Annales de l'institut Fourier

JEAN-CLAUDE TOUGERON

Idéaux et fonctions différentiables. I

Annales de l'institut Fourier, tome 18, nº 1 (1968), p. 177-240
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_1_177_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 1 (1968), 177-240

IDÉAUX DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES I

par Jean-Claude TOUGERON

Introduction.

Ce travail est une contribution à la théorie locale des idéaux de fonctions différentiables. Il s'inspire, d'une part, de la théorie des singularités des applications différentiables, développée d'abord par H. Whitney et R. Thom ; d'autre part, de résultats de L. Hörmander, S. Łojasiewicz et B. Malgrange, concernant les idéaux analytiques de l'anneau $\mathcal{E}$ des germes de fonctions numériques et C^∞ au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$.

Si $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in \mathcal{E}^p$, on pose $\partial_i^\omega(\underline{\varphi}) = \dfrac{\partial^{|\omega|}\varphi_i}{\partial x^\omega}$. Tout élément de $\mathcal{D}_{p,q} = \mathbf{R}[\partial_i^\omega]_{\substack{|\omega| \leqslant q \\ i \in [1,p]}}$ opère sur $\mathcal{E}^p$ et $\underline{\varphi}$ définit un homomorphisme noté $\underline{\varphi}^*$ de l'anneau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{p,q}$ dans $\mathcal{E}$. Soit Π un idéal fixé de $\mathcal{D}_{p,q}$: le but de cette thèse est l'étude de l'idéal $\underline{\varphi}^*\,\Pi$ engendré par $\underline{\varphi}^*(\Pi)$ dans $\mathcal{E}$. Nous démontrons, en suivant une idée de R. Thom, qu'"*en général*" l'idéal $\underline{\varphi}^*\,\Pi$ possède d'aussi bonnes propriétés qu'un idéal analytique.

Donnons d'abord un sens précis à l'expression "en général". Si $\mathcal{F} = \mathrm{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$ est l'anneau des séries formelles à n variables à coefficients réels, on désigne par $\underline{n}$ l'idéal maximal de $\mathcal{F}$ et par T la projection canonique de $\mathcal{E}^p$ sur $\mathcal{F}^p$. En considérant $\mathcal{F}^p$ comme limite projective de ses quotients par les $\underline{n}^{q+1}$. $\mathcal{F}^p$, on définit la notion de provariété algébrique dans $\mathcal{F}^p$. Nous dirons qu'une propriété (P) des éléments de $\mathcal{E}^p$ est "*générale*" s'il existe une provariété algébrique $\mathrm{V} \subset \mathcal{F}^p$ de *codimension infinie* telle que (P) soit vérifiée par tout $\underline{\varphi} \in \mathrm{T}^{-1}(\mathcal{F}^p - \mathrm{V})$. (Cette notion ne doit pas être confondue avec celle de "propriété générique" au sens où l'entend R. Thom : le fait, par exemple, pour une fonction d'être "de Morse" est "générique" mais c'est une propriété bien trop restrictive pour être "générale").

Le chapitre 0 est consacré à des préliminaires. Dans le chapitre 1, nous précisons d'abord la notion d'idéal (ou d'ensemble) *stratifiable*. Notre définition, très algébrique, diffère de celles de H. Whitney [13] et R. Thom [11]. Le but du chapitre 1 est la démonstration du théorème de *quasi-transversalité* qui est une variante algébrique et locale du théorème de transversalité de R. Thom [10]. Si Π est un idéal fixé de $\mathcal{O}_{p,q}$, il en résulte qu'*en général* l'idéal $\underline{\varphi}^* \Pi$ est stratifiable.

La première partie du chapitre 2 traite de la stabilité locale des idéaux de fonctions différentiables et s'appuie essentiellement sur une généralisation du théorème des fonctions implicites (§ 1). Le théorème 1 (§ 2) joint au théorème de préparation différentiable, permet de construire, sous des hypothèses convenables, des bases adaptées $(y_1, \ldots, y_n)$ dans lesquelles $\underline{\varphi}^* \Pi$ est engendré par des polynômes en $y_{r+1}, \ldots, y_n$ à coefficients germes indéfiniment dérivables des autres variables (§ 3). On étend ainsi dans plusieurs directions des résultats de N. Levinson [4]. Le théorème 1 fournit aussi de nombreux exemples d'idéaux *rigides* (§ 4) : un idéal Π de $\mathcal{O}_{p,q}$ est rigide si *en général* l'idéal $\underline{\varphi}^* \Pi$ est stable, i.e. s'il existe un entier r tel que, pour tout $\underline{\varphi}'$ r-plat à l'origine, on ait un difféomorphisme local et C^∞ qui transforme $\underline{\varphi}^* \Pi$ en $(\underline{\varphi} + \underline{\varphi}')^* \Pi$. Si n = 3, il existe dans $\mathcal{O}_{4,0}$ des idéaux non rigides. Ces résultats sont à rapprocher des théorèmes de stabilité topologique de R. Thom [11]. Enfin, les résultats des paragraphes 1 et 2 s'étendent, moyennant quelques légères modifications, au cas C^μ ; dans le paragraphe 5, nous donnons un exemple.

La seconde partie (§ 6 et 7) du chapitre 2 étudie la stabilité locale des modules différentiables et emprunte des techniques de démonstration à J. Mather [8]. Après quelques préliminaires algébriques (§ 6), nous caractérisons à l'aide de conditions simples de quasi-transversalité, les modules déterminants sur $\mathcal{E}$ (théorème 2, § 7).

Un appendice est consacré aux fonctions différentiables et ensembles analytiques. Les résultats sont (ou s'inspirent) de B. Malgrange [7]. Dans un article ultérieur, nous démontrerons que tout idéal stratifiable de $\mathcal{E}$ est de Łojasiewicz. Si $\mathcal{M}$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}_{p,q}$ et si l'on désigne par $\mathcal{E}_{\underline{\varphi}}$ l'anneau $\mathcal{E}$ muni (par $\underline{\varphi}^*$) de sa structure de module sur $\mathcal{O}_{p,q}$, on en déduira qu'*en général* $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{p,q}} \mathcal{E}_{\underline{\varphi}}$

est un "module de Fréchet" sur $\mathcal{E}$ et qu'*en général* les $\mathrm{TOR}_i^{\mathcal{O}p,q}$ $(\mathfrak{M}, \mathcal{E}_{\underline{\varphi}})$ $(i > 0)$ sont concentrés à l'origine.

Je remercie messieurs G. Glaeser, B. Malgrange et R. Thom pour les encouragements et les conseils qu'ils m'ont prodigués tout au long de ce travail. En particulier, certaines démonstrations initiales ont été simplifiées ou même totalement modifiées, grâce aux suggestions de monsieur B. Malgrange. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

TABLE DES MATIERES

Pages

Pages

CHAPITRE 0

On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers positifs ; par $\mathbf{N}^+$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Si $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbf{N}^n$ et si $x_1, \ldots, x_n$ sont des indéterminées, on pose : $|\omega| = \omega_1 + \ldots + \omega_n$; $\omega ! = \omega_1 ! \ldots ! \, \omega_n !$; $\underline{x}^\omega = x_1^{\omega_1} \ldots x_n^{\omega_n}$.

1. Sous-modules fermés de $\mathcal{E}(\Omega)^r$ (Malgrange, [6]).

Si Ω est un ouvert de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, on note $\mathcal{E}(\Omega)$ l'algèbre sur $\mathbf{R}$ des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur Ω. L'algèbre $\mathcal{E}(\Omega)$ est munie de sa structure habituelle d'espace de Fréchet (i.e. topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées sur tout compact). Soit $\mathcal{F} = \mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$ l'anneau des séries formelles en n indéterminées à coefficients réels.

Si $\underline{a} \in \Omega$ et si $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, on pose $T_{\underline{a}}(\varphi) = \sum_{\omega \in \mathbf{N}^n} \frac{\partial^{|\omega|} \varphi(\underline{a})}{\partial x^\omega} \cdot \frac{\underline{x}^\omega}{\omega !}$.
L'application $T_{\underline{a}} : \mathcal{E}(\Omega) \rightsquigarrow \mathcal{F}$ est un homomorphisme *surjectif* d'algèbres unitaires et le noyau de $T_{\underline{a}}$ est l'idéal $P_{\underline{a}}(\Omega)$ des fonctions plates(¹) en $\underline{a}$ (i.e. nulles ainsi que toutes leurs dérivées au point $\underline{a}$).

On désigne par $\sum_r P_{\underline{a}}(\Omega)$ le sous-module de $\mathcal{E}(\Omega)^r$ forme des éléments dont toutes les composantes appartiennent à $P_{\underline{a}}(\Omega)$. Si $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \in \mathcal{E}(\Omega)^r$, on pose : $T_{\underline{a}}(\underline{\varphi}) = (T_{\underline{a}}(\varphi_1), \ldots, T_{\underline{a}}(\varphi_r)) \in \mathcal{F}^r$.

Le théorème suivant, dû à Whitney, caractérise les sous-modules fermés de $\mathcal{E}(\Omega)^r$ ($\mathcal{E}(\Omega)^r$ étant muni de la topologie produit) :

THEOREME 1. – *Un sous-module $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{E}(\Omega)^r$ est fermé si et seulement si* $\mathfrak{M} = \bigcap_{\underline{a} \in \Omega} [\mathfrak{M} + \sum_r P_{\underline{a}}(\Omega)]$.

(¹) L'adjectif "*plat*" aura deux sens différents (celui-ci et celui du § 3, 2). Le contexte permettra toujours de les distinguer.

Le module $\mathfrak{M} + \sum_r P_{\underline{a}}(\Omega)$ est le module ponctuel de $\mathfrak{M}$ au point $\underline{a}$: un module $\mathfrak{M}$ est donc fermé si et seulement si $\mathfrak{M}$ est l'intersection de ses modules ponctuels.

Si φ est un polynôme, l'idéal $\varphi \,.\, \mathcal{E}(\Omega)$ est fermé (Hörmander, [2]) ; plus généralement, si φ est analytique sur Ω, l'idéal $\varphi \,.\, \mathcal{E}(\Omega)$ est fermé (Łojasiewicz, [5]). Ces résultats ont été généralisés par Malgrange :

THEOREME 2. – *Si $\mathfrak{M}$ est un sous-module de $\mathcal{E}(\Omega)^r$ engendré sur $\mathcal{E}(\Omega)$ par des fonctions analytiques sur Ω et à valeurs dans $\mathbf{R}^r$, alors $\mathfrak{M}$ est fermé.* Les chapitres 2 et 3 fourniront de nombreux exemples d'idéaux fermés de type fini. L'exemple suivant montre que la situation, pour les fonctions non analytiques, est compliquée.

Dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$, la fonction $f^+ = y^2 + e^{-1/x^2}$ n'engendre pas un idéal fermé. En effet, $\forall\, \underline{a} \in \mathbf{R}^2$, $T_{\underline{a}}(e^{-1/x^2}) \in T_{\underline{a}}(f^+ \,.\, \mathcal{E}(\mathbf{R}^2))$, mais $e^{-1/x^2} \notin f^+ \,.\, \mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$. Par contre, la fonction $f^- = y^2 - e^{-1/x^2}$ est le produit des deux fonctions $f_1 = y - e^{-1/2x^2}$ et $f_2 = y + e^{-1/2x^2}$, qui peuvent être rendues linéaires par changement de coordonnées. D'après le théorème 2, les idéaux $f_1 \,.\, \mathcal{E}(\Omega)$, $f_2 \,.\, \mathcal{E}(\Omega)$ sont fermés : il en sera de même de $f^- \,.\, \mathcal{E}(\Omega)$.

2. Le théorème de préparation différentiable de Malgrange (Malgrange, [6]).

Soient $\mathcal{E}_n$ l'anneau des germes de fonctions numériques indéfiniment dérivables au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$; $\mathcal{F}_n = \mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$, l'anneau des séries formelles à n variables à coefficients réels ; T_n la projection $\mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{F}_n$ qui à tout germe associe sa série formelle à l'origine ; $\underline{m}_n$ l'idéal maximal de $\mathcal{E}_n$; $\underline{n}_n$ celui de $\mathcal{F}_n$. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous poserons $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}$; $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$; $\underline{m}_n = \underline{m}$ etc.

Soit $\underline{\varphi}$ une application de classe C^∞ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ telle que $\underline{\varphi}(\underline{0}) = \underline{0}$. L'application $\underline{\varphi}$ définit un homomorphisme $\underline{\varphi}^*$ de $\mathcal{E}_p$ dans $\mathcal{E}_n$ par la formule : $\forall\, \gamma \in \mathcal{E}_p$, $\underline{\varphi}^*(\gamma) = \gamma \circ \underline{\varphi}$. Si $\underline{f} = T_n \underline{\varphi}$, $\underline{f}$ définit pareillement un homomorphisme $\underline{f}^*$ de $\mathcal{F}_p$ dans $\mathcal{F}_n$ par la formule : $\forall\, g \in \mathcal{F}_p$, $\underline{f}^*(g) = g \circ \underline{f}$, et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_p & \xrightarrow{\underline{\varphi}^*} & \mathcal{E}_n \\ {\scriptstyle T_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_n} \\ \mathcal{F}_p & \xrightarrow{\underline{f}^*} & \mathcal{F}_n \end{array}$$

est commutatif. Tout module sur $\mathcal{E}_n$ (resp. $\mathcal{F}_n$) est ainsi muni canoniquement d'une structure de module sur $\mathcal{E}_p$ (resp. $\mathcal{F}_p$).

THEOREME 3. – *Soit $\mathcal{M}$ un module de type fini sur $\mathcal{E}_n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *$\mathcal{M}$ est un module de type fini sur $\mathcal{E}_p$.*

2) *$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{E}_n} \mathcal{F}_n$ est un module de type fini sur $\mathcal{F}_p$.*

3) *$\mathcal{M}/\underline{m}_p \,.\, \mathcal{M}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathcal{E}_p/\underline{m}_p \simeq \mathbf{R}$.*

4) *$\hat{\mathcal{M}}/\underline{n}_p \,.\, \hat{\mathcal{M}}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathcal{F}_p/\underline{n}_p \simeq \mathbf{R}$.*

En outre, des éléments $u_1, \ldots, u_s \in \mathcal{M}$ engendrent $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{E}_p$ si et seulement si leurs classes (modulo. $\underline{m}_p \,.\, \mathcal{M}$) $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_s$ engendrent sur $\mathbf{R}$ *l'espace vectoriel $\mathcal{M}/\underline{m}_p \,.\, \mathcal{M}$.*

La forme donnée ici, un peu plus générale que la forme habituelle, est due à J. Mather [8].

3. Préliminaires algébriques.

1. *Hauteur et cohauteur d'un idéal.*

Pour les détails, nous renvoyons à Serre [9].

Soit A un anneau commutatif et unitaire. On appelle *chaîne d'idéaux premiers* dans A toute suite finie, strictement croissante : $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_r$, d'idéaux premiers de A. L'entier r s'appelle la longueur de la chaîne. On appelle *dimension* de A, et l'on note dim A, la borne supérieure (finie ou infinie) des longueurs de chaînes d'idéaux premiers de A. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, on appelle *hauteur de* $\mathfrak{p}$, la dimension du localisé $A_{\mathfrak{p}}$. La *hauteur* d'un idéal $\mathfrak{I}$ quelconque sera la borne inférieure des hauteurs des idéaux premiers qui le contiennent. La *cohauteur de* $\mathfrak{I}$ sera la dimension de $A/\mathfrak{I}$. Si $\mathfrak{I} = A$, on pose coht $(\mathfrak{I}) = -1$; ht $(\mathfrak{I}) = \dim A + 1$.

Soit $\underline{k}$ un corps commutatif. Posons $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Si $A = \underline{k}[[\underline{x}]]$ ou $\underline{k}[\underline{x}]$; si $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{I}'$ sont deux idéaux de A :

a) $\dim A = n$ et $\mathrm{ht}(\mathfrak{I}) + \mathrm{coht}(\mathfrak{I}) = n$

b) $\mathrm{ht}(\mathfrak{I} + \mathfrak{I}') \leqslant \mathrm{ht}(\mathfrak{I}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{I}')$

Posons $\underline{y} = (y_1, \dots, y_p)$. Nous démontrons la :

PROPOSITION 1. – *Soit ξ un homomorphisme de $\underline{k}$-algèbres de $\underline{k}[[\underline{y}]]$ dans $\underline{k}[[\underline{x}]]$ et soit $\mathfrak{I}$ un idéal propre de $\underline{k}[[\underline{y}]]$. Alors :* $\mathrm{ht}(\xi(\mathfrak{I}) . \underline{k}[[\underline{x}]]) \leqslant \mathrm{ht}(\mathfrak{I})$.

Soit $\hat{\xi}$ l'homomorphisme de $\underline{k}[[\underline{x}, \underline{y}]]$ sur $\underline{k}[[\underline{x}]]$ défini par les formules : $\hat{\xi}(x_i) = x_i$; $\hat{\xi}(y_j) = \xi(y_j)$. Soit $\underline{i}$ l'injection canonique de $\underline{k}[[\underline{y}]]$ dans $\underline{k}[[\underline{x}, \underline{y}]]$. On a $\xi = \hat{\xi} \circ i$. Posons : $\mathfrak{I}' = \xi(\mathfrak{I}) . \underline{k}[[\underline{x}]]$; $\mathfrak{I}'' = \mathfrak{I} . \underline{k}[[\underline{x}, \underline{y}]]$. Visiblement : $\hat{\xi}^{-1}(\mathfrak{I}') \supset \ker \hat{\xi} + \mathfrak{I}''$. Inversement, si $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) \in \hat{\xi}^{-1}(\mathfrak{I}')$, $\hat{\xi}(\varphi) = \sum_{i=1}^{q} u_i(\underline{x}) . \xi(\varphi_i(\underline{y}))$, où les $\varphi_i \in \mathfrak{I}$. Donc $\hat{\xi}\left(\varphi - \sum_{i=1}^{q} u_i \varphi_i\right) = 0$, et $\varphi \in \ker \hat{\xi} + \mathfrak{I}''$: ainsi, $\hat{\xi}$ induit un isomorphisme de $\underline{k}[[\underline{x}, \underline{y}]]/\mathfrak{I}'' + \ker \hat{\xi}$ sur $\underline{k}[[\underline{x}]]/\mathfrak{I}'$. Or, $\mathrm{ht}(\ker \hat{\xi}) = p$; $\mathrm{ht}(\mathfrak{I}'') = \mathrm{ht}(\mathfrak{I})$; donc, d'après a) et b) : $\mathrm{ht}(\mathfrak{I}'' + \ker \hat{\xi}) \leqslant p + \mathrm{ht}(\mathfrak{I})$; $\mathrm{coht}(\mathfrak{I}'' + \ker \hat{\xi}) = \dim \underline{k}[[\underline{x}]]/\mathfrak{I}' \geqslant n + p - p - \mathrm{ht}(\mathfrak{I}) = n - \mathrm{ht}(\mathfrak{I})$; d'où finalement : $\mathrm{ht}(\mathfrak{I}') \leqslant \mathrm{ht}(\mathfrak{I})$, c.q.f.d.

Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathcal{E}$. On pose $h(\mathfrak{I}) = \mathrm{ht}(T\mathfrak{I})$; $d(\mathfrak{I}) = \mathrm{coht}(T\mathfrak{I})$. En général, $h(\mathfrak{I}) \neq \mathrm{ht}(\mathfrak{I})$ et $d(\mathfrak{I}) \neq \mathrm{coht}(\mathfrak{I})$. Par exemple, $d(0) = \dim \mathfrak{F} = n$ et $\mathrm{coht}(0) = \dim \mathcal{E} = +\infty$. Voici un corollaire immédiat du théorème 3.

PROPOSITION 2. – *Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathcal{E}$ tel que $d(\mathfrak{I}) = r \geqslant 0$. Alors il existe n formes linéaires indépendantes* $y_1, \dots, y_n$, telles *que, si $\mathcal{E}_r$ est l'anneau des germes de fonctions indéfiniment dérivables en $y_1, \dots, y_r$, l'anneau $\mathcal{E}/\mathfrak{I}$ soit un module de type fini sur $\mathcal{E}_r$, engendré sur $\mathcal{E}_r$ par un nombre fini de monômes $y_{r+1}^{\omega_{r+1}} \dots y_n^{\omega_n}$ (les ω_i* sont des entiers positifs).

