ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Guilnard SADAKA

Paires admissibles d'une algèbre de Lie simple complexe et W-algèbres finies.

Tome 66, nº 2 (2016), p. 833-870.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2016__66_2_833_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
66, 2 (2016) 833-870

PAIRES ADMISSIBLES D'UNE ALGÈBRE DE LIE SIMPLE COMPLEXE ET W-ALGÈBRES FINIES.

par Guilnard SADAKA (*)

Résumé. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe et e un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. Dans cet article, on s'intéresse au problème, soulevé par Premet, d'isomorphisme entre les W-algèbres finies construites à partir de certaines sous-algèbres nilpotentes de $\mathfrak{g}$, dites *e-admissibles*. On considère une version graduée de ce problème et on introduit les notions de paire et graduation e-admissibles. On montre que la W-algèbre associée à une paire e-admissible possède des propriétés similaires à celle introduite par Gan et Ginzburg. De plus, on définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des paires admissibles et montre que si deux paires sont équivalentes, alors les W-algèbres associées sont isomorphes. En introduisant la notion de la connexité pour les graduations e-admissibles, on réduit le problème d'isomorphisme à l'étude de l'équivalence des paires admissibles pour une graduation admissible fixée. Ceci nous permet de montrer ensuite que les paires admissibles relativement aux graduations *b-optimales* sont équivalentes. On retrouve comme cas particulier un résultat de Brundan et Goodwin. Dans la dernière partie, on utilise nos résultats pour résoudre complètement le problème d'isomorphisme dans quelques cas particuliers.

Abstract. — Let $\mathfrak{g}$ be a complex simple Lie algebra and e a nilpotent element of $\mathfrak{g}$. We are interested in the isomorphism question (raised by Premet) between the finite W-algebras constructed from some nilpotent subalgebras of $\mathfrak{g}$ called *e-admissible*. We introduce the concept of *e-admissible pair* and *e-admissible grading*. We show that the W-algebra associated to an e-admissible pair admits similar properties to the ones introduced by Gan and Ginzburg. Moreover, we define an equivalence relation on the set of admissible pairs and we show that if two admissible pairs are equivalent, it follows that the associated W-algebras are isomorphic. By introducing the notion of connectivity of admissible gradings, we reduce the isomorphism question to the study of the equivalence of admissible pairs for a fixed admissible grading. This allows us to prove that admissible pairs relative to *b-optimal* gradings are equivalent, hence the corresponding W-algebras are isomorphic. We recover as a special case a result of Brundan and Goodwin. In the final part, we use our results to find a complete answer to the isomorphism question in some particular cases.

Mots-clés : W-algèbre finie, paire admissible, graduation admissible.
Classification math. : 17B20, 17B35.
(*) La majorité de ce travail a été financée par le Centre National de la Recherche Scientifique Libanais.

1. Introduction

Soient $\Bbbk$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie définie sur $\Bbbk$ et de groupe adjoint G. On note $\langle .\,,.\rangle$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Comme celle-ci est non dégénérée sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, elle induit un isomorphisme

$$\kappa:\ \mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}^*,\qquad x\longmapsto\langle x,.\rangle$$

de $\mathfrak{g}$ sur son dual $\mathfrak{g}^*$.

Soient e un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$ et χ la forme linéaire $\kappa(e)$. D'après le Théorème de Jacobson-Morosov (cf. e.g. [11, Theorem 32.1.5]), e est contenu dans un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (e,h,f) de $\mathfrak{g}$. On rappelle qu'un tel triplet vérifie les relations :

$$[h,e]=2e,\qquad [e,f]=h,\qquad [h,f]=-2f.$$

De plus, e et f sont dans la même G-orbite et $\operatorname{ad} h$ est un élément semi-simple dont les valeurs propres sont entières. Ceci définit sur $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{Z}$-graduation appelée une *graduation de Dynkin associée à e*.

On pose

$$\mathfrak{p}_+:=\bigoplus_{j\geqslant 0}\mathfrak{g}(j)$$

où $\mathfrak{g}(j):=\{x\in\mathfrak{g}\ ;\ [h,x]=jx\}$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$. Alors $\mathfrak{p}_+$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{g}^e$, le centralisateur de e dans $\mathfrak{g}$. Il en résulte que la forme bilinéaire

$$\mathfrak{g}(-1)\times\mathfrak{g}(-1)\longrightarrow\Bbbk,\qquad (x,y)\longmapsto\langle e,[x,y]\rangle$$

est non dégénérée. Soit $\mathfrak{l}$ un sous-espace lagrangien de $\mathfrak{g}(-1)$ relativement à cette forme, c'est-à-dire un sous-espace totalement isotrope de dimension maximale, et posons :

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e}:=\mathfrak{l}\oplus\bigoplus_{j\leqslant -2}\mathfrak{g}(j). \tag{1.1}$$

Alors $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e}$ est une sous-algèbre ad-nilpotente de $\mathfrak{g}$ qui vérifie $\langle e,[\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e},\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e}]\rangle=\{0\}$. De plus, $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e}\cap\mathfrak{g}^e=\{0\}$ et $\dim\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e}=\frac{1}{2}\dim G\cdot e$ si $G\cdot e$ désigne l'orbite de e dans $\mathfrak{g}$ sous l'opération adjointe de G.

À l'élément nilpotent e et la sous-algèbre ad-nilpotente $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e}$, on associe une algèbre d'endomorphismes $H_{\mathfrak{l},e}$, appelée *W-algèbre finie associée à e*, dont on rappelle une construction ci-dessous. Les W-algèbres finies ont été introduites par Premet [9]. Dans le cas des éléments nilpotents pairs (i.e. $\mathfrak{g}(-1)=\mathfrak{g}(1)=\{0\}$), elles furent introduites par Lynch [8], généralisant ainsi la construction de Kostant [7] correspondant au cas des éléments nilpotents réguliers. L'étude des *W-algèbres finies* a connu un essor particulièrement intense, notamment en raison de leur importance dans la théorie des représentations comme l'illustre l'*équivalence de Skryabin* dans l'appendice de [9].

On note $U(\mathfrak{g})$ et $U(\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e})$ les algèbres enveloppantes de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e}$ respectivement. Soient $\Bbbk_e$ le $U(\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e})$-module à gauche correspondant au caractère $\chi|_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e}}$ de $\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e}$ et $I_{\mathfrak{l},e}$ l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments $x - \chi(x)$ avec $x \in \mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e}$. Soient

$$Q_{\mathfrak{l},e} := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e})} \Bbbk_e \simeq U(\mathfrak{g})/I_{\mathfrak{l},e}$$

la *représentation de Gelfand-Graev généralisée*, et $H_{\mathfrak{l},e}$ l'algèbre d'endomorphismes

$$H_{\mathfrak{l},e} := Q_{\mathfrak{l},e}^{\operatorname{ad} \mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e}} \simeq \operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(Q_{\mathfrak{l},e})^{\mathrm{op}}. \tag{1.2}$$

On peut généraliser les constructions de $Q_{\mathfrak{l},e}$ et $H_{\mathfrak{l},e}$ comme suit. Soit $\mathfrak{m}$ une sous-algèbre ad-nilpotente de $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions suivantes :

(χ1) $\chi([\mathfrak{m},\mathfrak{m}]) = \{0\}$;
(χ2) $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$;
(χ3) $\dim \mathfrak{m} = (\dim G \cdot e)/2$.

On définit une algèbre d'endomorphismes $H(\mathfrak{m}, e)$ suivant la construction (1.2). Précisément, on pose

$$H(\mathfrak{m}, e) := Q(\mathfrak{m}, e)^{\operatorname{ad} \mathfrak{m}} \simeq \operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(Q(\mathfrak{m}, e))^{\mathrm{op}},$$

où $Q(\mathfrak{m}, e)$ est le quotient de $U(\mathfrak{g})$ par l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments $x - \chi(x)$ avec $x \in \mathfrak{m}$. On dira que $H(\mathfrak{m}, e)$ est la *W-algèbre finie associée* à $\mathfrak{m}$. Une question naturelle, soulevée par A. Premet, est la suivante :

Question A. — *Si $\mathfrak{m}$ est une sous-algèbre* ad*-nilpotente de $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions* (χ1), (χ2) *et* (χ3), *les W-algèbres $H(\mathfrak{m}, e)$ et $H_{\mathfrak{l},e} = H(\mathfrak{m}_{\mathfrak{l},e})$ sont-elles isomorphes ?*

Cette question est d'autant plus naturelle que la réponse est affirmative, d'après un résultat de Premet [9], dans le cas où le corps de base est de caractéristique positive. La W-algèbre $H(\mathfrak{m}, e)$ dépend uniquement de l'orbite de e dans $\mathfrak{g}$, à conjugaison près. Comme e sera fixé dans la suite, nous noterons désormais plus simplement $H(\mathfrak{m})$ et $Q(\mathfrak{m})$ l'algèbre $H(\mathfrak{m}, e)$ et le quotient $Q(\mathfrak{m}, e)$ respectivement.

Pour le cas où le corps de base est de caractéristique nulle, les résultats, partiels, obtenus jusqu'ici sont valables sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Ils sont essentiellement dûs à W. Gan et V. Ginzburg d'une part (cf. [5]) et à J. Brundan et S. Goodwin d'autre part (cf. [1]). On les résume ci-dessous. On suppose désormais que $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Tout d'abord, W. Gan et V. Ginzburg montrent que l'algèbre $H_{\mathfrak{l},e}$ ne dépend pas, à un isomorphisme près, du choix du sous-espace lagrangien $\mathfrak{l}$ dans $\mathfrak{g}(-1)$, [5, Theorem 4.1].

On notera désormais plus simplement H_e l'algèbre $H_{\mathfrak{l},e}$ (définie à un isomorphisme près). Plus récemment, J. Brundan et S. Goodwin ont étendu le résultat de Gan et Ginzburg comme suit. Soit Γ une *$2d$-bonne $\mathbb{Z}$-graduation pour e*, c'est-à-dire une $\mathbb{Z}$-graduation $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ telle que $e \in \mathfrak{g}_{2d}$ et telle que l'application linéaire $\operatorname{ad} e : \mathfrak{g}_j \to \mathfrak{g}_{j+2d}$ est injective pour tout $j \leqslant -d$ et surjective pour tout $j \geqslant -d$ (cf. [1, §5] [(1)]). La restriction de la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \langle e, [x, y]\rangle$ à $\mathfrak{g}_{-d} \times \mathfrak{g}_{-d}$ est non dégénérée. Si $\mathfrak{g}^0_{-d}$ est un sous-espace lagrangien de $\mathfrak{g}_{-d}$, alors

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{g}^0_{-d} \oplus \bigoplus_{j<-d} \mathfrak{g}_j \tag{1.3}$$

est une sous-algèbre ad-nilpotente Γ-graduée de $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions (χ1), (χ2) et (χ3) ci-dessus. Le résultat principal de [1] assure que les algèbres $H(\mathfrak{m})$ et H_e sont isomorphes. En particulier, l'algèbre $H(\mathfrak{m})$ ne dépend pas, à un isomorphisme près, du choix du sous-espace lagrangien $\mathfrak{g}^0_{-d}$ dans $\mathfrak{g}_{-d}$.

On généralise la construction des W-algèbres finies grâce à la définition suivante qui est centrale dans cet article :

DÉFINITION 1.1. — *Soient $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ deux sous-algèbres de $\mathfrak{g}$. On dit que la paire $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ est* admissible pour *e (ou e-*admissible*) s'il existe une $\mathbb{Z}$-graduation $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ et un entier $a > 1$ tels que :*

(A1): $e \in \mathfrak{g}_a$;

(A2): $\mathfrak{m}$ *et* $\mathfrak{n}$ *sont Γ-graduées et* $\bigoplus_{j\leqslant -a} \mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n} \subseteq \bigoplus_{j<0} \mathfrak{g}_j$;

(A3): $\mathfrak{m}^{\perp} \cap [\mathfrak{g}, e] = [\mathfrak{n}, e]$;

(A4): $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$;

(A5): $[\mathfrak{n}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$;

(A6): $\dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e$.

On dit qu'une $\mathbb{Z}$-graduation $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ est admissible pour *e s'il existe un entier $a > 1$ tel que $e \in \mathfrak{g}_a$ et s'il existe une paire e-admissible relativement à Γ.*

---

(1) Dans [1], les auteurs considèrent des bonnes $\mathbb{R}$-graduations qui se définissent de manière analogue.

On définit alors la *W-algèbre associée à une paire e-admissible* $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ par

$$H(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) := Q(\mathfrak{m})^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{n}}$$

où $Q(\mathfrak{m})$ est le quotient de $U(\mathfrak{g})$ par l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments $x-\chi(x)$ avec $x \in \mathfrak{m}$. Les $2d$-bonnes $\mathbb{Z}$-graduations pour e sont des cas particuliers de $\mathbb{Z}$-graduations admissibles pour e mais il existe des $\mathbb{Z}$-graduations admissibles pour e qui ne sont pas $2d$-bonnes pour e (voir Exemple 2.7).

On s'intéresse dans cet article au problème d'isomorphisme suivant.

Question B. — *Si $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ et $(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')$ sont deux paires e-admissibles de $\mathfrak{g}$, les W-algèbres $H(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ et $H(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')$ sont-elles isomorphes ?*

Dans un premier temps, on obtient une caractérisation des graduations e-admissibles (cf. Théorème 2.11).

On s'intéresse ensuite aux propriétés de l'algèbre $H(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$. On obtient essentiellement les Théorèmes 3.9 et 3.10 qui étendent [5, Theorem 4.1].

Afin d'étudier le problème d'isomorphisme de la Question B, on définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des paires e-admissibles (cf. Définition 4.1 et Définition 4.6). On montre alors que si $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ et $(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')$ sont deux paires e-admissibles équivalentes, alors les algèbres $H(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ et $H(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')$ sont isomorphes (cf. Théorème 4.9).

On introduit ensuite les notions de graduations e-admissibles adjacentes et connexes (cf. Définitions 5.2 et 5.3). Grâce aux Théorèmes 5.7 et 5.11, le problème d'isomorphisme se réduit à l'étude de la relation d'équivalence sur l'ensemble des paires e-admissibles pour une graduation e-admissible donnée. Dans ce contexte, on définit la notion de graduation *b-optimale pour e* (cf. Définition 6.3). On montre que les paires e-admissibles relativement à une graduation b-optimale de $\mathfrak{g}$ sont équivalentes entre elles. De plus, elles sont équivalentes à celles issues d'une graduation de Dynkin (cf. Théorèmes 6.6 et 6.8). En particulier, on retrouve le résultat de [1, Theorem 1].

On traite enfin quelques cas particuliers pour lesquels on montre l'équivalence des paires e-admissibles, cf.Théorèmes 7.1, 7.2, 7.4, 7.5 et §7.3. En particulier, les W-algèbres associées sont isomorphes.

Compte tenu de ces résultats, on formule la conjecture suivante.

Conjecture A. — *Les paires e-admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les W-algèbres associées sont isomorphes.*

Remerciements. — Une grande partie de ce travail s'inscrit dans le cadre de ma thèse [10]. Je remercie Rupert Yu et Anne Moreau, mes deux directeurs de thèse, pour leur patience et pour avoir orienté ce travail et partagé leurs idées durant des discussions enrichissantes. Je remercie également Simon Goodwin pour son intérêt envers mes travaux et ses remarques fructueuses.

2. Graduations et paires admissibles

Dans cette section, on conserve les notations de l'introduction. Si $x \in \mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{g}^x$ son centralisateur dans $\mathfrak{g}$.

