ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE HENRY

Prolongements de mesures de Radon

Annales de l'institut Fourier, tome 19, nº 1 (1969), p. 237-247

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_237_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble,
19,1 (1969), 237 - 247

PROLONGEMENTS DE MESURES DE RADON

par Jean-Pierre HENRY

Le résultat essentiel de cet article est le théorème I, p. 239.

1.

DEFINITION 1. – *Soit* X *un espace topologique et* $\mathcal{C}$ *un clan de parties de* X *(un clan est stable par complémentation, et par intersections et réunions finies). Soit* μ *une application de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathbf{R}_+$ *(réels positifs).*

Nous dirons que μ *est additive si :*

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{C}, \quad \mu(B_1 \cup B_2) + \mu(B_1 \cap B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) \quad \text{(A)}$$

Soit $\mathcal{K}$ *l'ensemble des quasi-compacts fermés de* X.

Nous dirons que μ *est intérieurement régulière si :*

$$\forall B \in \mathcal{C}, \quad \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \quad \exists K \in \mathcal{K} : K \subset B \quad \text{et} \quad \mu^*(B - K) \leqslant \varepsilon \qquad \text{(R)}$$

($\mathbf{R}_+$ = *ensemble des réels* $\geqslant 0$, $\mathbf{R}_+^*$ = *ensemble des réels* > 0).

Enfin si μ *est additive et intérieurement régulière, nous dirons que* μ *est une mesure de Radon sur le clan* $\mathcal{C}$.

Si A est une partie de X, nous noterons par A^c la partie complémentaire.

Remarque 1. – Si le clan $\mathcal{C}$ contient tous les quasi-compacts fermés, la condition (R) devient la condition usuelle de régularité intérieure :

$$\forall B \in \mathcal{C}, \quad \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \quad \exists K \in \mathcal{K} \cap \mathcal{C} : K \subset B \quad \text{et} \quad \mu(B - K) \leqslant \varepsilon$$

Les définitions 1 sont compatibles avec la définition usuelle des mesures de Radon comme le montre la :

PROPOSITION 1. – *Soit μ une mesure de Radon sur un clan contenant la tribu borélienne de* X, *μ définit une mesure de Radon (au sens usuel) sur* X.

Démonstration. - Du fait de la remarque précédente il suffit de montrer l'additivité dénombrable de μ. Celle-ci résultera du :

LEMME 1. – *Soit μ une mesure de Radon sur un clan $\mathcal{C}$ contenant les fermés de* X. *Alors pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in N}$ de parties deux à deux disjointes appartenant à $\mathcal{C}$, on a :*

$$\mu_*\Big(\bigcup_{n\in N} A_n\Big) = \mu^*\Big(\bigcup_{n\in N} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$$

Démonstration du lemme. – Notons A la réunion des A_n. On a évidemment pour tout entier p :

$$\mu_*(A) \geqslant \mu\Big(\bigcup_{n\leqslant p} A_n\Big) = \sum_{n\leqslant p} \mu(A_n)$$

d'où l'inégalité :

$$\mu_*(A) \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$, en utilisant la régularité intérieure pour les A_n^c, on peut trouver des ouverts $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{O}_n$ contenant A_n, tels que :

$$\mu(\mathcal{O}_n) \leqslant \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$$

Soit K un quasi-compact fermé contenu dans la réunion des $\mathcal{O}_n$ tel que :

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in N} \mathcal{O}_n\Big) \leqslant \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2}$$

K est recouvert par un nombre fini des ouverts $\mathcal{O}_n$, soit alors p tel que :

$$K \subset \bigcup_{n\leqslant p} \mathcal{O}_n$$

on a les inégalités :

$$\mu^*(A) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{n \in N} \mathcal{O}_n\Big) \leqslant \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{n \leqslant p} \mu(\mathcal{O}_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$

puis :

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) + \varepsilon$$

cette dernière inégalité étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, la démonstration du lemme est achevée.

THEOREME 1 (Enoncé). – *Soit* X *un espace topologique,* $\mathcal{C}_0$ *un clan de parties de* X, μ_0 *une mesure de Radon sur le clan* $\mathcal{C}_0$. *On peut prolonger* μ_0 *en une mesure de Radon sur* X.

Remarque 2. – D'après la proposition 1, il suffit de montrer que l'on peut prolonger μ_0 en une mesure de Radon sur un clan contenant la tribu borélienne.