En effet, par le théorème de normalisation (Serre [9]), il existe des formes linéaires indépendantes $y_1, \dots, y_n$, telles que $\mathfrak{F}/T\mathfrak{I}$ soit un module de type fini sur $\mathfrak{F}_r = \mathbf{R}[[y_1, \dots, y_r]]$. Par le théorème 3, $\mathcal{E}/\mathfrak{I}$ est un module de type fini sur $\mathcal{E}_r$. Si $\underline{m}_r$ est l'idéal maximal de $\mathcal{E}_r$, $\mathcal{E}/\mathfrak{I} + \underline{m}_r . \mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$, engendré par un nombre fini de monômes $y_{r+1}^{\omega_{r+1}} \dots y_n^{\omega_n}$. D'après le théorème 3, ces monômes engendrent $\mathcal{E}/\mathfrak{I}$ sur $\mathcal{E}_r$.

DEFINITIONS. – *Soit $\mathcal{J}$ un idéal propre de $\mathcal{E}$. Nous dirons que $\mathcal{J}$ est un idéal de définition (resp. un idéal elliptique) si $\mathcal{J}$ contient une puissance de $\underline{m}$ (resp. si $\mathcal{J}$ est de type fini et $\mathcal{J} \supset \underline{m}^\infty = \bigcap_{r=0}^{\infty} \underline{m}^r$).*

Les conditions suivantes sont équivalentes : a) $\mathcal{J}$ est un idéal de définition de $\mathcal{E}$; b) $\mathcal{E}/\mathcal{J}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$; c) $d(\mathcal{J}) = 0$.

Désignons par $\mathcal{E}_{[\mu]}$ l'anneau des germes de fonctions numériques μ-fois continûment dérivables au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$, et par $\underline{m}_{[\mu]}$ l'idéal maximal de $\mathcal{E}_{[\mu]}$. On vérifie facilement que l'idéal $\mathcal{J}$ est elliptique si et seulement si, $\forall \mu \in \mathrm{N}$, $\mathcal{J} . \mathcal{E}_{[\mu]}$ contient une puissance de $\underline{m}_{[\mu]}$.

2. *Modules plats. (Malgrange [6] ou Bourbaki [1]).*

Soit $\mathcal{M}$ un module sur A. Soient $u_1, \ldots, u_s \in \mathrm{A}$. Le module $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ des relations dans $\mathcal{M}$ entre $u_1, \ldots, u_s$ est le sous-module de $\mathcal{M}^s$ formé des s-uples $(m_1, \ldots, m_s)$ tels que $\sum_{i=1}^{s} u_i m_i = 0$. Le module $\mathcal{M}$ est *plat* si l'une des conditions suivantes (équivalentes) est satisfaite :

a) Pour toute suite exacte $0 \longrightarrow \mathrm{P}' \longrightarrow \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{P}'' \longrightarrow 0$ de modules sur A, la suite $0 \longrightarrow \mathrm{P}' \otimes_{\mathrm{A}} \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{P} \otimes_{\mathrm{A}} \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{P}'' \otimes_{\mathrm{A}} \mathcal{M} \longrightarrow 0$ est exacte.

b) Quel que soit $s \in \mathrm{N}^+$ et quels que soient $u_1, \ldots, u_s \in \mathrm{A}$, le module des relations entre les u_i à coefficients dans $\mathcal{M}$ est engendré sur $\mathcal{M}$ par le module des relations entre les u_i à coefficients dans A.

c) Pour tout idéal $\mathcal{J}$ de type fini de A, l'homomorphisme canonique $\mathcal{J} \otimes_{\mathrm{A}} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ est injectif.

d) Quel que soit le module $\mathcal{L}$ sur A, $\mathrm{TOR}_p^{\mathrm{A}}(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = 0$ dès que $p > 0$. On vérifie facilement que $\mathcal{F} = \mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$ est un module plat sur l'anneau $\mathcal{A} = \mathbf{R}\{\{x_1, \ldots, x_n\}\}$ des séries convergentes en $x_1, \ldots, x_n$ à coefficients réels. On déduit de là, du théorème 2 et du théorème de cohérence d'Oka, le :

THEOREME 4. – *L'anneau $\mathcal{E}$ est un module plat sur $\mathcal{A}$.*

3. *Le lemme de Nakayama.*

Nous l'utiliserons souvent dans le chapitre 2 :

LEMME. – *Soit* A *un anneau local (commutatif et unitaire) d'idéal maximal* $\underline{m}$ *et soit* $\mathcal{M}$ *un module de type fini sur* A. *Si* $\mathcal{M}'$ *est un sous-module de* $\mathcal{M}$ *tel que* $\mathcal{M} = \mathcal{M}' + \underline{m} \, . \, \mathcal{M}$, *alors* $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.

CHAPITRE 1

LE THEOREME DE QUASI-TRANSVERSALITE

1. Notations et définitions.

1. Soient $\underline{k}$ un corps commutatif ; $\mathcal{F} = \underline{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$ l'anneau des séries formelles à n indéterminées, à coefficients dans $\underline{k}$; $\underline{n}$ l'idéal maximal de $\mathcal{F}$. Si p et q sont des entiers ($p \geqslant 1$, $q \geqslant 0$), on pose $\mathcal{F}_q^p = \mathcal{F}^p / \underline{n}^{q+1} . \mathcal{F}^p$: $\mathcal{F}_q^p$ est un espace vectoriel sur $\underline{k}$ de dimension $p . \binom{n+q}{n}$. Un élément de $\mathcal{F}^p$ sera noté $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_p)$ où $f_i = \sum\limits_{\omega \in \mathbf{N}^n} a_\omega^i \, \underline{x}^\omega$. Nous désignerons par $(\underline{f})$ l'idéal engendré par les f_i dans $\mathcal{F}$ et par $\mathcal{H}(\underline{f})$ l'idéal engendré dans $\mathcal{F}$ par tous les jacobiens $\dfrac{\mathrm{D}(f_1, \ldots, f_p)}{\mathrm{D}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})}$ $(0 < i_1 < \ldots < i_p \leqslant n)$. Si $p > n$, $\mathcal{H}(\underline{f}) = 0$.

Soit y_ω^i la forme linéaire sur $\mathcal{F}^p$ définie par $< y_\omega^i, \underline{f} > = \omega!\, a_\omega^i$, $\forall \underline{f} \in \mathcal{F}^p$. L'algèbre $\hat{\mathcal{O}}_p$ des polynômes sur $\mathcal{F}^p$ s'identifie à

$$\underline{k}\,[y_\omega^i]_{\substack{\omega \in \mathbf{N}^n \\ i \in [1,p]}} .$$

L'algèbre $\mathcal{O}_{p,q}$ des polynômes sur $\mathcal{F}_q^p$ s'identifie à

$$\underline{k}\,[y_\omega^i]_{\substack{|\omega| \leqslant q \\ i \in [1,p]}} .$$

Tout élément $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_p) \in \mathcal{F}^p$ définit un homomorphisme de $\underline{k}$-algèbres (noté $\underline{f}^*$) de $\mathcal{O}_p$ dans $\mathcal{F}$, par la substitution :

$$y_\omega^i \rightsquigarrow \partial_i^\omega \underline{f} = \frac{\partial^{|\omega|} f_i}{\partial x^\omega} .$$

Soit Π un idéal de $\mathcal{O}_{p,q}$: on notera simplement $\underline{f}^*\, \Pi$ l'idéal engendré par $\underline{f}^*(\Pi)$ dans $\mathcal{F}$.

Soit π_q la projection canonique : $\mathcal{F}^p \longrightarrow \mathcal{F}^p_q$; si $q' \geqslant q$, notons $\pi_{q,q'}$ la projection canonique : $\mathcal{F}^p_{q'} \rightsquigarrow \mathcal{F}^p_q$. Donnons-nous dans chaque $\mathcal{F}^p_q$ une variété algébrique (au sens ensembliste) V_q, de telle sorte que $\pi_{q,q+1}(V_{q+1}) \subset V_q$, $\forall\, q \in \mathbf{N}$. Posons $V = \varprojlim V_q$. La suite $d_q = \text{co-dim}_{\mathcal{F}^p_q} V_q$ est croissante. Nous dirons que V est une *provariété algébrique* de codimension égale à $\lim\limits_{q\to\infty} d_q$. Nous réservons le terme de variété à toute provariété de codimension finie.

La provariété V est de codimension infinie, si et seulement si la condition suivante est satisfaire : $\forall\, q \in \mathbf{N}$ et $\forall\, \underline{f}(q) \in V_q$, il existe un entier $q' \geqslant q$ et $\underline{f}(q') \in \pi^{-1}_{q,q'}(\underline{f}(q))$ tels que $V \cap \pi^{-1}_{q'}(\underline{f}(q')) = \emptyset$

Si I est un idéal de $\mathcal{F}$, désignons par $J_k(I)$ l'idéal engendré dans $\mathcal{F}$ par I et tous les jacobiens $\dfrac{D(g_1, \ldots, g_k)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$, où $g_1, \ldots, g_k \in I$ et $0 < i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$. Si $k > n$, $I = J_k(I)$. Soit $\underline{\omega}_q$ l'ensemble des multi-indices $\omega \in \mathbf{N}^n$ tels que $|\omega| \leqslant q$ et ordonnons totalement une fois pour toutes l'ensemble $\underline{\omega}_q \times [1, p]$. Si Π est un idéal de $\mathcal{D}_{p,q}$, soit $J_k(\Pi)$ l'idéal engendré dans $\mathcal{D}_{p,q}$ par Π et tous les jacobiens $\dfrac{D(P_1, \ldots, P_k)}{D(y^{i_1}_{\omega^1}, \ldots, y^{i_k}_{\omega^k})}$, où $P_1, \ldots, P_k \in \Pi$ et $(i_1, \omega^1), \ldots, (i_k, \omega^k)$ est une suite strictement croissante d'éléments de $\underline{\omega}_q \times [1, p]$.

Si $i \in [1, n]$, posons $[i] = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ avec $\omega_i = 1$ et $\omega_j = 0$, si $j \neq i$. Si $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{D}_{p,q}$, on vérifie la formule :

$$\frac{D(\underline{f}^*(P_1), \ldots, \underline{f}^*(P_k))}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})} =$$

$$\underline{f}^*\left(\sum_{\substack{(\omega^1, j_1) < \ldots < (\omega^k, j_k) \\ \in \underline{\omega}_q \times [1,p]}} \frac{D(P_1, \ldots, P_k)}{D(y^{j_1}_{\omega^1}, \ldots, y^{j_k}_{\omega^k})} \cdot \det_{\substack{h, h' \in \\ [1,k]}} \left| y^{j_h}_{\omega^h + [i_{h'}]} \right| \right)$$

$$= \underline{f}^*\left(\frac{D^*(P_1, \ldots, P_k)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}\right), \quad \text{où} \quad \frac{D^*(P_1, \ldots, P_k)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})} \in \mathcal{D}_{p,q+1}.$$

Soit $J_k^*(\Pi)$ l'idéal engendré dans $\mathcal{D}_{p,q+1}$ par Π et les $\dfrac{D^*(P_1,\dots,P_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}$ où $P_1,\dots,P_k \in \Pi$ et $0 < i_1 < \dots < i_k \leqslant n$. Visiblement,

$$J_k^*(\Pi) \subset J_k(\Pi) \,.\, \mathcal{D}_{p,q+1}$$

et,

$$\forall \underline{f} \in \mathcal{F}^p : J_k(\underline{f}^* \Pi) = \underline{f}^* J_k^*(\Pi).$$

Dans la suite de ce chapitre et les chapitres suivants, *nous supposerons toujours* $\underline{k} = \mathbf{R}$, sauf aux paragraphes 2, 3, 4 de ce chapitre, où nous ferons éventuellement $\underline{k} = \mathbf{C}$.

2. Tout élément $\underline{\varphi} = (\varphi_1,\dots,\varphi_p) \in \mathcal{E}^p$ définit un homomorphisme de $\mathbf{R}$-algèbres (noté simplement $\underline{\varphi}^*$) de $\mathcal{D}_{p,q}$ dans $\mathcal{E}$, par la substitution $y_\omega^i \rightsquigarrow \partial_i^\omega \underline{\varphi} = \dfrac{\partial^{|\omega|} \varphi_i}{\partial x^\omega}$. Soit Π un idéal de $\mathcal{D}_{p,q}$: on notera $\underline{\varphi}^* \Pi$ l'idéal engendré par $\underline{\varphi}^*(\Pi)$ dans $\mathcal{E}$.

Si $\mathfrak{J}$ est un idéal de $\mathcal{E}$, on désigne par $J_k(\mathfrak{J})$ l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par $\mathfrak{J}$ et tous les jacobiens $\dfrac{D(\Psi_1,\dots,\Psi_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}$ où $\Psi_1,\dots,\Psi_k \in \mathfrak{J}$ et $\underline{i} = (i_1,\dots,i_k) \in [1\,,n]^k$. Si $\underline{\varphi} = (\varphi_1,\dots,\varphi_p) \in \mathcal{E}^p$, on désigne par $(\underline{\varphi})$ l'idéal engendré par $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ dans $\mathcal{E}$; par $\mathcal{H}(\underline{\varphi})$ l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par tous les jacobiens

$$\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_p})},$$

où

$$\underline{i} = (i_1,\dots,i_p) \in [1\,,n]^p.$$

Enfin, si Π est un idéal de $\mathcal{D}_{p,q}$, on vérifie la formule :

$$J_k(\underline{\varphi}^* \Pi) = \underline{\varphi}^* J_k^*(\Pi)$$

3. *Strates et idéaux stratifiables.*

Soit A un anneau qui sera soit $\mathcal{F}$, soit $\mathcal{E}$, soit $\mathcal{D}_{p,q}$. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de A : on désigne par $\tilde{\mathfrak{J}}$ la racine de $\mathfrak{J}$ (i.e. l'idéal des éléments de A dont une puissance appartient à $\mathfrak{I}$ ou encore l'intersection des idéaux premiers qui contiennent $\mathfrak{I}$). Désignons par $\sigma_k(\mathfrak{I})$, l'idéal de A : $\sum_{\Phi \in \sum_k \mathfrak{I}} [(\Phi) : \mathfrak{I}]$, où $\sum_k \mathfrak{I}$ est l'ensemble des k-uples $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$, où $\Phi_1, \ldots, \Phi_k \in \mathfrak{I}$ et (Φ) est l'idéal engendré par les Φ_i dans A.

DEFINITION. – *Une k-strate de* A *est un couple* $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$ *de deux idéaux de type fini de* A, *tels que*

$$\mathfrak{I} \subset \bar{\mathfrak{I}}' \subset \bar{\sigma}_k(\mathfrak{I}) \cap \bar{J}_k(\mathfrak{I})$$

$$(\bar{\sigma}_k(\mathfrak{I}) = \overline{\sigma_k(\mathfrak{I})} \quad et \quad \bar{J}_k(\mathfrak{I}) = \overline{J_k(\mathfrak{I})}.)$$

Pour éclairer la définition précédente, supposons un instant que $A = \mathfrak{D}_{p,q}$ (avec $\underline{k} = \mathbf{C}$). Désignons par $V(\mathfrak{I})$ la variété des zéros de l'idéal $\mathfrak{I}$. Si $\underline{a} \in V(\mathfrak{I}) - V(J_k(\mathfrak{I}))$, $V(\mathfrak{I})$ est au voisinage du point $\underline{a}$, contenue dans une variété régulière de co-dimension k. Si

$$\underline{a} \in V(\mathfrak{I}) - V(\sigma_k(\mathfrak{I}))$$

il existe $\quad \Phi \in \sum_k \mathfrak{I} \quad$ et $\quad \xi \in (\Phi) : \mathfrak{I} \quad$ tels que $\quad \xi(\underline{a}) \neq 0$.

Donc au voisinage du point $\underline{a}$, l'idéal $\mathfrak{I}$ admet un système de k générateurs et $V(\mathfrak{I})$ est une variété de co-dimension $\leqslant k$. Ainsi, si $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$ est une k-strate de A, on voit que $V(\mathfrak{I}) - V(\mathfrak{I}')$ (qui est contenue dans $V(\mathfrak{I}) - V(\sigma_k(\mathfrak{I})) \cup V(J_k(\mathfrak{I}))$) est une variété régulière de co-dimension k.

Soit S'_A l'ensemble des idéaux de type fini de A. Soit $\mathfrak{S}_A$ l'ensemble des parties Ω de S'_A qui vérifient les conditions suivantes :

1) Les idéaux (0) et A appartiennent à Ω.

2) Si $\bar{\mathfrak{I}} \supset \mathfrak{I}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{I}_s \supset \mathfrak{I}$, où $\mathfrak{I}_1, \ldots, \mathfrak{I}_s \in \Omega$ et $\mathfrak{I} \in S'_A$, alors $\mathfrak{I} \in \Omega$.

3) Si $(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}')$ est une strate de A, et si $\mathfrak{I}' \in \Omega$, alors $\mathfrak{I} \in \Omega$. Visiblement, $\mathfrak{S}_A$ est stable pour l'intersection. Posons $S_A = \bigcap_{\Omega_i \in \mathfrak{S}_A} \Omega_i$.

S_A est le plus petit sous-ensemble de S'_A vérifiant les conditions (1), (2) et (3). Par définition, un élément de S_A sera un idéal *stratifiable.*

Une C.N.S. pour qu'un idéal $\mathfrak{I} \neq (0)$ de A soit stratifiable, est qu'il existe une suite $\mathfrak{I}_0, \ldots, \mathfrak{I}_s$ d'idéaux de type fini de A telle que :

a) $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}_0 \subset \overline{\mathfrak{I}}$ et $\mathfrak{I}_s = A$.

b) Si $i \in [0, s-1]$, ou il existe $j > i$ tel que le couple $[\mathfrak{I}_i, \mathfrak{I}_j]$ soit une strate de A, ou il existe des indices $j_1 > i, \ldots, j_l > i$ tels que $\overline{\mathfrak{I}}_i \supset \mathfrak{I}_{j_1} \cap \ldots \cap \mathfrak{I}_{j_l} \supset \mathfrak{I}_i$.

La suite $(\mathfrak{I}_i)_{i \in [0, s]}$ est, par définition, une *stratification* de l'idéal $\mathfrak{I}$.

4. *Exemples. Supposons* $A = \mathcal{O}_{p,q}$ *ou* $\mathcal{F}$.

Soit I un idéal propre de A, de hauteur $k > 0$ et tel que A/I soit sans nilpotents. Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ les idéaux premiers minimaux de hauteur k de I ; $\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_s$ les idéaux premiers minimaux (s'il n'en existe pas, on fait $s = 1$ et $\mathfrak{p}'_1 = A$) de hauteur $> k$. Posons $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$; $\mathfrak{p}' = \bigcap_{j=1}^{s} \mathfrak{p}'_j$: alors $I = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$. Démontrons les inclusions :

$$\underline{\overline{J}_k(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{p}' \subset \overline{\sigma}_k(I) \subset \mathfrak{p}'} \tag{1}$$

(en particulier, si $\mathfrak{p}' = A$, i.e. si l'idéal I est *équidimensionnel,* alors $\overline{J}_k(I) \subset \overline{\sigma}_k(I)$). En effet :

$\sigma_k(I) \subset \mathfrak{p}'$: sinon, il existerait

$$j \in [1, s] \; ; \; \Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k) \in \sum_k I$$

et $$\xi \in ((\Phi) : \mathfrak{I}) \quad \text{tels que} \quad \xi \notin \mathfrak{p}'_j .$$

Alors, dans $A_{\mathfrak{p}'_j}$, les idéaux I, $\mathfrak{p}'_j$, (Φ) engendreraient le même idéal :

$I . A_{\mathfrak{p}'_j} = \mathfrak{p}'_j . A_{\mathfrak{p}'_j} = (\Phi) . A_{\mathfrak{p}'_j}$. Donc l'idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}'_j}$ serait engendré par k éléments et dim $A_{\mathfrak{p}_j} = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}'_j) \leqslant k$. On aboutit à une contradiction.

