ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCOS SEBASTIANI

Sur les feuilletages à groupe d'holonomie fini et feuilles compactes

Annales de l'institut Fourier, tome 18, nº 2 (1968), p. 331-336

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_2_331_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 2 (1968), 331-336.

SUR LES FEUILLETAGES A GROUPE D'HOLONOMIE FINI ET FEUILLES COMPACTES

par Marcos SEBASTIANI

1. Le mot « différentiable » voudra toujours dire « différentiable de classe C^∞ ».

DÉFINITION. — *Un espace stratifié (abstrait) c'est la donnée d'un espace topologique localement compact* X, *une famille de sous-ensembles connexes localement fermés de* X *(appelés les « strates ») et une structure de variété différentiable sur chaque strate, de telle façon que :*

a) Les strates sont deux à deux disjointes et leur réunion est X.

b) Chaque compact de X *ne rencontre qu'un nombre fini de strates.*

c) Si S *est une strate et* $\overline{S}$ *est son adhérence, alors* $\overline{S} - S$ *est une réunion de strates de dimension strictement inférieure à celle de* S.

LEMME 1. — *Si on se donne une partition* $\mathcal{S}$ *de* X *en sous-ensembles connexes telle que pour chaque* $x \in X$ *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *tel que les composantes connexes des* $S \cap U$ *pour* $S \in \mathcal{S}$ *donnent une stratification de l'espace* U, *alors* $\mathcal{S}$ *est une stratification de* X. *(Naturellement, on suppose chaque* $S \in \mathcal{S}$ *muni d'une structure de variété différentiable et on prend sur* $S \cap U$ *la structure induite.)*

Démonstration. — Pour vérifier (*c*) on doit prouver que si S et T appartiennent à $\mathcal{S}$ et si $T \cap (\overline{S} - S) \neq \emptyset$ alors $T \subset \overline{S}$

et $\dim T < \dim S$. Puisque T est connexe et $T \subset \overline{S}$ est fermé dans T il suffit de prouver que $T \cap \overline{S}$ est ouvert dans T.

Soit $x \in T \cap \overline{S}$. Soit U un voisinage de x qui vérifie les conditions du lemme. Soit V un voisinage ouvert de x tel que $\overline{V}$ soit compact et $\overline{V} \subset U$. Alors, il n'y a qu'un nombre fini de composantes connexes de $S \cap U$ dont l'intersection avec V est non-vide. Donc, $x \in \overline{S}_1$ où S_1 est une composante connexe de $S \cap U$. Si T_1 est la composante connexe de $T \cap U$ qui contient x, alors $\dim T_1 < \dim S_1 = \dim S$ et $T_1 \subset \overline{S}_1 \subset \overline{S}$. Comme $x \in T_1$ et T_1 est ouvert dans T, $T \cap \overline{S}$ est ouvert dans T et $\dim T < \dim S$.

2. Soit G un groupe fini et soit $\alpha : G \to GL(n, R)$ une représentation fidèle. On définit $gu = \alpha(g)(u)$ pour tout $g \in G$ et tout $u \in R^n$. On pose :

$$G_S = \{g \in G | gs = s \quad \text{pour tout} \quad s \in S\}$$

et

$$F_H = \{u \in R^n | hu = u \quad \text{pour tout} \quad h \in H\}$$

si $S \subset R^n$ et si H et un sous-groupe de G. Alors G_S est un sous-groupe de G et F_H et un sous-espace de R^n. Si $u \in R^n$, G_u est appelé le sous-groupe isotrope de u.

Soit

$$S_H = \{u \in R^n | G_u = H\},$$

H étant un sous-groupe de G. S_H est ouvert dans F_H et $\overline{S}_H = F_H$. $F_H - S_H$ est la réunion des $S_{H'}$ tels que $H \subset H'$ et $H \neq H'$.

Soit $X = R^n/G$ avec la topologie quotient. Soit $\tilde{S}_H$ l'image de S_H dans X. Soit $N(H)$ le normalisateur de H dans G. Alors $N(H)/H$ opère librement sur S_H et

$$\tilde{S}_H = S_H/(N(H)/H).$$

Donc, $\tilde{S}_H$ est une variété différentiable.

LEMME 2. — *Les composantes connexes des* $\tilde{S}_H$, *pour tous les* H *sous-groupe isotrope de* G, *donnent une stratification de* X.

La démonstration est immédiate d'après ce qu'on vient de voir.

3. Soit E une variété différentiable *connexe* sur laquelle on s'est donné un feuilletage différentiable à feuilles de dimension r. *On suppose toutes les feuilles compactes et tous les groupes d'holonomie finis.* Soit X l'espace quotient de E par la relation d'équivalence qui consiste à identifier les points qui sont sur une même feuille. Alors X est localement compact par le théorème de stabilité d'Ehresman-Shih [2].