Si U est un sous-espace de $\mathfrak{g}$, on note $U^\perp$ son orthogonal par rapport à la forme de Killing. Si deux sous-espaces U et V de $\mathfrak{g}$ sont en couplage par rapport à la forme de Killing, alors $\dim U = \dim V$. On a le lemme suivant (cf. e.g. [11, Proposition 20.1.5]) :

Lemme 2.1. — *Soit* $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$ *une* $\mathbb{Q}$*-graduation de* $\mathfrak{g}$*. Il existe un élément semisimple* $h_\Gamma \in \mathfrak{g}$ *tel que*

$$\mathfrak{g}_j = \{x \in \mathfrak{g}\,;\ [h_\Gamma, x] = jx\}.$$

Soient $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$ une graduation de $\mathfrak{g}$ et h_Γ l'élément semisimple définissant Γ. Comme la forme de Killing est $\mathfrak{g}$-invariante, donc $\operatorname{ad} h_\Gamma$-invariante, les sous-espaces $\mathfrak{g}_i$ et $\mathfrak{g}_{-i}$ sont en couplage par rapport à la forme de Killing pour tout i. En particulier, ils sont de même dimension.

Pour une $\mathbb{Q}$-graduation $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$ et pour tout $k \in \mathbb{Q}$, on désigne par $\mathfrak{g}_{\leqslant k}$, $\mathfrak{g}_{<k}$, $\mathfrak{g}_{\geqslant k}$, $\mathfrak{g}_{>k}$ les sommes $\bigoplus_{j \leqslant k} \mathfrak{g}_j$, $\bigoplus_{j<k} \mathfrak{g}_j$, $\bigoplus_{j \geqslant k} \mathfrak{g}_j$, $\bigoplus_{j>k} \mathfrak{g}_j$ respectivement.

Rappelons que $\kappa : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ désigne l'isomorphisme de Killing. On fixe pour la suite un élément nilpotent e de $\mathfrak{g}$ et on pose $\chi := \kappa(e)$. Rappelons que si $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ sont deux sous-algèbres de $\mathfrak{g}$, la paire $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ est *admissible pour* e (ou e*-admissible*) si elle vérifie les conditions de la Définition 1.1.

Dans le cas particulier où $\mathfrak{m}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ telle que la paire $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ soit admissible pour e, on dit que la sous-algèbre $\mathfrak{m}$ est *admissible pour* e.

Remarque 2.2. — Si $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ est une paire admissible pour e, alors

$$\chi([\mathfrak{n}, \mathfrak{m}]) = \{0\}.$$

DÉFINITION 2.3. — *On dit qu'une paire* $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ *admissible pour* e *relativement à une* $\mathbb{Z}$*-graduation* $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ *est* optimale *si* $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{\leqslant -a}$.

On désigne désormais par $PA(e)$ l'ensemble des paires admissibles pour e et par $GA(e)$ l'ensemble des graduations admissibles pour e. Pour $\Gamma \in GA(e)$, on note $PA(e,\Gamma)$ l'ensemble des paires admissibles pour e relativement à Γ.

Exemple 2.4. — Soit (e,h,f) un $\mathfrak{sl}_2$-triplet de $\mathfrak{g}$. Pour la graduation de Dynkin Γ^h_{Dyn} associée à h, $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$, la paire $(\mathfrak{g}_{\leqslant -2}, \mathfrak{g}_{<0})$ est e-admissible. Alors $\Gamma^h_{\mathrm{Dyn}} \in GA(e)$.

Exemple 2.5. — Si Γ est une graduation admissible pour e définie par l'élément semisimple h_Γ, alors la graduation Γ' définie par l'élément

$$h_{\Gamma'} := kh_\Gamma \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

est admissible pour e. On notera $k\Gamma$ la graduation Γ'.

Exemple 2.6. — Une $2d$-bonne graduation pour e de $\mathfrak{g}$ est e-admissible car la paire$(\mathfrak{m},\mathfrak{m})$ est e-admissible où $\mathfrak{m}$ est donnée par la Formule (1.3) de l'Introduction.

Prenons l'exemple où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ et $e = E_{1,3}$. On considère la graduation $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ définie par l'élément semisimple $h_\Gamma := \frac{1}{3}\operatorname{diag}(2,2,-4)$. On a $PA(e,\Gamma) = \{(\mathfrak{g}_{-2},\mathfrak{g}_{-2})\}$. De plus, la graduation Γ est une graduation non Dynkin mais bonne pour e.

Exemple 2.7. — On suppose que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ et $e := E_{1,3} + E_{2,4}$. On considère la graduation $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ définie par l'élément semisimple $\frac{1}{2}\operatorname{diag}(3,1,-1,-3)$. En particulier, $e \in \mathfrak{g}_2$. La matrice élémentaire $E_{i,j}$ est homogène de degré $j-i$. Posons

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{\leqslant -2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{C}E_{2,1} \oplus \mathbb{C}E_{3,2}.$$

On montre par calcul direct que $(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \in PA(e,\Gamma)$ avec $a = 2$. Comme $\operatorname{ad}(e) : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_1$ n'est pas injective, ceci fournit un exemple d'une graduation admissible pour e qui n'est pas bonne pour e.

On fixe une $\mathbb{Z}$-graduation Γ de $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j, \tag{2.1}$$

et soit h_Γ l'élément semisimple de $\mathfrak{g}$ définissant Γ. On suppose que $e \in \mathfrak{g}_a$, avec $a > 1$.

Proposition 2.8. — *Si e est un élément nilpotent distingué de $\mathfrak{g}$, alors les graduations de Dynkin sont les seules graduations de $\mathfrak{g}$ admissibles pour e, à homothéties près (cf. Exemple 2.5).*

Démonstration. — Supposons que $\Gamma \in GA(e)$. Soit (e,h,f) un $\mathfrak{sl}_2$-triplet tel que $h \in \mathfrak{g}_0$ et $f \in \mathfrak{g}_{-a}$, cf. [11, Proposition 32.1.7]. L'élément $t := \frac{a}{2}h - h_\Gamma$ centralise e et il est semisimple. Comme e est distingué, on a $t = 0$ et donc $h_\Gamma = \frac{a}{2}h$, d'où la proposition. □

Proposition 2.9. — *Supposons que $\Gamma \in GA(e)$. Soit $\mathfrak{n}$ un supplémentaire gradué de $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e$ dans $\mathfrak{g}_{<0}$ contenant $\mathfrak{g}_{\leqslant -a}$. Alors la paire $(\mathfrak{g}_{\leqslant -a}, \mathfrak{n})$ est admissible pour e si et seulement si $\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. En particulier, si $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$, alors la paire $(\mathfrak{g}_{\leqslant -a}, \mathfrak{g}_{<0})$ est l'unique paire optimale admissible pour e.*

Démonstration. — L'implication directe est claire. Supposons alors que $\mathfrak{n}$ soit une sous-algèbre graduée de $\mathfrak{g}$. Les conditions (A1), (A2) et (A4) sont clairement vérifiées. En outre, on a

$$[\mathfrak{g}_{\leqslant -a}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{g}_{\leqslant -a-1} \subseteq \mathfrak{g}_{\leqslant -a},$$

d'où (A5). De plus, en utilisant le fait que $(\mathfrak{g}_{\leqslant -a})^\perp = \mathfrak{g}_{<a}$, on vérifie aisément (A3). Comme $\Gamma \in GA(e)$, l'application $\operatorname{ad} e : \mathfrak{g}_{\geqslant 0} \to \mathfrak{g}_{\geqslant a}$ est surjective. On a alors

$$\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^e = \dim[\mathfrak{g}, e] = \dim[\mathfrak{g}_{\geqslant 0}, e] + \dim[\mathfrak{g}_{<0}, e] = \dim \mathfrak{g}_{\leqslant -a} + \dim \mathfrak{n}.$$

En conclusion, $(\mathfrak{g}_{\leqslant -a}, \mathfrak{n}) \in PA(e, \Gamma)$. □

Remarque 2.10. — Il n'existe pas toujours de paires optimales admissibles pour e. Pour plus de détails, on réfère à [10, Exemple 1.3.9].

Dans la suite, $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ désigne une $\mathbb{Z}$-graduation de $\mathfrak{g}$ vérifiant $e \in \mathfrak{g}_a$ où $a > 1$. Notre objectif est de montrer le théorème suivant :

Théorème 2.11. — *La graduation Γ est admissible pour e si et seulement si $\mathfrak{g}_{\leqslant -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$.*

L'implication directe est claire d'après (A2) et (A4). Montrons l'autre implication. Soient h_Γ l'élément semisimple de $\mathfrak{g}$ définissant la graduation Γ et (e,h,f) un $\mathfrak{sl}_2$-triplet de $\mathfrak{g}$ tel que $h \in \mathfrak{g}_0$ et $f \in \mathfrak{g}_{-a}$. On pose

$$\mathfrak{s} := \operatorname{Vect}(e,h,f) \quad \text{et} \quad t := h_\Gamma - \frac{a}{2}h.$$

L'élément t de $\mathfrak{g}$ est semisimple et appartient à $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}^h = \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$. De plus, les valeurs propres de $\operatorname{ad} t$ sont rationnelles.

On suppose désormais que $\mathfrak{g}_{\leqslant -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$. On montre aisément le lemme suivant :

Lemme 2.12. — *Soit $\mathfrak{g} = \mathbf{P}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{P}_s$ une décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces de $\mathfrak{g}$ stables par $\mathfrak{s}$ et t, et deux à deux orthogonaux par rapport à la forme de Killing. Pour tout $i \in \{1, \cdots, s\}$, soient $\mathfrak{m}_i$ et $\mathfrak{n}_i$ deux sous-espaces gradués dans $\mathbf{P}_i$ vérifiant les conditions suivantes :*

(C1): $\mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}_{\leqslant -a} \subset \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{n}_i \subset \mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}_{<0}$;

(C2): $\mathfrak{m}_i^{\perp} \cap [e, \mathbf{P}_i] = [e, \mathfrak{n}_i]$;

(C3): $\mathfrak{n}_i \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$;

(C4): $\dim \mathfrak{m}_i + \dim \mathfrak{n}_i = \dim \mathbf{P}_i - \dim(\mathbf{P}_i \cap \mathfrak{g}^e)$.

On pose

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathfrak{m}_i \qquad \textit{et} \qquad \mathfrak{n} = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathfrak{n}_i \,.$$

Alors la paire $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ vérifie les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6) de la Définition 1.1.

Par conséquent, on va construire une paire $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ admissible pour e relativement à la graduation Γ suivant le Lemme 2.12. D'après ce lemme, la paire $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ vérifie les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6). Pour conclure qu'elle est e-admissible, il restera à montrer que $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ vérifiant (A5).

Démonstration du Théorème 2.11. — On considère la décomposition de $\mathfrak{g}$ en composantes isotypiques de $\mathfrak{s}$-modules simples,

$$\mathfrak{g} = \mathbf{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{E}_r.$$

D'après le lemme de Schur, cette décomposition est orthogonale relativement à la forme de Killing. Comme t commute avec $\mathfrak{s}$, chaque composante isotypique $\mathbf{E}_i$ est stable sous l'action adjointe de t et se décompose donc en espaces propres pour $\operatorname{ad} t$,

$$\mathbf{E}_i = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}} \mathbf{E}_{i,\lambda},$$

tels que

$$(2.2)\quad \langle .,. \rangle_{|\mathbf{E}_{i,\lambda} \times \mathbf{E}_{i,\mu}} = 0 \text{ si } \lambda + \mu \neq 0 \text{ et } \langle .,. \rangle_{|\mathbf{E}_{i,\lambda} \times \mathbf{E}_{i,-\lambda}} \text{ non dégénérée.}$$

Soient $i \in \{1, \cdots, r\}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ et d_i la dimension d'un $\mathfrak{s}$-module simple de $\mathbf{E}_i$. L'ensemble des valeurs propres de $\operatorname{ad} h$ sur $\mathbf{E}_i$ est donné par :

$$\{-(d_i - 1), -(d_i - 3), \cdots, d_i - 3, d_i - 1\}.$$

Il s'ensuit que le plus petit poids de $\operatorname{ad} h_\Gamma$ sur $\mathbf{E}_{i,\lambda}$ (resp. sur $\mathbf{E}_{i,-\lambda}$) est égal à

$$\rho_{i,\lambda} := -\frac{a}{2}(d_i - 1) + \lambda \quad (\text{resp. } \rho_{i,-\lambda} := -\frac{a}{2}(d_i - 1) - \lambda).$$

On en déduit que l'ensemble des valeurs propres de $\operatorname{ad} h_\Gamma$ sur $\mathbf{E}_{i,\lambda}$ est donné par

$$\Xi_{i,\lambda} := \{\rho_{i,\lambda} + la\,;\ 0 \leqslant l \leqslant d_i - 1\} \subset \mathbb{Q}.$$

En particulier, on a $\rho_{i,-\lambda} = -\rho_{i,\lambda} - (d_i - 1)a$ et $\Xi_{i,-\lambda} = -\Xi_{i,\lambda} := \{-\mu\,;\ \mu \in \Xi_{i,\lambda}\}$. Pour $k \in \{\lambda, -\lambda\}$, on a la décomposition

$$\mathbf{E}_{i,k} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-1} \mathbf{E}^l_{i,k},$$

où $\mathbf{E}^l_{i,k}$ est le sous-espace propre de $\mathbf{E}_{i,k}$ pour $\operatorname{ad} h_\Gamma$ associé à la valeur propre $\rho_{i,k} + la$.

De plus, pour $l, l' \in \{0, 1, \cdots, d_i - 1\}$, le couplage (2.2) implique que $\langle \mathbf{E}^l_{i,\lambda}, \mathbf{E}^{l'}_{i,-\lambda}\rangle$ est égal à $\mathbb{C}$ si $l + l' = d_i - 1$ et à $\{0\}$ sinon.

Remarquons que $\mathfrak{g}_{\leqslant -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ si et seulement si

$$-\frac{a}{2}(d_i + 1) < \lambda < \frac{a}{2}(d_i + 1). \tag{2.3}$$

D'après notre hypothèse, les inégalités de (2.3) sont donc satisfaites.

On pose

$$m_{i,\lambda} := \frac{\dim \mathbf{E}_{i,\lambda}}{d_i}.$$

Pour $l \in \{0, 1, \cdots, d_i - 1\}$, on a $\dim \mathbf{E}^l_{i,\lambda} = m_{i,\lambda}$. Pour $\lambda \geqslant 0$, on pose

$$\mathbf{V}_{i,\lambda} = \mathbf{E}_{i,\lambda} + \mathbf{E}_{i,-\lambda}.$$

On a alors la décomposition orthogonale par rapport à la forme de Killing en sous-espaces stables par $\mathfrak{s}$ et t :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}^+} \mathbf{V}_{i,\lambda}.$$

On cherche à appliquer le Lemme 2.12 à cette décomposition pour construire une paire e-admissible.

D'après la formule (2.3), les deux cas possibles sont :

* *Cas I.* : Il existe $k \in \{0, 1, \cdots, d_i - 1\}$ tel que $\rho_{i,\lambda} + ka = 0$.
* *Cas II.* : Il existe $k \in \{-1, 0, 1, \cdots, d_i - 1\}$ tel que $\rho_{i,\lambda} + ka < 0 < \rho_{i,\lambda} + (k + 1)a$.

Cas I. — Dans ce cas, $\mathbf{E}_{i,\lambda}\cap\mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^{l}$ et $\mathbf{E}_{i,-\lambda}\cap\mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-2-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^{l}$. En particulier, $(\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}) \cap \mathfrak{g}^{e} = \{0\}$. On pose

$$\mathfrak{m}_{i,\lambda} = \mathfrak{n}_{i,\lambda} := \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leqslant -a}.$$

On montre par calculs directs que les conditions (C1), (C2), (C3) et (C4) sont vérifiées.