$\overline{J}_k(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{p}' \subset \overline{\sigma}_k(I)$: sinon, il existerait un idéal premier $\mathfrak{p}''$ de A tel que $\mathfrak{p}'' \supset \overline{\sigma}_k(I)$ et $\mathfrak{p}'' \not\supset J_k(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{p}'$. Soit $\xi \in J_k(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{p}'$, $\xi \notin \mathfrak{p}''$. Soit $\mathcal{H}_k(\mathfrak{p})$ l'idéal engendré dans $\mathfrak{F}$ par tous les jacobiens $\dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$ $\left(\text{ou } \dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{D(y^{i_1}_{\omega^1}, \ldots, y^{i_k}_{\omega^k})} \text{ si } A = \mathcal{D}_{p,q}\right)$ où $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathfrak{p}$. L'idéal $\mathfrak{p}''$ contient $\mathfrak{p}$, car $\mathfrak{p}'' \supset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{p}'' \not\supset \mathfrak{p}'$. Posons $\xi = \xi_1 + \xi_2$, où $\xi_1 \in \mathfrak{p}$ et $\xi_2 \in \mathcal{H}_k(\mathfrak{p})$: l'élément ξ_2 n'appartient pas à $\mathfrak{p}''$, car sinon ξ appartiendrait à $\mathfrak{p}''$. Donc $\mathcal{H}_k(\mathfrak{p}) \not\subset \mathfrak{p}''$. Visiblement,

$$I . A_{\mathfrak{p}''} = \mathfrak{p} . A_{\mathfrak{p}''} = \mathfrak{p}_1 . A_{\mathfrak{p}''} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r . A_{\mathfrak{p}''} .$$

Puisque $\mathcal{H}_k(\mathfrak{p}) \not\subset \mathfrak{p}''$, d'après le critère jacobien des points simples, l'idéal $I . A_{\mathfrak{p}''} = \mathfrak{p} . A_{\mathfrak{p}''}$ est un idéal premier régulier de hauteur k, engendré sur $A_{\mathfrak{p}''}$ par des éléments $\Phi_1, \ldots, \Phi_k \in I$. Donc, il existe $\eta \in A - \mathfrak{p}''$ tel que $\eta . I \subset (\Phi)$. Ainsi, $\eta \in \sigma_k(I)$ et $\eta \notin \mathfrak{p}''$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\mathfrak{p}'' \supset \overline{\sigma}_k(I)$.

On voit facilement que : $\mathrm{ht}(\overline{J}_k(\mathfrak{p})) > k$; $\mathrm{ht}(\overline{J}_k(I)) > k$; les inégalités (1) entraînent donc : $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') \geqslant \mathrm{ht}(\overline{\sigma}_k(I)) \geqslant \inf\{\mathrm{ht}(\overline{J}_k(\mathfrak{p})), \mathrm{ht}(\mathfrak{p}')\} > k$. Donc, en posant $\widetilde{I} = \overline{J}_k(I) \cap \overline{\sigma}_k(I)$, on a : $\mathrm{ht}(\widetilde{I}) > \mathrm{ht}(I)$.

Le couple $(I, \widetilde{I})$ est une k-strate de A et $A/\widetilde{I}$ est sans nilpotents. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal non nul de A. On définit par récurrence sur i, une chaîne strictement croissante d'idéaux de A : $\mathfrak{I}_0 \subset \ldots . \subset \mathfrak{I}_s$, où $\mathfrak{I}_0 = \overline{\mathfrak{I}}$; $\mathfrak{I}_s = A$ et, si $i \in [0, s-1]$, $\mathfrak{I}_{i+1} = \widetilde{\mathfrak{I}}_i$ (d'après la remarque précédente, $s \leqslant \dim A$).

La suite $\mathrm{st}(\mathfrak{I}) = (\mathfrak{I}_i)_{i \in [0,s]}$ définit *la stratification primaire de* $\mathfrak{I}$. Ainsi : *tout idéal de* $\mathfrak{F}$ *ou de* $\mathcal{D}_{p,q}$ *est stratifiable.* De même *tout idéal de* $\mathcal{E}$ *engendré par des germes de fonctions analytiques réelles, est stratifiable.*

Remarque. — Un idéal $\mathfrak{I}$ peut admettre plusieurs stratifications. Par exemple, si $\mathfrak{F} = \mathbf{R}[[x, y, z]]$, prenons $\mathfrak{I} = (x\,y) + (x\,z)$.

La 1-strate $(\mathfrak{J}, (y) + (z))$ et la 2-strate $((y) + (z), \mathfrak{F})$ définissent la stratification primaire de $\mathfrak{J}$. Mais la 2-strate $(\mathfrak{J}, (x))$ et la 1-strate $((x), \mathfrak{F})$ définissent une seconde stratification de l'idéal $\mathfrak{J}$.

Tout idéal (de $\mathcal{E}$) elliptique est stratifiable.

Soient $\mathfrak{J}$ un idéal elliptique et $\mathfrak{J}'$ un idéal de $\mathcal{E}$.

– Si $\mathrm{T}\mathfrak{J} = \mathrm{T}\mathfrak{J}'$, visiblement $\mathfrak{J} \supset \mathfrak{J}'$ et $\mathfrak{J}' + \underline{m}^\infty . \mathfrak{J} \supset \mathfrak{J}$, donc $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}'$ (lemme de Nakayama).

– Il est immédiat que $\mathrm{T}\overline{\mathfrak{J}} = \overline{\mathrm{T}\mathfrak{J}}$; $\mathrm{T}(\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}') = \mathrm{T}\mathfrak{J} \cap \mathrm{T}\mathfrak{J}'$; $\mathrm{T}(\overline{\mathrm{J}}_k(\mathfrak{J})) = \overline{\mathrm{J}}_k(\mathrm{T}\mathfrak{J})$. Montrons que $\mathrm{T}(\overline{\sigma}_k(\mathfrak{J})) = \overline{\sigma}_k(\mathrm{T}\mathfrak{J})$. L'inclusion $\mathrm{T}(\overline{\sigma}_k(\mathfrak{J})) \subset \overline{\sigma}_k(\mathrm{T}\mathfrak{J})$ est évidente. Il suffit de montrer que

$$\overline{\mathrm{T}(\sigma_k(\mathfrak{J}))} \supset \sigma_k(\mathrm{T}\mathfrak{J}) .$$

Soit $\{\varphi_i\}_{i\in[1,h]}$ une famille de générateurs de $\mathfrak{J}$ et soient $\underline{f} \in \sum_k \mathrm{T}\mathfrak{J}$ et $\hat{\xi} \in (\underline{f}) : \mathrm{T}\mathfrak{J}$. Si $\underline{\Phi} \in \sum_k \mathfrak{J}$ et $\xi \in \mathcal{E}$ sont tels que $\mathrm{T}\underline{\Phi} = \underline{f}$ et $\mathrm{T}\xi = \hat{\xi}$, alors $\xi . \mathfrak{J} \subset (\underline{\Phi}) + \underline{m}^\infty . \mathfrak{J}$, i.e. il existe des $u_{i,j} \in \mathcal{E}$ ($u_{i,j} \in \underline{m}^\infty$ si $i \neq j$ et $\mathrm{T}u_{i,i} = \hat{\xi}$; $i, j \in [1, h]$) tels que $\sum_{i=1}^{h} u_{i,j}\varphi_i \in (\underline{\Phi})$. D'où (règle de Cramer), si $\Delta = \det |u_{i,j}|$, $\Delta . \mathfrak{J} \subset (\underline{\Phi})$ et $\mathrm{T}\Delta = \hat{\xi}^h$; donc $\hat{\xi} \in \overline{\mathrm{T}(\sigma_k(\mathfrak{J}))}$ (c.q.f.d.).

Il résulte facilement des remarques précédentes que, si $(\mathrm{T}\mathfrak{J}, \mathrm{T}\mathfrak{J}')$ est une k-strate de $\mathfrak{F}$, alors $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$ est une k-strate de $\mathcal{E}$. Donc la stratification primaire $\mathrm{st}(\mathrm{T}\mathfrak{J}) = (\mathrm{I}_i)_{i\in[0,s]}$ de $\mathrm{T}\mathfrak{J}$ se relève de façon unique en une stratification $(\mathfrak{J}_i)_{i\in[0,s]}$ de $\mathfrak{J}$ ($\forall i \in [0, s]$, $\mathrm{I}_i = \mathrm{T}\mathfrak{J}_i$) et l'idéal $\mathfrak{J}$ est stratifiable.

2. Dimension d'une algèbre formelle ($\underline{k}$ = R ou C).

Soit I un idéal de $\mathfrak{F}$. Si I est un idéal propre, les conditions suivantes sont équivalentes : $\mathrm{coht}(\mathrm{I}) = 0$; I contient une puissance de l'idéal maximal $\underline{n}$ de $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{F}/\mathrm{I}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\underline{k}$. On note $\dim_{\underline{k}} \mathfrak{F}/\mathrm{I}$ cette dimension.

LEMME I. – *Si* $\dim_{\underline{k}} \mathcal{F}/\mathrm{I} \leqslant h$, *alors* $\mathrm{I} \supset \underline{n}^h$.

En effet, supposons $\mathrm{I} \not\supset \underline{n}^h$; alors la chaîne formée des puissances de l'idéal maximal $\underline{n}/\mathrm{I}$ de $\mathcal{F}/\mathrm{I}$: $\mathcal{F}/\mathrm{I} \supset \underline{n}/\mathrm{I} \supset \ldots \supset \underline{n}^h + \mathrm{I}/\mathrm{I} \supset 0$ est, d'après le lemme de Nakayama, strictement décroissante. Il en résulte que $\dim_{\underline{k}} \mathcal{F}/\mathrm{I} > h$.

Posons $\omega(h) = \dim_{\underline{k}} \mathcal{F}/\underline{n}^{h+1} = \binom{n+h}{n}$.

COROLLAIRE. – *Si* $\dim_{\underline{k}} \mathcal{F}/\mathrm{I} + \underline{n}^{h+1} \leqslant h$ *ou de façon équivalente si* $\dim_{\underline{k}} \mathrm{I} + \underline{n}^{h+1}/\underline{n}^{h+1} \geqslant \omega(h) - h$, *alors* $\dim_{\underline{k}} \mathcal{F}/\mathrm{I} \leqslant h$ *et* $\mathrm{I} \supset \underline{n}^h$.

En effet, d'après le lemme I, $\mathrm{I} + \underline{n}^{h+1} \supset \underline{n}^h$; le lemme de Nakayama entraîne que $\mathrm{I} \supset \underline{n}^h$, d'où $\dim_{\underline{k}} \mathcal{F}/\mathrm{I} \leqslant h$.

LEMME 2. – *Soit* I *un idéal propre de* $\mathcal{F}$. *Alors* $\mathrm{coht}(\mathrm{I}) \leqslant r$, *si et seulement si, il existe* r *formes linéaires* $y_1, y_2, \ldots, y_r$, *telles que l'idéal* I′ *engendré par* I *et les* y_i *dans* $\mathcal{F}$ *soit de cohauteur nulle :* $\mathrm{coht}(\mathrm{I}') = 0$.

En effet, si $\mathrm{coht}(\mathrm{I}) \leqslant r$, il existe des formes linéaires $y_1, y_2, \ldots, y_r$, telles que par l'homomorphisme canonique $\underline{k}[[y_1, \ldots, y_r]] \longrightarrow \mathcal{F}/\mathrm{I}$, ce dernier anneau soit un module de type fini sur le premier. Il en résulte que l'idéal engendré par I et les y_i est de cohauteur zéro. La réciproque résulte du fait suivant, bien connu : si I et I′ sont deux idéaux propres de $\mathcal{F}$ et si I′ est engendré sur $\mathcal{F}$ par r éléments, alors $\mathrm{coht}(\mathrm{I} + \mathrm{I}') \geqslant \mathrm{coht}(\mathrm{I}) - r$.

Munissons $\mathcal{F}^p$ de la topologie de la convergence simple. Soit Ψ une application continue d'un espace topologique Λ dans $\mathcal{F}^p$. Posons $\Psi(\lambda) = (f_1(\lambda), \ldots, f_p(\lambda))$ et notons I_λ l'idéal de $\mathcal{F}$ engendré par les $f_i(\lambda)$.

PROPOSITION 1. – *Les fonctions* $\lambda \in \Lambda \longrightarrow \mathrm{coht}(\mathrm{I}_\lambda)$ *et* $\lambda \in \Lambda \longrightarrow \dim_{\underline{k}} \mathcal{F}/\mathrm{I}_\lambda$ *sont des fonctions semi-continues supérieurement (la dernière à valeurs dans* $[0, \infty]$).

Soit $\lambda_0 \in \Lambda$; posons $\mathrm{coht}(\mathrm{I}_{\lambda_0}) = r$. Nous devons construire un voisinage $\mathcal{V}_{\lambda_0}$ de λ_0 dans Λ, tel que $\forall \lambda \in \mathcal{V}_{\lambda_0}$, on ait $\mathrm{coht}(\mathrm{I}_\lambda) \leqslant r$. A l'aide du lemme 2, on se ramène au cas $r = 0$. Posons

$\dim_{\underline{k}} \mathcal{F}/I_{\lambda_0} = h < \infty$.

Construisons un voisinage $\mathcal{V}_{\lambda_0}$ de λ_0 sur lequel $\dim_{\underline{k}} \mathcal{F}/I_\lambda \leqslant h$. Ceci achèvera la démonstration.

Puisque $\dim_{\underline{k}} \mathcal{F}/I_{\lambda_0} + \underline{n}^{h+1} \leqslant h$, $\dim_{\underline{k}} I_{\lambda_0} + \underline{n}^{h+1}/\underline{n}^{h+1} \geqslant \omega(h) - h$, et visiblement : $\dim_{\underline{k}} I_\lambda + \underline{n}^{h+1}/\underline{n}^{h+1} \geqslant \omega(h) - h$ pour tout $\lambda \in \mathcal{V}_{\lambda_0}$, où $\mathcal{V}_{\lambda_0}$ est un voisinage convenable de λ_0. D'après le corollaire du lemme 1, sur ce voisinage $\mathcal{V}_{\lambda_0}$, $\dim_{\underline{k}} \mathcal{F}/I_\lambda \leqslant h$. (c.q.f.d.).

Remarque. – *Soit* $h(\lambda)$ le plus petit entier positif (éventuellement $+\infty$) tel que $I_\lambda \supset \underline{n}^{h(\lambda)}$. L'application $\lambda \rightsquigarrow h(\lambda)$ n'est pas, en général, semi-continue supérieurement. Par exemple, dans $\underline{k}[[x, y]]$, l'idéal I_λ $(\lambda \in \underline{k})$ engendré par $x^2 + \lambda y, xy, y^2$ est tel que $x^2 \notin I_\lambda$ pour $\lambda \neq 0$. Donc pour $\lambda \neq 0$, $I_\lambda \not\supset \underline{n}^2$; cependant $I_0 = \underline{n}^2$.

Voici une conséquence de la proposition I :

COROLLAIRE. – *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *et soit* $\mathcal{J}$ *un idéal de* $\mathcal{E}(\Omega)$. *L'application* $\underline{a} \in \Omega \longrightarrow \operatorname{coht}(T_{\underline{a}}(\mathcal{J}))$ *et semi-continue supérieurement.*

3. Propriétés généralement vraies.

Dans ce paragraphe $\underline{k} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

DEFINITIONS. – *Une propriété* $\mathcal{P}$ *concernant les éléments de* $\mathcal{F}^p$ *est généralement vraie, s'il existe dans* $\mathcal{F}^p$ *une provariété algébrique de codimension infinie* V, *telle que tout* $\underline{f} \in \mathcal{F}^p - V$ *satisfasse à* $\mathcal{P}$

Supposons $\underline{k} = \mathbf{R}$ *et* $\mathcal{F} = \mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$. *Une propriété* $\mathcal{P}$ *concernant les éléments de* $\mathcal{E}^p$ *est généralement vraie, s'il existe dans* $\mathcal{F}^p$ *une provariété algébrique de codimension infinie* V, *telle que tout* $\underline{\varphi} \in T^{-1}(\mathcal{F}^p - V)$ *satisfasse à* $\mathcal{P}$.

Dans ce paragraphe et le suivant, nous donnons quelques exemples de propriétés généralement vraies.

PROPOSITION 2. – *Soit* Π *un idéal fixé de* $\mathcal{O}_{p,q}$ *et soit* $r \in [1, n]$ *a) les éléments* $\underline{f} \in \mathfrak{F}^p$ *pour lesquels* $\mathrm{ht}(\underline{f}^* \Pi) < r$ *forment une provariété algébrique* $\mathcal{W}$ *de* $\mathfrak{F}^p$ *b) en outre, si* $\mathrm{ht}(\Pi) \geq r$, *cette provariété est de codimension infinie, et donc en général* $\mathrm{ht}(\underline{f}^* \Pi) \geq r$.

1. *Démonstration dans le cas* $r = n$.

Visiblement, il suffit de faire la démonstration pour $\underline{k} = \mathbf{C}$: nous supposerons donc, dans toute la fin de ce paragraphe, que $\underline{k} = \mathbf{C}$. L'hypothèse $\mathrm{ht}(\Pi) \geq n$ signifie alors que la codimension de $\mathrm{V}(\Pi)$ dans $\mathfrak{F}_q^p$ est $\geq n$. Posons $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_p)$ et $f_i = \sum_{\omega \in \mathbf{N}^n} a_\omega^i \underline{x}^\omega$.

a) Supposons l'idéal Π engendré par des polynômes P_α ; alors $\underline{f}^*(\mathrm{P}_a) = \Psi_a$ est une série formelle en $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ à coefficients polynômes en les a_ω^i, et $\underline{f}^* \Pi$ est l'idéal engendré par les Ψ_α dans $\mathfrak{F}$. D'après le corollaire du lemme 1, $\underline{f}^* \Pi$ contient une puissance de l'idéal maximal $\underline{n}$ de $\mathfrak{F}$ (i.e. $\mathrm{coht}\ (\underline{f}^* \Pi) \leq 0$), si et seulement si, pour un certain $h \in \mathbf{N}$, $\dim_{\mathbf{C}} \underline{f}^* \Pi + \underline{n}^{h+1}/\underline{n}^{h+1} \geq \omega(h) - h$. Or ce dernier espace est engendré sur $\mathbf{C}$ par toutes les classes, modulo $\underline{n}^{h+1}$, des éléments $\underline{x}^{\omega'} \Psi_\alpha = \Psi_{\alpha,\omega'}$, avec $0 \leq |\omega'| \leq h$. Si $\Psi_{\alpha,\omega'}^{\omega''}$ $(0 \leq |\omega''| \leq h)$ est la composante de $\Psi_{\alpha,\omega'}$ suivant $\underline{x}^{\omega''}$, tout revient à dire que rang $|\Psi_{\alpha,\omega'}^{\omega''}| \geq \omega(h) - h$ ($|\Psi_{\alpha,\omega'}^{\omega''}|$ est une matrice dont l'indice ligne est ω'' et l'indice colonne (α, ω')). Soit $\mathcal{W}_h$ la sous-variété algébrique de $\mathfrak{F}^p$ obtenue en annulant tous les mineurs d'ordre $\omega(h) - h$ de cette matrice. Visiblement, $\mathcal{W}_h \supset \mathcal{W}_{h+1} \supset \ldots$. Si $\mathcal{W} = \bigcap_{h=1}^{\infty} \mathcal{W}_h$, la provariété $\mathcal{W}$ répond à la $1^{\text{ère}}$ question.

b) Nous devons démontrer qu'à tout entier $h > 0$, on peut associer un entier $h' > h$ tel que $\mathrm{codim}\ \mathcal{W}_{h'} > \mathrm{codim}\ \mathcal{W}_h$. Or il existe un entier $\theta(h) > 0$ tel que $\mathcal{W}_h = \pi_{\theta(h)}^{-1}(\mathcal{V}_{\theta(h)})$, où $\mathcal{V}_{\theta(h)}$ est une sous-variété algébrique de $\mathfrak{F}_{\theta(h)}^p$. Si les $\mathcal{V}_{\theta(h)}^i$ sont les composantes irréductibles de $\mathcal{V}_{\theta(h)}$ et si l'on choisit un point $\underline{\xi}^i$ dans chaque variété $\mathcal{V}_{\theta(h)}^i$, il suffit de montrer que $\pi_{\theta(h)}^{-1}(\underline{\xi}^i) \not\subset \mathcal{W}_{h'}$, pour un h' convenable. Finalement, il suffit de résoudre le problème suivant :

Soit $\underline{\xi} = (\xi_i) \in \mathfrak{F}_h^p$: calculer un entier $h' > h$ tel qu'il existe dans $\pi_{h,h'}^{-1}(\underline{\xi})$ un élément $\underline{\xi}' = (\xi_i') \notin \mathcal{W}$ (on identifie $\mathfrak{F}_{h'}^p$ au sous-espace de $\mathcal{F}^p$ formé des points dont toutes les composantes a^i_ω sont nulles pour $|\omega| > h'$).