DEFINITION 2. – *Soit* $\mathcal{E}$ *l'ensemble des couples* $(\mathcal{C}, \mu)$ *où* $\mathcal{C}$ *est un clan de* X *et* μ *une mesure de Radon sur* $\mathcal{C}$. *On ordonne* $\mathcal{E}$ *par la relation :*

$$(\mathcal{C}', \mu') \geqslant (\mathcal{C}, \mu)$$

si et seulement si :

α) $\mathcal{C}$ *est un sous-clan de* $\mathcal{C}'$

β) *La restriction de* μ' *à* $\mathcal{C}$ *est* μ.

PROPOSITION 2. – *L'ensemble ordonné* $\mathcal{E}$ *est inductif.*

Démonstration. – $\mathcal{E}$ est non vide puisque $(\mathcal{P}(X), 0)$ appartient à $\mathcal{E}$ (où 0 est la mesure nulle). Soit E un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{C}$ la réunion des clans de définition des éléments de E. C'est encore un clan. On définit alors μ sur $\mathcal{C}$ comme prolongement. Il est facile de voir que μ est positive et additive. Reste à montrer la régularité intérieure.

Soit B un élément de $\mathcal{C}$ et ε un réel strictement positif. On peut trouver (t, μ_t) élément de E tel que B appartienne au clan t.

μ_t étant intérieurement régulière, il existe un quasi-compact fermé K contenu dans B tel que :

$$\mu_t^*(B - K) \leqslant \varepsilon$$

Comme μ prolonge μ_t on en déduit :

$$\mu^*(B - K) \leqslant \varepsilon$$

Alors $(\mathscr{C}, \mu)$ appartient à $\mathscr{E}$ et majore E.

COROLLAIRE. – *Soit* $(\mathscr{C}_0, \mu_0)$ *le couple d'un clan* $\mathscr{C}_0$ *et d'une mesure de Radon* μ_0 *sur* $\mathscr{C}_0$, *il existe un élément maximal* $(\mathscr{C}, \mu)$ *de* $\mathscr{E}$, *tel que* μ *prolonge* μ_0.

Démonstration. – On utilise le lemme de Zorn.

LEMME 2. – *Soit* $\mathscr{C}$ *un clan de parties de* X, *et* μ *une application additive de* $\mathscr{C}$ *dans* $\mathbf{R}_+$. *Soit* A *une partie de* X, *et* $\mathscr{C}'$ *le clan engendré par* $\mathscr{C}$ *et* A. *Soit* μ' *l'application de* $\mathscr{C}'$ *dans* $\mathbf{R}_+$:

$$\mu'(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu_*(C \cap A^c)$$

μ' *est positive et additive et prolonge* μ.

Démonstration. – Soit $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante de parties contenant A et appartenant à $\mathscr{C}$ telle que :

$$\mu_*(B_n - A) \leqslant \frac{1}{n}$$

Alors pour tout élément C de $\mathscr{C}$ les inégalités suivantes sont évidentes :

$$\mu^*(C \cap A) \leqslant \inf_{B \in \mathscr{C}, B \supset A} \mu(C \cap B) \leqslant \lim_{p \to +\infty} \mu(C \cap B_p)$$

Montrons que $\mu^*(C \cap A) \geqslant \lim\limits_{p \to +\infty} \mu(C \cap B_p)$:

Pour tout entier n, il existe une partie B contenant $C \cap A$, appartenant à $\mathscr{C}$ telle que :

$$\mu^*(C \cap A) \geqslant \mu(B) - \frac{1}{n}$$

$C \cap B_n \cap B^c$ appartient à $\mathscr{C}$ et est contenue dans $B_n \cap A^c$, donc par hypothèse sur les B_n :

$$\mu(C \cap B_n \cap B^c) \leqslant \frac{1}{n}$$

et donc :

$$\mu(B) \geqslant \mu(B \cup (C \cap B_n \cap B^c)) - \frac{1}{n}$$

Or $B \cup (C \cap B_n \cap B^c)$ contient tous les $C \cap B_p$ pour $p \geqslant n$, d'où :

$$\mu(B) \geqslant \lim_{p \to +\infty} \mu(C \cap B_p) - \frac{1}{n}$$

$$\mu^*(C \cap A) \geqslant \lim_{p \to +\infty} \mu(C \cap B_p) - \frac{2}{n}$$

cette dernière inégalité étant valable pour tout n, on peut écrire :

$$\mu^*(C \cap A) \geqslant \lim_{p \to +\infty} \mu(C \cap B_p)$$

d'où, finalement, les égalités valables pour toute partie C appartenant à $\mathscr{C}$:

$$\mu^*(C \cap A) = \operatorname*{Inf}_{\substack{B \in \mathscr{C} \\ B \supset A}} \mu(C \cap B) = \lim_{p \to +\infty} \mu(C \cap B_p)$$

