = 0$ hors de D_ε, atteint son maximum sur D_ε (cf. Proposition 1.1). On a donc

$$\int_{\partial\omega} g_x(dy) \leqslant \sup_{x \in \bar{\omega}} Gf(x) \leqslant \sup_{x \in D_\varepsilon} G1(x)$$

La fonction $G1(x)$ tendant vers 0 au bord de ω, il en résulte que la masse de g_x située sur $\partial\omega$ est nulle.

4) Il existe donc une fonction $g(x, y)$ positive, qui pour chaque x est de classe C^∞ en y dans $\omega\backslash\{x\}$, telle que

$$Gf(x) = \int g(x, y) f(y)\, dy .$$

Il reste à montrer que, dans le complémentaire de la diagonale de $\omega \times \omega$, la fonction g est de classe C^∞ du couple (x, y).

Soient U et V deux ouverts disjoints dont l'adhérence est contenue dans ω. L'ensemble des mesures g_x est un ensemble borné de mesures, car $\|g_x\| = G1(x)$. Or, lorsque x parcourt V, les restrictions à U des mesures g_x appartiennent au noyau de l'opérateur L. Il résulte du corollaire 5.1 que les restrictions à U des fonctions $g(x, .)$ lorsque x parcourt V forment un ensemble de fonctions borné pour la topologie de C^∞.

Pour toute distribution T à support dans U, posons, pour x appartenant à V

$$GT(x) = \langle T, g(x, .)\rangle .$$

Si une suite f_n de fonctions continues à support dans U converge au sens des distributions vers T, les fonctions Gf_n restent bornées dans V et convergent simplement vers GT. A la limite, on a donc $LGT = 0$ dans V, et GT est de classe C^∞. L'opérateur G transformant toute distribution en une fonction de classe C^∞, il résulte du théorème des noyaux de Schwartz [11] que $g(x, y)$ est une fonction de classe C^∞ du couple (x, y). La fonction g est donc de classe C^∞ dans le complémentaire de la diagonale de $\omega \times \omega$.

5) Soit G^* l'opérateur de Green relatif à L^*. Il résulte facilement du principe du maximum que, pour toute fonction φ positive, de classe C^∞ et à support compact dans ω, la fonction $G^*\varphi$ est la plus petite des fonctions positives Φ telles que $L^*\Phi = -\varphi$. Posons

$$\Phi(x) = \int g(y , x) \varphi(y) \, dy .$$

Pour toute fonction ψ, C^∞ et à support compact dans ω, on a

$$\int \Phi(x) \, L\psi(x) \, dx = \iint g(y , x) \varphi(y) \, L\psi(x) \, dx \, dy = \int \varphi(y) \, GL\psi(y) dy$$

$$\int \Phi(x) \, L\psi(x) \, dx = - \int \varphi(y) \, \psi(y) \, dy .$$

Il en résulte que $L^*\Phi = -\varphi$ et donc

$$\int g(y , x) \varphi(y) \, dy \geqslant \int g^*(x , y) \varphi(y) \, dy .$$

En observant que cette inégalité, vérifiée par toute fonction φ positive de classe C^∞ à support compact, est encore valable en permutant les rôles de L et de L^*, on obtient $g(x , y) = g^*(y , x)$.

Remarque 6.1. – Si le rang de $\mathcal{L}(X_1 , \ldots , X_r , Y)$ est égal à $p < n$, il est encore possible de résoudre le problème de Dirichlet dans des ouverts convenables mais il ne peut exister de fonction de Green. Si on écrit localement l'opérateur L sous la forme suivante

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{p} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i \, \partial \eta_j} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial \eta_i} + au ,$$

on peut résoudre le problème de Dirichlet dans chaque variété p-dimensionnelle obtenue en fixant les $n - p$ dernières coordonnées. L'opérateur de Green est tel que la mesure $g_x(dy)$ est portée par la variété $\eta_i(y) = \eta_i(x)$ pour $i = p + 1 , \ldots , n$, et y possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue p-dimensionnelle.

7. Inégalité de Harnack.

Dans ce paragraphe, nous démontrons, pour les opérateurs L hypoelliptiques, une forme affaiblie de l'inégalité de Harnack, classique pour les opérateurs paraboliques. Nous démontrons ensuite que la forme habituelle de cette inégalité, bien connue pour les opérateurs elliptiques, est encore valable si $\mathcal{L}(X_1 , \ldots , X_r)$ est de rang n en tout point.