Nous allons montrer qu'on peut choisir $h' = h + q + 1$. Posons $\xi'_i(\underline{a}, \underline{x}) = \xi_i + \underbrace{\sum}_{h+1 \leqslant |\omega| \leqslant h+q+1} a^i_\omega \underline{x}^\omega$. Les $\xi'_i(\underline{a}, \underline{x})$ s'interprètent comme des polynômes sur l'espace vectoriel complexe $\Lambda \times X$ ou X est rapporté aux coordonnées x_i, $i \in [1, n]$ et Λ aux coordonnées $a^i_\omega (i \in [1, p]$ et $|\omega| \in [h+1, h+q+1])$. On fait les identifications habituelles : $\Lambda = \Lambda \times \{0\}$ et $X = \{0\} \times X$.

Nous utilisons un lemme qui nous servira ultérieurement.

Désignons par $\underline{\mu}$ l'ensemble des multi-indices $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ tels que $|\mu| = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \leqslant q$; $\underline{\omega}$ l'ensemble des multi-indices

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$$

tels que $|\omega| = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \in [h+1, h+q+1]$; si $j \in [1, n]$, par $\underline{\omega}_j$ le sous-ensemble de $\underline{\omega}$ formé de tous les multi-indices de la forme $(\mu_1, \ldots, \mu_j + h + 1, \mu_{j+1}, \ldots, \mu_n)$ où $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \underline{\mu}$. Si $\mu \in \underline{\mu}$ et si $i \in [1, p]$, posons $\partial^\mu_i \xi'(\underline{a}, \underline{x}) = \dfrac{\partial^{|\mu|} \xi'_i(\underline{a}, \underline{x})}{\partial x^\mu}$.

LEMME 3. – *Soit* $U_j = \{(\underline{a}, \underline{x}) \in \Lambda \times X ; x_j \neq 0\}$: *les* U_j, $j \in [1, n]$, *forment un recouvrement de* $\Lambda \times X - \Lambda$. *En tout point* $(\alpha, \chi) \in U_j$, *le jacobien, défini au signe près :*

$$\frac{D(\partial^\mu_i \xi'(\underline{a}, \underline{x}))}{D(a^i_\omega)} \quad (\omega \in \underline{\omega}_j \ ; \ \mu \in \underline{\mu} \ ; \ i \in [1, p])$$

est différent de zéro.

Supposons ce lemme démontré et achevons la démonstration de la proposition 2. Si $\underline{\xi}' = (\xi'_1, \ldots, \xi'_p)$, les $\underline{\xi}'^*(P_a)$ étant interprétés comme des polynômes sur l'espace $\Lambda \times X$, l'ensemble de leurs zéros communs est une variété algébrique $\theta \subset \Lambda \times X$. La codimension de cette variété est $\geqslant n$: en effet, au voisinage d'un point $(a, \chi) \notin \Lambda$, la codimension est $\geqslant n$, puisqu'en ce point, le système formé par les $\partial_i^\mu \xi'(\underline{a}, \underline{x}) - \partial_i^\mu \xi'(\alpha, \chi)$ peut-être, par le lemme 3, complété de façon à former un système de coordonnées locales ; et codim $\Lambda = n$. Soient θ_i les composantes irréductibles de θ ; alors :

$$\operatorname{codim} \bigcup_{i \neq j} (\theta_i \cap \theta_j) > n.$$

Posons $\underline{\xi}'_{\underline{a}}(\underline{x}) = \{\xi'_i(\underline{a}, \underline{x})\}_{i \in [1,p]}$: $\underline{\xi}'_{\underline{a}}$ est un prolongement de $\underline{\xi}$; montrons qu'on peut choisir $\underline{a}$ de telle sorte que $\underline{\xi}'_{\underline{a}} \notin \mathfrak{W}$. Si $\theta \cap \Lambda \subsetneq \Lambda$, il suffit de prendre $\underline{a} \in \Lambda - \theta \cap \Lambda$; si $\theta \cap \Lambda = \Lambda$, alors

$$\Lambda' = \Lambda \cap (\bigcup_{i \neq j} (\theta_i \cap \theta_j))$$

est une sous-variété propre de Λ. Si $\underline{a} \in \Lambda - \Lambda'$, au voisinage de ce point, la variété θ est irréductible de codimension $\geqslant n$ et contient le germe induit en $\underline{a}$ par la variété Λ (qui lui est irréductible). On en déduit que $\theta_{\underline{a}} = \Lambda_{\underline{a}}$ et la section de $\theta_{\underline{a}}$ par l'hyperplan des $(\underline{a}', \underline{x})$ tels que $\underline{a}' = \underline{a}$ se réduit au point $\underline{a}$. Mais cela signifie que $\operatorname{coht}(\underline{\xi}'^*_{\underline{a}}\, \Pi) \leqslant 0$, donc $\underline{\xi}'_{\underline{a}} \notin \mathfrak{W}$ (c.q.f.d.).

2. *Démonstration dans le cas général.*

En effet, posons $r' = n - r$ et soit $\mathfrak{W}$ l'ensemble des éléments $\underline{f} \in \mathfrak{F}^p$ pour lesquels $\operatorname{ht}(\underline{f}^* \Pi) < r$. Soit β la projection canonique de $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}^p \times \sum_{r'} \underline{n}$ sur $\mathfrak{F}^p$ et plongeons $\mathcal{O}_{p,q}$ dans $\mathcal{O}_{p+r',q}$. Soit Π' l'idéal engendré dans $\mathcal{O}_{p+r',q}$ par Π et les coordonnées $y_0^{p+1}, \ldots, y_0^{p+r'}$. Soit $\mathfrak{W}'$ le sous-ensemble de $\mathfrak{G}$ formé des jets $\underline{g}$ pour lesquels $\operatorname{ht}(\underline{g}^* \Pi') < n$. D'après le lemme 2 : $\beta(\mathfrak{G} - \mathfrak{W}') = \mathfrak{F}^p - \mathfrak{W}$. Mais d'après 1, $\mathfrak{W}'$ est une provariété algébrique dans $\mathfrak{F}^{p+r'}$ et donc $\mathfrak{W}$ est une provariété algébrique dans $\mathfrak{F}^p$. Si $\operatorname{ht}(\Pi) \geqslant r$, $\operatorname{ht}(\Pi') \geqslant n$ et donc d'après 1, $\mathfrak{W}'$ est une provariété de codimension infinie. Il en résulte que $\mathfrak{W}$ l'est aussi. Ceci achève la démonstration de la proposition 2.

Démonstration du lemme 3.

Soit $(\alpha, \chi) \in U_j$. Nous devons démontrer que les

$$\partial_i^\mu \xi'(\underline{a}, \underline{x}) - \partial_i^\mu \xi'(\alpha, \chi)$$

pour $i \in [1\,,p]$ et $\mu \in \underline{\mu}$; $x_l - \chi_l$ pour $l \in [1\,,n]$; $a^i_\omega - \alpha^i_\omega$ pour $i \in [1\,,p]$ et $\omega \in \underline{\omega} - \underline{\omega}_j$ constituent un système de coordonnées locales dans $\Lambda \times X$, au voisinage du point $(\alpha\,,\chi)$. Désignons par $\mathfrak{I}$ l'idéal engendré par ces polynômes dans $\mathbf{P}_{(\alpha,\chi)}$, où $\mathbf{P}_{(\alpha,\chi)}$ est le localisé par rapport au point $(\alpha\,,\chi)$ de l'anneau $\mathbf{P}$ des polynômes sur $\Lambda \times X$, à valeurs dans $\mathbf{C}$. Il nous faut démontrer que pour tout $\omega \in \underline{\omega}_j$ et $i \in [1\,,p]$: $a^i_\omega - \alpha^i_\omega \in \mathfrak{I}$: ceci entraînera que $\mathfrak{I}$ est l'idéal maximal de $\mathbf{P}_{(\alpha,\chi)}$, ce que nous voulons démontrer.

Or :

$$\partial^\mu_i \xi'(\underline{a}\,,\underline{x}) - \partial^\mu_i \xi'(\alpha\,,\chi) = (\partial^\mu_i \xi'(\underline{a}\,,\underline{x}) - \partial^\mu_i \xi'(\alpha\,,\underline{x})) + \\ + (\partial^\mu_i \xi'(\alpha\,,\underline{x}) - \partial^\mu_i \xi'(\alpha\,,\chi))$$

pour tout $\mu \in \underline{\mu}$. Or le premier membre de cette égalité, et la dernière parenthèse du second membre, appartiennent à $\mathfrak{I}$. Donc,

$$\forall \mu \in \underline{\mu},\ \partial^\mu_i \xi'(\underline{a}\,,\underline{x}) - \partial^\mu_i \xi'(\alpha\,,\underline{x}) \in \mathfrak{I}.$$

Mais

$$\xi'_i(\underline{a}\,,\underline{x}) - \xi'_i(\alpha\,,\underline{x}) = \sum_{\omega \in \underline{\omega}_j} (a^i_\omega - \alpha^i_\omega)\,\underline{x}^\omega + \sum_{\omega \in \underline{\omega} - \underline{\omega}_j} (a^i_\omega - \alpha^i_\omega)\,\underline{x}^\omega$$

Puisque les $a^i_\omega - \alpha^i_\omega$, pour $\omega \in \underline{\omega} - \underline{\omega}_j$, appartiennent à $\mathfrak{I}$, il en résulte que :

$$\forall i \in [1\,,p],\ \ \forall \mu \in \underline{\mu} : \theta_{\mu,i} = \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x^\mu} \sum_{\omega \in \underline{\omega}_j} (a^i_\omega - \alpha^i_\omega)\,\underline{x}^\omega = \\ \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial x^\mu} \left\{ x_j^{h+1} \sum_{\omega \in \underline{\omega}_j} (a^i_\omega - \alpha^i_\omega)\,\underline{x}^{\omega - \Psi_j} \right\} \in \mathfrak{I},$$

où Ψ_j est le multi-indice dont tous les termes sont nuls, sauf le $j^{\text{ème}}$ qui est égal à $h+1$. Mais puisque x_j est inversible dans $\mathbf{P}_{(\alpha,\chi)}$, l'idéal engendré par les $\theta_{\mu,i}$ dans $\mathbf{P}_{(\alpha,\chi)}$ est le même que celui engendré par les $\dfrac{\partial^{|\mu|}}{\partial x^\mu} \sum_{\omega \in \underline{\omega}_j} (a^i_\omega - \alpha^i_\omega)\,\underline{x}^{\omega - \Psi_j}$ pour $\mu \in \underline{\mu}$ et $i \in [1\,,p]$. Or il est immédiat que ce dernier idéal est engendré par les $a^i_\omega - \alpha^i_\omega$. Donc, $\forall \omega \in \underline{\omega}_j$ et $\forall i \in [1\,,p]$, $a^i_\omega - \alpha^i_\omega \in \mathfrak{I}$. Ceci démontre le lemme.

4. L'inégalité ht $[\overline{J_k^*}(\Pi) : J_k(\Pi) \, . \, \mathcal{O}_{p,q+1}] \geqslant n$ ($\underline{k} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).

Soit A un anneau commutatif et unitaire. Si $\mathfrak{J}$ est un idéal de A, on désigne par $\overline{\mathfrak{J}}$ sa racine. Si $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}'$ sont deux idéaux de A, énonçons quelques propriétés élémentaires de l'idéal $[\overline{\mathfrak{J}} : \mathfrak{J}'] = \{x \in A \, ; x\mathfrak{J}' \subset \overline{\mathfrak{J}}\}$:

a) Supposons A noethérien. Si $\mathfrak{J}' \subset \overline{\mathfrak{J}}$, alors $[\overline{\mathfrak{J}} : \mathfrak{J}'] = A$; sinon, soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ les idéaux premiers associés à $\mathfrak{J}$ et ne contenant pas $\mathfrak{J}'$, alors $[\overline{\mathfrak{J}} : \mathfrak{J}'] = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$.

b) Posons $\mathbf{P} = \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ et $\mathbf{P}^* = \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$: $\mathbf{P}$ est un sous-anneau de $\mathbf{P}^*$. Si $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}'$ sont deux idéaux de $\mathbf{P}$, on a la formule :

$$[\overline{\mathfrak{J}} : \mathfrak{J}'] \, . \, \mathbf{P}^* = [\overline{\mathfrak{J} \, . \, \mathbf{P}^*} : \mathfrak{J}' \, . \, \mathbf{P}^*]$$

c) Supposons $A = \mathbf{P}^*$. Si $\underline{x} \in \mathbf{C}^n$, désignons par $\mathrm{ht}_{\underline{x}}(\mathfrak{J})$ la codimension au point $\underline{x}$ de la variété $V(\mathfrak{J})$ (si $\underline{x} \notin V(\mathfrak{J})$, on pose $\mathrm{ht}_{\underline{x}}(\mathfrak{J}) = n + 1$). Alors la variété $V([\overline{\mathfrak{J}} : \mathfrak{J}'])$ est la réunion des composantes irréductibles de $V(\mathfrak{J})$, non contenues dans $V(\mathfrak{J}')$. Ainsi, pour vérifier que $\mathrm{ht}([\overline{\mathfrak{J}} : \mathfrak{J}']) \geqslant s$, il suffit de vérifier que $\forall \underline{x} \in \mathbf{C}^n - V(\mathfrak{J}')$, on a $\mathrm{ht}_{\underline{x}}(\mathfrak{J}) \geqslant s$ $(s \in [0, n+1])$.

d) Soient B un anneau commutatif et unitaire et γ un homomorphisme unitaire de A dans B. Alors

$$\gamma[\overline{\mathfrak{J}} : \mathfrak{J}'] \, . \, B \subset [\overline{\gamma(\mathfrak{J}) \, . \, B} : \gamma(\mathfrak{J}') \, . \, B]$$

Soit Π un idéal de $\mathcal{O}_{p,q}$; posons $\overline{J_k^*}(\Pi) = \overline{J_k^*(\Pi)}$. Le but de ce paragraphe est de démontrer l'inégalité suivante, qui permet de comparer les idéaux $J_k(\Pi)$ et $J_k^*(\Pi)$:

PROPOSITION 3. – *On a l'inégalité :*

$$\mathrm{ht}\,[\overline{J_k^*}(\Pi) : J_k(\Pi) \, . \, \mathcal{O}_{p,q+1}] \geqslant n \, .$$

D'après b), le cas réel se déduit, après complexification, du cas complexe. Nous supposerons $\underline{k} = \mathbf{C}$ dans toute la suite de ce paragraphe.

Nous démontrerons cette proposition pour l'entier $q-1$ au lieu de q (donc $q \geqslant 1$). Si Π est un idéal de $\mathcal{O}_{p,q-1}$, nous devons vérifier d'après c) que, $\forall\, \underline{y} \in V(J_k^*(\Pi)) - V(J_k(\Pi)\,.\,\mathcal{O}_{p,q})$, $\mathrm{ht}_{\underline{y}}(J_k^*(\Pi)) \geqslant n$. Soient $\Phi_1, \ldots, \Phi_k \in \Pi$ tels que les Φ_i s'annulent en $\underline{y}$ et

$$\underline{y} \notin V(J_k(\Phi)\,.\,\mathcal{O}_{p,q})\,.$$

Puisque $J_k^*(\Pi) \supset J_k^*(\Phi)$, tout revient à démontrer le lemme suivant :

LEMME 4. – *Soient* $\Phi_1, \ldots, \Phi_k \in \mathcal{O}_{p,q-1}$ $(q \geqslant 1)$, *nulles en un point* $\underline{y}$ *de* $\mathcal{F}_q^p$. *Posons* $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ *et soit* (Φ) *l'idéal engendré par les* Φ_i *dans* $\mathcal{O}_{p,q-1}$. *Si* Φ *est régulier au point* $\underline{y}$

$$(\text{i.e. } \underline{y} \notin V(J_k(\Phi)\,.\,\mathcal{O}_{p,q})),$$

alors

$$\mathrm{ht}_{\underline{y}}(J_k^*(\Phi)) \geqslant n\,.$$

Si $k > n$, le lemme est trivial. Nous supposerons donc $k \leqslant n$, et, pour simplifier, $\underline{y} = \underline{0}$ (la démonstration qui suit se transpose moyennant une modification évidente, au cas général).

Rappelons que $J_k^*(\Phi)$ est un idéal de $\mathcal{O}_{p,q}$. Désignons par $\mathcal{L}_{p,q}$ le localisé de $\mathcal{O}_{p,q}$ par rapport à l'origine $\underline{0}$; par $\mathcal{L}_k^*(\Phi)$ le localisé de $J_k^*(\Phi)$ par rapport à $\underline{0}$; par $\hat{\mathcal{L}}_k^*(\Phi)$ l'idéal engendré par $\mathcal{L}_k^*(\Phi)$ dans le complété $\hat{\mathcal{L}}_{p,q}$ de $\mathcal{L}_{p,q}$ pour la topologie $\underline{m}$-adique ($\underline{m}$ étant l'idéal maximal de $\mathcal{L}_{p,q}$). Nous nous garderons de donner du lemme 4 une démonstration directe.

Soit $\underline{f} \in \mathcal{F}^p$ tel que $\pi_q(\underline{f}) = \underline{0}$ ($\underline{f}$ est q-plat à l'origine). L'homomorphisme $\underline{f}^*$ de $\mathcal{O}_{p,q}$ dans $\mathcal{F}$ s'étend en un homomorphisme local, noté $\hat{\underline{f}}^*$ de $\hat{\mathcal{L}}_{p,q}$ dans $\mathcal{F}$. D'après le paragraphe 1,

$$J_k(\underline{f}^*\Phi) = \underline{f}^*\, J_k^*(\Phi) = \hat{\underline{f}}^*(\mathcal{L}_k^*(\Phi))\,.\,\mathcal{F}$$

et,

$$\mathrm{ht}_{\underline{0}}(J_k^*(\Phi)) = \mathrm{ht}(\mathcal{L}_k^*(\Phi)) = \mathrm{ht}(\hat{\mathcal{L}}_k^*(\Phi)).$$

D'après la proposition 1, CHO :

$$\mathrm{ht}(J_k(\underline{f}^*\Phi)) \leqslant \mathrm{ht}(\hat{\mathcal{L}}_k^*(\Phi)) = \mathrm{ht}_{\underline{0}}(J_k^*(\Phi)).$$

Donc le lemme 4 sera démontré, si nous exhibons un $\underline{f}$ q-plat à l'origine et tel que $\mathrm{ht}(J_k(\underline{f}^* \Phi)) \geqslant n$. Il nous faudra démontrer que l'idéal engendré dans $\mathfrak{F}$ par $\underline{f}^* \Phi_1, \ldots, \underline{f}^* \Phi_k$ et tous les jacobiens $\dfrac{D(\underline{f}^* \Phi_1, \ldots, \underline{f}^* \Phi_k)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$ $(\underline{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in [1, n]^k)$ est un idéal de définition de $\mathfrak{F}$. Avec les notations du paragraphe 3, nous choisirons $\underline{f}$ de la forme : $\underline{f} = \underline{\xi}'_{\underline{a}}(\underline{x})$, en choisissant $h = q$ et $\underline{\xi} = \underline{0}$.

Donc $\xi'_i(\underline{a}, \underline{x}) = \sum_{q+1 \leqslant |\omega| \leqslant 2q+1} a^i_\omega \underline{x}^\omega$: les $\xi'_i(\underline{a}, \underline{x})$ sont des polynômes sur l'espace vectoriel complexe

$\Lambda \times X$, et $(\xi'_1(\underline{a}, \underline{x}), \ldots, \xi'_p(\underline{a}, \underline{x})) = \underline{\xi}'(\underline{a}, \underline{x})$

définit un homomorphisme $\underline{\xi}'^*$ de $\mathcal{O}_{p,q}$ dans l'anneau **P** des polynômes sur $\Lambda \times X$, par la substitution : $y^i_\mu \longrightarrow \dfrac{\partial^{|\mu|} \xi'_i(\underline{a}, \underline{x})}{\partial x^\mu}$ pour $\mu \in \underline{\mu}$ et $i \in [1, p]$.