Soit $\pi : E \to X$ la projection canonique. Pour chaque $p \in E$ on appelera F_p la feuille qui contient p et pour chaque $x \in X$ on posera $F_x = \pi^{-1}(x)$.

On peut définir de façon naturelle un faisceau $\mathcal{Z}$ sur E qui induit sur chaque feuille le faisceau d'entiers tordus de cette feuille. On prend comme fibre de $\mathcal{Z}$ sur $p \in E$ le groupe abélien :

$$\mathcal{Z}_p = H^r(F_p, F_p - \{p\}; Z).$$

Si (U, h) est une carte locale de la structure feuilletée, alors h définit évidemment une orientation locale de F_p dans p pour chaque $p \in U$. Soit $\mu_p \in \mathcal{Z}_p$ la classe fondamentale de cette orientation. Alors, pour définir la topologie de $\mathcal{Z}$, on exige que la section $s : U \to \mathcal{Z}$ donnée par :

$$s(p) = \mu_p \qquad \text{pour tout} \qquad p \in U$$

soit continue.

Soit $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*(\pi, \mathcal{Z})$ le faisceau gradué de cohomologie de π à coefficients dans $\mathcal{Z}$ [3] chap. 2,4.17. On peut décrire la topologie de $\mathcal{H}^r$ de la façon suivante : $\mathcal{H}^r_x = H^r(F_x, \mathcal{Z}|F_x)$ est cyclique infini engendré par la classe fondamentale ν_x de F_x (à coefficients tordus). Soient $x_0 \in X$ et $p_0 \in F_{x_0}$. Alors, il existe une carte locale (U, h) de la structure feuilletée, avec $p_0 \in U$ telle que :

a) F_{x_0} a une seule plaque dans U.

b) Si $V = \pi(U)$ et si k_x est le nombre de plaques de F_x dans U pour chaque $x \in V$, alors la section s de $\mathcal{H}^r$ au-dessus de V (qui est ouvert par le théorème de stabilité) définie par :

$$s(x) = k_x \nu_x \qquad \text{pour tout} \qquad x \in V$$

est *continue* (Cf. [6].)

De ceci et du théorème d'Ehresman [1] on déduit la :

PROPOSITION 1. — *L'ensemble des points de* X *au voisinage desquels le faisceau* $\mathcal{H}^r$ *est constant coïncide avec l'ensemble des points de* X *au voisinage desquels* π *est une fibration localement triviale.*

LEMME 3. — *Soit* L *un sous-espace de* X. *Soit* L^0 *le sous-ensemble de* L, *ouvert dans* L, *formé par les points de* L *qui admettent un voisinage sur lequel* $\mathcal{H}^r|L$ *est constante. Alors* L^0 *est dense dans* L.

Démonstration. — Soit U un voisinage dans X de $x \in L$. Si U est assez petit on peut supposer qu'il existe une section continue $s : U \to \mathcal{H}^r$ telle que $s(x) = \nu_x$ et $s(y) = k_y \nu_y$ pour $y \in U$ où les k_y sont bornés puisque on a supposé que le groupe d'holonomie de F_x est fini.

Soit $y_0 \in U \cap L$ tel que $k_{y_0} \geqslant k_y$ pour tout $y \in U \cap L$. Alors, $y_0 \in L^0$.

PROPOSITION 2. — *Soit*

$$X_0 = X, \qquad X_1 = X - X^0, \qquad X_2 = X_1 - X_1^0, \textit{ etc.}$$

Soit $Y_i = X_i - X_{i+1}$ *pour* $i = 0, 1, 2, \ldots$ *Alors*

a) *On peut introduire de façon naturelle une structure de variété différentiable sur chaque* Y_i *et les composantes connexes des* Y_i *donnent une stratification de* X.

b) $Y_i' = \pi^{-1}(Y_i)$ *est une sous-variété différentiable de* E *et* $\pi : Y_i' \to Y_i$ *est une fibration différentiable localement triviale.*

c) Y_i *est dense dans* X_i *et* $\overline{Y}_i = X_i$.

d) Y_0 *est connexe.*

Démonstration. — La partie *c*) se déduit du lemme 3 et du fait que X_i est fermé.