PROPOSITION 7.1. – *Supposons que* L *soit* n.t.d. *et que*

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$$

soit de rang n en tout point. Soit ω un ouvert satisfaisant aux conditions du théorème 5.2 *et soit u une fonction positive vérifiant* $Lu = 0$ *au voisinage de* $\overline{\omega}$. *Pour* $\beta > 0$, *soit* g_β *la fonction de Green relative à l'opérateur* $L - \beta$. *On a alors*

$$u(x) \geqslant \beta \int_\omega g_\beta(x, y)\, u(y)\, dy .$$

Pour toute fonction v, on a en effet

$$v = G_\beta(\beta - L)v + H_\beta\, \gamma^0\, v ,$$

où G_β et H_β désignent respectivement les opérateurs de Green et de Poisson relatifs à l'opérateur $L - \beta$, et où $\gamma^0 v$ désigne la restriction de v à $\partial\omega$. La fonction u étant positive, on a $H_\beta u \geqslant 0$. La proposition résulte alors immédiatement du fait que $Lu = 0$.

THEOREME 7.1. – *Supposons que* L *soit* n.t.d. *et que*

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$$

soit de rang n en tout point. Pour tout ensemble D *partout dense dans* Ω, *pour tout compact* K *contenu dans* Ω *et pour tout multiindice de dérivation p, il existe un ensemble fini* $\{y_1, \ldots, y_m\}$ *inclus dans* D *et une constante c tels que, pour toute fonction u positive dans* Ω *et vérifiant* $Lu = 0$, *on ait*

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{\partial^p u(x)}{\partial x^p} \right| \leqslant c\,[u(y_1) + \cdots + u(y_m)] .$$

Nous allons montrer que, pour tout point x_0, il existe un point y de D, un voisinage V de x_0, et une constante c tels que

$$\sup_{x \in V} \left| \frac{\partial^p u(x)}{\partial x^p} \right| \leqslant c\, u(y) .$$

Le théorème en résultera par un argument de compacité. D'après le corollaire 5.1, il existe un ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$, contenant x et vérifiant les hypothèses du théorème 5.2. La fonction $g_\beta^*(x_0, .)$ n'étant pas identiquement nulle dans ω et étant continue en dehors de la diagonale, on peut trouver un point y de D et un voisinage W de x_0 tels que

$$\sup_{x \in W} g_\beta^*(x, y) \geqslant c' > 0 .$$

D'après la proposition 7.1, et compte tenu du fait que

$$g_\beta^*(x, y) = g_\beta(y, x)$$

on a

$$u(y) \geqslant c' \int_W u(x)\, dx$$

D'autre part, pour les solutions de L$u = 0$, dans W, la topologie de la convergence uniforme de toute dérivée sur tout compact coïncide avec la topologie de la convergence dans L^1 sur tout compact, d'après le corollaire 5.1. Si V est un ouvert relativement compact dans W, il existe donc une constante c'' telle que

$$\sup_{x \in V} \left| \frac{\partial^p u(x)}{\partial x^p} \right| \leqslant c'' \int_W u(x)\, dx .$$

Le théorème résulte immédiatement des deux inégalités précédentes.

THEOREME 7.2. – *Supposons que* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ *soit en tout point de rang n. Pour tout compact* K *contenu dans* Ω*, pour tout point* y_0 *de* Ω*, et pour tout multi-indice de dérivation p, il existe une constante c telle que, pour toute fonction u positive dans* Ω *er vérifiant* L$u = 0$, *on ait*

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{\partial^p u(x)}{\partial x^p} \right| \leqslant c\, u(y_0) .$$

La connexité de Ω permet de se ramener au cas où y_0 et K sont contenus dans un ouvert ω satisfaisant aux hypothèses du théorème 5.2. Si x_0 est un point de K et si V et W sont deux ouverts tels que $x_0 \in V \subset \overline{V} \subset W \subset \Omega$, on établit comme dans le théorème précédent l'inégalité suivante

$$\sup_{x \in V} \left| \frac{\partial^p u(x)}{\partial x^p} \right| \leqslant c'' \int_W u(x)\, dx .$$

D'autre part, on a $(L-\beta)g_\beta^*(x,.)=0$ en dehors de x. La fonction $g_\beta^*(x,.)$ ne peut donc s'annuler dans ω, car elle devrait alors être identiquement nulle d'après le corollaire 3.1. Il existe donc un voisinage W de x_0 tel que,

$$\sup_{x\in W} g_\beta^*(x\,,y_0)\geqslant c'>0\,.$$

En utilisant la proposition 7.1, on conclut comme dans le théorème précédent.