Par hypothèse, il existe un jacobien $\dfrac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_k)}{D(y^{i_1}_{\mu^1}, \ldots, y^{i_k}_{\mu^k})} \neq 0$ à l'origine $\underline{0}$ de $\mathfrak{F}^p_q$. Donc il existe un voisinage U de l'origine de $\Lambda \times X$, tel que, $\forall (\underline{a}, \underline{x}) \in U$, on ait $\left[\underline{\xi}'^* \left(\dfrac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_k)}{D(y^{i_1}_{\mu^1}, \ldots, y^{i_k}_{\mu^k})}\right)\right](\underline{a}, \underline{x}) \neq 0$. Soit $(\alpha, \chi) \in U \cap (\Lambda \times X - \Lambda)$: alors par exemple $(\alpha, \chi) \in U \cap U_j$. D'après le lemme 3, le jacobien $\dfrac{D(\partial^\mu_i \underline{\xi}'(\underline{a}, \underline{x}))}{D(a^i_\omega)}$ $(\omega \in \underline{\omega}_j ; \mu \in \underline{\mu} ; i \in [1, p])$ est différent de zéro au point (α, χ). On en déduit (calcul du jacobien d'une application composée) l'existence d'indices $j_1, \ldots, j_k \in [1, p]$ et de multi-indices $\omega^1, \ldots, \omega^k \in \underline{\omega}_j$ tels que :

$$\frac{D(\underline{\xi}'^* \Phi_1, \ldots, \underline{\xi}'^* \Phi_k)}{D(a^{j_1}_{\omega^1}, \ldots, a^{j_k}_{\omega^k})}(\alpha, \chi) \neq 0.$$

On peut supposer que $U = U_\Lambda \times U_X$ où U_Λ est un voisinage de l'origine dans Λ et U_X un voisinage de l'origine dans X.

Soit $\mathcal{V}$ la sous-variété de $U_\Lambda \times (U_X - \{0\})$ définie par les équations : $\underline{\xi}'^* \Phi_1 (\underline{a}, \underline{x}) = \ldots = \underline{\xi}'^* \Phi_k (\underline{a}, \underline{x}) = 0$: $\mathcal{V}$ est une sous-variété complexe régulière et de codimension k. Les variétés $\mathcal{V}$ et U_Λ étant munies de leurs structures naturelles de variétés différentiables, appliquons le théorème de Sard (Malgrange, [6]) à la projection canonique $\mathcal{V} \longrightarrow U_\Lambda$. Soit α une valeur non critique de cette projection. Posons $\underline{f} = \underline{\xi}'_\alpha (\underline{x})$: l'idéal de $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ engendré par $\underline{f}^* \Phi_1, \ldots, \underline{f}^* \Phi_k$ et les jacobiens $\dfrac{D(\underline{f}^* \Phi_1, \ldots, \underline{f}^* \Phi_k)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}$ possède donc un zéro isolé à l'origine de $\mathbf{C}^n$. Il en résulte que $J_k(\underline{f}^* \Phi)$ est un idéal de définition de $\mathcal{F}$ (c.q.f.d.).

5. Le théorème de quasi-transversalité.

Soient Π un idéal de $\mathcal{O}_{p,q}$ et $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$. D'après la remarque d) du début du paragraphe 4,

$$\underline{\varphi}^* [\bar{J}_k^* (\Pi) : J_k (\Pi) . \mathcal{O}_{p,q+1}] \subset [\bar{J}_k (\underline{\varphi}^* \Pi) : \underline{\varphi}^* J_k (\Pi)]$$

On déduit de cette inclusion et des propositions 2 et 3 :

THEOREME. – *Soit Π un idéal fixé de $\mathcal{O}_{p,q}$. Si $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$, en général, $[\bar{J}_k (\underline{\varphi}^* \Pi) : \underline{\varphi}^* J_k (\Pi)] = \underline{m}$ ou $\mathcal{E}$, et donc, en général il existe un entier $h > 0$ (dépendant de $\underline{\varphi}$) tel que :* $J_k (\underline{\varphi}^* \Pi) \supset \underline{m}^h . [\underline{\varphi}^* J_k (\Pi)]^h$.

Soit (Π, Π') une k-strate de $\mathcal{O}_{p,q}$. Posons

$$\mathfrak{I}_{(\Pi, \Pi')} (\underline{\varphi}) = [\bar{J}_k (\underline{\varphi}^* \Pi) : \underline{\varphi}^* \Pi']$$

DEFINITIONS. – *Si $\mathfrak{I}_{(\Pi,\Pi')} (\underline{\varphi}) = \mathcal{E}$, nous dirons que $\underline{\varphi}$ est transverse sur* (Π, Π').

Si $\mathfrak{I}_{(\Pi,\Pi')} (\underline{\varphi}) \supset \underline{m}$, nous dirons que $\underline{\varphi}$ est quasi-transverse sur (Π, Π').

– Si $\underline{\varphi}$ est transverse sur (Π, Π'), $(\underline{\varphi}^* \Pi, \underline{\varphi}^* \Pi')$ est une k-strate de $\mathcal{E}$. En effet :

$$\underline{\varphi}^* \Pi \subset \underline{\varphi}^* \overline{\Pi}' \subset \overline{\underline{\varphi}^* \Pi'} \ ;$$

et
$$\underline{\varphi}^* \Pi' \subset \underline{\varphi}^* \ \overline{\sigma}_k (\Pi) \subset \overline{\sigma}_k (\underline{\varphi}^* \Pi) ,$$

donc
$$\underline{\varphi}^* \Pi' \subset \overline{J}_k (\underline{\varphi}^* \Pi) \cap \overline{\sigma}_k (\underline{\varphi}^* \Pi) .$$

– Si $\underline{\varphi}$ est quasi-transverse sur (Π , Π') et si $\underline{\varphi}^* \Pi \neq \mathcal{E}$, le couple $(\underline{\varphi}^* \Pi , \underline{m} \,.\, \underline{\varphi}^* \Pi')$ est une k-strate de $\mathcal{E}$. En effet, $\underline{\varphi}^* \Pi \subset \underline{m}$ et $\underline{\varphi}^* \Pi \subset \overline{\underline{\varphi}^* \Pi'}$, donc $\underline{\varphi}^* \Pi \subset \overline{\underline{m} \,.\, \underline{\varphi}^* \Pi'}$; en outre, $\underline{\varphi}^* \Pi' \subset \overline{\sigma}_k (\underline{\varphi}^* \Pi)$ et $\underline{m} \,.\, \underline{\varphi}^* \Pi' \subset \overline{J}_k (\underline{\varphi}^* \Pi)$ (d'après l'hypothèse de quasi-transversalité), donc : $\underline{m} \,.\, \underline{\varphi}^* \Pi' \subset \overline{J}_k (\underline{\varphi}^* \Pi) \cap \overline{\sigma}_k (\underline{\varphi}^* \Pi)$. En particulier :

– Si $\underline{\varphi}$ est quasi-transverse sur (Π , Π') et si $\underline{\varphi}^* \Pi' \neq \mathcal{E}$, le couple $(\underline{\varphi}^* \Pi \ , \ \underline{\varphi}^* \Pi')$ est une k-strate de $\mathcal{E}$.

Soit $\mathrm{st}(\Pi) = (\Pi_i)_{i \in [0,s]}$ la stratification primaire de Π. Si $\underline{\varphi}$ est quasi-transverse sur chaque strate de $\mathrm{st}(\Pi)$ (nous dirons alors que $\underline{\varphi}$ est quasi-transverse sur Π), soit t le plus grand entier i tel que $\underline{\varphi}^* \Pi_i \neq \mathcal{E}$. Alors, d'après les remarques précédentes,

$$(\underline{\varphi}^* \Pi_0 \, , \underline{\varphi}^* \Pi_1) \, , \ldots , (\underline{\varphi}^* \Pi_{t-1}, \underline{\varphi}^* \Pi_t), (\underline{\varphi}^* \Pi_t \, , \underline{m}), (\underline{m} \, , \mathcal{E})$$

sont des strates de $\mathcal{E}$ et $\underline{\varphi}^* \Pi_0 = \underline{\varphi}^* \overline{\Pi} \subset \overline{\underline{\varphi}^* \Pi}$; donc $\underline{\varphi}^* \Pi$ est stratifiable. On déduit du théorème précédent :

COROLLAIRE. – *Soit* Π *un idéal fixé de* $\mathcal{D}_{p,q}$. *Si* $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$, *en général,* $\underline{\varphi}$ *est quasi-transverse sur* Π *et donc* $\underline{\varphi}^* \Pi$ *est un idéal stratifiable.*

CHAPITRE II

STABILITE LOCALE DES IDEAUX DE FONCTIONS DIFFERENTIABLES

1. Généralisation du théorème des fonctions implicites.

Rapportons l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ à un système de coordonnées $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{R}^p$ au système $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_p)$. Soit $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_q)$ une application de classe C^∞ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$, telle que $f(\underline{0}, \underline{0}) = \underline{0}$. Soit $M(\underline{x})$ l'application linéaire, paramétrée par $\underline{x}$, de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$, définie par $M(\underline{x}) = \underline{f}'_y(\underline{x}, \underline{0})$. L'application $\underline{x} \rightsquigarrow M(\underline{x})$ définit un homomorphisme de $\mathcal{E}$-modules $M : \mathcal{E}^p \rightsquigarrow \mathcal{E}^q$.

Soit $\delta \in \mathcal{E}$; une condition nécessaire et suffisante pour que $\delta \in \operatorname{ann} \operatorname{coker} M$ est qu'il existe un homomorphisme de $\mathcal{E}$-modules $N : \mathcal{E}^q \rightsquigarrow \mathcal{E}^p$ tel que : $\delta I = MN$ (où I désigne l'application identique de $\mathcal{E}^q$ sur lui-même). Posons : $\underline{y}^i = (y_1^i, \ldots, y_p^i)$, $i \in [1, r]$, où r est un entier positif quelconque.

PROPOSITION 1. – *Soient* $\delta_1, \ldots, \delta_r \in \operatorname{ann} \operatorname{coker} M$. *Alors il existe des fonctions de classe* C^∞ :

$$\underline{Y}^1(\underline{x}, \underline{y}^1, \ldots, \underline{y}^r), \ldots, \underline{Y}^r(\underline{x}, \underline{y}^1, \ldots, \underline{y}^r),$$

à valeurs dans $\mathbf{R}^p$, *nulles pour* $\underline{y}^1 = \ldots = \underline{y}^r = 0$, *et telles que dans un voisinage convenable de l'origine, on ait l'identité :*

$$\underline{f}(\underline{x}, \sum_{i=1}^{r} \delta_i \underline{Y}^i) = \underline{f}(\underline{x}, \underline{0}) + M . \sum_{i=1}^{r} \delta_i \underline{y}^i .$$

Posons[2] $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_p)$; $\underline{z}^i = (z_1^i, \ldots, z_p^i)$, pour $i \in [1, r]$.

Développons par la formule de Taylor, la fonction $\underline{f}(\underline{x}, \underline{z})$ sous la forme :

(2) La démonstration s'inspire de Bourbaki (algèbre commutative chapitre 3 § 4). Une partie des résultats de ce chapitre a fait l'objet de deux notes aux comptes rendus (Tougeron [12]).

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{z}) = \underline{f}(\underline{x}, \underline{0}) + \mathrm{M} \cdot \underline{z} + \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant p} \mathrm{G}_{ij}(\underline{x}, \underline{z}) z_i \cdot z_j$$

les G_{ij} étant des fonctions de classe C^∞ à valeurs dans $\mathbf{R}^q$. Donc, par substitution :

$$\underline{f}(\underline{x}, \sum_{i=1}^{r} \delta_i \underline{z}^i) = \underline{f}(\underline{x}, \underline{0}) + \mathrm{M} \cdot \sum_{i=1}^{r} \delta_i \underline{z}^i + \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant r} \gamma_{ij}(\underline{x}, \underline{z}^1, \dots, \underline{z}^r) \delta_i \delta_j,$$

où les γ_{ij} sont des fonctions de classe C^∞, à valeurs dans $\mathbf{R}^q$, dont le développement de Taylor en tout point où $\underline{z}^1 = \dots = \underline{z}^r = \underline{0}$, ne contient pas de termes linéaires en les z_l^k. Il existe par hypothèse, pour $i = 1, \dots, r$, des matrices $\mathrm{N}_i(\underline{x})$ telles qu'on ait : $\delta_i \mathrm{I} = \mathrm{MN}_i$ (I étant la matrice carrée unité de rang q). Posons $\mathrm{A}^i = \underline{z}^i + \sum_{j=1}^{r} \mathrm{N}_j \gamma_{ij}$. On vérifie que : $\underline{f}\left(\underline{x}, \sum_{i=1}^{r} \delta_i \underline{z}^i\right) = \underline{f}(\underline{x}, \underline{0}) + \mathrm{M} \cdot \sum_{i=1}^{r} \delta_i \mathrm{A}^i$. Grâce au théorème classique des fonctions implicites, nous pouvons résoudre par rapport aux $\underline{z}^1, \dots, \underline{z}^r$, le système de pr équations scalaires : $\mathrm{A}^i(\underline{x}, \underline{z}^1, \dots, \underline{z}^r) = \underline{y}^i$, pour $i \in [1, r]$ et finalement calculer les $\underline{\mathrm{Y}}^i(\underline{x}, \underline{y}^1, \dots, \underline{y}^r)$ annoncés dans la proposition.

COROLLAIRE. – *Soient* $\mathfrak{I}'$ *et* $\mathfrak{I}$ *deux idéaux de* $\mathcal{E}$, *tels que* $\mathfrak{I}' \subset \underline{m}$ *et* $\mathfrak{I} \subset$ *ann coker* M. *Supposons que pour tout*

$$j \in [1, q], f_j(\underline{x}, \underline{0}) \in \mathfrak{I}' \cdot \mathfrak{I}^2.$$

Alors il existe $\underline{y}(\underline{x}) = (y_1(\underline{x}), \dots, y_p(\underline{x})) \in \mathcal{E}^p$ *tel que*

$$y_1(\underline{x}), \dots, y_p(\underline{x}) \in \mathfrak{I}' \cdot \mathfrak{I} \quad \textit{et} \quad \underline{f}(\underline{x}, \underline{y}(\underline{x})) = \underline{0}.$$

En effet, il existe $\delta_1, \dots, \delta_r \in \mathfrak{I}$, et pour tout $i \in [1, r]$ des $\underline{\beta}^i = (\beta_1^i, \dots, \beta_p^i)$ avec pour tout i et j, $\beta_j^i \in \mathfrak{I}'$, tels que

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{0}) = \mathrm{M} \cdot \sum_{i=1}^{r} \delta_i \underline{\beta}^i.$$

Effectuons dans l'identité de la proposition 1, la substitution $\underline{y}^i = -\underline{\beta}^i$. On obtient $\underline{f}(\underline{x}, \underline{y}(\underline{x})) = \underline{0}$, où :

$$\underline{y}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{r} \delta_i \underline{\mathrm{Y}}^i(\underline{x}, -\underline{\beta}^1, \dots, -\underline{\beta}^r) = \sum_{i=1}^{r} \delta_i (\underline{\mathrm{Y}}^i(\underline{x}, -\underline{\beta}^1, \dots, -\underline{\beta}^r) -$$

$$- \underline{\mathrm{Y}}^i(\underline{x}, \underline{0}, \dots, \underline{0})).$$

Il est clair que $\underline{y}(\underline{x})$ a toutes ses composantes contenues dans l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par les $\delta_k\, \beta_j^i$, où $j \in [1\,,p]$ et $i\,,k \in [1\,,r]$.

Remarque. – Si $q > p$, ann coker M = 0 et le corollaire précédent est sans intérêt.

Supposons $q \leqslant p$. Pour tout $l \in [1\,,q]$, notons $\mathfrak{I}_l(\mathrm{M})$ l'idéal de $\mathcal{E}$ engendré par les mineurs de rang l de M. On a les inclusions d'idéaux :

$$\overline{\mathfrak{I}_q(\mathrm{M})} \supset \text{ann coker M} \supset \mathfrak{I}_q(\mathrm{M})$$

La seconde inclusion résulte de la règle de Cramer pour la résolution des systèmes linéaires. Quant à la première, si $\delta \in$ ann coker M, $\delta\mathrm{I} = \mathrm{MN}$ (voir notations plus haut) et donc : $\det(\delta\mathrm{I}) = \delta^q \in \mathfrak{I}_q(\mathrm{M})$. En particulier, $\mathfrak{I}_q(\mathrm{M})$ et ann coker M ont même germe de zéros à l'origine de $\mathbf{R}^n$. Dans les applications, nous utiliserons le corollaire précédent avec $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_q(\mathrm{M})$.

Exemple. – Avec les notations précédentes, supposons $n = p$; $q = 1$: considérons donc une fonction numérique $f(\underline{x}\,,\underline{y})$ indéfiniment dérivable au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Si $f(\underline{x}\,,\underline{0})$ est 2-plate à l'origine et si $\det \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial x_j}(\underline{0}\,,\underline{0})\right| \neq 0$, l'équation implicite $f(\underline{x}\,,\underline{y}) = 0$ admet une solution $\underline{y}(\underline{x})$ indéfiniment dérivable au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$ et telle que $\underline{y}(\underline{0}) = \underline{0}$. En effet, soit $\underline{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{E}$; par hypothèse, $f(\underline{x}\,,\underline{0}) \in \underline{m}^3$ et l'idéal $\mathfrak{I}$ engendré sur $\mathcal{E}$ par les $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}(\underline{x}\,,\underline{0})$ est égal à $\underline{m}$. Donc $f(\underline{x}\,,\underline{0}) \in \underline{m}\,.\,\mathfrak{I}^2$, et il suffit d'appliquer le corollaire précédent.

Par exemple, l'équation implicite : $x^3 + xy + \theta(x\,,y)\,y^2 = 0$ (où $\theta(x\,,y)$ est indéfiniment dérivable au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^2$) admet une solution $y(x)$ indéfiniment dérivable au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}$ et telle que $y(0) = 0$. Par contre, l'équation :

$$x^2 + xy + y^2 = 0$$

n'admet pas de solution au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}$.

Désignons par Dif(n) le groupe des difféomorphismes locaux de classe C^∞ au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$.

PROPOSITION 2. – *Soient* $\underline{\varphi}, \underline{\varphi}' \in \mathcal{E}^p$ *et* $\mathcal{I}' \subset \underline{m}^2$ *un idéal de* $\mathcal{E}$, *tels que :* $(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}') \subset \mathcal{I}' . [\mathcal{H}(\underline{\varphi})]^2$. *Alors il existe* $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$, *de la forme* $\tau(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{y}(\underline{x})$, *avec* $y_1(\underline{x}), \ldots, y_n(\underline{x}) \in \mathcal{I}' . \mathcal{H}(\underline{\varphi})$, *tel que :* $\underline{\varphi} \circ \tau = \underline{\varphi}'$. *En outre, la conclusion est encore vraie, si l'on remplace l'hypothèse* $\mathcal{I}' \subset \underline{m}^2$ *par :* $\mathcal{I}' \subset \underline{m}$ *et* $\mathcal{H}(\underline{\varphi}) \subset \underline{m}$.

Si $p > n$, la proposition est triviale, puisque $\mathcal{H}(\underline{\varphi}) = 0$. *Supposons* $p \leqslant n$. Appliquons le corollaire précédent à

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{\varphi}(\underline{x} + \underline{y}) - \underline{\varphi}'(\underline{x}).$$

Par hypothèse, pour tout $j \in [1, p]$:

$$f_j(\underline{x}, \underline{0}) = \varphi_j(\underline{x}) - \varphi_j'(\underline{x}) \in \mathcal{I}' . [\mathcal{H}(\underline{\varphi})]^2 .$$

Si $\mathrm{M}(\underline{x}) = \underline{f}'_{\underline{y}}(\underline{x}, \underline{0})$, il est évident que $\mathcal{H}(\underline{\varphi}) = \mathcal{I}_p(\mathrm{M}) \subset \mathrm{ann\ coker}\ \mathrm{M}$. Donc il existe $\underline{y}(\underline{x}) \in \mathcal{E}^n$, avec pour tout $i \in [1, n], y_i(\underline{x}) \in \mathcal{I}' . \mathcal{H}(\underline{\varphi})$, tel que : $\underline{\varphi}(\underline{x} + \underline{y}(\underline{x})) = \underline{\varphi}'(\underline{x})$. Il suffit de poser $\tau(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{y}(\underline{x})$.

Exemple. – Soit $\varphi \in \mathcal{E}$ tel que le hessien $\det \left| \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial x_j}(0) \right|$ soit $\neq 0$ et φ soit 1-plat à l'origine (i.e. le polynôme de Taylor de degré 2 de φ à l'origine est une forme quadratique non dégénérée φ_2). Si $\mathcal{H}(\varphi)$ est l'idéal engendré par les $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ dans $\mathcal{E}$, alors

$$\mathcal{H}(\varphi) = \underline{m} \quad \text{et} \quad \varphi - \varphi_2 \in \underline{m} . [\mathcal{H}(\varphi)]^2 .$$

D'après la proposition 2, il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ tel que $\varphi \circ \tau = \varphi_2$. On retrouve le théorème de Morse.