On démontre, mutatis mutandis, de la même manière les égalités :

$$\mu_*(C \cap A^c) = \operatorname*{Sup}_{\substack{B \in \mathscr{C} \\ B \supset A}} \mu(C \cap B^c) = \lim_{p \to +\infty} \mu(C \cap B_p^c)$$

Il est maintenant facile de voir que μ' prolonge μ.

Comme le clan $\mathscr{C}'$ n'est autre que l'ensemble :

$$\mathscr{C}' = \{(C_1 \cap A) \cup (C_2 \cap A^c) / C_1, C_2 \in \mathscr{C}\}$$

On aura pour toute partie C élément de $\mathscr{C}'$, qui s'écrit :

$$C = (C_1 \cap A) \cup (C_2 \cap A^c)$$

avec C_1, C_2 éléments de $\mathscr{C}$:

$$\mu'(C) = \lim_{p \to +\infty} \mu(C_1 \cap B_p) + \lim_{p \to +\infty} \mu(C_2 \cap B_p^c)$$

Et sous cette forme l'additivité de μ' est facile à vérifier, ainsi que le fait que μ' prolonge μ.

PROPOSITION 3. — *Soit* μ *une mesure de Radon sur un clan* $\mathscr{C}$, *et* A *une partie fermée de* X ; $\mathscr{C}'$ *le clan engendré par* $\mathscr{C}$ *et* A, μ' *l'application de* $\mathscr{C}'$ *dans* $\mathbf{R}_+$ *définie par :*

$$\mu'(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu_*(C \cap A^c)$$

alors μ' *est une mesure de Radon sur* $\mathscr{C}'$, *qui prolonge* μ.

Démonstration. — On sait déjà par le lemme 2 que μ' est additive et prolonge μ.

Montrons la *régularité intérieure :*

Soit C un élément de $\mathscr{C}'$, que l'on peut écrire

$$C = (C_1 \cap A) \cup (C_2 \cap A^c)$$

avec C_1 et C_2 éléments de $\mathscr{C}$.

Pour tout entier n on peut trouver un quasi compact fermé K_1^n contenu dans C_1 tel que :

$$\mu^*(C_1 - K_1^n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Alors $K_1^n \cap A$ est un quasi-compact fermé contenu dans $C_1 \cap A$ tel que :

$$\mu'^*(C_1 \cap A - K_1^n \cap A) \leqslant \mu'^*(C_1 - K_1^n) \leqslant \mu^*(C_1 - K_1^n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Il existe aussi un quasi-compact fermé K_2^n contenu dans $C_2 \cap B_n^c$ tel que :

$$\mu^*(C_2 \cap B_n^c - K_2^n) \leqslant \frac{1}{n}$$

K_2^n est contenu a fortiori dans $C_2 \cap A^c$ et vérifie les inégalités :

$$\mu'(C_2 \cap A^c) \leqslant \mu(C_2 \cap B_n^c) + \frac{1}{n} \leqslant \mu_*(K_2^n) + \frac{2}{n}$$

finalement le quasi-compact fermé $K_1^n \cup K_2^n$ est contenu dans C et vérifie :

$$\mu'(C) \leqslant \mu_*(K_1^n \cup K_2^n) + \frac{3}{n}$$

Comme μ' prolonge μ :

$$\mu_*(K_1^n \cup K_2^n) \leqslant \mu'_*(K_1^n \cup K_2^n)$$

et on peut écrire :

$$\mu'^*(C - K_1^n \cup K_2^n) \leqslant \frac{3}{n}$$

On en déduit la régularité intérieure de μ'.

COROLLAIRE. – *Les éléments maximaux* $(\mathscr{C}, \mu)$ *de* $\mathscr{E}$ *sont des mesures de Radon définies sur des clans contenant les fermés de* X.