Cas II. — Dans ce cas, $\mathbf{E}_{i,\lambda}\cap\mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus_{l=0}^{k} \mathbf{E}_{i,\lambda}^{l}$ et $\mathbf{E}_{i,-\lambda}\cap\mathfrak{g}_{<0} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-2-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^{l}$. On présente dans la Table 2.1 les choix de $\mathfrak{m}_{i,\lambda}$ et $\mathfrak{n}_{i,\lambda}$ dans chacun des sous-cas possibles :

Cas II: Conditions		$\mathfrak{m}_{i,\lambda}$	$\mathfrak{n}_{i,\lambda}$
(a)	$k=-1$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-2} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^{l}$	
(b)	$k=d_i-1$	$\bigoplus_{l=0}^{d_i-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^{l}$	
(c)	$-1<k<d_i-1,\ \lambda=0$	$\bigoplus_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}_{i,0}^{l}$	$V_{i,[0]} \cap \mathfrak{g}_{<0}$
(d)	$-1<k<d_i-1, \lambda\neq 0$ $2\rho_{i,\lambda} < -(2k+1)a$	$\bigoplus_{l=0}^{k} \mathbf{E}_{i,\lambda}^{l} + \bigoplus_{l=0}^{d_i-3-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^{l}$	
(e)	$-1<k<d_i-1, \lambda\neq 0$ $-(2k+1)a < 2\rho_{i,\lambda}$	$\bigoplus_{l=0}^{k-1} \mathbf{E}_{i,\lambda}^{l} + \bigoplus_{l=0}^{d_i-2-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^{l}$	

TABLE *2.1. Cas II.*

Par des calculs directs, les conditions (C1), (C2), (C3) et (C4) sont vérifiées dans tous les sous-cas. De plus, $\mathfrak{m}_{i,\lambda} \subset \mathfrak{n}_{i,\lambda} \subset \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leqslant -\frac{a}{2}}$.

Conclusion. — Posons

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathfrak{m}_{i,\lambda} \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathfrak{n}_{i,\lambda}.$$

Les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6) sont vérifiées d'après le Lemme 2.12. Comme $\mathfrak{g}_{\leqslant -a} \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_{\leqslant -\frac{a}{2}} \subset \mathfrak{g}_{<0}$, on a

$$[\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset [\mathfrak{n},\mathfrak{m}] \subset [\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \subset [\mathfrak{g}_{\leqslant -\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{\leqslant -\frac{a}{2}}] \subset \mathfrak{g}_{\leqslant -a} \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}.$$

Il s'ensuit que $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ telles que $[\mathfrak{n},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Par conséquent, la paire $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ est admissible pour e. Ceci achève la démonstration du théorème. □

Remarque 2.13. — Comme la graduation Γ est entière, il en résulte que $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Pour a fixé le nombre de graduations admissibles pour e est fini d'après les inégalités (2.3).

3. W-algèbres finies associées aux paires admissibles

Dans cette section, on conserve les notations de la section précédente. Plus précisément, e est un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$ et $\chi := \kappa(e)$ où κ est l'isomorphisme de Killing. On fixe une paire e-admissible $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ de $\mathfrak{g}$ relativement à une $\mathbb{Z}$-graduation $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ avec $e \in \mathfrak{g}_a$ pour $a > 1$. Le groupe adjoint G opère dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ via l'opération adjointe et l'opération coadjointe respectivement. Pour $g \in G$, $x \in \mathfrak{g}$ et $\xi \in \mathfrak{g}^*$, on note $g(x)$ et $g(\xi)$ les images de x et ξ par g pour ces opérations respectives.

Si $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on note $U(\mathfrak{a})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}$. D'après la Remarque 2.2, la restriction à $\mathfrak{m}$ de χ est un caractère de $\mathfrak{m}$.

Ce dernier s'étend en une représentation $\chi : U(\mathfrak{m}) \to \mathbb{C}$ de $U(\mathfrak{m})$ et on désigne par $\mathbb{C}_\chi$ le $U(\mathfrak{m})$-module à gauche correspondant. La multiplication à droite par un élément de $\mathfrak{m}$ induit une structure de $U(\mathfrak{m})$-module à droite sur $U(\mathfrak{g})$. Soit $I(\mathfrak{m})$ l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments $x - \chi(x)$, pour $x \in \mathfrak{m}$.

On pose

$$Q(\mathfrak{m}) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m})} \mathbb{C}_\chi.$$

Alors $Q(\mathfrak{m})$ est isomorphe à $U(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{m})$ en tant que $U(\mathfrak{g})$-modules. L'opération adjointe de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$ s'étend de façon unique en une opération θ de $\mathfrak{n}$ dans $U(\mathfrak{g})$. L'idéal $I(\mathfrak{m})$ est stable sous cette action de $\mathfrak{n}$. En particulier, ceci induit une structure de $\mathfrak{n}$-module sur $Q(\mathfrak{m})$ donnée par $\theta(x)(u + I(\mathfrak{m})) = \theta(x)(u) + I(\mathfrak{m})$, pour $x \in \mathfrak{n}$ et $u \in U(\mathfrak{g})$.

On définit $H(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ par le sous-espace de $Q(\mathfrak{m})$ formé des éléments invariants par $\mathfrak{n}$:

$$H(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \;=\; \{u+I(\mathfrak{m})\in Q(\mathfrak{m})\,;\; \theta(x)(u)\in I(\mathfrak{m}) \text{ pour tout } x\in\mathfrak{n}\}. \tag{3.1}$$

Pour $u+I(\mathfrak{m}), v+I(\mathfrak{m})\in H(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$, on a $uv+I(\mathfrak{m})\in H(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$. En particulier, $(u+I(\mathfrak{m}))(v+I(\mathfrak{m})) = uv+I(\mathfrak{m})$ définit une structure d'algèbre sur $H(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$.

Remarque 3.1. — Lorsque $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$, d'après (3.1), on a un isomorphisme d'algèbres

$$\Phi : H(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \;\to\; \mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})}Q(\mathfrak{m})^{\mathrm{op}}$$

donné par $\Phi(u+I(\mathfrak{m}))(v+I(\mathfrak{m})) = vu+I(\mathfrak{m})$ où $u+I(\mathfrak{m})\in H(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ et $v+I(\mathfrak{m})\in Q(\mathfrak{m})$.

Soient (e,h,f) un $\mathfrak{sl}_2$-triplet de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{s}$ un sous-espace gradué de $\mathfrak{g}$ supplémentaire de $[\mathfrak{n},e]$ dans $\mathfrak{m}^\perp$. En utilisant la Définition 1.1, on montre que

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},e]\oplus\mathfrak{s}. \tag{3.2}$$

On pose

$$\mathcal{S} := \chi+\kappa(\mathfrak{s}) \quad\subset\quad \mathfrak{g}^*.$$

Rappelons que h_Γ est l'élément semisimple définissant Γ. Soit $\gamma:\mathbb{C}^*\to G$ le sous-groupe à un paramètre associé à $\mathrm{ad}\,h_\Gamma$. Pour tout $j\in\mathbb{Z}$,

$$\mathfrak{g}_j = \{x\in\mathfrak{g}\;;\;\gamma(t)(x)=t^jx, \quad \text{pour tout}\;\; t\in\mathbb{C}^*\}.$$

On définit une opération ρ du groupe $\mathbb{C}^*$ dans $\mathfrak{g}$ en posant pour tous $t\in\mathbb{C}^*$ et $x\in\mathfrak{g}$,

$$\rho(t)(x) = t^a\gamma(t^{-1})(x).$$

Pour $x\in\mathfrak{g}_j$ et $t\in\mathbb{C}^*$, on a $\rho(t)(x)=t^{-j+a}x$. En particulier, comme $e\in\mathfrak{g}_a$, $\rho(t)(e)=e$.

THÉORÈME 3.2. — *La variété affine $\mathcal{S}=\chi+\kappa(\mathfrak{s})$ (resp. $\chi+\kappa(\mathfrak{m}^\perp)$) est transverse aux orbites coadjointes de $\mathfrak{g}^*$. Précisément, pour tout $\xi\in\mathcal{S}$ (resp. $\xi\in\chi+\kappa(\mathfrak{m}^\perp)$), on a $T_\xi(G.\xi)+T_\xi(\mathcal{S})=\mathfrak{g}^*$ (resp. $T_\xi(G.\xi)+T_\xi(\chi+\kappa(\mathfrak{m}^\perp))=\mathfrak{g}^*$).*

Démonstration. — Montrons le théorème pour $\mathcal{S}$. Les mêmes arguments s'appliquent pour $\chi+\kappa(\mathfrak{m}^\perp)$). Pour cela, rappelons en premier lieu que $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},e]\oplus\mathfrak{s}$ d'après (3.2). De plus, comme $\mathfrak{m}^\perp\subseteq\mathfrak{g}_{\leqslant a-1}$, l'opération ρ dans $e+\mathfrak{s}$ est contractante. Ainsi, les arguments de [5, §2.2] s'appliquent point par point dans notre cadre. Le théorème s'ensuit. □

Soit N le sous-groupe unipotent de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$. On vérifie aisément que l'image de l'application adjointe $N\times(e+\mathfrak{m}^{\perp}) \to \mathfrak{g}$ est contenue dans $e+\mathfrak{m}^{\perp}$. On définit alors par restriction à $N\times(e+\mathfrak{s})$ de l'application adjointe $N\times(e+\mathfrak{m}^{\perp}) \to \mathfrak{g}$, l'application

$$\alpha\,:\,N\times(e+\mathfrak{s})\longrightarrow e+\mathfrak{m}^{\perp}.$$

Théorème 3.3. — *L'application α est un isomorphisme de variétés affines.*

Démonstration. — On définit une opération de $\mathbb{C}^*$ dans $N\times(e+\mathfrak{s})$ en posant :

$$t.(g,x) := \big(\gamma(t^{-1})g\gamma(t),\rho(t)(x)\big),$$

pour tous $t\in\mathbb{C}^*$, $g\in N$ et $x\in e+\mathfrak{s}$. Il s'ensuit que le morphisme α est $\mathbb{C}^*$-équivariant où l'opération de $\mathbb{C}^*$ dans $e+\mathfrak{m}^{\perp}$ est donnée par ρ.

D'après [5, Proof of Lemma 2.1], il suffit alors de montrer que la différentielle de α au point $(\mathbf{1}_G,e)$ induit un isomorphisme entre l'espace tangent $\mathrm{T}_{(\mathbf{1}_G,e)}(N\times(e+\mathfrak{s}))=\mathfrak{n}\times\mathfrak{s}$ de $N\times(e+\mathfrak{s})$ en $(\mathbf{1}_G,e)$ et l'espace tangent $\mathrm{T}_e(e+\mathfrak{m}^{\perp})=\mathfrak{m}^{\perp}$ de $e+\mathfrak{m}^{\perp}$ en e.

En effet, les ensembles des points fixes par $\mathbb{C}^*$ de $N\times(e+\mathfrak{s})$ et $e+\mathfrak{m}^{\perp}$ sont $\{(\mathbf{1}_G,e)\}$ et $\{e\}$ respectivement.

On a $\mathrm{d}\alpha_{(\mathbf{1}_G,e)}(\mathfrak{n}\times\mathfrak{s})=[\mathfrak{n},e]+\mathfrak{s}=\mathfrak{m}^{\perp}$. L'application $\mathrm{d}\alpha_{(\mathbf{1}_G,e)}$ est alors surjective. Par conséquent, c'est un isomorphisme entre $\mathfrak{n}\times\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{m}^{\perp}$ pour des raisons de dimension. Le théorème s'ensuit. □

La variété $\mathcal{S}$ admet une structure de Poisson, tout comme la tranche de Slodowy.

Rappelons tout d'abord que $\mathfrak{g}^*$ admet une structure de Poisson canonique donnée par

$$\{F,G\}(\xi) := \xi([\mathrm{d}_\xi F,\mathrm{d}_\xi G])$$

pour tous $F,G\in\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ et $\xi\in\mathfrak{g}^*$ où $\mathrm{d}_\xi F\in(\mathfrak{g}^*)^*\simeq\mathfrak{g}$.

Toute orbite coadjointe dans $\mathfrak{g}^*$ admet une structure naturelle de variété symplectique [3, Proposition 1.1.5].

On montre alors la proposition suivante.

Proposition 3.4. — *La variété $\mathcal{S}\subset\mathfrak{g}^*$ hérite de la structure de Poisson sur $\mathfrak{g}^*$.*

Démonstration. — D'après la Proposition 3.10 et la Remarque 3.11 de [12] il suffit de vérifier les conditions suivantes :

(i) $\mathcal{S}$ est transverse aux orbites coadjointes de $\mathfrak{g}^*$.

(ii) Pour tout $\xi \in \mathcal{S}$, on a

$$\#_\xi \mathrm{Ann}(\mathrm{T}_\xi \mathcal{S}) \cap \mathrm{T}_\xi(\mathcal{S}) = \{0\},$$

où $\mathrm{Ann}(\mathrm{T}_\xi \mathcal{S})$ est l'annulateur de $\mathrm{T}_\xi \mathcal{S} \simeq \kappa(\mathfrak{s})$ dans $(\mathrm{T}_\xi \mathfrak{g}^*)^* \simeq (\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$ et $\#_\xi \,:\, (\mathrm{T}_\xi \mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{T}_\xi \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}^*,\ \alpha \longmapsto \xi([\alpha, \cdot])$.

Tout d'abord, la condition (i) est satisfaite grâce au Théorème 3.2. Il reste à montrer la condition (ii).

On a

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{T}_\xi \mathcal{S}) = \{x \in \mathfrak{g} \ ;\ \eta(x) = 0,\ \text{pour tout } \eta \in \kappa(\mathfrak{s})\} = \mathfrak{s}^\perp.$$

Par conséquent,

$$\#_\xi \mathrm{Ann}(\mathrm{T}_\xi \mathcal{S}) = \langle\, \kappa^{-1}(\xi), [\mathfrak{s}^\perp, \cdot]\,\rangle = \langle\, [\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^\perp], \cdot\,\rangle = \kappa\big([\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^\perp]\big).$$

On est alors amené à vérifier que l'intersection,

$$\kappa([\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^\perp]) \cap \mathrm{T}_\xi(\mathcal{S}) = \kappa([\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^\perp]) \cap \kappa(\mathfrak{s}) = \kappa\big([\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^\perp] \cap \mathfrak{s}\big)$$

est nulle. La proposition s'ensuit car pour tout $\xi \in \mathcal{S}$, on a $[\kappa^{-1}(\xi), \mathfrak{s}^\perp] \cap \mathfrak{s} = \{0\}$. □

On note plus simplement H l'algèbre $H(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ définie par (3.1). De la même manière, on désigne par I et Q l'idéal $I(\mathfrak{m})$ et le quotient $Q(\mathfrak{m})$ respectivement.

Soit $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathfrak{g}^*$ qui est canoniquement isomorphe à l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. L'opération adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ induit une opération, encore notée ad, de $\mathfrak{g}$ dans $S(\mathfrak{g})$ et donc une opération de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$.

On définit une opération $\rho^\sharp$ du groupe $\mathbb{C}^*$ dans $\mathfrak{g}^*$ en posant pour tous $t \in \mathbb{C}^*$, $\xi \in \mathfrak{g}^*$:

$$\rho^\sharp(t)(\xi) := t^{-a} \gamma(t)(\xi).$$

Ceci induit une opération de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ donnée par :

$$\rho^\sharp(t)(F)(\xi) := F(\rho^\sharp(t^{-1})(\xi)),$$

pour tous $t \in \mathbb{C}^*$, $F \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ et $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

On pose, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](k) := \{F \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \mid \rho^\sharp(t)(F) = t^k F,\ \text{pour tout } t \in \mathbb{C}^*\}.$$

Pour $x \in \mathfrak{g}_j$ et $t \in \mathbb{C}^*$, on a $\rho^\sharp(t)\kappa(x) = t^{j-a}\kappa(x)$. L'opération $\rho^\sharp$ stabilise les sous-espaces $\kappa(\mathfrak{s})$ et $\kappa(\mathfrak{m}^\perp)$ et les poids correspondants sont des entiers strictement négatifs. En outre, l'application $\rho^\sharp$ induit une opération de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}[\mathcal{S}] = \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{s})]$ et dans $\mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^\perp)]$. Ceci définit une structure d'algèbres graduées sur ces deux algèbres. On vérifie alors sans peine le lemme suivant :

Lemme 3.5. — *La graduation sur* $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ *(resp. sur* $\mathbb{C}[\chi+\kappa(\mathfrak{m}^{\perp})]$*) est positive au sens où* $\mathbb{C}[\mathcal{S}](k)=0$ *(resp.* $\mathbb{C}[\chi+\kappa(\mathfrak{m}^{\perp})](k)=0$*) pour tout* $k<0$ *et* $\mathbb{C}[\mathcal{S}](0)\simeq\mathbb{C}$ *(resp.* $\mathbb{C}[\chi+\kappa(\mathfrak{m}^{\perp})](0)\simeq\mathbb{C}$*).*

Soit $(U^j(\mathfrak{g}))_j$ la filtration standard de $U(\mathfrak{g})$. L'opération adjointe de h_Γ dans $\mathfrak{g}$ s'étend de façon unique en une dérivation sur $U(\mathfrak{g})$.