2. Stabilité locale des idéaux de fonctions différentiables.

Soit Π_0 l'idéal engendré dans $\mathcal{O}_{p,q}$ par les y^i_ω, $i \in [1, p]$, $|\omega| = 0$. Si $q \geqslant 1$, soit Π_1 l'idéal engendré dans $\mathcal{O}_{p,q}$ par les mineurs d'ordre p extraits de la matrice $|y^i_\omega|$, $i \in [1, p]$, $|\omega| = 1$. Ainsi : $\forall \underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$, $\underline{\varphi}^* \Pi_0 = (\underline{\varphi})$; $\underline{\varphi}^* \Pi_1 = \mathcal{H}(\underline{\varphi})$ et $\underline{\varphi}^* (\Pi_1 + \Pi_0) = \mathrm{J}_p(\underline{\varphi})$.

PROPOSITION 3. – *Soient* q, $s \in \mathbf{N}^+$ *;* Π *un idéal de* $\mathcal{O}_{p,q}$ *;* $\mathcal{I} \subset \underline{m}^{q+1}$ *un idéal de* $\mathcal{E}$ *; et* $\underline{\varphi}, \underline{\varphi}' \in \mathcal{E}^p$ *tels que :*

$$(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}') \subset \mathfrak{I} \,.\, [\underline{\varphi}^* (\Pi + \Pi_1)]^{q+s}.$$

Alors il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$, *de la forme* $\tau(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{y}(\underline{x})$ *avec :*

$$\forall i \in [1\,, n]\,, y_i\,(\underline{x}) \in \mathfrak{I} \,.\, \mathcal{H}(\underline{\varphi}),$$

tel que : $(\underline{\varphi} \circ \tau - \underline{\varphi}') \subset \mathfrak{I} \,.\, [\underline{\varphi}'^* \Pi]^{q+s-1}$. *En particulier, si* $s \geqslant 2$ *:* $(\underline{\varphi} \circ \tau)^* \Pi = \underline{\varphi}'^* \Pi$.

Il résulte de l'hypothèse que :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathcal{O}_{p,q} \quad \underline{\varphi}^* (\mathrm{P}) - \underline{\varphi}'^* (\mathrm{P}) \in \underline{m} \,.\, [\underline{\varphi}^* (\Pi + \Pi_1)]^s$$

D'où visiblement :

$$\underline{\varphi}^* \Pi_1 + \underline{\varphi}'^* \Pi \subset \underline{\varphi}^* (\Pi + \Pi_1) \subset \underline{\varphi}^* \Pi_1 + \underline{\varphi}'^* \Pi + \underline{m} \,.\, [\underline{\varphi}^* (\Pi + \Pi_1)]^s.$$

D'après le lemme de Nakayama : $\underline{\varphi}^* \Pi_1 + \underline{\varphi}'^* \Pi = \underline{\varphi}^* (\Pi + \Pi_1)$. Donc on peut écrire : $\underline{\varphi} - \underline{\varphi}' = \underline{\Psi}' - \underline{\Psi}$, où $\underline{\Psi}'\,, \underline{\Psi} \in \mathcal{E}^p$ et

$$(\underline{\Psi}') \subset \mathfrak{I} \,.\, [\underline{\varphi}'^* \Pi]^{q+s-1}\,;\, (\underline{\Psi}) \subset \mathfrak{I} \,.\, [\underline{\varphi}^* \Pi_1]^2 = \mathfrak{I} \,.\, [\mathcal{H}(\underline{\varphi})]^2.$$

D'après la proposition 2, il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$, de la forme voulue, tel que $\underline{\varphi} \circ \tau = \underline{\varphi} + \underline{\Psi} = \underline{\varphi}' + \underline{\Psi}'$. Ainsi :

$$(\underline{\varphi} \circ \tau - \underline{\varphi}') = (\underline{\Psi}') \subset \mathfrak{I} \,.\, [\underline{\varphi}'^* \Pi]^{q+s-1}.$$

Supposons $s \geqslant 2$.

Quel que soit $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_{p,q}$: $(\underline{\varphi} \circ \tau)^* (\mathrm{P}) - \underline{\varphi}'^* (\mathrm{P}) \in \underline{m} \,.\, [\underline{\varphi}'^* \Pi]^{s-1}$. Donc $(\underline{\varphi} \circ \tau)^* \Pi \subset \underline{\varphi}'^* \Pi \subset (\underline{\varphi} \circ \tau)^* \Pi + \underline{m} \,.\, [\underline{\varphi}'^* \Pi]^{s-1}$. D'après le lemme de Nakayama, $(\underline{\varphi} \circ \tau)^* \Pi = \underline{\varphi}'^* \Pi$ (c.q.f.d.).

COROLLAIRE. – *Soient* $s \in \mathrm{N}^+$ *;* $\mathfrak{I}$ *un idéal de* $\mathcal{E}$ *contenu dans* $\underline{m}^2$ *; et* $\underline{\varphi}\,, \underline{\varphi}' \in \mathcal{E}^p$ *tels que* $(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}') \subset \mathfrak{I} \,.\, [\mathrm{J}_p\,(\underline{\varphi})]^{s+1}$. *Alors il existe* $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$, *de la forme* $\tau(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{y}(\underline{x})$ *avec,* $\forall i \in [1\,, n]$, $y_i\,(\underline{x}) \in \mathfrak{I} \,.\, \mathcal{H}(\underline{\varphi})$, *tel que :* $(\underline{\varphi} \circ \tau - \underline{\varphi}') \subset \mathfrak{I} \,.\, (\underline{\varphi}')^s$. *En particulier,* $(\underline{\varphi} \circ \tau) = (\underline{\varphi}')$.

PROPOSITION 4. – *Soit* Π *un idéal de* $\mathcal{O}_{p,q}$. *Soit* Π'' *un sous-idéal de* $\sigma_k\,(\Pi)$ *engendré par s éléments* $\xi_1\,, \ldots, \xi_s \in \bigcup_{\Phi \in \underset{k}{\Sigma} \Pi} ((\Phi) : \Pi)$.

Posons $l_s = s\,(q + 1 + 2k\,(q + 2))$. *Alors, si* $\underline{\varphi}\,, \underline{\varphi}' \in \mathcal{E}^p$ *sont tels que :*

$(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}') \subset \underline{m}^{q+2} . [J_k(\underline{\varphi}^* \Pi)]^{q+2} . [\underline{\varphi}^* \Pi'']^{l_s}$, *il existe* $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ *tel que :* $\tau^*(\underline{\varphi}^* \Pi) = \underline{\varphi}'^* \Pi$.

Nous démontrons la proposition par récurrence sur s. Soit Π_1'' l'idéal engendré par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s-1}$, et supposons la proposition démontrée pour cet idéal. Nous supposerons que $\xi_s = \xi \in ((\Phi) : \Pi)$ où $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k) \in \sum_k \Pi$.

Soient $\underline{\varphi}, \underline{\varphi}' \in \mathcal{E}^p$, tels que

$$(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}') \subset \underline{m}^{q+2} . [J_k(\underline{\varphi}^* \Pi)]^{q+2} . [\underline{\varphi}^* \Pi'']^{l_s}.$$

Visiblement, $\forall P \in \mathcal{O}_{p,q+1}$:

$$\underline{\varphi}^*(P) - \underline{\varphi}'^*(P) \in \underline{m} . [J_k(\underline{\varphi}^* \Pi)] . [\underline{\varphi}^* \Pi'']^{l_s - q - 1} \tag{0}$$

Il en résulte que :

$$J_k(\underline{\varphi}'^* \Pi) \subset J_k(\underline{\varphi}^* \Pi) \subset J_k(\underline{\varphi}'^* \Pi) + \underline{m} . J_k(\underline{\varphi}^* \Pi).$$

D'après le lemme de Nakayama :

$$J_k(\underline{\varphi}'^* \Pi) = J_k(\underline{\varphi}^* \Pi) \tag{1}$$

De même :

$$\underline{\varphi}^* \Pi'' = \underline{\varphi}'^* \Pi'' = (\underline{\varphi}^*(\xi)) + \underline{\varphi}^* \Pi_1'' = (\underline{\varphi}^*(\xi)) + \underline{\varphi}'^* \Pi_1'' \tag{2}$$

Puisque $\xi \in ((\Phi) : \Pi)$, $\underline{\varphi}^*(\xi) \in ((\underline{\varphi}^* \Phi) : \underline{\varphi}^* \Pi)$, et à la suite d'un calcul élémentaire :

$$[\underline{\varphi}^*(\xi)]^{2k} \in [J_k(\underline{\varphi}^* \Phi) : J_k(\underline{\varphi}^* \Pi)] \tag{3}$$

On déduit de (1), (2) et (3) :

$$\begin{aligned}
&\underline{m}^{q+2} . [J_k(\underline{\varphi}^* \Pi)]^{q+2} . [\underline{\varphi}^* \Pi'']^{l_s} \\
&\subset \underline{m}^{q+2} . [J_k(\underline{\varphi}'^* \Pi)]^{q+2} . [\underline{\varphi}'^* \Pi_1'']^{l_s - 1} + \\
&\quad \underline{m}^{q+2} . [J_k(\underline{\varphi}^* \Pi)]^{q+2} . [\underline{\varphi}^*(\xi)]^{(q+2)(2k+1)} \\
&\subset \underline{m}^{q+2} . [J_k(\underline{\varphi}'^* \Pi)]^{q+2} . [\underline{\varphi}'^* \Pi_1'']^{l_s - 1} + \\
&\quad \underline{m}^{q+2} . [J_k(\underline{\varphi}^* \Phi)]^{q+2} . [\underline{\varphi}^*(\xi)]^{q+2}
\end{aligned}$$

Nous pouvons décomposer $\underline{\varphi} - \underline{\varphi}'$ comme suit : $\underline{\varphi} - \underline{\varphi}' = \underline{\Psi}' - \underline{\dot{\Psi}}$, avec :

$$(\underline{\Psi}') \subset \underline{m}^{q+2} \,.\, [J_k\,(\underline{\varphi}'^*\,\Pi)]^{q+2} \,.\, [\underline{\varphi}'^*\,\Pi_1'']^{l_s-1}$$

$$(\underline{\Psi}) \subset \underline{m}^{q+2} \,.\, [J_k\,(\underline{\varphi}^*\,\Phi)]^{q+2} \,.\, [\underline{\varphi}^*\,(\xi)]^{q+2} \tag{4}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\underline{\varphi}'$ et $\underline{\varphi}' + \underline{\Psi}'$, on voit qu'il existe $\tau' \in \mathrm{Dif}(n)$ tel que : $\tau'^*\,(\underline{\varphi}'^*\,\Pi) = (\underline{\varphi}' + \underline{\Psi}')^*\,\Pi$.

Puisque $\underline{\varphi}' + \underline{\Psi}' = \underline{\varphi} + \underline{\Psi}$, il nous suffit de construire $\tau'' \in \mathrm{Dif}\,(n)$ tel que : $\tau''^*\,[\underline{\varphi}^*\,\Pi] = (\underline{\varphi} + \underline{\Psi})^*\,\Pi$: en effet, on choisira $\tau = \tau'' \circ \tau'^{-1}$. Posons : $\underline{\varphi} + \underline{\Psi} = \underline{\varphi}''$. Il résulte de (4) :

$$\forall\, P \in \mathcal{O}_{p,q}\,,\, \underline{\varphi}^*\,(P) - \underline{\varphi}''^*\,(P) \in \underline{m}^2 \,.\, [J_k\,(\underline{\varphi}^*\,\Phi)]^2 \,.\, [\underline{\varphi}^*\,(\xi)]^2 \tag{5}$$

En particulier : $(\underline{\varphi}^*\,\Phi - \underline{\varphi}''^*\,\Phi) \subset \underline{m}^2 \,.\, [J_k\,(\underline{\varphi}^*\,\Phi)]^2 \,.\, [\underline{\varphi}^*\,(\xi)]^2$. Appliquons le corollaire de la proposition 3 à $\underline{\varphi}^*\,\Phi$ et $\underline{\varphi}''^*\,\Phi$: $\mathcal{I}$ sera l'idéal $\underline{m}^2 \,.\, [\underline{\varphi}^*\,(\xi)]^2$. Il existe $\tau'' \in \mathrm{Dif}\,(n)$, de la forme : $\tau''\,(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{y}\,(\underline{x})$ avec, $\forall\, i \in [1\,,n]\,, y_i\,(\underline{x}) \in \underline{m}^2 \,.\, [\underline{\varphi}^*\,(\xi)]^2$, tel que, si l'on pose : $\chi^* = \tau''^* \circ \underline{\varphi}^*$ (χ^* est donc un homomorphisme d'anneaux de $\mathcal{O}_{p,q}$ dans $\mathcal{E}$) :

$$(\underline{\chi}^*\,\Phi - \underline{\varphi}''^*\,\Phi) \subset \underline{m}^2 \,.\, [\underline{\varphi}^*\,(\xi)]^2 \,.\, [\underline{\varphi}''^*\,\Phi] \tag{6}$$

D'après la construction de τ'' .

$$\forall\, P \in \mathcal{O}_{p,q} \quad \underline{\chi}^*\,(P) - \underline{\varphi}^*\,(P) \in [\underline{\varphi}^*\,(\xi)]^2 \,.\, m^2 \tag{7}$$

D'après (5) et (7), en faisant $P = \xi$, on vérifie que $\underline{\chi}^*\,(\xi)\,,\,\underline{\varphi}^*\,(\xi)$ et $\underline{\varphi}''^*\,(\xi)$ engendrent le même idéal dans $\mathcal{E}$ et que

$$\underline{\chi}^*\,(\xi) = \underline{\varphi}''^*\,(\xi)\,(1 + \gamma \,.\, \underline{\varphi}''^*\,(\xi)) \quad \text{où} \quad \gamma \in \underline{m} \tag{8}$$

Enfin, il résulte de (6) et du lemme de Nakayama, que

$$(\underline{\chi}^*\,\Phi) = (\underline{\varphi}''^*\,\Phi) \tag{9}$$

Il nous suffit de démontrer que : $\underline{\chi}^*\,\Pi = \underline{\varphi}''^*\,\Pi$.

Soit $P \in \Pi$: il existe $u_1\,, \ldots, u_k \in \mathcal{O}_{p,q}$ tels que

$$\xi P = \sum_{i=1}^{k} u_i\,\Phi_i$$

D'où

$$\underline{\chi}^*(\xi)\,.\,\underline{\chi}^*(\mathrm{P}) - \underline{\varphi}''^*(\xi)\,.\,\underline{\varphi}''^*(\mathrm{P}) = \sum_{i=1}^{k} [\underline{\chi}^*(u_i) - \underline{\varphi}''^*(u_i)]\ \underline{\chi}^*(\Phi_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} [\underline{\chi}^*(\Phi_i) - \underline{\varphi}''^*(\Phi_i)]\,\underline{\varphi}''^*(u_i) \qquad (10)$$

Soient Γ le germe des zéros de $\underline{\varphi}''^*(\xi)$ et Γ' le complémentaire de Γ. En divisant les deux membres de (10) par $\underline{\varphi}''^*(\xi)$, on vérifie en utilisant (5), (6), (7), (8), (9) qu'en restriction à Γ', on a l'égalité :

$$\underline{\varphi}''^*(\mathrm{P}) - (1 + \gamma\,.\,\underline{\varphi}''^*(\xi))\,.\,\underline{\chi}^*(\mathrm{P}) = \sum_{i=1}^{k} u'_i\,.\,\underline{\varphi}''^*(\xi)\,.\,\underline{\chi}^*(\Phi_i)$$

avec $u'_1, \ldots, u'_k \in \mathcal{E}$. Mais en restriction à Γ, les deux membres de cette dernière équation s'annulent, et sont donc identiques. Ceci entraîne : $\underline{\chi}^*\Pi = \underline{\varphi}''^*\Pi$ (c.q.f.d.).

Invariance des idéaux de $\mathcal{O}_{p,q}$.

Soit E_q l'ensemble des **R**-endomorphismes de l'anneau local $\mathcal{F}_q = \mathcal{F}/\underline{n}^{q+1}$. L'espace E_q s'identifie à $\sum_n \underline{n}_q$, où $\underline{n}_q$ est l'idéal maximal de $\mathcal{F}_q$; si $f \in \mathcal{F}_q$ et $\underline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathrm{E}_q : \underline{\xi}(f) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. L'élément $\underline{\xi}$ opère linéairement sur le **R**-espace vectoriel $\mathcal{F}_q^p$ par la formule, si $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_p) \in \mathcal{F}_q^p : \underline{\xi}(\underline{f}) = (\underline{\xi}(f_1), \ldots, \underline{\xi}(f_p))$.

DEFINITION. – Soit Π un idéal de $\mathcal{O}_{p,q}$. Nous dirons que Π est *invariant* si $\forall\, \underline{\xi} \in \mathrm{E}_q$, $\underline{\xi}^*(\Pi) \subset \Pi$. En particulier, si Π est invariant et si $\underline{\xi}$ est un automorphisme de $\mathcal{F}_q$, $\underline{\xi}^*(\Pi) = \Pi$.

Si Π est un idéal invariant de $\mathcal{O}_{p,q}$, on vérifie facilement que, $\forall\, \tau \in \mathrm{Dif}(n)$ et $\forall\, \underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$: $\tau^*[\underline{\varphi}^*\Pi] = (\underline{\varphi} \circ \tau)^*\Pi$.

Une k-strate (Π, Π') de $\mathcal{O}_{p,q}$ sera dite *invariante* si Π et Π' sont des idéaux invariants de $\mathcal{O}_{p,q}$. Si $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$ est quasi-transverse sur une strate invariante (Π, Π'), il en est de même de $\underline{\varphi} \circ \tau$, où $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$. En effet :

$$\underline{m} \subset \tau^*(\overline{\mathrm{J}}_k(\underline{\varphi}^*\Pi) : \underline{\varphi}^*\Pi') = \overline{\mathrm{J}}_k(\tau^*[\underline{\varphi}^*\Pi]) : \tau^*[\underline{\varphi}^*\Pi'] =$$

$$= \overline{\mathrm{J}}_k((\underline{\varphi} \circ \tau)^*\Pi) : (\underline{\varphi} \circ \tau)^*\Pi'.$$

THEOREME 1. – *Soit* (Π , Π') *une k-strate invariante de* $\mathcal{O}_{p,q}$ $(q \geqslant 1)$ *et soit* $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$, *quasi-transverse sur* (Π , Π'). *Il existe un entier* $l > 0$ *tel que* : $\forall \underline{\varphi}' \in \mathcal{E}^p$ *avec* $(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}') \subset m^l . [\underline{\varphi}^* (\Pi' + \Pi_1)]^l$, *il existe* $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ *vérifiant* : $\tau^* [\underline{\varphi}^* \Pi] = \underline{\varphi}'^* \Pi$.

Supposons $\sigma_k(\Pi)$ engendré par s éléments de $\bigcup\limits_{\Phi \in \Sigma_k \Pi} ((\Phi) : \Pi)$.

Puisque $\underline{\varphi}$ est quasi-transverse sur la strate (Π , Π') :

$$J_k(\underline{\varphi}^* \Pi) \supset \underline{m}^{\alpha_1} . [\underline{\varphi}^* \Pi']^{\alpha_1}$$

$$\underline{\varphi}^* \sigma_k(\Pi) \supset (\underline{\varphi}^* \Pi')^{\alpha_2} , \quad \text{où} \quad \alpha_1 , \alpha_2 \in \mathbf{N}^+ .$$

Si $\tau_1 \in \mathrm{Dif}(n)$ et si l'on pose $\underline{\Psi} = \underline{\varphi} \circ \tau_1$, en utilisant l'invariance de la strate (Π , Π') :

$$J_k(\underline{\Psi}^* \Pi) \supset \underline{m}^{\alpha_1} . [\underline{\Psi}^* \Pi']^{\alpha_1}$$

$$\underline{\Psi}^* \sigma_k(\Pi) \supset (\underline{\Psi}^* \Pi')^{\alpha_2}$$

Soit toujours l_s l'entier fourni par la proposition 4 ; nous choisirons $l = \alpha_1 (q + 2) + \alpha_2 l_s + 1$.