LEMME 3. – *Soit* μ *une mesure de Radon sur un clan contenant les fermés de* X. *On peut prolonger* μ *en une mesure de Radon sur un clan contenant la tribu borélienne.*

Démonstrations. – Soit $\mathscr{C}' = \{C \in \mathscr{P}(X) / \mu^*(C) = \mu_*(C)\}$.

On définit μ' sur $\mathscr{C}'$ comme la restriction à $\mathscr{C}'$ de μ_*.

On voit que $\mathscr{C}'$ contient $\mathscr{C}$ et que μ' prolonge μ. $\mathscr{C}'$ est stable par complémentation et μ' est croissante et intérieurement régulière. Montrons que $\mathscr{C}'$ est stable par réunions finies :

Si C_1 et C_2 sont des éléments de $\mathscr{C}'$, ε un réel positif et B_1, B'_1, B_2, B'_2 des éléments de $\mathscr{C}$ tels que :

$$B_1 \subset C_1 \subset B'_1 \quad \text{et} \quad B_2 \subset C_2 \subset B'_2$$

$$\mu(B'_1 - B_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \mu(B'_2 - B_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors il est clair que :

$$B_1 \cup B_2 \subset C_1 \cup C_2 \subset B'_1 \cup B'_2$$

$$\mu(B'_1 \cup B'_2 - B_1 \cup B_2) \leqslant \varepsilon$$

Ce qui permet de montrer que $C_1 \cup C_2$ appartient à $\mathscr{C}'$.

L'additivité de μ' se montre par des calculs du même genre. Enfin grâce au lemme 1 on sait qu'une réunion dénombrable de parties deux à deux disjointes et éléments de $\mathscr{C}'$ appartient à $\mathscr{C}'$. $\mathscr{C}'$ est donc une tribu et contient tous les boréliens puisqu'elle contient les fermés.

PROPOSITION 4. — *Les éléments maximaux de $\mathcal{E}$ définissent des mesures de Radon sur* X.

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la proposition 1, du lemme 3 et du corollaire de la proposition 3.

Démonstration du théorème. — Résulte de la proposition 4 et du corollaire de la proposition 2.

2. Applications et exemples.

1) THEOREME 2. — *Relèvement d'une mesure par une application continue.*

Soit X *un espace topologique quasi-compact et* π *une application continue surjective de* X *sur* Y. *Soit* ν *une mesure de Radon sur* Y. *Il existe une mesure de Radon* μ *sur* X *dont l'image* $\pi\mu$ *par* π *soit* ν.

Démonstration. — Soit $\mathcal{C}_0$ le clan des images réciproques de boréliens de Y. Comme π est surjective, l'application : $B \longmapsto \pi^{-1}(B)$ est injective et l'on peut définir μ_0 sur $\mathcal{C}_0$ par :

$$\mu_0(\pi^{-1}(B)) = \nu(B)$$

μ est additive. Montrons la régularité intérieure :

Soit B un borélien de Y, ε un réel strictement positif.

On peut trouver un fermé L de Y contenu dans B, tel que :

$$\nu(B - L) \leqslant \varepsilon$$

alors $\pi^{-1}(L)$ est un quasi compact fermé de X, contenu dans $\pi^{-1}(B)$ tel que

$$\mu_0(\pi^{-1}(B) - \pi^{-1}(L)) \leqslant \varepsilon$$

On montre ainsi que μ_0 est une mesure de Radon sur $\mathcal{C}_0$.

Par le théorème 1 on prolonge μ_0 en une mesure de Radon μ sur X. Alors par construction de μ_0, $h\mu = \nu$.

2) *Mesure de Lebesgue sur* $[0,1]$.

X est l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbf{R}$, muni de la topologie usuelle. $\mathscr{C}_0$ est le clan des réunions finies d'intervalles. μ_0 fait correspondre à tout intervalle sa longeur :

$$\mu_0([a\,,b]) = \mu_0(]a\,,b]) = \mu_0([a\,,b[) = \mu_0(]a\,,b[) = b - a\,.$$

On vérifie trivialement la régularité intérieure. Il existe alors une mesure de Radon μ sur X qui prolonge μ_0. Comme $\mathscr{C}_0$ contient une base d'ouverts ce prolongement est d'ailleurs unique : c'est la mesure de Lebesque sur $[0,1]$.