Remarque 7.1. – Les démonstrations classiques de l'inégalité de Harnack pour un opérateur elliptique s'appuient sur l'existence d'un noyau de Poisson $h(x\,,y)$ et sur le fait que le rapport des fonctions $h(x\,,.)$ et $h(x',.)$ est compris entre deux nombres strictement positifs. Nous ne savons pas prouver, pour les opérateurs considérés ici, l'existence d'un noyau de Poisson. On voit que la considération des opérateurs $L-\beta$ permet d'y suppléer, les propriétés minimales utilisées étant d'une part le fait que pour les solutions de $Lu=0$, la convergence uniforme sur tout compact coïncide avec la convergence au sens des mesures (ce qui assure la continuité de la fonction de Green), d'autre part, la forme forte du principe du maximum.

Remarque 7.2. – On peut se poser le problème de déterminer, pour un opérateur L quelconque, et un point x étant donné, l'ensemble M des points y tels que, pour toute fonction continue vérifiant $Lu=0$, on ait $u(x)\leqslant c\,u(y)$, où c dépend de x et y, mais pas de u. Dans le cas où au voisinage de x, les rangs de $\mathcal{L}(X_1\,,\ldots,X_r)$ et de $\mathcal{L}(X_1\,,\ldots,X_r\,,Y)$ sont constants et respectivement égaux à p et q, l'opérateur L peut se mettre sous la forme suivante

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{p}\alpha_{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\eta_i\,\partial\eta_j}+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\,\frac{\partial u}{\partial\eta_i}+au\,.$$

On peut déduire de la démonstration des théorèmes précédents que M est contenu dans la variété de dimension q définie par

$$\eta_i(y)=\eta_i(x)\qquad\text{pour}\qquad i=q+1\,,\ldots,n\,,$$

que M possède un intérieur non vide relativement à cette variété, et que M contient la variété de dimension p définie par

$$\eta_i(y) = \eta_i(x) \quad \text{pour} \quad i = p+1, \ldots, n.$$

8. Applications aux théories axiomatiques du potentiel.

Pour les problèmes traités ici, nous renvoyons à notre article [2] dont nous nous bornons à rappeler quelques définitions et résultats([5]).

Une axiomatique de théorie du potentiel sur Ω est la donnée d'un faisceau $\mathcal{H}$ de fonctions continues (dites fonctions harmoniques) tel que les ouverts réguliers forment une base de la topologie de Ω.

Un ouvert relativement compact ω est dit régulier si, pour toute fonction φ continue sur $\partial\omega$, il existe une et une seule fonction u continue sur $\bar{\omega}$, harmonique dans ω et égale à φ sur $\partial\omega$, et si de plus, u est positive dès que φ l'est.

On dit que $\mathcal{H}$ vérifie l'axiome de Brelot (resp. l'axiome de Doob ; l'axiome faible) si, pour toute famille filtrante croissante (u_i) de fonctions harmoniques dans un domaine ω, la fonction $u = \sup(u_i)$ est harmonique dans ω dès que u est finie en un point (resp. finie sur un ensemble dense ; uniformément bornée).

THEOREME 8.1. – *Soit $\mathcal{H}$ une axiomatique de théorie du potentiel dans Ω, dont les fonctions harmoniques sont de classe* C^∞. *Il existe alors un ouvert Ω_0 dense dans Ω, et un opérateur* L, *défini et* n.t.d., *dans Ω_0, à coefficients de classe* C^∞, *tel que les fonctions harmoniques dans un ouvert ω contenu dans Ω_0 soient exactement les solutions u de* $Lu = 0$. *Dans Ω_0, cet opérateur est unique à un coefficient de proportionnalité près.*

De plus, $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$ *est de rang n en tout point d'un ouvert dense. Si $\mathcal{H}$ vérifie l'axiome de Brelot,* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r)$ *est de rang n en tout point d'un ouvert dense.*

La première partie de ce théorème ne fait que résumer les théorèmes 3.1, 4.2 et 5.1 de [2]. L'opérateur L n'y est en fait écrit que sous la forme

([5]) Pour l'étude des axiomatiques de Brelot et de Bauer, voir respectivement [4] et [1].

$$\mathrm{L}u = \Sigma a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \Sigma a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au \, ,$$

mais, le rang de la matrice $(a_{ij}(x))$ étant localement constant dans un ouvert dense, l'opérateur L s'y met sous la forme

$$\mathrm{L}u = \mathrm{X}_k^2 \, u + \mathrm{Y}u + au \, .$$

On déduit aisément la seconde partie du théorème de la proposition 7.1 de [2], en appliquant le théorème de Frobenius dans l'ouvert dense où les rangs de $\mathcal{L}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r)$ et de $\mathcal{L}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r, \mathrm{Y})$ sont constants.