D'après la proposition 3, il existe $\tau_1 \in \mathrm{Dif}(n)$, tel que, si

$$\underline{\Psi} = \underline{\varphi} \circ \tau_1 \ : \ (\underline{\Psi} - \underline{\varphi}') \subset \underline{m}^l . [\underline{\varphi}'^* \Pi']^{l-1}$$

et $$[\underline{\Psi}^* \Pi'] = [\varphi'^* \Pi'] = \tau_1^* [\underline{\varphi}^* \Pi']$$

(à cause de l'invariance de Π'). D'où :

$$(\underline{\Psi} - \underline{\varphi}') \subset \underline{m}^l . [\underline{\Psi}^* \Pi']^{l-1} \subset \underline{m}^{l-\alpha_1 (q+2)} . [J_k(\underline{\Psi}^* \Pi)]^{q+2} . [\underline{\Psi}^* \sigma_k(\Pi)]^{l_s}$$

D'après la proposition 4, il existe $\tau_2 \in \mathrm{Dif}(n)$, tel que :

$$\tau_2^* (\underline{\Psi}^* \Pi) = \underline{\varphi}'^* \Pi$$

En raison de l'invariance de Π : $\tau_1^* (\underline{\varphi}^* \Pi) = \underline{\Psi}^* \Pi$.

En posant $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$:

$$\tau^* (\underline{\varphi}^* \Pi) = \tau_2^* \ \tau_1^* (\underline{\varphi}^* \Pi) = \tau_2^* (\underline{\Psi}^* \Pi) = \underline{\varphi}'^* \Pi \ \text{(c.q.f.d.)}$$

Dans les deux paragraphes suivants, nous explicitons quelques conséquences des propositions précédentes.

3. Algébricité du germe d'application $\underline{\varphi}$ ou de l'idéal $\underline{\varphi}^* \Pi$.

COROLLAIRE 1. – *Soit* $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$. *Si* $d(\mathcal{H}(\underline{\varphi})) = r \geqslant 0$, *il existe un système de coordonnées locales* $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ *au voisinage de l'origine de* $\mathbf{R}^n$, *tel que* $\underline{\varphi}$ *soit polynomial en* $y_{r+1}, \ldots, y_n$ *à coefficients germes indéfiniment dérivables des variables* $y_1, \ldots, y_r$.

Soit $\mathfrak{I} = \underline{m}^2 . [\mathcal{H}(\underline{\varphi})]^2$. Alors $d(\mathfrak{I}) = d(\mathcal{H}(\underline{\varphi})) = r$. D'après la proposition 2, chapitre 0, il existe un système de coordonnées $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ et $\underline{\varphi}' \in \mathcal{E}^p$, tels que $\underline{\varphi}'$ soit polynomial en $z_{r+1}, \ldots, z_n$ à coefficients germes indéfiniment dérivables des variables $z_1, \ldots, z_r$ et $(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}') \subset \mathfrak{I}$. D'après la proposition 2, il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ tel que $\underline{\varphi} \circ \tau = \underline{\varphi}'$. Il suffit alors de choisir le système de coordonnées locales : $\underline{y} = \tau^{-1}(\underline{z})$.

COROLLAIRE 2. – *Soit* (Π, Π') *une k-strate invariante de* $\mathcal{O}_{p,q}$ *et soit* $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$ *quasi-transverse sur* (Π, Π'). Posons

$$d[\underline{\varphi}^* (\Pi' + \Pi_1)] = r \geqslant 0 .$$

Il existe un système de coordonnées locales : $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ au *voisinage de l'origine de* $\mathbf{R}^n$, *tel que* $\underline{\varphi}^* \Pi$ *soit engendré par des polynômes en* $y_{r+1}, \ldots, y_n$ *à coefficients germes indéfiniment dérivables des variables* $y_1, \ldots, y_r$.

La démonstration, analogue à la précédente, s'appuie sur la proposition 2, chapitre 0 et le théorème 1.

Voici quelques conséquences des corollaires 1 et 2 :

COROLLAIRE 1'. – *Soit* $\varphi \in \underline{m}$. *On désignera par* $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ *un système de coordonnées locales au voisinage de l'origine de* $\mathbf{R}^n$.

a) *Si* $\varphi \notin \underline{m}^\infty$, i.e. *si* φ *n'est pas infiniment plate à l'origine, il existe* $\underline{y}$ *tel que* φ *soit polynomial en* y_n, *à coefficients germes indéfiniment dérivables de* $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

b) *Si* $\varphi \notin \underline{m}^\infty$, *si* $\mathrm{T}\varphi$ *est sans facteurs multiples et si* $n \geqslant 2$, *il existe* $\underline{y}$ *tel que* φ *soit polynomial en* y_n, y_{n-1}, *à coefficients germes indéfiniment dérivables de* $y_1, \ldots, y_{n-2}$. *En particulier, si* $n = 2$, φ *est polynomial en* $\underline{y}$.

c) *Si l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par les dérivées partielles* $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $i \in [1, n]$, *contient une puissance de $\underline{m}$, alors il existe $\underline{y}$ tel que φ soit polynomial en $\underline{y}$.*

L'idéal $\mathcal{H}(\varphi)$ est engendré sur $\mathcal{E}$ par les dérivées partielles $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$: les assertions a) et c) sont donc des conséquences immédiates du corollaire 1. Pour b), nous devons montrer que $d(\mathcal{H}(\varphi)) \leqslant n - 2$. Or, si $f = \mathrm{T}\varphi$, puisque $f \in \underline{n}$, il existe un entier positif p tel que $f^p \in \mathcal{H}(f)$ (appendice, Corollaire, proposition 1). Donc,

$$d(\mathcal{H}(\varphi)) = \operatorname{coht}(\mathcal{H}(f)) = \operatorname{coht}(\mathrm{J}_1(f)).$$

Mais après éventuel changement de coordonnées, f est équivalente, par le théorème de préparation formel, à un polynôme P distingué en x_n, à coefficients séries formelles en $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Puisque le discriminant de P est différent de zéro, et ne dépend pas de x_n, la hauteur de l'idéal engendré par f et $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ est au moins 2. Donc à fortiori : $d(\mathcal{H}(\varphi)) = \operatorname{coht}(\mathrm{J}_1(f)) \leqslant n - 2$.

COROLLAIRE 1″. – *Soit $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$ et supposons que*

$$d(\underline{\varphi}) = n - p \,(p \leqslant n),$$

i.e. les $f_i = \mathrm{T}\varphi_i$ engendrent dans $\mathcal{F}$ une intersection complète. Alors il existe un système de coordonnées locales $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$ tel que $\underline{\varphi}$ soit polynomial en y_n, à coefficients germes indéfiniment dérivables des autres variables.

En effet, il existe au moins un jacobien $\dfrac{\mathrm{D}(f_1, \ldots, f_p)}{\mathrm{D}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})} \neq 0$. Donc $d(\mathcal{H}(\varphi)) \leqslant n - 1$, et l'on applique le corollaire 1.

Les corollaires 1′ et 1″ généralisent des résultats de N. Levinson [4]. Faisons $\Pi = \Pi_0 = \Pi'$ dans le corollaire 2 ; on obtient le :

COROLLAIRE 2′. – *Soit $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$ tel que $d(\mathrm{J}_p(\underline{\varphi})) = r \geqslant 0$. Il existe un système de coordonnées locales $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$, tel que $(\underline{\varphi})$ soit engendré par des polynômes* *en* $y_{r+1}, \ldots, y_n$, *à coefficient germes indéfiniment dérivables des variables* $y_1, \ldots, y_r$.

Enfin, faisons $r = 0$ dans le corollaire précédent :

COROLLAIRE 2''. – *Soit* $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$. *En général, l'idéal* $\mathrm{J}_p(\underline{\varphi})$ *contient une puissance de* $\underline{m}$ *et donc en général, il existe un système de coordonnées locales* $\underline{y}$ *au voisinage de l'origine de* $\mathbf{R}^n$, *tel que* $(\underline{\varphi})$ *soit engendré par des polynômes en* $\underline{y}$. En effet, $\mathrm{J}_p(\underline{\varphi}) = \underline{\varphi}^*(\underline{\Pi_1} + \Pi_0)$ et $\mathrm{ht}(\Pi_1 + \Pi_0) = n + 1$. D'après la proposition 2, chapitre 1, *en général* l'idéal $\mathrm{J}_p(\underline{\varphi})$ contient une puissance de $\underline{m}$, i.e. $d(\mathrm{J}_p(\underline{\varphi})) \leqslant 0$.

4. Germes d'applications Π-déterminants.

Soient Π un idéal de $\mathcal{O}_{p,q}$ et $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$.

DEFINITION. – *Nous dirons que* $\underline{\varphi}$ *est* Π*-déterminant si la condition suivante est satisfaite : il existe un entier* $h > 0$ *tel que :* $\forall\, \underline{\varphi}' \in \mathcal{E}^p$ *avec* $(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}') \subset \underline{m}^h$, *il existe* $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ *tel que :*

$$\tau^*[\underline{\varphi}^*\Pi] = \underline{\varphi}'^*\Pi .$$

Nous dirons que Π est un *idéal rigide* si *en général* un élément $\underline{\varphi}$ de $\mathcal{E}^p$ est Π-déterminant.

Le corollaire suivant fournit de nombreux exemples d'idéaux rigides :

COROLLAIRE 3. – *Soit* (Π, Π') *une k-strate invariante de* $\mathcal{O}_{p,q}(q \geqslant 1)$ *telle que* $ht(\Pi_1 + \Pi') \geqslant n$. *Alors* Π *est un idéal rigide. Soit* $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$: *pour que* $\underline{\varphi}$ *soit* Π*-déterminant, il suffit que* $\underline{\varphi}$ *soit quasi-transverse sur* (Π, Π') *et sur* $\Pi_1 + \Pi'$.

Soit $\underline{\varphi}$ quasi-transverse sur (Π, Π') et sur $\Pi_1 + \Pi'$. Puisque $ht(\Pi_1 + \Pi') \geqslant n$ il existe $h' \in \mathbf{N}$ tel que $\underline{\varphi}^*(\Pi' + \Pi_1) \supset \underline{m}^{h'}$. Si $\underline{\varphi}' \in \mathcal{E}^p$ est tel que $(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}') \subset \underline{m}^{l(h'+1)}$, alors

$$(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}') \subset \underline{m}^l \,.\, [\underline{\varphi}^*(\Pi' + \Pi_1)]^l$$

et d'après le théorème 1, il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ tel que $\tau^*[\underline{\varphi}^*\Pi] = [\underline{\varphi}'^*\Pi]$. Donc $\underline{\varphi}$ est Π-déterminant et d'après le théorème de quasi-transversalité, l'idéal Π est rigide.

Le cas particulier $q = 0$.

L'anneau $\mathcal{O}_{p,0}$ s'identifie à l'anneau $\mathbf{R}[y_1, \ldots, y_p]$ des polynômes sur $\mathbf{R}^p$ et si $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$, $\underline{\varphi}^*$ à l'application

$$P(y_1, \ldots, y_p) \in \mathcal{O}_{p,0} \longrightarrow P(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in \mathcal{E}.$$

Si Π est un idéal de $\mathcal{O}_{p,0}$, on note comme d'habitude

$$\widetilde{\Pi} = \overline{J}_k(\Pi) \cap \overline{\sigma}_k(\Pi), \quad \text{où} \quad k = ht(\Pi).$$

COROLLAIRE 3'. – *Soit* Π *un idéal de* $\mathcal{O}_{p,0}$ *tel que* $\Pi = \overline{\Pi}$ *et* $ht(\widetilde{\Pi}) \geqslant \inf(n, p-1)$: *alors* Π *est rigide. En particulier, si* $ht(\Pi) \geqslant \inf(n-1, p-2)$ *l'idéal* Π *est rigide. Donc, si* $n \leqslant 2$ *ou si* $p \leqslant 3$, *tout idéal* Π *de* $\mathcal{O}_{p,0}$ *tel que* $\Pi = \overline{\Pi}$ *est rigide.*

En effet, puisque tout idéal de $\mathcal{O}_{p,0}$ est invariant, $(\Pi, \widetilde{\Pi})$ est k-strate invariante de $\mathcal{O}_{p,0}$.

Si $p > n$, $\Pi_1 = 0$, mais $ht(\widetilde{\Pi}) \geqslant n$, donc

$$ht(\Pi_1 + \widetilde{\Pi} \cdot \mathcal{O}_{p,1}) \geqslant n.$$

Si $p \leqslant n$, $ht(\Pi_1) = n - p + 1$, et $ht(\widetilde{\Pi}) \geqslant p - 1$, donc

$$ht(\Pi_1 + \widetilde{\Pi} \cdot \mathcal{O}_{p,1}) \geqslant n.$$

Dans les deux cas, d'après le corollaire 3, Π est rigide. La signification géométrique de ce corollaire est évidente. Par exemple, si V est une sous-variété algébrique irréductible de $\mathbf{R}^p$, dont le lieu singulier dans $\mathbf{C}^p$ de sa complexifiée est une courbe ou une variété de codimension $\geqslant n$, V est rigide. Cela signifie la chose suivante : si $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$ est "quasi-transverse" sur V, il existe $h \in \mathbf{N}$ tel que : $\forall \underline{\varphi}' \in \mathcal{E}^p$ avec $(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}') \subset \underline{m}^h$, les germes d'ensembles $\underline{\varphi}^{-1}(V)$ et $\underline{\varphi}'^{-1}(V)$ sont ou vides, ou difféomorphes (i.e. il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ tel que $\tau[\underline{\varphi}^{-1}(V)] = \underline{\varphi}'^{-1}(V)$). En particulier, il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ tel que $\tau[\underline{\varphi}^{-1}(V)]$ soit un germe de variété algébrique.

Un contre exemple.

Si $n \geqslant 3$ *et si* $p \geqslant 4$, *il existe dans* $\mathcal{F}_0^p \cong \mathbf{R}^p$ *des sous-variétés algébriques non rigides.*

Prenons $n = 3$ et $p = 4$. Soit (x, y, z) (resp. (t, u, v, w)) un système de coordonnées locales au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^3$ (resp.

de $\mathbf{R}^4$). Soit Π l'idéal de $\mathcal{O}_{4,0} = \mathbf{R}[t, u, v, w]$ engendré par le polynôme : $tu(u-t)\,(u-(3+v)t)\,(u-(4+w)t)$. Démontrons par l'absurde que Π n'est pas rigide.

Si Π était rigide, nous pourrions trouver $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in \mathcal{E}(x, y, z)$, 2-plats à l'origine, tels que le germe d'application $\underline{\varphi}$, défini par les formules : $t = x + \xi_1$; $u = y + \xi_2$; $v = z + \xi_3$; $w = \xi_4$, soit Π-déterminant. En effectuant sur la source le changement de coordonnées $\mathrm{X} = x + \xi_1$, $\mathrm{Y} = y + \xi_2$, $\mathrm{Z} = z + \xi_3$, l'application $\underline{\varphi}$ est définie par les formules : $t = \mathrm{X}$, $u = \mathrm{Y}$, $v = \mathrm{Z}$, $w = \gamma(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$, où γ est 2-plate à l'origine. L'idéal $\mathrm{I}_\gamma = \underline{\varphi}^* \Pi$ est engendré par

$$\mathrm{XY}(\mathrm{Y}-\mathrm{X})\,(\mathrm{Y}-(3+\mathrm{Z})\,\mathrm{X})\,(\mathrm{Y}-(4+\gamma)\,\mathrm{X}).$$

Puisque $\underline{\varphi}$ est Π-déterminant, il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que si $\gamma' \in \mathcal{E}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ est tel que $\gamma - \gamma'$ soit r-plat à l'origine, alors il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ qui transforme I_γ en $\mathrm{I}_{\gamma'}$. Soit V_γ le germe des zéros de I_γ : V_γ est formé de cinq feuillets qui se coupent suivant l'axe des Z ; en un point $(0, 0, \mathrm{Z})$ le plus grand birapport des quatre premiers est $3 + \mathrm{Z}$; le plus grand birapport des trois premiers et du dernier est $4 + \gamma(0,0,\mathrm{Z})$. On en déduit avec Whitney [13] que la fonction $\gamma(0, 0, \mathrm{Z})$ est liée intrinséquement à V_γ. Donc si $\gamma(0, 0, \mathrm{Z}) \neq \gamma'(0, 0, \mathrm{Z})$ on aboutit à une contradiction.

5. Le cas C^μ.

On aurait pu énoncer les propositions des paragraphes 1 et 2 dans le cadre des fonctions μ-fois continûment dérivables. Cela n'introduit aucune difficulté supplémentaire, mais nécessite un calcul parfois fastidieux de pertes de dérivabilité. Nous en donnons un exemple simple.

Désignons par $\mathcal{E}_{[\mu]}$ l'anneau des germes de fonctions numériques μ-fois continûment dérivables au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$; par $\underline{m}_{[\mu]}$ l'idéal maximal de $\mathcal{E}_{[\mu]}$; par $\mathrm{Dif}(\mu, n)$ le groupe de difféomorphismes locaux de classe C^μ au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$. Si $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in \mathcal{E}^p_{[\mu]}$, on note $\mathrm{J}_p(\underline{\varphi})$ l'idéal engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ et les jacobiens $\dfrac{\mathrm{D}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)}{\mathrm{D}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})}$ dans $\mathcal{E}_{[\mu-1]}$ et par $(\underline{\varphi})_\mu$, l'idéal engendré par les φ_i dans $\mathcal{E}_{[\mu']}$ ($\mu \geqslant 1$ et $\mu \geqslant \mu'$). Nous laissons au lecteur le soin de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 5. – *Supposons* $\mu \geqslant 3$. *Soient* $\underline{\varphi}, \underline{\varphi}' \in \mathcal{E}^p_{[\mu]}$ *tels que* $(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}')_{\mu-1} \subset \underline{m}^2_{[\mu-1]} [J_p(\underline{\varphi})]^2$. Alors il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(\mu - 2, n)$ *tel que* $(\underline{\varphi} \circ \tau)_{\mu-2} = (\underline{\varphi}')_{\mu-2}$(3).

COROLLAIRE. – *Soit* $\underline{\varphi} \in \mathcal{E}^p$ *tel que* $J_p(\underline{\varphi})$ *soit elliptique. Alors il existe une application* $\mu \longrightarrow 0(\mu)$ *de* **N** *dans* **N**, *telle que*, $\forall\, \underline{\varphi}' \in \mathcal{E}^p$ *vérifiant* $(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}') \subset \underline{m}^{0(\mu)}$, *il existe* $\tau \in \mathrm{Dif}(\mu, n)$ *tel que* $(\underline{\varphi} \circ \tau)_\mu = (\underline{\varphi}')_\mu$.

En effet, puisque $J_p(\underline{\varphi})$ est elliptique, à tout $\mu \in \mathbf{N}$ on peut associer $e(\mu) \in \mathbf{N}$ tel que $J_p(\underline{\varphi}) \,.\, \mathcal{E}_{[\mu+1]} \supset \underline{m}^{e(\mu)}_{[\mu+1]}$. Posons $0(\mu) = 2 + 2\,e(\mu)$. Soit $\underline{\varphi}' \in \mathcal{E}^p$ tel que $(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}') \subset \underline{m}^{0(\mu)}$; alors

$$(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}')_{\mu+1} \subset \underline{m}^2_{[\mu+1]} \cdot [J_p(\underline{\varphi})]^2$$

et d'après la proposition 5, il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(\mu, n)$ tel que $(\underline{\varphi} \circ \tau)_\mu = (\underline{\varphi}')_\mu$ (c.q.f.d.).

Un exemple.

Soient $\varphi \in \mathcal{E}$ et V le germe de ses zéros. Supposons l'idéal engendré par φ et ses dérivées partielles $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, elliptique. On déduit du corollaire précédent, que pour tout $\mu \in \mathbf{N}$, il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(\mu, n)$, tel que $\tau(\mathrm{V})$ soit un germe de variété algébrique. Nous allons construire φ de telle sorte que, $\forall\, \tau \in \mathrm{Dif}(n)$, $\tau(\mathrm{V})$ ne soit pas un germe de variété algébrique.

Rapportons l'espace $\mathbf{R}^3$ à un système de coordonnées (x, y, z) et choisissons

$$\varphi = z(x^2 + y^2 + 2z)(x^2 + y^2 + z)(x^2 + y^2 - (1 + x)z)(x^2 + y^2 - \gamma(x)z).$$

où γ est une fonction analytique transcendante au voisinage de l'origine telle que $\gamma(0) = 2$. Soit V le germe des zéros de φ au voisinage de

(3) N. Kuiper (voir [3]) a démontré des résultats beaucoup plus précis que ceux de la proposition V, dans le cas particulier $p = 1$.

l'origine et désignons par $\widetilde{V}$ le complexifié de V : $\widetilde{V}$ est constitué de cinq feuillets qui se coupent suivant les deux isotropes : $(z = x - iy = 0)$ et $(z = x + iy = 0)$. Le germe V possède une singularité isolée à l'origine, et donc l'idéal engendré par φ et ses dérivées est elliptique.