On pose pour tout $i\in\mathbb{Z}$, $U_i(\mathfrak{g}):=\{x\in U(\mathfrak{g})\ ;\ (\operatorname{ad}h_\Gamma)(x)=ix\}$.

Soit $\mathcal{F}$ la filtration croissante de $U(\mathfrak{g})$ définie par,

$$\mathcal{F}_kU(\mathfrak{g}):=\sum_{i+aj\leqslant k}U_i(\mathfrak{g})\cap U^j(\mathfrak{g}),\quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Si $x\in\mathcal{F}_rU(\mathfrak{g})$ et $y\in\mathcal{F}_sU(\mathfrak{g})$, alors on a $[x,y]\in\mathcal{F}_{r+s-a}U(\mathfrak{g})$.

On désigne par $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g})$ l'algèbre graduée de $U(\mathfrak{g})$ par rapport à la filtration $\mathcal{F}$, i.e., $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g})=\bigoplus_k\operatorname{gr}_{\mathcal{F},k}U(\mathfrak{g})$ où $\operatorname{gr}_{\mathcal{F},k}U(\mathfrak{g}):=\mathcal{F}_kU(\mathfrak{g})/\mathcal{F}_{k-1}U(\mathfrak{g})$. On a alors un isomorphisme d'algèbres graduées $\mathfrak{g}$-équivariant entre $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g})$ et $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ qui envoie $\operatorname{gr}_{\mathcal{F},k}U(\mathfrak{g})$ sur $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*](k)$.

Remarque 3.6. — Comme l'algèbre graduée $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g})$ est commutative, elle admet une structure de Poisson (cf. e.g. [3]). En particulier, l'isomorphisme entre $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g})$ et $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ est un morphisme d'algèbres de Poisson.

Rappelons que Q est le quotient $U(\mathfrak{g})/I$. Soit $\pi:U(\mathfrak{g})\to Q$ l'application quotient et posons

$$\mathcal{F}_kQ:=\pi(\mathcal{F}_kU(\mathfrak{g})),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ceci définit une structure de $U(\mathfrak{g})$-module filtré sur Q. De plus, pour tout $k<0$, on a $\mathcal{F}_kQ=\{0\}$.

Soit $\operatorname{gr}(\pi):\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g})\to\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}Q$ le morphisme gradué surjectif associé à π.

On a la suite exacte de $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g})$-modules

$$0\to\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}I\to\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g})\to\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}Q\to 0.$$

En particulier, $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}I$ est un idéal de $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g})$. On en déduit que $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}Q$ admet une structure d'algèbre avec $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}Q\simeq\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}U(\mathfrak{g})/\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}I$ (cf. e.g. [11, Proposition 7.5.3]). De plus, $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}I$ est le noyau de $\operatorname{gr}(\pi)$.

Soit $\mathcal{I}(\chi+\kappa(\mathfrak{m}^{\perp}))$ l'idéal de $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ formé des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$ qui s'annulent sur $\chi+\kappa(\mathfrak{m}^{\perp})$.

Proposition 3.7. — *On a un isomorphisme* $\mathfrak{n}$*-équivariant,*

$$\vartheta\ :\ \operatorname{gr}_{\mathcal{F}}Q\to\mathbb{C}[\chi+\kappa(\mathfrak{m}^{\perp})],$$

entre les algèbres graduées $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}}Q$ *et* $\mathbb{C}[\chi+\kappa(\mathfrak{m}^{\perp})]$*.*

Démonstration. — Rappelons que l'on a un isomorphisme d'algèbres graduées $\mathfrak{g}$-équivariant entre $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})$ et $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$.

L'image du noyau $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} I$ de $\mathrm{gr}(\pi)$ par l'isomorphisme $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ est $\mathcal{I}(\chi + \kappa(\mathfrak{m}^{\perp}))$. On déduit alors les isomorphismes suivants :

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} Q \simeq \mathrm{gr}_{\mathcal{F}} U(\mathfrak{g})/\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} I \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]/\mathcal{I}(\chi + \kappa(\mathfrak{m}^{\perp})) \simeq \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^{\perp})].$$

Il s'ensuit qu'on a un isomorphisme d'algèbres graduées $\vartheta : \mathrm{gr}_{\mathcal{F}} Q \to \mathbb{C}[\chi + \kappa(\mathfrak{m}^{\perp})]$. Comme $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} I$ est $\mathfrak{n}$-stable, l'isomorphisme $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} I \simeq \mathcal{I}(\chi + \kappa(\mathfrak{m}^{\perp}))$ est $\mathfrak{n}$-équivariant. Par conséquent, ϑ est $\mathfrak{n}$-équivariant. □

La filtration $(\mathcal{F}_k Q)_k$ induit une filtration $(\mathcal{F}_k H := H \cap \mathcal{F}_k Q)_k$ sur H. Par conséquent,

Proposition 3.8. — *L'application ι : $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} H \hookrightarrow \mathrm{gr}_{\mathcal{F}} Q$ est un morphisme d'algèbres graduées injectif.*

Soit $\mu : \mathbb{C}[\chi+\kappa(\mathfrak{m}^{\perp})] \to \mathbb{C}[\mathcal{S}]$ le comorphisme correspondant à l'inclusion $\mathcal{S} \hookrightarrow \chi + \kappa(\mathfrak{m}^{\perp})$.

D'après la Proposition 3.7, on en déduit un morphisme d'algèbres graduées $\nu : \mathrm{gr}_{\mathcal{F}} H \to \mathbb{C}[\mathcal{S}]$.

Théorème 3.9. — *Le morphisme*

$$\nu : \mathrm{gr}_{\mathcal{F}} H \to \mathbb{C}[\mathcal{S}]$$

est un isomorphisme d'algèbres de Poisson graduées.

Comme les arguments de [5] s'appliquent points par points dans notre cadre, on omet ici la démonstration de ce théorème, voir [5, Section 5] ou [10, Section 2.4].

Soit $\mathfrak{m}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ admissible pour e. Soient $\mathcal{C}$ la catégorie abélienne des $U(\mathfrak{g})$-modules à gauche finiment engendrés sur lesquels, pour tout $m \in \mathfrak{m}$, l'élément $m - \chi(m)$ de $U(\mathfrak{g})$ agit localement comme un endomorphisme nilpotent, et $\mathcal{C}'$ la catégorie des H-modules à gauche finiment engendrés.

On note d'une part $Q \otimes_H - : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ le foncteur défini par

$$(Q \otimes_H -)(V) = Q \otimes_H V \quad \text{et} \quad (Q \otimes_H -)(\varphi)(q \otimes v) = q \otimes \varphi(v),$$

pour tous V, W deux objets de $\mathcal{C}'$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(V, W)$, $q \in Q$ et $v \in V$. D'autre part, on désigne par $\mathrm{Wh} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ le foncteur

$$\mathrm{Wh}(E) = \{x \in E \; ; \; mx = \chi(m)x \ \text{ pour tout } \ m \in \mathfrak{m}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Wh}(\Phi)(x) = \Phi(x)$$

pour tous E, F deux objets de $\mathcal{C}$, $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$ et $x \in \mathrm{Wh}(E)$. On remarque que $\mathrm{Wh}(\Phi)$ est bien défini car $\Phi(\mathrm{Wh}(E)) \subset \mathrm{Wh}(F)$.

Théorème 3.10. — *Le foncteur $Q \otimes_H -$ établit une équivalence de catégories entre les catégories $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$. L'inverse est donné par le foncteur* Wh.

Les arguments de [5, Section 6] s'appliquent à notre situation. On omet ici la démonstration.

4. Équivalence et problème d'isomorphisme

Compte tenu de la généralisation faite à la section précédente, il est naturel de se demander si l'algèbre $H(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ dépend du choix de la paire admissible $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$. Cette question sera traitée dans cette section. On conserve les notations des sections précédentes.

Définition 4.1. — *Soient* $\Gamma \in GA(e)$ *et* $(\mathfrak{m},\mathfrak{n}),(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}') \in PA(e,\Gamma)$. *On note*

$$(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}') \preccurlyeq_\Gamma (\mathfrak{m},\mathfrak{n})$$

si $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{n}' \subseteq \mathfrak{n}$.

Soient $(\mathfrak{m},\mathfrak{n}),(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}') \in PA(e)$. *On dit que* $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ *et* $(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')$ *sont* comparables *s'il existe* $\Gamma \in GA(e)$ *telle que* $(\mathfrak{m},\mathfrak{n}),(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}') \in PA(e,\Gamma)$ *et telle que*

$$(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}') \preccurlyeq_\Gamma (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \quad ou \quad (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \preccurlyeq_\Gamma (\mathfrak{m}',\mathfrak{n}').$$

Exemple 4.2. — Si $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ est une graduation de $\mathfrak{g}$ telle que $e \in \mathfrak{g}_a$ pour $a > 1$ et $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}_{<0} = \{0\}$ alors tout $(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \in PA(e,\Gamma)$ vérifie

$$(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \preccurlyeq_\Gamma (\mathfrak{g}_{\leqslant -a},\mathfrak{g}_{<0}),$$

où $(\mathfrak{g}_{\leqslant -a},\mathfrak{g}_{<0})$ est l'unique paire optimale d'après la Proposition 2.9.

Exemple 4.3. — On suppose que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_8(\mathbb{C})$ et que $e := \sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant 7\\ i\neq 4}} E_{i,i+1}$. On considère la graduation $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ définie par l'élément semisimple $\frac{1}{2}\operatorname{diag}(7,1,-5,-11,11,5,-1,-7)$. On a $\dim \mathfrak{g}^e = 15$ et $e \in \mathfrak{g}_3$. Les paires $(\mathfrak{m},\mathfrak{m})$ et $(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')$ sont admissibles pour e où

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{g}_{\leqslant -3} \oplus \mathfrak{g}_{-1}, \quad \mathfrak{m}' := \mathfrak{g}_{\leqslant -3} \oplus \mathbb{C}E_{6,1},$$
$$\mathfrak{n}' := \mathfrak{m}' \oplus \mathbb{C}E_{7,2} \oplus \mathbb{C}E_{8,3} \oplus \mathbb{C}E_{3,7} \oplus \mathbb{C}E_{4,8}.$$

De plus, elles sont comparables vérifiant $(\mathfrak{m},\mathfrak{m}) \preccurlyeq_\Gamma (\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')$.

Exemple 4.4. — Deux paires admissibles pour e ne sont pas toujours comparables. En effet, dans le cadre de l'Exemple 2.7, on remarque que la paire admissible

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}_1) = (\mathfrak{g}_{\leqslant -2}, \mathfrak{g}_{\leqslant -2} \oplus \mathbb{C}E_{3,2} \oplus \mathbb{C}E_{4,3})$$

n'est pas comparable à la paire $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ de l'exemple.

Proposition 4.5. — *Si $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1), (\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2) \in PA(e)$ sont comparables, alors les algèbres $H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$ et $H(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2)$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe une $\mathbb{Z}$-graduation e-admissible $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ de $\mathfrak{g}$ telle que $e \in \mathfrak{g}_a$ pour $a > 1$ et $(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2) \preccurlyeq_\Gamma (\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$. Comme $I(\mathfrak{m}_1) \subset I(\mathfrak{m}_2)$, on a la suite exacte courte

$$0 \to \ker\Phi \to Q(\mathfrak{m}_1) \xrightarrow{\Phi} Q(\mathfrak{m}_2) \to 0,$$

où Φ est le morphisme de $Q(\mathfrak{m}_1)$ sur $Q(\mathfrak{m}_2)$ induit par le morphisme quotient (surjectif) $U(\mathfrak{g}) \to Q(\mathfrak{m}_2)$. Soit $\bar{\Phi}$ la restriction de Φ à $H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$.

Comme $I(\mathfrak{m}_1) \subset I(\mathfrak{m}_2)$ et $\mathfrak{n}_2 \subset \mathfrak{n}_1$,

$$\bar{\Phi}(H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)) \subseteq H(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2).$$

On rappelle que la filtration de Kazhdan généralisée $\mathcal{F}$ induit une filtration croissante sur $H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$ et $H(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2)$.

On note $\operatorname{gr}\Phi$ et $\operatorname{gr}\bar{\Phi}$ les morphismes gradués associés à Φ et $\bar{\Phi}$ respectivement :

$$\operatorname{gr}\Phi : \operatorname{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathfrak{m}_1) \to \operatorname{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathfrak{m}_2),\ \operatorname{gr}\bar{\Phi} : \operatorname{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1) \to \operatorname{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2).$$

Soit $\mathfrak{s}$ un sous-espace gradué de $\mathfrak{g}$ supplémentaire de $[\mathfrak{n}_2, e]$ dans $\mathfrak{m}_2^\perp$. On rappelle que $\mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{g}, e] = \mathfrak{g}$. Il s'ensuit que $\mathfrak{s} \cap [\mathfrak{n}_1, e] = \{0\}$. D'après la condition (A6), on en déduit que $\mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{n}_1, e] = \mathfrak{m}_1^\perp$. On pose alors

$$\mathcal{S} := \kappa(e + \mathfrak{s}).$$

D'après le Théorème 3.9, on a un isomorphisme $\nu_i : \operatorname{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i) \to \mathbb{C}[\mathcal{S}]$, pour $i \in \{1, 2\}$. Montrons que $\nu_2 \circ \operatorname{gr}\bar{\Phi} = \nu_1$. Soient μ_i et μ les comorphismes correspondants aux inclusions $\mathcal{S} \hookrightarrow \kappa(e + \mathfrak{m}_i^\perp)$ $(i = 1, 2)$, et $\kappa(e + \mathfrak{m}_2^\perp) \hookrightarrow \kappa(e + \mathfrak{m}_1^\perp)$. On a alors $\mu_1 = \mu_2 \circ \mu$. Soit $\iota_i : \operatorname{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}_i) \hookrightarrow \operatorname{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathfrak{m}_i)$ le morphisme injectif donné par la Proposition 3.8 pour $i = 1, 2$. On a $\nu_i = \mu_i \circ \iota_i$. De plus, on a $\iota_2 = \operatorname{gr}\Phi \circ \iota_1 \circ \operatorname{gr}\bar{\Phi}$. Comme $\operatorname{gr}_{\mathcal{F}} Q(\mathfrak{m}_i) \simeq \mathbb{C}[\kappa(e + \mathfrak{m}_i^\perp)]$ pour $i \in \{1, 2\}$ d'après la Proposition 3.7, on en déduit que $\nu_2 \circ \operatorname{gr}\bar{\Phi} = \nu_1$. Par conséquent, $\operatorname{gr}\bar{\Phi}$ est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Comme $\mathcal{F}_k Q = \{0\}$ pour tout $k < 0$ et d'après [11, Propositions 7.5.7 and 7.5.8], $\bar{\Phi}$ est donc un isomorphisme d'algèbres ce qui démontre la proposition. $\square$

Définition 4.6. — *Soient* $(\mathfrak{m},\mathfrak{n}),(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')\in PA(e)$*. On dit que* $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ *et* $(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')$ *sont* équivalentes*, et on note* $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})\sim(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')$*, s'il existe une famille finie de paires e-admissibles* $\{(\mathfrak{m}_i,\mathfrak{n}_i)\}_{i\in\{1,\cdots,s\}}$ *telle que*

(1) $(\mathfrak{m}_1,\mathfrak{n}_1)=(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ *;*

(2) *les paires* $(\mathfrak{m}_i,\mathfrak{n}_i)$ *et* $(\mathfrak{m}_{i+1},\mathfrak{n}_{i+1})$ *sont comparables pour tout* $i\in\{1,\cdots,s-1\}$ *;*

(3) $(\mathfrak{m}_s,\mathfrak{n}_s)=(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')$.