3) *Produits de mesures.*

Soient X et Y deux quasi-compacts, μ une mesure de Radon sur X, ν une mesure de Radon sur Y. Sur X x Y muni de la topologie produit il existe une mesure de Radon λ telle que pour tout couple de parties $(B\,,C)$, B μ-mesurable, C ν-mesurable, $B \times C$ soit λ-mesurable de mesure $\mu(B) \times \nu(C)$.

Démonstration. – Soit $\mathscr{C}_0$ le clan engendré par les produits $B \times C$, où B est μ-mesurable. On définit λ_0 de $\mathscr{C}_0$ dans $\mathbf{R}_+$ par :

$$\lambda_0 : (B_1 \times C_1) \cup \ldots \cup (B_n \times C_n) \longmapsto \sum_{p=1}^{p=n} \mu(B_p) \times \nu(C_p)$$

quand les $B_p \times C_p$ sont deux à deux disjointes Comme on peut mettre tout élément de $\mathscr{C}_0$ sous une telle forme, λ_0 est bien définie.

λ_0 est additive et intérieurement régulière, donc prolongeable en une mesure de Radon λ (d'ailleurs unique puisque $\mathscr{C}_0$ contient une base d'ouverts) sur X x Y, qui répond à la question.

4) *Un contre-exemple.*

Voici maintenant un exemple d'un espace topologique X, d'un clan $\mathscr{C}_0$, d'une application additive μ_0 de $\mathscr{C}_0$ dans $\mathbf{R}_+$ vérifiant la condition, plus faible que (R), suivante :

(R$'$) Pour toute partie B du clan $\mathscr{C}_0$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un quasi-compact fermé K contenu dans B et tel que :

$$\mu_{0*}(B - K) \leqslant \varepsilon$$

et μ_0 n'admettant pas de prolongement qui soit une mesure de Radon sur X.

X sera l'ensemble des rationnels compris entre 0 et 1, muni de la topologie habituelle.

On définit la relation d'équivalence ρ entre deux rationnels par : $a \rho b$ si dans l'expression de a et b sous forme de fractions réduites, a et b ont même dénominateur.

$\mathcal{C}_0$ sera l'ensemble des parties finies et des complémentaires de parties finies de X, saturées pour la relation d'équivalence ρ. $\mathcal{C}_0$ est bien un clan.

On définit μ_0, application de $\mathcal{C}_0$ dans $\mathbf{R}_+$ par :

$\mu_0(\mathrm{B}) = 0$ si B est une partie finie

$\mu_0(\mathrm{B}) = 1$ si B est complémentaire d'une partie finie.

L'additivité de μ_0 est alors facile à vérifier.

Montrons que (R') est vérifiée : Soit B un élément de $\mathcal{C}_0$.

Si B a un nombre fini d'éléments, il n'y a pas de problème.

Si B est complémentaire d'une partie finie, il existe un entier n tel que B contienne tous les éléments de X dont l'expression sous forme de fraction réduite à un denominateur supérieur à n.

Si on désigne par p_m le m$^{\text{ème}}$ nombre premier, $\frac{1}{n} + \frac{1}{p_m}$ pour tout entier $m \geqslant n$ est, une fois réduit, de dénominateur plus grand que p_m, donc que m. Soit K l'ensemble des éléments de la suite $(a_n)_{n \in \mathrm{N}}$ où :

$$a_0 = \frac{1}{n}\ , a_1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{p_{n+1}}\ , \ldots , a_r = \frac{1}{n} + \frac{1}{p_{n+r}}\ , \ldots$$

qui est une suite convergente vers $\frac{1}{n}$ – K est un compact de X, contenu dans B et qui rencontre toute partie infinie appartenant à $\mathcal{C}_0$. Tout élément de $\mathcal{C}_0$ contenu dans B – K est donc fini, donc de mesure nulle et :

$$\mu_{0*}(\mathrm{B} - \mathrm{K}) = 0$$

Mais μ_0 n'est pas prolongeable en une mesure de Radon, puisque X de mesure 1 est réunion dénombrable des parties A_n, éléments de $\mathcal{C}_0$, où A_n est définie par :

$$A_n = \left\{0\,,\ \frac{1}{n}\,,\ \frac{2}{n}\,,\ \ldots\,,\ \frac{n-1}{n}\,,\ \frac{n}{n}\right\}\,,$$

qui sont de mesure nulle.

Manuscrit reçu le 31 janvier 1969

Jean-Pierre HENRY
Centre de Recherche Mathématique
Ecole Polytechnique
Rue Descartes
Paris 5e