Soit $x \in X$ et soit $p \in F_x$. Soit G le groupe d'holonomie de F_x. On peut trouver une représentation linéaire fidèle de G dans R^n (où n est la codimension du feuilletage) et un plongement $f : R^n \to E$ tels que $f(0) = p$ et $f(u)$ et $f(v)$ sont dans la même feuille si et seulement si $gu = v$ pour un

$g \in G$. Alors $\pi(f(R^n))$ s'identifie à R^n/G. On peut aussi supposer que f est transverse au feuilletage en chaque point et que $\pi(f(R^n))$ est ouvert dans X. En identifiant $U = \pi(f(R^n))$ avec R^n/G on peut énoncer le

LEMME 4. — *Pour tout* $i = 0, 1, 2, \ldots$ *on a*

$$Y_i \cap U = \cup \{\tilde{S}_H | H \in \mathcal{F}_i\}$$

où $\mathcal{F}_i$ *est une famille de sous-groupes isotropes de* G *telle que si* $H, H' \in \mathcal{F}_i$ *et* $H \subset H'$ *alors* $H = H'$.

Admettons ce lemme. Alors, chaque $\tilde{S}_H$, pour $H \in \mathcal{F}_i$, est une variété différentiable ouverte dans Y_i. En répétant le procédé pour chaque $x \in X$ on obtient un recouvrement de Y_i par des ouverts qui sont des variétés différentiables. Mais comme le feuilletage est différentiable les structures différentiables sur ces ouverts sont compatibles et définissent une structure de variété différentiable sur Y_i. Les lemmes 1 et 2 permettent de compléter la démonstration de a).

Soit $u \in S_H$. Soit W un voisinage de u dans R^n assez petit pour que $gW \cap W = \emptyset$ si $g \notin H$ et tel que

$$W_1 = W \cap S_H \subset S_H \qquad \text{et} \qquad S_H \to \tilde{S}_H$$

soit un difféomorphisme sur W_1. Alors il existe une carte locale (V, h) de la structure feuilletée telle que $f(u) \in V$, chaque feuille de Y'_i a une seule plaque dans V et $Y'_i \cap V$ est difféomorphe à $W_1 \times R^r$. Ceci et le théorème d'Ehresman [1] prouvent la partie b).

Pour prouver d) on observe d'abord que le lemme 4 est trivial pour $i = 0$ et que $\mathcal{F}_0$ se réduit au sous-groupe trivial de G. Or, $\tilde{S}_{\{1\}}$ est toujours connexe. Donc, d) résulte du lemme 3 et de la topologie générale (Voir le lemme du § 3 de [3]).

Il reste à prouver le lemme 4. On prouvera par récurrence que

$$X_i \cap U = \cup \{\tilde{S}_H | H \in \mathcal{G}_i\}$$

où $\mathcal{G}_i$ est une famille de sous-groupes isotropes de G et que

$$Y_i \cap U = \cup \{\tilde{S}_H | H \in \mathcal{F}_i\}$$

où $\mathcal{F}_i$ est la famille des éléments minimaux de $\mathcal{G}_i$.

C'est évident pour $i=0$. Admettons-le pour $i-1$ et prouvons-le pour i, $i \geqslant 1$. Puisque $X_i = X_{i-1} - Y_{i-1}$ on a que :

$$X_i \cap U = \cup \{\tilde{S}_H | H \in \mathcal{G}_i\}$$

pour une famille $\mathcal{G}_i$ de sous-groupes isotropes de G. Soit $H \in \mathcal{G}_i$ minimal. Soit $u \in S_H$. Soit W un voisinage de u tel que $gW \cap W = \emptyset$ si $g \notin H$. Alors, l'image réciproque de $X_i \cap U$ dans W est $W \cap S_H$, et $W \cap S_H \to \tilde{S}_H$ est *injective*. Comme cela est valable pour tout $u \in S_H$, on a $\tilde{S}_H \subset Y_i = X_i^0$.

Soit $H \in \mathcal{G}_i$ non-minimal. Soit $H' \in \mathcal{G}_i$, $H' \subset H$, $H' \neq H$. Soit $u \in S_H$. Alors il existe une suite $\{u_k\} \subset R^n$ telle que $u_k \to u$ et $u_k \in S_{H'}$ pour tout k. Si $h \in H$ et $h \notin H'$ alors $hu_k \neq u_k$ pour tout k et $hu = u$. Comme les images des u_k dans U sont contenues dans X_i on aura que l'image de u dans U est dans X_{i+1}. Donc, $\tilde{S}_{H'} \subset X_{i+1}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Ehresman, Colloque de Topologie (Espaces fibrés) Bruxelles, (1950), 30-35.
[2] C. Ehresman et W. Shih, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 243 (1956) 344-346.
[3] R. H. Fox, Algebraic Geometry and Topology, Princeton 1957, 243-257.
[4] R. Godement, *Act. Scient. et Ind.*, n° 1252.
[5] G. Reeb et Wu Wen Tsun, *Act. Scient. et Ind.*, n° 1183.
[6] M. Sebastiani, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 260 (1965), 1055-1058.

Manuscrit reçu le 18 décembre 1967

Marcos Sebastiani
Juan M. Blanes, 1028, App. 302,
Montevideo, Uruguay.