La relation $\sim$ définit une relation d'équivalence sur $PA(e)$.

Exemples 4.7.

(1) Dans l'Exemple 4.4, pour

$$\mathfrak{m}_2:=\mathfrak{g}_{\leqslant -2}\oplus\mathbb{C}E_{3,2},$$

on a $(\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_2)\in PA(e,\Gamma)$ et $(\mathfrak{m},\mathfrak{n}_1)\succcurlyeq_\Gamma(\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_2)\preccurlyeq_\Gamma(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$. Il s'ensuit que les paires $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ et $(\mathfrak{m},\mathfrak{n}_1)$ sont équivalentes.

(2) Dans l'Exemple 2.6, on a $PA(e,\Gamma)=\{(\mathfrak{g}_{-2},\mathfrak{g}_{-2})\}$. On considère la graduation $\Gamma':\mathfrak{g}=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}'_j$ définie par l'élément semisimple $\frac{1}{3}\operatorname{diag}(4,-2,-2)$. On vérifie alors que $PA(e,\Gamma')=\{(\mathfrak{g}'_{-2},\mathfrak{g}'_{-2})\}$.

On considère enfin la graduation de Dynkin $\Gamma'':\mathfrak{g}=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}''_j$. En particulier, les paires $(\mathfrak{g}''_{-2},\mathfrak{g}''_{<0})$, $(\mathfrak{g}_{-2},\mathfrak{g}_{-2})$ et $(\mathfrak{g}'_{-2},\mathfrak{g}'_{-2})$ appartiennent à $PA(e,\Gamma'')$ et vérifient

$$(\mathfrak{g}_{-2},\mathfrak{g}_{-2})\preccurlyeq_{\Gamma''}(\mathfrak{g}''_{-2},\mathfrak{g}''_{<0})\succcurlyeq_{\Gamma''}(\mathfrak{g}'_{-2},\mathfrak{g}'_{-2}).$$

Il s'ensuit que les paires $(\mathfrak{g}_{-2},\mathfrak{g}_{-2})$ et $(\mathfrak{g}'_{-2},\mathfrak{g}'_{-2})$, qui ne sont pas issues de la même graduation, sont équivalentes.

Remarque 4.8. — Soit $\Gamma:\mathfrak{g}=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_j$ une graduation de $\mathfrak{g}$ telle que $e\in\mathfrak{g}_a$ pour $a>1$. Si $(\mathfrak{g}_{\leqslant -a},\mathfrak{g}_{<0})$ est une paire admissible pour e, toutes les paires admissibles pour e relativement à Γ sont équivalentes d'après l'Exemple 4.2. En particulier, les paires admissibles pour e relativement à une graduation de Dynkin (et plus généralement à une bonne graduation) sont équivalentes.

Grâce à la Proposition 4.5, on montre aisément le théorème suivant.

Théorème 4.9. — *Soient* $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ *et* $(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')$ *deux paires e-admissibles équivalentes. Alors les algèbres* $H(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ *et* $H(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')$ *sont isomorphes.*

Remarque 4.10. — Si e est distingué alors, d'après la Proposition 2.8 et la Remarque 4.8, les paires e-admissibles sont équivalentes et donc, d'après le Théorème 4.9, les W-algèbres associées sont isomorphes.

5. Connexité des graduations admissibles

On conserve les notations des sections précédentes. La notion de paires admissibles pour e relativement à des $\mathbb{Z}$-graduations de $\mathfrak{g}$ peut être étendue naturellement aux $\mathbb{Q}$-graduations de $\mathfrak{g}$. On note dans la suite $PA_{\mathbb{Q}}(e)$ l'ensemble des paires admissibles pour e relativement à des $\mathbb{Q}$-graduations de $\mathfrak{g}$ et $GA_{\mathbb{Q}}(e)$ l'ensemble des $\mathbb{Q}$-graduations admissibles pour e. Pour $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$, on désigne par $PA_{\mathbb{Q}}(e,\Gamma)$ l'ensemble des paires admissibles pour e relativement à la $\mathbb{Q}$-graduation Γ.

Pour une $\mathbb{Q}$-graduation Γ de $\mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$, on rappelle que $\lambda\Gamma$ est la $\mathbb{Q}$-graduation de $\mathfrak{g}$ définie par l'élément semisimple λh_Γ où h_Γ est l'élément semisimple qui définit la graduation Γ.

Proposition 5.1.

(1) *Pour tout* $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$*, il existe* $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ *tel que* $\lambda\Gamma \in GA(e)$.

(2) *Pour tous* $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$ *et* $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$*, on a* $PA_{\mathbb{Q}}(e,\Gamma) = PA_{\mathbb{Q}}(e,\lambda\Gamma)$.

Définition 5.2. — *Deux* $\mathbb{Q}$*-graduations* Γ,Γ' *admissibles pour* e *sont dites* adjacentes *si elles ont une paire* e*-admissible en commun, i.e.,*

$$PA_{\mathbb{Q}}(e,\Gamma) \cap PA_{\mathbb{Q}}(e,\Gamma') \neq \varnothing.$$

Définition 5.3. — *Deux graduations* $\Gamma,\Gamma' \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$ *sont dites* connexes *s'il existe une suite* $(\Gamma_i)_{i\in\{1,\cdots,s\}}$ *de* $\mathbb{Q}$*-graduations admissibles pour* e *telle que*

(1) $\Gamma = \Gamma_1$;

(2) *les graduations* Γ_i *et* Γ_{i+1} *sont adjacentes pour tout* $1 \leqslant i \leqslant s-1$;

(3) $\Gamma' = \Gamma_s$.

Exemples 5.4.

(1) Soit $\Gamma \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$, les graduations $\lambda\Gamma$ et Γ sont adjacentes d'après la Proposition 5.1 (2).

(2) On reprend l'Exemple 4.7(1). On considère la graduation de Dynkin $\Gamma' : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}'_j$ de $\mathfrak{g}$ associée à $\operatorname{diag}(1,1,-1,-1)$. Les graduations Γ et Γ' sont adjacentes car $(\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_2) \in PA(e,\Gamma) \cap PA(e,\Gamma')$.

Exemple 5.5. — Deux $\mathbb{Q}$-graduations admissibles pour e ne sont pas toujours adjacentes. C'est le cas des graduations Γ et Γ' de l'Exemple 4.7(2).

La proposition suivante est une conséquence directe de la Proposition 5.1.

Proposition 5.6. — *Deux éléments* $\Gamma,\Gamma' \in GA_{\mathbb{Q}}(e)$ *sont connexes si et seulement si* Γ *et* Γ' *sont connexes via une suite d'éléments de* $GA(e)$.

La suite du paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

Théorème 5.7. — *Les $\mathbb{Q}$-graduations admissibles pour e sont connexes entre elles.*

On fixe désormais une $\mathbb{Z}$-graduation e-admissible $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ telle que $e \in \mathfrak{g}_a$ où $a > 1$ et un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (e,h,f) de $\mathfrak{g}$ tel que $h \in \mathfrak{g}_0$ et $f \in \mathfrak{g}_{-a}$ (cf. [11, Proposition 32.1.7]). Soient h_Γ l'élément semisimple de $\mathfrak{g}$ définissant Γ et $\mathfrak{s} := \mathrm{Vect}(e,h,f)$. On pose

$$t := h_\Gamma - \frac{a}{2}h.$$

L'élément t de $\mathfrak{g}$ est semisimple et appartient à $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}^h = \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$.

On pose $[0,1]_\mathbb{Q} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Soit $\varepsilon \in [0,1]_\mathbb{Q}$. On considère l'élément semisimple

$$h_\Gamma^{(\varepsilon)} := \frac{a}{2}h + \varepsilon t.$$

Pour $j \in \mathbb{Q}$, on note

$$\mathfrak{g}_j^{(\varepsilon)} := \{x \in \mathfrak{g}\,;\ (\mathrm{ad}\, h_\Gamma^{(\varepsilon)})(x) = jx\}.$$

Soit alors $\Gamma^{(\varepsilon)} : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j^{(\varepsilon)}$ la $\mathbb{Q}$-graduation de $\mathfrak{g}$ définie par l'élément semisimple $h_\Gamma^{(\varepsilon)}$. En particulier, $h_\Gamma^{(1)} = h_\Gamma$, $\Gamma^{(1)} = \Gamma$ et $\Gamma^{(0)} = \frac{a}{2}\Gamma^h_{\mathrm{Dyn}}$. Observons aussi que $e \in \mathfrak{g}_a^{(\varepsilon)}$.

D'après le Théorème 2.11 et comme $|\varepsilon\lambda| \leqslant |\lambda| < \frac{a}{2}(d_i+1)$, on vérifie aisément que la graduation $\Gamma^{(\varepsilon)}$ appartient à $GA_\mathbb{Q}(e)$ pour tout $\varepsilon \in [0,1]_\mathbb{Q}$.

Pour montrer le Théorème 5.7, il suffit de démontrer que Γ est connexe à $\Gamma^{(0)}$ qui est adjacente à la graduation de Dynkin. On va donc construire une suite de rationnels $0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \cdots < \varepsilon_s = 1$ telle que pour tout $i \in \{0,\ldots,s\}$, $\Gamma^{(\varepsilon_i)}$ et $\Gamma^{(\varepsilon_{i+1})}$ soient adjacentes. Pour cela, on reprend dans les grandes lignes la démonstration du Théorème 2.11 dont on rappelle quelques notations.

On a les décompositions

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{E}_i\,, \quad \mathbf{E}_i = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Q}} \mathbf{E}_{i,\lambda}\,, \quad \mathbf{E}_{i,\lambda} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-1} \mathbf{E}^l_{i,\lambda}\,,$$

qui représentent respectivement la décomposition orthogonale en composantes isotypiques de $\mathfrak{s}$-modules simples, la décomposition en sous-espaces propres de $\mathrm{ad}\, t$ et la décomposition en sous-espaces propres de $\mathrm{ad}\, h_\Gamma$ avec d_i

la dimension d'un $\mathfrak{s}$-module simple de $\mathbf{E}_i$. Rappelons aussi que pour $\lambda \geqslant 0$,

$$\mathbf{V}_{i,\lambda} = \mathbf{E}_{i,\lambda} + \mathbf{E}_{i,-\lambda} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}^+} \mathbf{V}_{i,\lambda}$$

est une décomposition orthogonale relative à la forme de Killing. Pour tous $\varepsilon \in [0,1]_{\mathbb{Q}}$ et $\lambda \in \mathbb{Q}$, l'espace $\mathbf{E}_{i,\lambda}$ est stable par $\operatorname{ad} h_\Gamma^{(\varepsilon)}$. De plus, pour tout $l \in \{0, \cdots, d_i - 1\}$, $\mathbf{E}^l_{i,\lambda}$ est un sous-espace propre de $\operatorname{ad} h_\Gamma^{(\varepsilon)}$ de valeur propre $\rho^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} + la$ où

$$\rho^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} := -\frac{a}{2}(d_i - 1) + \varepsilon\lambda.$$

L'ensemble des valeurs propres de $\operatorname{ad} h_\Gamma^{(\varepsilon)}$ sur $\mathbf{E}_{i,\lambda}$ est donné par :

$$\Xi^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} := \{\rho^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} + la\,;\ l = 0, 1, \ldots, d_i - 1\}.$$

En particulier, on a $\Xi^{(\varepsilon)}_{i,-\lambda} = -\Xi^{(\varepsilon)}_{i,\lambda}$.

Comme dans la démonstration du Théorème 2.11, on va s'intéresser à la « position du zéro » dans $\Xi^{(\varepsilon)}_{i,\lambda}$, d'où la définition suivante :

Définition 5.8. — *On définit l'entier positif $p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda}$ par*

(a) $p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} = 1$ *si* $0 < \rho^{(\varepsilon)}_{i,\lambda}$;

(b) $p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} = 2(s+1) + 1$ *si* $\rho^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} + sa < 0 < \rho^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} + (s+1)a$ *pour* $s \in \{0, \cdots, d_i - 2\}$;

(c) $p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} = 2d_i + 1$ *si* $\rho^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} + (d_i - 1)a < 0$;

(d) $p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} = 2(s+1)$ *si* $\rho^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} + sa = 0$ *pour* $s \in \{0, \cdots, d_i - 1\}$.

Comme $\Xi^{(\varepsilon)}_{i,-\lambda} = -\Xi^{(\varepsilon)}_{i,-\lambda}$, on a

$$p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} + p^{(\varepsilon)}_{i,-\lambda} = 2d_i + 2. \tag{5.1}$$

Proposition 5.9. — *Soient $\varepsilon, \varepsilon' \in [0,1]_{\mathbb{Q}}$ tels que $|p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} - p^{(\varepsilon')}_{i,\lambda}| \leqslant 1$ pour tous i et λ. Alors les graduations $\Gamma^{(\varepsilon)}$ et $\Gamma^{(\varepsilon')}$ sont adjacentes.*

Démonstration. — On cherche une paire e-admissible $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ commune à $\Gamma^{(\varepsilon)}$ et $\Gamma^{(\varepsilon')}$ de la forme suivante :

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathfrak{m}_{i,\lambda} \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathfrak{n}_{i,\lambda}$$

telle que pour tous $i \in \{1, \cdots, r\}$ et $\lambda \in \mathbb{Q}^+$, les sous-espaces $\mathfrak{m}_{i,\lambda}$ et $\mathfrak{n}_{i,\lambda}$ sont $\Gamma^{(\varepsilon)}$-gradués et $\Gamma^{(\varepsilon')}$-gradués dans $\mathbf{V}_{i,\lambda}$ et vérifient les conditions (C1), (C2), (C3) et (C4) du Lemme 2.12 appliqué à la décomposition $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}^+} \mathbf{V}_{i,\lambda}$ et aux deux graduations $\Gamma^{(\varepsilon)}$ et $\Gamma^{(\varepsilon')}$.

Soient $i \in \{1, \cdots, r\}$ et $\lambda \in \mathbb{Q}^+$. Pour la construction de $\mathfrak{m}_{i,\lambda}$ et $\mathfrak{n}_{i,\lambda}$, on distingue deux cas : le cas où $p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} = p^{(\varepsilon')}_{i,\lambda}$ et le cas où $|p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} - p^{(\varepsilon')}_{i,\lambda}| = 1$.

Cas I : $p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} = p^{(\varepsilon')}_{i,\lambda}$. — Dans ce cas, $\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon)}_{\leqslant -a} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon')}_{\leqslant -a}$ et $\mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon)}_{<0} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon')}_{<0}$. On distingue trois sous-cas.

(a) Si $\lambda = 0$, on pose

$$\mathfrak{m}_{i,0} := \mathbf{V}_{i,0} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon)}_{\leqslant -a}, \quad \mathfrak{n}_{i,0} := \mathbf{V}_{i,0} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon)}_{<0} = \mathbf{V}_{i,0} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon)}_{\leqslant -\frac{a}{2}}.$$

(b) Si $\lambda \neq 0$ et si $p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda}$ est pair ou appartient à $\{1, 2d_i + 1\}$, on pose

$$\mathfrak{m}_{i,\lambda} = \mathfrak{n}_{i,\lambda} := \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon)}_{\leqslant -a}.$$

(c) Supposons $\lambda \neq 0$ et $p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda}$ impair de la forme $2k+1$ où $k \in \{1, \ldots, d_i - 1\}$.