Remarque 8.1. – Le fait d'avoir supposé que toutes les fonctions harmoniques sont de classe C^∞ masque un peu la nature des choses. Si on suppose seulement que les fonctions harmoniques de classe C^∞ sont denses dans $\mathcal{H}$ pour la convergence uniforme sur tout compact, il existe encore un opérateur L comme ci-dessus, mais on n'a plus nécessairement $\mathcal{L}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r, \mathrm{Y})$ de rang n sur un ouvert dense. Cette dernière propriété est cependant vraie si $\mathcal{H}$ vérifie l'axiome faible.

Les résultats établis dans les paragraphes précédents constituent une réciproque au théorème 8.1.

THEOREME 8.2. – *Si l'opérateur* L *est* n.t.d. *et si*

$$\mathcal{L}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r, \mathrm{Y})$$

est de rang n en tout point, le faisceau $\mathcal{H}$ *des solutions u de* $\mathrm{L}u = 0$ *forme une axiomatique de théorie du potentiel dont les fonctions harmoniques sont de classe* C^∞ *et qui vérifie l'axiome de Doob.*

Si $\mathcal{L}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r)$ *est de rang n en tout point,* $\mathcal{H}$ *vérifie l'axiome de Brelot.*

L'existence d'une base d'ouverts réguliers résulte du corollaire 5.2, tandis que le caractère C^∞ des solutions est assuré par le théorème 5.1. D'autre part, avec les hypothèses ci-dessus, nous avons démontré l'une ou l'autre forme de l'inégalité de Harnack (théorèmes 7.1 et 7.2). Il en résulte immédiatement que les axiomes de Doob ou de Brelot sont vérifiés.

Remarque 8.2. – Pour un opérateur L quelconque, on peut considérer le faisceau des fonctions u continues vérifiant $Lu = 0$. Il existe encore une base d'ouverts réguliers si L est n.t.d. (cf. [3]). A l'aide d'arguments classiques, on peut déduire des théorèmes 3.1. et 3.2, ainsi que de la remarque 7.2, des informations précises sur le support de la mesure harmonique d'un point et sur la structure des ensembles absorbants.

Remarque 8.3. – On peut déduire de la remarque 8.1 et du théorème 8.2 un résultat curieux. Si une axiomatique de théorie du potentiel contenant suffisamment de fonctions harmoniques C^∞ vérifie l'axiome faible, on a $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_r, Y)$ de rang n sur un ouvert dense, et donc l'axiome de Doob est satisfait sur un ouvert dense. On peut se demander si ce résultat est vrai pour des axiomatiques sur un espace quelconque.

Remarque 8.4. – L'axiomatique de Bauer exige, outre l'axiome de Doob, un axiome de séparation. Celui-ci est toujours vérifié localement si L est n.t.d. Sa validité globale dépend de la croissance des coefficients à l'infini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Bauer, Harmonische Raüme und ihre Potentialtheorie, Lecture notes in Mathematics, Springer Verlag (1966).

[2] J.M. Bony, Détermination des axiomatiques de théorie du potentiel dont les fonctions harmoniques sont différentiables, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble,* 17, 1 (1967) 353-382.

[3] J.M. Bony, Sur la régularité des solutions du problème de Dirichlet pour les opérateurs elliptiques dégénérés, *C.R. Acad. Sc. Paris.* 267 (1968), 691-693.

[4] M. Brelot, Axiomatique des fonctions harmoniques, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal (1966).

[5] L. Hörmander, Linear partial differential operators, Springer Verlag (1963).

[6] L. HÖRMANDER, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math., Uppsala*, 119 (1967), 147-171.

[7] J.J. KOHN et L. NIRENBERG, Degenerate elliptic-parabolic equations of second order, *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 (1967) 797-871.

[8] C. de LA VALLEE POUSSIN, Cours d'analyse infinitésimale, t.2, 8ème ed., Gauthier-Villars, Paris, (1949).

[9] C. MIRANDA, Equazioni alle derivate parziali di tipo ellitico, Springer-Verlag (1955).

[10] O.A. OLEINIK, Linear second order equations with non-negative characteristic form, *Mat. Sb.*, 69 (1966), 111-140, traduit dans *Am. Math. Soc. Transl.*, 65 (1967), 167-199.

[11] L. SCHWARTZ, Théorie des noyaux, *Proc. International Congress of Mathematicians*, vol 1, 220-230, American Mathematical Society, Providence, (1952).

Manuscrit reçu le 9 janvier 1969

Jean Michel BONY
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre Curie
Paris 5e