Si $\rho^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} + (k-1)a \leqslant \rho^{(\varepsilon)}_{i,-\lambda} + (d_i - k - 1)a$, on pose

$$\mathfrak{m}_{i,\lambda} = \mathfrak{n}_{i,\lambda} := \mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon)}_{<0} + \mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon)}_{\leqslant -a}.$$

Si $\rho^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} + (k-1)a > \rho^{(\varepsilon)}_{i,-\lambda} + (d_i - k - 1)a$, on pose

$$\mathfrak{m}_{i,\lambda} = \mathfrak{n}_{i,\lambda} := \mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon)}_{\leqslant -a} + \mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon)}_{<0}.$$

Dans chacun des sous-cas, les conditions (C1), (C2) et (C3) sont vérifiées par construction. On rappelle que $m_{i,\lambda} = \frac{\dim \mathbf{E}_{i,\lambda}}{d_i} = \dim \mathbf{E}^l_{i,\lambda} = \dim(\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^e)$. La condition (C4) s'ensuit. On constate aussi que dans tous les sous-cas, on a par construction

$$\mathfrak{m}_{i,\lambda}, \mathfrak{n}_{i,\lambda} \subseteq \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon)}_{\leqslant -\frac{a}{2}} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}^{(\varepsilon')}_{\leqslant -\frac{a}{2}}. \tag{5.2}$$

Cas II : $|p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda} - p^{(\varepsilon')}_{i,\lambda}| = 1$. — Il existe $k \in \{1, \ldots, d_i\}$ tel que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

(i) $(p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda}, p^{(\varepsilon')}_{i,\lambda}) = (2k, 2k-1)$;

(ii) $(p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda}, p^{(\varepsilon')}_{i,\lambda}) = (2k, 2k+1)$;

(iii) $(p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda}, p^{(\varepsilon')}_{i,\lambda}) = (2k+1, 2k)$;

(iv) $(p^{(\varepsilon)}_{i,\lambda}, p^{(\varepsilon')}_{i,\lambda}) = (2k-1, 2k)$.

On pose

$$\mathfrak{m}_{i,\lambda} = \mathfrak{n}_{i,\lambda} := \bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}^l_{i,\lambda} + \bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}^l_{i,-\lambda}. \tag{5.3}$$

On vérifie sans peine que les conditions (C2), (C3) et (C4) sont satisfaites. D'après ce qui précède, on trouve aisément une description des sous-espaces

$\mathbf{E}_{i,k} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)}$ et $\mathbf{E}_{i,k} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')}$ pour $k \in \{-\lambda, \lambda\}$. Cela suffit pour vérifier la condition (C1). Par exemple, dans le sous-cas (i), il suffit de remarquer que $\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-k} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^{l}$, $\mathbf{E}_{i,-\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)} = \bigoplus_{l=0}^{d_i-k-1} \mathbf{E}_{i,-\lambda}^{l}$ et $\mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)} = \mathbf{E}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')} = \bigoplus_{l=0}^{k-2} \mathbf{E}_{i,\lambda}^{l}$.

On constate enfin que dans les sous-cas (i) et (ii), on a

$$\mathfrak{m}_{i,\lambda} = \mathfrak{n}_{i,\lambda} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon)} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leqslant -a}^{(\varepsilon)}. \tag{5.4}$$

Dans les sous-cas (iii) et (iv), on a

$$\mathfrak{m}_{i,\lambda} = \mathfrak{n}_{i,\lambda} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{<0}^{(\varepsilon')} = \mathbf{V}_{i,\lambda} \cap \mathfrak{g}_{\leqslant -a}^{(\varepsilon')}. \tag{5.5}$$

Conclusion. — On pose

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathfrak{m}_{i,\lambda} \quad \text{et} \quad \mathfrak{n} = \bigoplus_{i,\lambda} \mathfrak{n}_{i,\lambda}.$$

D'après le Lemme 2.12, la paire $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ vérifie les conditions (A2), (A3), (A4) et (A6). D'après (5.2), (5.4) et (5.5), $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ sont deux sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ et vérifient (A5). Ceci nous permet de conclure que $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ appartient à $PA(e, \Gamma^{(\varepsilon)}) \cap PA(e, \Gamma^{(\varepsilon')})$. □

PROPOSITION 5.10. — *Il existe une chaîne de rationnels* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_s = 1$ *telle que*

$$0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \cdots < \varepsilon_{s-1} < \varepsilon_s = 1$$

avec pour tout $k \in \{0, \cdots, s-1\}$ *et pour tout* (i, λ) *on a*

(1) $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} = p_{i,\lambda}^{(\varepsilon')}$ *pour tous* $\varepsilon, \varepsilon' \in]\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}[$ *;*

(2) $|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_k)}| \leqslant 1$ *pour tout* $\varepsilon \in]\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}[$ *;*

(3) $|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_{k+1})}| \leqslant 1$ *pour tout* $\varepsilon \in]\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}[$.

Démonstration. — Observons que $p_{i,\lambda}^{(0)} = d_i + 1$. De plus, on remarque que $p_{i,0}^{(\varepsilon)} = d_i + 1$ pour tout ε. Par définition de $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$ et $\rho_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$, lorsque $\lambda \neq 0$, $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$ n'est pair que pour un nombre fini de valeurs de ε. L'application $\varepsilon \mapsto \big(p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}\big)_{i,\lambda}$ converge vers $\big(d_i + 1\big)_{i,\lambda}$ lorsque ε tend vers 0. De plus, l'ensemble des couples (i, λ) est fini et, pour (i, λ) fixé, $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$ appartient à l'ensemble $\{1, \ldots, 2d_i + 1\}$. On en déduit qu'il existe $0 < \varepsilon_1 < \cdots < \varepsilon_{s-1} < \varepsilon_s = 1$ tels que

- pour tout $k \in \{1, \cdots, s-1\}$, il existe (i, λ) tel que $\lambda \neq 0$ et $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_k)}$ soit pair ;

* pour $\varepsilon \in]0,1[$ différent de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_s$, $p_{i,\lambda}^{(\varepsilon)}$ est impair pour tout $\lambda \neq 0$.

L'assertion est alors claire. $\square$

Théorème 5.11. — *Toute $\mathbb{Q}$-graduation admissible pour e est connexe à la graduation de Dynkin.*

Démonstration. — Soit Γ une $\mathbb{Q}$-graduation admissible pour e. D'après la Proposition 5.1, on peut supposer que Γ est une $\mathbb{Z}$-graduation admissible pour e et il suffit de montrer que Γ est connexe à $\Gamma^{(0)}$.

Considérons les rationnels ε_k donnés par la Proposition 5.10 et la suite

$$0 = \varepsilon_0 < \varepsilon'_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon'_1 < \cdots < \varepsilon_{s-1} < \varepsilon'_{s-1} < \varepsilon_s = 1.$$

Pour tous (i, λ) et $k \in \{0, \cdots, s-1\}$, on a

$$|p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_k)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon'_k)}| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |p_{i,\lambda}^{(\varepsilon'_k)} - p_{i,\lambda}^{(\varepsilon_{k+1})}| \leqslant 1.$$

D'après la Proposition 5.9, d'une part les graduations $\Gamma^{(\varepsilon_k)}$ et $\Gamma^{(\varepsilon'_k)}$ sont adjacentes pour tout $k \in \{0, \cdots, s-1\}$ et d'autre part, les graduations $\Gamma^{(\varepsilon'_k)}$ et $\Gamma^{(\varepsilon_{k+1})}$ le sont aussi. Le théorème s'ensuit. $\square$

Remarque 5.12. — Le Théorème 5.7 découle du théorème précédent. Le problème d'isomorphisme des W-algèbres se réduit alors à l'étude de la relation d'équivalence sur l'ensemble des paires e-admissibles pour une graduation e-admissible donnée.

6. Problème d'isomorphisme pour les graduations optimales

On montre dans cette section que les W-algèbres associées aux paires e-admissibles de certaines graduations sont isomorphes. On conserve les notations des sections précédentes. Soit $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$ une graduation de $\mathfrak{g}$ telle que $e \in \mathfrak{g}_a$ avec $a \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$. Pour $b \in \mathbb{Q}$, on considère la forme bilinéaire antisymétrique

$$\Phi_e : \mathfrak{g}_{-b} \times \mathfrak{g}_{b-a} \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \langle e, [x, y] \rangle.$$

On désigne par $\mathfrak{g}_k^e$ l'intersection de $\mathfrak{g}_k$ avec $\mathfrak{g}^e$ pour $k \in \mathbb{Q}$. Comme $\mathfrak{g}_{b-a}$ et $\mathfrak{g}_{a-b}$ sont en couplage par rapport à la forme de Killing, on montre aisément le lemme suivant.

LEMME 6.1.

(1) *Soit V (resp. W) un supplémentaire de $\mathfrak{g}^e_{-b}$ dans $\mathfrak{g}_{-b}$ (resp. de $\mathfrak{g}^e_{b-a}$ dans $\mathfrak{g}_{b-a}$). Alors la restriction de Φ_e à $V \times W$ est non dégénérée. En particulier,* $\dim V = \dim W$.

(2) *Soit U un sous-espace de $\mathfrak{g}_{-b}$ tel que $U \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$. Alors* $\dim(U^{\perp} \cap [e, \mathfrak{g}_{b-a}]) = \dim \mathfrak{g}_{b-a} - \dim \mathfrak{g}^e_{b-a} - \dim U$.

Supposons désormais que la graduation Γ soit admissible pour e. La proposition suivante est une conséquence directe du Lemme 6.1 et de la Définition 1.1.

PROPOSITION 6.2. — *Soient* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ *une paire e-admissible relativement à Γ et $b \in]0, \frac{a}{2}]$. On pose $U' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_{b-a}$, $V' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_{-b}$, $U = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_{b-a}$ et $V = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_{-b}$. Alors* $\dim U + \dim V' = \dim \mathfrak{g}_{-b} - \dim \mathfrak{g}^e_{-b} = \dim U' + \dim V$.

DÉFINITION 6.3. — *Soit $b > 0$. Une $\mathbb{Q}$-graduation $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$ est dite b-*optimale pour *e si $\mathfrak{g}_{<-b} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$ et s'il existe $a \in \mathbb{N}$, avec $a \geqslant 2$, tel que $e \in \mathfrak{g}_a$ et $a \geqslant 2b$.*

Exemples 6.4.

(1) Une graduation de Dynkin est 1-optimale pour e.

(2) Une graduation $2d$-bonne est d-optimale pour e.

(3) La graduation Γ de l'Exemple 2.7 est 1-optimale pour e.

Remarque 6.5.

(1) Soient $b > b' > 0$ et $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$ une graduation b'-optimale pour e telle que $e \in \mathfrak{g}_a$ et $a \geqslant 2b$. Alors Γ est b-optimale pour e.

(2) Si Γ est b-optimale et $\lambda \in \mathbb{N}^*$, alors $\lambda\Gamma$ est λb-optimale.

(3) Une graduation b-optimale pour e est e-admissible. Cela provient du Théorème 2.11.

(4) Il n'existe pas toujours des graduations b-optimales pour e.

THÉORÈME 6.6. — *Si Γ est une graduation b-optimale pour e, alors les paires e-admissibles relativement à Γ sont équivalentes entre elles.*

Démonstration. — Soit $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_j$ une graduation b-optimale pour e telle que $a \in \mathbb{N}$, avec $a \geqslant 2$, $e \in \mathfrak{g}_a$ et $a \geqslant 2b$.

On désigne par h_Γ l'élément semisimple de $\mathfrak{g}$ définissant Γ. On note $-b_1, -b_2, \cdots, -b_r$ les valeurs propres de $\operatorname{ad} h_\Gamma$ appartenant à $]-\frac{a}{2}, 0[$ telles que $b_i < b_{i+1}$ pour $i \in \{1, \cdots, r-1\}$. En particulier,

$$\mathfrak{g}_{<0} = \mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathfrak{g}_{b_i - a} \oplus \mathfrak{g}_{-b_i}) \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}.$$

Soit $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ une paire e-admissible relativement à Γ telle que

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{g}_{\leqslant -a}\oplus\bigoplus_{i=1}^{r}(\mathfrak{m}_{b_i-a}\oplus\mathfrak{m}_{-b_i})\oplus\mathfrak{m}_{-\frac{a}{2}},\quad \mathfrak{n}=\mathfrak{g}_{\leqslant -a}\oplus\bigoplus_{i=1}^{r}(\mathfrak{n}_{b_i-a}\oplus\mathfrak{n}_{-b_i})\oplus\mathfrak{n}_{-\frac{a}{2}},$$

où $\mathfrak{m}_j\subset\mathfrak{n}_j\subset\mathfrak{g}_j$ pour tout j. Comme $\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}\cap\mathfrak{g}^e=\{0\}$, on a $\mathfrak{g}^e_{b_i-a}=\{0\}$ pour tout i. D'après la Proposition 6.2, on a alors pour tout $1\leqslant i\leqslant r$

$$\begin{aligned}\dim\mathfrak{m}_{b_i-a}+\dim\mathfrak{n}_{-b_i}&=\dim\mathfrak{n}_{b_i-a}+\dim\mathfrak{m}_{-b_i}\\&=\dim\mathfrak{g}_{-b_i}-\dim\mathfrak{g}^e_{-b_i}=\dim\mathfrak{g}_{b_i-a}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

De plus,

$$\dim\mathfrak{m}_{-\frac{a}{2}}+\dim\mathfrak{n}_{-\frac{a}{2}}=\dim\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}-\dim\mathfrak{g}^e_{-\frac{a}{2}}.\tag{6.2}$$

Soit U un sous-espace de $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$ supplémentaire de $\mathfrak{g}^e_{-\frac{a}{2}}$ contenant $\mathfrak{n}_{-\frac{a}{2}}$. On pose

$$\mathfrak{m}':=\mathfrak{g}_{\leqslant -a}\oplus\bigoplus_{i=1}^{r}\mathfrak{m}_{b_i-a},\quad \mathfrak{n}':=\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}\oplus\bigoplus_{i=1}^{r}\mathfrak{n}_{-b_i}\oplus U,$$

$$\mathfrak{m}'':=\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}},\quad\text{et}\quad \mathfrak{n}'':=\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}\oplus U.$$

Alors $(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')$ et $(\mathfrak{m}'',\mathfrak{n}'')$ appartiennent à $PA(e,\Gamma)$. En effet, les propriétés (A1), (A2) et (A4) sont vérifiées par construction. Comme par construction $[e,\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}]=[e,U]$, on a (A3). Les sous-espaces $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$, $\mathfrak{m}''$ et $\mathfrak{n}''$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ qui vérifient (A5) car $b_i<\frac{a}{2}$ et $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})\in PA(e,\Gamma)$. La condition (A6) est satisfaite d'après (6.1) et (6.2). De plus, on a

$$(\mathfrak{m},\mathfrak{n})\preccurlyeq_\Gamma(\mathfrak{m}',\mathfrak{n}')\succcurlyeq_\Gamma(\mathfrak{m}'',\mathfrak{n}'').$$

Le théorème s'ensuit grâce au lemme suivant. □

Lemme 6.7. — *Soient U et V deux sous-espaces de $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$ supplémentaires de $\mathfrak{g}^e_{-\frac{a}{2}}$. Les paires $\mathbf{P}_U$ et $\mathbf{P}_V$ sont équivalentes entre elles, où pour $W\in\{U,V\}$, $\mathbf{P}_W$ désigne la paire $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}},\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}\oplus W)$.*

Démonstration. — Si $-\frac{a}{2}$ n'est pas une valeur propre de $\operatorname{ad}h_\Gamma$ (respectivement si $\mathfrak{g}^e_{-\frac{a}{2}}=\{0\}$), le lemme est évident car $U=V=\{0\}$ (resp. car $U=V=\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$). Supposons donc que $-\frac{a}{2}$ est une valeur propre de $\operatorname{ad}h_\Gamma$ et que $\mathfrak{g}^e_{-\frac{a}{2}}\neq\{0\}$. Montrons le lemme par récurrence sur $n:=\operatorname{codim}_U U\cap V$.

Supposons tout d'abord que $n=1$. D'après le Lemme 6.1(1), la dimension de U est un entier pair, donc la dimension de $U\cap V$ est un entier impair. Il s'ensuit que la restriction de Φ_e à $U\cap V\times U\cap V$ est dégénérée. Il existe donc un élément x non nul de $U\cap V$ tel que $\Phi_e(x,y)=0$ pour tout $y\in U\cap V$. On pose

$$D=\mathbb{C}x\subset U\cap V.$$

En remarquant que $D^{\perp} \cap [e, \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}] = [e, U \cap V]$, on montre que $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) := (\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus D, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus U \cap V) \in PA(e, \Gamma)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\mathbf{P}_U \succcurlyeq_\Gamma (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \preccurlyeq_\Gamma \mathbf{P}_V.$$

Supposons à présent que le lemme soit vrai pour $n-1$ et montrons-le pour n. Soient U et V deux sous-espaces de $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$ supplémentaires de $\mathfrak{g}^e_{-\frac{a}{2}}$ tels que $\operatorname{codim}_U U \cap V = n$ et

$$U = \operatorname{Vect}(\underline{w}, u_1, \cdots, u_n) \ \text{ et } \ V = \operatorname{Vect}(\underline{w}, v_1, \cdots, v_n),$$

où $\underline{w} = (w_1, \cdots, w_r)$, avec $w_i, u_i, v_i \in \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$ pour tout i. En particulier, $U \cap V = \operatorname{Vect}(\underline{w})$. Soient α et β deux réels non nuls tels que les sous-espaces

$$U_{\alpha,\beta} = \operatorname{Vect}(\underline{w}, u_1, \cdots, u_{n-1}, \alpha u_n + \beta v_n)$$
$$\text{et } \ V_{\alpha,\beta} = \operatorname{Vect}(\underline{w}, v_1, \cdots, v_{n-1}, \alpha u_n + \beta v_n)$$

de $\mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}$ soient des supplémentaires de $\mathfrak{g}^e_{-\frac{a}{2}}$. Pour des raisons de dimension et d'après l'hypothèse de récurrence, les paires $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus U_{\alpha,\beta})$ et $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus V_{\alpha,\beta})$ sont équivalentes entre elles. Il en est de même des paires $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus U)$ et $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus U_{\alpha,\beta})$ et des paires $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus V)$ et $(\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}}, \mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \oplus V_{\alpha,\beta})$. Le lemme s'ensuit. □

Théorème 6.8. — *Les paires e-admissibles relativement à une graduation b-optimale pour e sont équivalentes à la paire e-admissible optimale d'une graduation de Dynkin. En particulier, les W-algèbres associées sont isomorphes.*

Démonstration. — On utilise dans cette démonstration les notions de la section précédente. Considérons les rationnels ε_k donnés par la Proposition 5.10 et la suite

$$0 = \varepsilon_0 < \varepsilon'_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon'_1 < \cdots < \varepsilon_{s-1} < \varepsilon'_{s-1} < \varepsilon_s = 1.$$

Comme dans la démonstration du Théorème 5.11, on applique la Proposition 5.9. Pour tout $k \in \{0, \cdots, s-1\}$, les graduations $\Gamma^{(\varepsilon_k)}$ et $\Gamma^{(\varepsilon'_k)}$ sont adjacentes. Il en est de même des graduations $\Gamma^{(\varepsilon'_k)}$ et $\Gamma^{(\varepsilon_{k+1})}$. Comme $\Gamma = \Gamma^{(1)}$ est b-optimale pour e, on a $\mathfrak{g}^{(1)}_{<-b} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon \in [0,1]_{\mathbb{Q}}$ on a $|\varepsilon\lambda| < \frac{a}{2}(d_i - 1) + b$. En particulier, $\mathfrak{g}^{(\varepsilon)}_{<-b} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$. La graduation $\Gamma^{(\varepsilon)}$ est donc b-optimale pour e pour tout $\varepsilon \in [0,1]_{\mathbb{Q}}$. Le Théorème 6.6 suffit alors pour conclure. □

Remarque 6.9. — À partir du théorème précédent, on retrouve comme cas particulier que les paires e-admissibles issues de bonnes graduations construites par Brundan et Goodwin dans [1] sont équivalentes à la paire optimale d'une graduation de Dynkin. En particulier, les W-algèbres associées sont isomorphes, [1, Theorem 1].

7. Résultats dans quelques cas particuliers

Les notations des sections précédentes sont conservées. Le résultat suivant sera appliqué à plusieurs reprises dans la suite.

Théorème 7.1. — *Si $\mathfrak{g}_{<0} = \mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus (\mathfrak{g}_{b-a} + \mathfrak{g}_{-b})$, où $b \in]0, \frac{a}{2}]$, alors les paires e-admissibles relativement à la graduation Γ sont équivalentes entre elles.*

Démonstration. — Compte tenu de la Remarque 4.8, on suppose que $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$. Si $b = \frac{a}{2}$, alors $\mathfrak{g}_{<-\frac{a}{2}} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$, la graduation Γ est donc $\frac{a}{2}$-optimale. Le théorème s'ensuit d'après le Théorème 6.6.

Considérons le cas où $b \neq \frac{a}{2}$. Si $\mathfrak{g}^e_{b-a} = \{0\}$, la graduation Γ est b-optimale. On conclut à partir du Théorème 6.6. Supposons alors que $\mathfrak{g}^e_{b-a} \neq \{0\}$.

Une paire e-admissible est de la forme $(\mathfrak{m}'', \mathfrak{n}'') := (\mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus U'' \oplus V'', \mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus U' \oplus V')$ avec $U'' \subset U' \subset \mathfrak{g}_{b-a}$ et $V'' \subset V' \subset \mathfrak{g}_{-b}$. Soit U un sous-espace de $\mathfrak{g}_{b-a}$ supplémentaire de $\mathfrak{g}^e_{b-a}$ contenant U'. On pose

$$(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') := (\mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus U'', \mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus U \oplus V') \quad \text{et} \quad \mathfrak{m} := \mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus U.$$

On vérifie aisément que $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \in PA(e, \Gamma)$. De plus, d'après la Proposition 6.2 et le Lemme 6.1(1), il suffit de remarquer que $\dim U'' + \dim V' = \dim \mathfrak{g}_{-b} - \dim \mathfrak{g}^e_{-b} = \dim U$ donc $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \in PA(e, \Gamma)$. Les paires $(\mathfrak{m}'', \mathfrak{n}'')$ et $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ sont équivalentes entre elles car

$$(\mathfrak{m}'', \mathfrak{n}'') \preccurlyeq_\Gamma (\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') \succcurlyeq_\Gamma (\mathfrak{m}, \mathfrak{m}).$$

Pour conclure, on considère U et V deux sous-espaces de $\mathfrak{g}_{b-a}$ supplémentaires de $\mathfrak{g}^e_{b-a}$. Il suffit alors de montrer que les paires e-admissibles $\mathbf{P}_U$ et $\mathbf{P}_V$ sont équivalentes entre elles, où pour $W \in \{U, V\}$, $\mathbf{P}_W$ désigne la paire $(\mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus W, \mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus W)$. En effet, on utilise un raisonnement par récurrence sur $n := \operatorname{codim}_U U \cap V$ et on montre le résultat pour $n = 1$. Pour achever la récurrence, on utilise des arguments analogues à ceux de la démonstration du Lemme 6.7. Précisément, on considère D un sous-espace de $\mathfrak{g}_{-b} \cap [e, U \cap V]^\perp$ tel que $\dim D = 1$ et $D \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$. On montre alors que pour $W \in \{U, V\}$, $\mathbf{A}_W := (\mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus U \cap V, \mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus W \oplus D) \in PA(e, \Gamma)$. Il suffit en effet de constater que $(U \cap V)^\perp \cap [e, \mathfrak{g}_{-b}] = [e, D]$. Par ailleurs, on pose $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus U \cap V \oplus D$. On vérifie alors que $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1) \in PA(e, \Gamma)$. Le résultat s'ensuit car

$$\mathbf{P}_U \preccurlyeq_\Gamma \mathbf{A}_U \succcurlyeq_\Gamma (\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \preccurlyeq_\Gamma \mathbf{A}_V \succcurlyeq_\Gamma \mathbf{P}_V.$$

□

On rappelle que $\mathfrak{s}$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par un $\mathfrak{sl}_2$-triplet de $\mathfrak{g}$ contenant e. Lorsque e est distingué, i.e., $\operatorname{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 0$, les paires e-admissibles sont équivalentes entre elles (cf. Remarque 4.10). On considère dans cette section le cas où $\operatorname{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$. On tente de répondre à la question suivante :

Question C. — *Sous l'hypothèse que* $\operatorname{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$*, les paires admissibles pour e sont-elles équivalentes entre elles ?*

Compte tenu de la Remarque 5.12, on s'intéresse désormais à la question suivante.

Question D. — *Sous l'hypothèse que* $\operatorname{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$*, les paires admissibles pour e relativement à une graduation e-admissible donnée sont-elles équivalentes entre elles ?*

On désigne par V un $\mathbb{C}$-espace vetoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ est une $\mathbb{Z}$-graduation admissible pour e définie par un élément semisimple h_Γ de $\mathfrak{g}$ et (e, h, f) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet de $\mathfrak{g}$ tel que $h \in \mathfrak{g}_0$ et $f \in \mathfrak{g}_{-a}$ (cf. [11, Proposition 32.1.7]). On pose $\mathfrak{s} := \operatorname{Vect}(e, h, f)$ et $t := h_\Gamma - \frac{a}{2} h$. On désigne par $\mathfrak{gl}(V)$ l'algèbre de Lie des endomorphismes de V. On suppose enfin que $\operatorname{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$.

7.1. Cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$

Supposons que $\mathfrak{g}$ soit l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(V)$. D'après [6, §3.7, Proposition 1], comme $\operatorname{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$, la partition associée à e est de la forme (d_1, d_2). L'élément t appartient à $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$ et il est semisimple. En tant que $\mathfrak{s}$-module, V se décompose en composantes isotypiques. Comme t commute avec $\mathfrak{s}$, d'après le lemme de Schur, t laisse stable chaque composante isotypique. Puisque t est semisimple, sa restriction à chaque composante isotypique est semisimple. De plus, comme $t \in \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$ on a la décomposition

$$V = V_1 \oplus V_2 \tag{7.1}$$

où V_i est un $\mathfrak{s}$-module simple de dimension d_i et V_i est stable par $\operatorname{ad} t$ pour tout $i \in \{1, 2\}$. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{C}$ tel que $t|_{V_i} = \alpha_i \operatorname{id}_{V_i}$ et on a $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 = 0$. Rappelons l'identification en tant que $\mathfrak{gl}(V)$-modules

$$\mathfrak{gl}(V) = V^* \otimes V$$

où pour $(\phi, v) \in V^* \times V$ l'endomorphisme $\phi \otimes v$ de V est défini par $\phi \otimes v(x) = \phi(x)v$ pour tout $x \in V$. Par suite,

$$\mathfrak{gl}(V) = \bigoplus_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} \mathbf{V}_{i,j} \quad \text{où} \quad \mathbf{V}_{i,j} := V_i^* \otimes V_j.$$

Alors $\mathbf{V}_{i,j}$ est un $\mathfrak{s}$-module via l'opération adjointe dans $\mathfrak{gl}(V)$ et il est $\operatorname{ad} t$-stable, avec

$$\operatorname{ad} t|_{\mathbf{V}_{i,j}} = (\alpha_j - \alpha_i) \operatorname{id}_{\mathbf{V}_{i,j}} .$$

De plus on a $\langle ., . \rangle|_{\mathbf{V}_{i,j} \times \mathbf{V}_{k,l}} = 0$ si $(i,j) \neq (l,k)$. Par ailleurs, $\langle ., . \rangle|_{\mathbf{V}_{i,j} \times \mathbf{V}_{j,i}}$ est non dégénérée.

On peut donc faire une étude directe des valeurs propres de $\operatorname{ad} h_\Gamma$ sur les $\mathfrak{s}$-modules $\mathbf{V}_{i,j}$. On en déduit que le nombre de valeurs propres de $\operatorname{ad} h_\Gamma$ appartenant à $]-a, 0[$ est au plus égal à 2. D'après le Théorème 5.7 et le Théorème 7.1, on peut conclure.

Théorème 7.2. — *Lorsque* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ *et* $\operatorname{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$, *les paires e-admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les W-algèbres associées sont isomorphes.*

7.2. Cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$ ou $\mathfrak{sp}(V)$

On traite dans ce paragraphe le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$, et on montre le résultat de façon analogue si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$. On désigne par Φ une forme bilinéaire de V non dégénérée, symétrique. Alors $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie simple formée des endomorphismes x de V qui vérifient pour tous $v, w \in V$:

$$\Phi(xv, w) + \Phi(v, xw) = 0.$$

On note G le groupe algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ formé des automorphismes g de V vérifiant pour tous $v, w \in V$:

$$\Phi(gv, gw) = \Phi(v, w).$$

Rappelons que d'après [6, Theorem 1.6], l'ensemble des G-orbites nilpotentes dans $\mathfrak{so}(V)$ est en bijection avec l'ensemble des partitions de n dont les parties paires ont un nombre d'occurrences pair. D'après [6], on a le lemme suivant :

Lemme 7.3. — *Comme le rang de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$ est égal à 1, alors l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(a) *$m \geqslant 2$ et il existe $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ tel que d_i soit pair et*
$$d_1 > d_2 > \cdots > d_i = d_{i+1} > \cdots > d_m.$$
Dans ce cas, $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et d_j est impair pour tout $j \notin \{i, i+1\}$.

(b) *$m \geqslant 2$ et il existe $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ tel que d_i soit impair et*
$$d_1 > d_2 > \cdots > d_i = d_{i+1} > \cdots > d_m.$$
Dans ce cas, $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathbb{C}$ et d_j est impair pour tout $j \in \{1, \cdots, m\}$.

(c) *$m \geqslant 3$ et il existe $i \in \{2, \ldots, m-1\}$ tel que d_i soit impair et*
$$d_1 > d_2 > \cdots > d_{i-1} = d_i = d_{i+1} > \cdots > d_m.$$
Dans ce cas, $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et d_j est impair pour tout $j \in \{1, \cdots, m\}$.

La forme bilinéaire non dégénérée Φ induit un isomorphisme $\beta : V \to V^*$ qui associe à un élément v de V la forme linéaire $\Phi(v, \cdot)$. Les isomorphismes β et β^{-1} sont des isomorphismes de $\mathfrak{so}(V)$-modules. On a l'identification de $\mathfrak{so}(V)$-modules
$$\mathfrak{gl}(V) = V^* \otimes V \simeq V \otimes V.$$
On sait que
$$\mathfrak{so}(V) = \bigwedge^2 V = \mathrm{Vect}(v \wedge w\,;\ v, w \in V).$$

Cas (a) ou (b). Supposons tout d'abord que la partition associée à e vérifie l'une des conditions (a) ou (b) du Lemme 7.3. On peut supposer qu'elle est de la forme $(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_m)$, avec $d_1 = d_2$, où on ne suppose plus que les d_i soient croissants.

Comme t est un élément semisimple de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$, on a la décomposition en $\mathfrak{s}$-modules simples
$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$$
où $\dim V_i = d_i$, avec $t|_{V_1} = \alpha\, \mathrm{id}_{V_1}$, $t|_{V_2} = -\alpha\, \mathrm{id}_{V_2}$ et $t|_{V_i} = 0$ pour tout $i \geqslant 3$. Ici, $V_1 \oplus V_2, V_3, \cdots, V_m$ sont les composantes isotypiques du $\mathfrak{s}$-module V, et définissent une décomposition orthogonale par rapport à Φ. Observons que V_1 et V_2 sont totalement isotropes par rapport à Φ. On a
$$\bigwedge^2 (V_1 + V_2) = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-$$

où

$$\mathbf{W}_0 = \mathrm{Vect}(v \wedge w\,;\ v \in V_1,\, w \in V_2) \simeq \mathfrak{gl}(V_1),$$
$$\mathbf{W}_+ \simeq \bigwedge^2 V_1 \ \text{ et } \ \mathbf{W}_- \simeq \bigwedge^2 V_2.$$

On note

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-.$$

On a donc la décomposition orthogonale

$$\mathfrak{so}(V) = \bigwedge^2 V = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_1 \oplus \bigoplus_{3\leqslant i\leqslant m} \mathbf{V}_{1,i} \oplus \bigoplus_{3\leqslant i\leqslant m} \mathbf{V}_{2,i} \oplus \bigoplus_{3\leqslant i\leqslant j\leqslant m} \mathbf{V}_{i,j}, \tag{7.2}$$

avec $\mathbf{V}_{i,i} \simeq \bigwedge^2 V_i$ et $\mathbf{V}_{i,j} \simeq V_i \otimes V_j$ pour $i < j$, des isomorphismes en tant que $\mathfrak{s}$-modules. De plus, $\mathbf{W}_+$ et $\mathbf{W}_-$ sont en couplage par rapport à la forme de Killing. De plus, les crochets suivants s'annulent : $[\mathbf{W}_\pm, \mathbf{W}_\pm]$, $[\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_\pm]$, $[\mathbf{W}_\pm, \mathbf{V}_{1,i}]$ et $[\mathbf{W}_\pm, \mathbf{V}_{2,i}]$ pour $i \geqslant 3$.

Compte tenu de la Remarque 4.8, on va s'intéresser au cas où $\mathfrak{g}_{<0} \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$. D'après ce qui précède, on peut faire une étude directe des valeurs propres de $\mathrm{ad}\, h_\Gamma$ sur les sous-espaces $\mathbf{W}_0$, $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{V}_{i,j}$ pour tous i, j. On résume dans la Table 7.1 l'ensemble des valeurs propres de $\mathrm{ad}\, h_\Gamma$ appartenant à $]-a, 0[$ réparties dans chacun des sous-espaces $\mathbf{W}_+, \mathbf{W}_-, \mathbf{V}_{1,i}$ et $\mathbf{V}_{2,i}$. On encadre dans cette table la valeur propre k telle que $\mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$.

d_1	α	$\mathbf{W}_+$	$\mathbf{W}_-$	$\mathbf{V}_{1,i}$	$\mathbf{V}_{2,i}$
pair	$]-\frac{a}{2}, 0[$	$\boxed{2\alpha}$	$-2\alpha - a$	$-\frac{a}{2} + \alpha$	$-\frac{a}{2} - \alpha$
pair	$]0, \frac{a}{2}[$	$2\alpha - a$	$\boxed{-2\alpha}$	$-\frac{a}{2} + \alpha$	$-\frac{a}{2} - \alpha$
impair	$]-a, -\frac{a}{2}[$	$\boxed{2\alpha + a}$	$-2\alpha - 2a$	α	$-a - \alpha$
impair	$]\frac{a}{2}, a[$	$2\alpha - 2a$	$\boxed{-2\alpha + a}$	$-a + \alpha$	$-\alpha$

Table 7.1. *Cas (a) ou (b) : valeurs propres de* $\mathrm{ad}\, h_\Gamma$ *dans* $]-a, 0[$.

Pour montrer l'équivalence des paires e-admissibles, on distingue deux cas :

Cas I : cas où le nombre de valeurs propres de $\mathrm{ad}\, h_\Gamma$ appartenant à $]-a, 0[$ est égal à 4. On traite ici uniquement le cas où d_1 est pair et $\alpha < 0$, les autres cas se traitent de façon analogue. On montre dans ce cas que toute paire e-admissible de $\mathfrak{g}$ relativement à Γ est équivalente à la paire $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ où

$$\mathfrak{m} := \mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha - a} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2} + \alpha}.$$

Cas II : cas où le nombre de valeurs propres de $\operatorname{ad} h_\Gamma$ appartenant à $]-a,0[$ est strictement inférieur à 4. Dans ce cas, ou bien on a $\mathfrak{g}_{<0} = \mathfrak{g}_{\leqslant -a} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{2a}{3}} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{3}}$, ou bien la graduation Γ est $\frac{a}{2}$-optimale. On conclut donc ou bien grâce au Théorème 7.1 ou bien grâce au Théorème 6.6.

Cas (c). Supposons que la partition associée à e vérifie la condition (c) du Lemme 7.3. On peut supposer qu'elle est de la forme $(d_0, d_0, d_0, d_1, \dots, d_m)$, où on ne suppose plus que les d_i soient croissants.

Comme t est un élément semisimple de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$, on a la décomposition en composantes isotypiques du $\mathfrak{s}$-module V

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_m.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, V_i est un $\mathfrak{s}$-module simple de dimension d_i, avec $t|_{V_i} = 0$. De plus, V_0 admet une décomposition

$$V_0 = \mathbf{W}_0 \oplus \mathbf{W}_+ \oplus \mathbf{W}_-$$

où $\mathbf{W}_0$ est un sous-espace régulier relativement à Φ et $\mathbf{W}_+$ et $\mathbf{W}_-$ sont deux sous-espaces totalement isotropes par rapport à Φ. En particulier, $t|_{\mathbf{W}_0} = 0$, $t|_{\mathbf{W}_+} = \alpha \operatorname{id}_{\mathbf{W}_+}$ et $t|_{\mathbf{W}_-} = -\alpha \operatorname{id}_{\mathbf{W}_-}$. On a donc la décomposition

$$\begin{aligned}\mathfrak{so}(V) = \mathbf{W}_{0,0} \oplus \mathbf{W}_{0,+} \oplus \mathbf{W}_{0,-} \oplus \mathbf{W}_{+,+} \oplus \mathbf{W}_{-,-} \oplus \mathbf{W}_{+,-} \oplus \\ \bigoplus_{i \geqslant 1} (\mathbf{W}_{0,i} \oplus \mathbf{W}_{+,i} \oplus \mathbf{W}_{-,i}) \oplus \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m} \mathbf{V}_{i,j},\end{aligned}$$

avec $\mathbf{W}_{0,0} \simeq \bigwedge^2 \mathbf{W}_0$, $\mathbf{W}_{\pm,\pm} \simeq \bigwedge^2 \mathbf{W}_\pm$, $\mathbf{W}_{0,\pm} \simeq \mathbf{W}_0 \otimes \mathbf{W}_\pm$, $\mathbf{W}_{+,-} \simeq \mathbf{W}_+ \otimes \mathbf{W}_-$, $\mathbf{V}_{i,i} \simeq \bigwedge^2 V_i$ pour tout $i \geqslant 1$, $\mathbf{W}_{0,i} \simeq \mathbf{W}_0 \otimes V_i$, $\mathbf{W}_{\pm,i} \simeq \mathbf{W}_\pm \otimes V_i$ et $\mathbf{V}_{i,j} \simeq V_i \otimes V_j$ pour tous $1 \leqslant i < j$. D'après ce qui précède, les crochets suivants s'annulent : $[\mathbf{W}_{\pm,\pm}, \mathbf{W}_{\pm,\pm}]$, $[\mathbf{W}_{\pm,i}, \mathbf{W}_{\pm,\pm}]$, $[\mathbf{W}_{\pm,i}, \mathbf{W}_{0,\pm}]$ et $[\mathbf{W}_{0,\pm}, \mathbf{W}_{\pm,\pm}]$.

On peut donc faire une étude directe des valeurs propres de $\operatorname{ad} h_\Gamma$ sur ces différents sous-espaces. Comme $\mathfrak{g}_{\leqslant -a} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$, on a $-a < \alpha < a$. Pour montrer l'équivalence des paires e-admissibles relativement à Γ, on considère le cas où $\alpha > 0$. L'autre cas se traite de façon analogue. On résume dans la Table 7.2 l'ensemble des valeurs propres de $\operatorname{ad} h_\Gamma$ appartenant à $]-a,0[$ dans les différents sous-espaces de la décomposition précédente. On encadre dans cette table la valeur propre k telle que $\mathfrak{g}_k \cap \mathfrak{g}^e \neq \{0\}$.

Lorsque $\alpha \in]0, \frac{a}{2}[$, on peut montrer l'équivalence des paires e-admissibles de façon analogue à la démarche utilisée dans le paragraphe précédent. Lorsque $\alpha = \frac{a}{2}$, la graduation est $\frac{a}{2}$-optimale, on peut donc conclure grâce au Théorème 6.6. Supposons donc que $\alpha \in]\frac{a}{2}, a[$. Afin de montrer l'équivalence des paires e-admissibles, on distingue deux cas :

α	$\mathbf{W}_{+,i}$	$\mathbf{W}_{-,i}$	$\mathbf{W}_{0,+}$	$\mathbf{W}_{0,-}$	$\mathbf{W}_{+,+}$	$\mathbf{W}_{-,-}$
$]\frac{a}{2},a[$	$\alpha-a$	$-\alpha$	$\alpha-a$	$\boxed{-\alpha}$	$2\alpha-2a$	$\boxed{-2\alpha+a}$
$]0,\frac{a}{2}[$	$\alpha-a$	$-\alpha$	$\alpha-a$	$\boxed{-\alpha}$	$2\alpha-a$	-2α
$\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$	$\boxed{-\frac{a}{2}}$		

Table 7.2. *Cas (c) : valeurs propres de* $\operatorname{ad} h_\Gamma$ *dans* $]-a,0[$.

Cas I : cas où le nombre de valeurs propres de $\operatorname{ad} h_\Gamma$ appartenant à $]-a,0[$ est égal à 4. On montre dans ce cas que toute paire e-admissible $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ de $\mathfrak{g}$ relativement à Γ est équivalente à la paire $\mathbf{P}_U=(\mathfrak{m}',\mathfrak{m}')$ où

$$\mathfrak{m}'=\mathfrak{g}_{\leqslant -a}\oplus V\oplus \mathfrak{g}_{2\alpha-2a},$$

avec V un sous-espace de $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ supplémentaire de $\mathfrak{g}_{-\alpha}\cap\mathfrak{g}^e$ contenant $\mathfrak{n}\cap\mathfrak{g}_{-\alpha}$.

On peut conclure en montrant que les paires de la forme $\mathbf{P}_V$ sont équivalentes entre elles, en utilisant des arguments similaires à ceux de la démonstration du Lemme 6.7.

Cas II : cas où le nombre de valeurs propres de $\operatorname{ad} h_\Gamma$ appartenant à $]-a,0[$ est strictement inférieur à 4. On représente dans la Table 7.3 les deux possiblités.

α	$\mathbf{W}_{+,i}+\mathbf{W}_{0,+}$	$\mathbf{W}_{-,i}+\mathbf{W}_{0,-}$	$\mathbf{W}_{+,+}$	$\mathbf{W}_{-,-}$
$\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$-\frac{a}{3}$
$\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{4}$	$-\frac{3a}{4}$	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$

Table 7.3. *Cas (c) : possibilités du cas II.*

Lorsque $\alpha=\frac{2a}{3}$, on conclut d'après le Théorème 7.1. Supposons désormais que $\alpha=\frac{3a}{4}$. On montre dans ce cas que toute paire e-admissible $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ de $\mathfrak{g}$ relativement à Γ est équivalente à la paire $\mathbf{P}_U=(\mathfrak{m}',\mathfrak{m}')$ où

$$\mathfrak{m}'=\mathfrak{g}_{\leqslant -a}\oplus U\oplus \mathfrak{g}_{-\frac{a}{2}}\cap \mathbf{W}_{+,+},$$

avec U un sous-espace de $\mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}}$ supplémentaire de $\mathfrak{g}^e_{-\frac{3a}{4}}$ contenant $\mathfrak{n}\cap\mathfrak{g}_{-\frac{3a}{4}}$.

On déduit alors l'équivalence des paires e-admissibles dans ce cas en montrant que les paires $\mathbf{P}_U$ sont équivalentes entre elles à l'aide d'arguments similaires à ceux de la démonstration du Lemme 6.7.

On a donc montré le théorème suivant.

Théorème 7.4. — *Lorsque* $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$ *et* $\operatorname{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$, *les paires e-admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les* W*-algèbres associées sont isomorphes.*

De façon analogue, on montre un résultat similaire lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$.

Théorème 7.5. — *Lorsque* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(V)$ *et* $\operatorname{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$, *les paires e-admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les* W*-algèbres associées sont isomorphes.*

7.3. Cas où $\mathfrak{g} = \mathbf{G}_2$, $\mathbf{F}_4$ ou $\mathbf{E}_6$

Supposons que $\mathfrak{g} = \mathbf{G}_2$, $\mathbf{F}_4$ ou $\mathbf{E}_6$. À l'aide de [2] ou [4], on liste pour chacune de ces algèbres, le label de l'orbite de e dans la classification de Bala-Carter : A_1 et $\tilde{A}_1$ en type $\mathbf{G}_2$; $A_2 + \tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2 + A_1$, $C_3(a_1)$, B_3 et C_3 en type $\mathbf{F}_4$; $2A_2 + A_1$, $A_4 + A_1$, A_5, $D_5(a_1)$ et D_5 en type $\mathbf{E}_6$.

Comme $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{s}$-module, $\mathfrak{g}$ se décompose en composantes isotypiques de $\mathfrak{s}$-modules simples. L'élément t est semisimple et appartient à $\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$. Il laisse donc stable chaque composante isotypique. Puisque t est semisimple, sa restriction à chaque composante isotypique est semisimple. De nouveau comme $t \in \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}$, on a une décomposition de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{s}$-modules simples stables par $\operatorname{ad} t$. En conclusion, $\mathfrak{g}$ se décompose en $\operatorname{ad} t$-espaces propres

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda} \mathbf{W}_{\lambda}.$$

Pour $\lambda \neq 0$, $\mathbf{W}_{\lambda}$ et $\mathbf{W}_{-\lambda}$ sont en couplage par rapport à la forme de Killing. De plus, chaque $\operatorname{ad} t$-espace propre se décompose en $\mathfrak{s}$-modules simples. Afin d'étudier l'équivalence des paires e-admissibles, on traite au cas par cas les orbites nilpotentes listées ci-dessus. Pour chacune d'entre elles, on peut expliciter les décompositions ci-dessus à l'aide du logiciel GAP4. On étudie ensuite les valeurs propres de $\operatorname{ad} h_{\Gamma}$ sur les espaces propres $\mathbf{W}_{\lambda}$. En s'inspirant des constructions faites dans les sections précédentes, on montre que lorsque $\mathfrak{g} = \mathbf{G}_2$, $\mathbf{F}_4$ ou $\mathbf{E}_6$ et $\operatorname{rk} \mathfrak{g}^{\mathfrak{s}} = 1$, les paires e-admissibles sont équivalentes entre elles. En particulier, les W-algèbres associées sont isomorphes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Brundan & S. M. Goodwin, « Good grading polytopes », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **94** (2007), n° 1, p. 155-180.

[2] R. W. Carter, *Finite groups of Lie type*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985, Conjugacy classes and complex characters, A Wiley-Interscience Publication, xii+544 pages.

[3] N. Chriss & V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997, x+495 pages.

[4] D. H. Collingwood & W. M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993, xiv+186 pages.

[5] W. L. Gan & V. Ginzburg, « Quantization of Slodowy slices », *Int. Math. Res. Not.* (2002), n° 5, p. 243-255.

[6] J. C. Jantzen, « Nilpotent orbits in representation theory », in *Lie theory*, Progr. Math., vol. 228, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, p. 1-211.

[7] B. Kostant, « On Whittaker vectors and representation theory », *Invent. Math.* **48** (1978), n° 2, p. 101-184.

[8] T. E. Lynch, « Generalized Whittaker vectors and representation theory », Thèse, M.I.T., 1979.

[9] A. Premet, « Special transverse slices and their enveloping algebras », *Adv. Math.* **170** (2002), n° 1, p. 1-55, With an appendix by Serge Skryabin.

[10] G. Sadaka, « Paires admissibles d'une algèbre de Lie simple complexe et W-algèbres finies », Thèse, Université de Poitiers (France), 2013.

[11] P. Tauvel & R. W. T. Yu, *Lie algebras and algebraic groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005, xvi+653 pages.

[12] I. Vaisman, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Progress in Mathematics, vol. 118, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994, viii+205 pages.

Manuscrit reçu le 26 mai 2014,
révisé le 15 juin 2015,
accepté le 14 septembre 2015.

Guilnard SADAKA
Université de Poitiers
Laboratoire de Mathématiques et Applications
Boulevard Marie et Pierre Curie
86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex (France)
Current address:
Université Libanaise
Faculté des sciences- Section IV
Zahlé (Lebanon)
guilnardsadaka@gmail.com