En un point $(z = x + iy = 0 , x \neq 0)$ de $\widetilde{V}$, le plus grand birapport des quatre plans tangents aux quatre premiers feuillets est $3 + x$; le plus grand birapport des quatre plans tangents aux trois premiers feuillets et au dernier est $\gamma(x)$. La paire $(3 + x , \gamma(x))$ et donc la fonction $\gamma(x)$ sont liés intrinsèquement à la variété. Mais il est impossible (Whitney [13]), par un isomorphisme formel, de transformer $\widetilde{V}$ (et donc V) en un germe de variété algébrique, car $\gamma(x)$ est transcendante.

Les paragraphes 6 et 7 sont totalement indépendants du reste du chapitre.

6. Stabilité locale des modules différentiables : définitions et préliminaires algébriques.

Soit A un anneau local (commutatif et unitaire) d'idéal maximal $\underline{m}$ et de corps résiduel $\underline{k} = A/\underline{m}$. Si $\mathcal{M}$ est un module sur A, une présentation de type (p , q) de $\mathcal{M}$ est une suite exacte :

$$A^p \xrightarrow{M} A^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

LEMME 1. — *Soit $\mathcal{M}$ un module de présentation finie sur* A. *Soit $A^p \xrightarrow{M} A^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M} \longrightarrow 0$ une présentation de $\mathcal{M}$ telle que q soit le nombre minimum de générateurs de $\mathcal{M}$ et p le nombre minimum de générateurs de ker α. Soit Γ un isomorphisme de $\mathcal{M}$ sur un module $\mathcal{M}'$ et soit $A^p \xrightarrow{M'} A^q \xrightarrow{\alpha'} \mathcal{M}' \longrightarrow 0$ une présentation de type (p , q) de $\mathcal{M}'$. Alors il existe des isomorphismes $\Gamma^p : A^p \longrightarrow A^p$; $\Gamma^q : A^q \longrightarrow A^q$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} A^p \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma^p"] & A^q \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Gamma^q"] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma"] & 0 \\ A^p \arrow[r] & A^q \arrow[r, "\alpha'"] & \mathcal{M}' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (1)$$

On sait qu'il existe des homomorphismes Γ^p et Γ^q tels que le diagramme (1) soit commutatif : vérifions que Γ^p et Γ^q sont des isomorphismes. Or, en tensorisant sur A le diagramme (1) par $\underline{k}$, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
\underline{k}^p & \xrightarrow{\overline{\mathrm{M}}} & \underline{k}^q & \xrightarrow{\overline{\alpha}} & \mathfrak{M} \otimes_{\mathrm{A}} \underline{k} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \overline{\Gamma}^p & & \downarrow \overline{\Gamma}^q & & \downarrow \overline{\Gamma} & & \\
\underline{k}^p & \xrightarrow{\overline{\mathrm{M}}'} & \underline{k}^q & \xrightarrow{\overline{\alpha}'} & \mathfrak{M}' \otimes_{\mathrm{A}} \underline{k} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les lignes sont exactes et $\overline{\Gamma}$ est un isomorphisme. Puisque

$$q = \dim_{\underline{k}} \mathfrak{M} \otimes_{\mathrm{A}} \underline{k} = \dim_{\underline{k}} \mathfrak{M}' \otimes_{\mathrm{A}} \underline{k},$$

$\overline{\alpha}$ et $\overline{\alpha}'$ sont des isomorphismes. Donc $\overline{\Gamma}^q$ est un isomorphisme et par le lemme de Nakayama, il en sera de même de Γ^q.

L'application Γ^q induit un isomorphisme de im M sur im M'. Puisque p est le nombre minimum de générateurs de im M et im M', un raisonnement analogue au précédent montre que Γ^p est aussi un isomorphisme (c.q.f.d.).

On vérifie facilement (voir Serre [9], Appendice 1) que

$$q = \dim_{\underline{k}} (\mathfrak{M} \otimes_{\mathrm{A}} \underline{k}) \quad \text{et} \quad p = \dim_{\underline{k}} (\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}} (\mathfrak{M}, \underline{k})).$$

Nous dirons alors que $\mathfrak{M}$ *est un module de type* (p, q).

Avec les hypothèses et notations du lemme 1, soit $\mathfrak{J}_k(\mathrm{M})$ (resp. $\mathfrak{J}_k(\mathrm{M}')$) l'idéal de A engendré par les mineurs d'ordre k de la matrice M (resp. M'). Il résulte du lemme 1 que : $\mathfrak{J}_k(\mathrm{M}) = \mathfrak{J}_k(\mathrm{M}')$. Cet idéal dépend donc uniquement de la classe d'isomorphisme $[\mathfrak{M}]$ du module $\mathfrak{M}$ et sera noté $\mathfrak{J}_k[\mathfrak{M}]$. Si $s = \inf(p, q)$, on aura :

$$\mathfrak{J}_0 [\mathfrak{M}] = \mathrm{A} \supset \mathfrak{J}_1 [\mathfrak{M}] \supset \ldots \supset \mathfrak{J}_s [\mathfrak{M}] \supset \mathfrak{J}_{s+1} [\mathfrak{M}] = 0.$$

Désignons par $\mathrm{V}_k[\mathfrak{M}]$ l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A tels que $\dim_{\mathrm{A}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.\mathrm{A}_\mathfrak{p}} \mathfrak{M}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.\mathfrak{M}_\mathfrak{p} > q - k$. On vérifie que

$$\overline{\mathfrak{J}_k [\mathfrak{M}]} = \bigcap_{\mathfrak{p}_i \in \mathrm{V}_k[\mathfrak{M}]} \mathfrak{p}_i \qquad (k \in [1, s]).$$

Soit $\mathcal{C}_{p,q}$ (resp. $\overline{\mathcal{C}}_{p,q}$) l'ensemble des classes d'isomorphisme des modules sur A de type (p, q) (resp. des modules sur A admettant une présentation de type (p, q)). Si $r \in \mathbf{N}$, posons $A_r = A/\underline{m}^{r+1}$ et $\mathcal{M}_r = \mathcal{M} \otimes_A A_r = \mathcal{M}/\underline{m}^{r+1} . \mathcal{M}$.

LEMME 2. – *Supposons* A *noethérien et soit* $\mathcal{M}$ *un module de type* (p, q) *sur* A *; il existe un entier* $r > 0$ *tel que,* $\forall r' \geqslant r$, $\mathcal{M}_{r'}$ *soit un module de type* (p, q) *sur* $A_{r'}$. En effet, soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow A^q \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

une suite exacte. Soit (p_r, q_r) le type de $\mathcal{M}_r$:

$$q = \dim_{\underline{k}} (\mathcal{M} \otimes_A A/\underline{m}) = \dim_{\underline{k}} [(\mathcal{M} \otimes_A A/\underline{m}^{r+1}) \otimes_{A/\underline{m}^{r+1}} A/\underline{m}] = q_r$$

$$p = \dim_{\underline{k}} \mathcal{R}/\underline{m}\mathcal{R}$$

$$p_r = \dim_{\underline{k}} ((\mathcal{R} + \underline{m}^{r+1} . A^q/\underline{m}^{r+1} . A^q) \otimes_{A/\underline{m}^{r+1}} A/\underline{m}) =$$

$$\dim_{\underline{k}} \mathcal{R}/\underline{m}\ \mathcal{R} + (\mathcal{R} \cap \underline{m}^{r+1} . A^q)$$

Mais, grâce au lemme d'Artin-Rees, pour r assez grand,

$$\mathcal{R} \cap \underline{m}^{r+1} . A^q \subset \underline{m} . \mathcal{R} \quad \text{et donc} \quad p_r = p.$$

Désignons par AUT(A) le groupe des automorphismes de A. Si $\theta \in \mathrm{AUT}(A)$ et si $\mathcal{M}$ est un module sur A, on désigne par $\theta(\mathcal{M})$ le groupe abélien sous-jacent à $\mathcal{M}$, muni de l'opération externe $*$: si $a \in A$ et si $m \in \mathcal{M}$: $a * m = \theta^{-1}(a) . m$: donc $\theta(\mathcal{M})$ est un module sur A.

DEFINITION 1. – *Soit* $[\mathcal{M}] \in \mathcal{C}_{p,q}$. Nous dirons que $[\mathcal{M}]$ est *une classe déterminante d'ordre* $\leqslant r$ (ou que $\mathcal{M}$ est un *module déterminant d'ordre* $\leqslant r$) si quelle que soit $[\mathcal{M}'] \in \overline{\mathcal{C}}_{p,q}$ et vérifiant $[\mathcal{M}_r] = [\mathcal{M}'_r]$, il existe $\theta \in \mathrm{AUT}(A)$(4) tel que $[\theta(\mathcal{M})] = [\mathcal{M}']$.

Désignons par $\Omega_{p,q}$, ou simplement par Ω_p si $p = q$, l'ensemble des matrices à p colonnes et q lignes à coefficients dans A. Si M, $M' \in \Omega_{p,q}$, nous dirons que $M \simeq M'$ s'il existe des matrices carrées inversibles $P \in \Omega_p$ et $Q \in \Omega_q$ telles que $M' = QMP$. Soit [M] la classe

(4) Si $A = \mathcal{E}$, on remplacera dans les définitions 1 et 2, AUT $(\mathcal{E})$ par le sous-groupe Dif$(n)^*$ des automorphismes différentiables ; un automorphisme de $\mathcal{E}$ sera différentiable s'il est de la forme τ^*, où $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ $(\forall \varphi \in \mathcal{E}, \tau^*(\varphi) = \varphi \circ \tau)$.

de M pour cette relation d'équivalence. Si $M = (m_i^j)$ et si $\theta \in \mathrm{AUT}(A)$, on désigne par $\theta(M)$ la matrice $(\theta(m_i^j))$ et par (M) l'idéal engendré par les m_i^j dans A.

DEFINITION 2. – Soit $M \in \Omega_{p,q}$. Nous dirons que [M] est *déterminante d'ordre* $\leqslant r$ (ou que la matrice M *est déterminante d'ordre* $\leqslant r$) si quelle que soit $M' \in \Omega_{p,q}$ vérifiant $(M - M') \subset \underline{m}^{r+1}$, il existe $\theta \in \mathrm{AUT}(A)$[4] tel que $[\theta(M)] = [M']$.

PROPOSITION 6. – *Supposons l'anneau* A *noethérien ou* $A = \mathcal{E}$, *et soit* $[\mathfrak{M}] \in \mathcal{C}_{p,q}$. *Soit* $A^p \xrightarrow{M} A^q \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{M} \longrightarrow 0$ *une présentation de type* (p, q) *de* $\mathfrak{M}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes : a)* $[\mathfrak{M}]$ *est déterminante*

b) [M] *est déterminante.*

a) $\Longrightarrow$ *b)* Supposons $[\mathfrak{M}]$ déterminante d'ordre $\leqslant r$. Si $M' \in \Omega_{p,q}$ est telle que $(M - M') \subset \underline{m}^{r+1}$, considérons la suite exacte : $A^p \xrightarrow{M'} A^q \xrightarrow{\alpha'} \mathfrak{M}' \longrightarrow 0$. Visiblement $[\mathfrak{M}_r] = [\mathfrak{M}'_r]$. Donc il existe $\theta \in \mathrm{AUT}(A)$ tel que $[\theta(\mathfrak{M})] = [\mathfrak{M}']$. Soit Γ un isomorphisme de $\theta(\mathfrak{M})$ sur $\mathfrak{M}'$. D'après le lemme 1, nous pouvons construire des isomorphismes Γ^p, Γ^q, tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} A^p \arrow[r, "\theta(M)"] \arrow[d, "\Gamma^p"] & A^q \arrow[r, "\theta(\alpha)"] \arrow[d, "\Gamma^q"] & \theta(\mathfrak{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma"] & 0 \\ A^p \arrow[r, "M'"] & A^q \arrow[r, "\alpha'"] & \mathfrak{M}' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ainsi $[\theta(M)] = [M']$ et M est une matrice déterminante d'ordre $\leqslant r$.

b) $\Longrightarrow$ *a)* Supposons d'abord *A nocthérien,* et soit M une matrice déterminante d'ordre $\leqslant r$. En augmentant r si nécessaire, on peut supposer, d'après le lemme 2, que $\mathfrak{M}_r$ est de type (p, q) sur $\mathcal{E}_r$. Soit $[\mathfrak{M}'] \in \overline{\mathcal{C}}_{p,q}$, tel que $[\mathfrak{M}'_r] = [\mathfrak{M}_r]$. Considérons une présentation de type (p, q) de $\mathfrak{M}'$: $A^p \xrightarrow{M'} A^q \xrightarrow{\alpha'} \mathfrak{M}' \longrightarrow 0$, et soit Γ_r un isomorphisme de $\mathfrak{M}_r$ sur $\mathfrak{M}'_r$. En tensorisant sur A par A_r les deux suites exactes

[4] Voir note page précédente.

$$A^p \xrightarrow{M} A^q \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{M} \longrightarrow 0$$

et
$$A^p \xrightarrow{M'} A^q \xrightarrow{\alpha'} \mathfrak{M}' \longrightarrow 0,$$

et en appliquant le lemme 1, on construit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} A_r^p & \xrightarrow{M_r} & A_r^q & \longrightarrow & \mathfrak{M}_r & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \Gamma_r^p} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_r^q} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_r} & & \\ A_r^p & \xrightarrow{M_r'} & A_r^q & \longrightarrow & \mathfrak{M}_r' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les deux lignes sont exactes et Γ_r^p , Γ_r^q , Γ_r sont des isomorphismes de $\mathcal{E}_r$-modules. En relevant les isomorphismes Γ_r^p et Γ_r^q en des isomorphismes de A-modules, on obtient un diagramme, non nécessairement commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A^p & \xrightarrow{M} & A^q \\ \downarrow{\scriptstyle \Gamma^p} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma^q} \\ A^p & \xrightarrow{M'} & A^q \end{array}$$

où cependant, en posant $(\Gamma^q)^{-1} \circ M' \circ \Gamma^p = M''$, $(M'' - M) \subset \underline{m}^{r+1}$ Donc il existe $\theta \in \mathrm{AUT}(A)$ tel que $[M''] = [\theta(M)] = [M']$. Il en résulte immédiatement que $[\theta(\mathfrak{M})] = [\mathfrak{M}']$, c.q.f.d.

Supposons $A = \mathcal{E}$. Si M est déterminante d'ordre $\leqslant r$, désignons par M^* la matrice polynôme de Taylor d'ordre r de M à l'origine. Considérons la suite exacte : $\mathcal{E}^p \xrightarrow{M^*} \mathcal{E}^q \longrightarrow \mathfrak{M}^* \longrightarrow 0$. Par hypothèse, il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ tel que $\tau^*(\mathfrak{M}^*) \simeq \mathfrak{M}$. Donc $\mathfrak{M}^*$ est de type (p, q) et $\mathfrak{M}^* \simeq \mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathcal{E}$, où $\mathfrak{N}$ est un module de type fini sur $\mathfrak{A}$. Il résulte du théorème 4, CHO, que $\mathfrak{N}$ est aussi un module de type (p, q) sur $\mathfrak{A}$. Finalement, $\mathfrak{M}^* \otimes_{\mathcal{E}} \mathfrak{F} \simeq \mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{F}$ est de type (p, q) sur $\mathfrak{F}$: il en sera de même de $\mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{E}} \mathfrak{F}$. En augmentant r si nécessaire, on peut supposer d'après le lemme 2, que

$$\mathfrak{M}_r = (\mathfrak{M} \otimes_{\mathcal{E}} \mathfrak{F}) \otimes_{\mathfrak{F}} \mathfrak{F}_r .$$

est de type (p, q) sur $\mathcal{E}_r$. On poursuit la démonstration comme plus haut.

La proposition 6 ramène l'étude des modules déterminants à celle des matrices déterminantes. Nous allons étudier la situation générique.

Désignons par $H_{p,q}$ l'anneau des polynômes à coefficients réels en les indéterminées y_i^j où $i \in [1\,,q]$ et $j \in [1\,,p]$. *Nous supposerons désormais* $p \geqslant q$, ce qui n'est pas restrictif (sinon, il suffit de transposer).

Désignons par $\mathfrak{I}_k$ l'idéal engendré dans $H_{p,q}$ par les mineurs d'ordre k de la matrice $\underline{Y} = |y_i^j|$:

$$\mathfrak{I}_0 = H_{p,q} \supset \mathfrak{I}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{I}_q \supset \mathfrak{I}_{q+1} = (0).$$

LEMME 3. – *Pour* $k \in [0\,,q-1]$, *le couple* $(\mathfrak{I}_{k+1}\,,\mathfrak{I}_k)$ *est une* $(p-k)\,(q-k)$ *strate de* $H_{p,q}$.

Nous devons vérifier que

$$\overline{J}_{(p-k)\,(q-k)}\,(\mathfrak{I}_{k+1}) \supset \mathfrak{I}_k \quad \text{et} \quad \overline{\sigma}_{(p-k)\,(q-k)}(\mathfrak{I}_{k+1}) \supset \mathfrak{I}_k.$$

Si $k = 0$, le lemme est trivial. Supposons que $k \in [1\,,q-1]$.

Soit η_k un mineur d'ordre k de $\underline{Y}$: nous supposerons que

$$\eta_k = \det |y_i^j| \begin{array}{l} i \in [1\,,k]. \\ j \in [1\,,k] \end{array}$$

Si $\alpha \in [k+1\,,q]$ et $\beta \in [k+1\,,p]$, soit ξ_α^β le mineur d'ordre $(k+1)$:

$$\xi_\alpha^\beta = \det |y_i^j| \begin{array}{l} i \in [1\,,k] \cup \{\alpha\} \\ j \in [1\,,k] \cup \{\beta\} \end{array}$$

On vérifie que $\dfrac{\partial \xi_\alpha^\beta}{\partial y_{\alpha'}^{\beta'}} = 0$ si $(\alpha\,,\beta) \neq (\alpha'\,,\beta')$ et $\dfrac{\partial \xi_\alpha^\beta}{\partial y_\alpha^\beta} = \eta_k$. Donc le jacobien $\dfrac{D(\xi_\alpha^\beta)}{D(y_\alpha^\beta)}$ est égal à $\eta_k^{(p-k)\,(q-k)}$, ce qui entraîne :

$$\mathfrak{I}_k \subset \overline{J}_{(p-k)\,(q-k)}\,(\mathfrak{I}_{k+1}).$$

Il existe, pour $\beta \in [k+1\,,p]$ et $j \in [1\,,k]$, des mineurs au signe près Y_j^β, d'ordre k de la matrice $\underline{Y}$, tels que :

$$\eta_k \cdot y_i^\beta = \sum_{j=1}^{k} Y_j^\beta\, y_i^j \quad \text{si} \quad i \in [1\,,k]$$

$$\eta_k \cdot y_\alpha^\beta = \sum_{j=1}^{k} Y_j^\beta \, y_\alpha^j + \xi_\alpha^\beta \quad \text{si} \quad \alpha \in [k+1\,, q]$$

Soit $\mathscr{L}_{k+1}$ l'idéal engendré par les ξ_α^β dans $H_{p,q}$. Si $\delta = \det |y_{i_h}^{j_h}|$ est un mineur d'ordre $k+1$ de $\underline{Y}$, $\eta_k^{k+1} . \delta = \det |\eta_k . y_{i_h}^{j_h}|$. Si $j_h > k$, on peut substituer par les égalités précédentes, à $\eta_k . y_{i_h}^{j_h}$ une combinaison linéaire des y_i^j et $\xi_\alpha^\beta (j \in [1\,, k])$. Après simplifications, on vérifie que $\eta_k^{k+1} . \delta \in \mathscr{L}_{k+1}$. Donc

$$\eta_k^{k+1} . \mathscr{I}_{k+1} \subset \mathscr{L}_{k+1}\,, \text{ i.e. } \eta_k^{k+1} \in (\mathscr{L}_{k+1} : \mathscr{I}_{k+1})$$

d'où : $\eta_k^{k+1} \in \sigma_{(p-k)\,(q-k)}(\mathscr{I}_{k+1})$. Finalement $\mathscr{I}_k \subset \overline{\sigma}_{(p-k)\,(q-k)}(\mathscr{I}_{k+1})$.

Soit $\underline{\chi}_k = (\chi_{k,i}^j)$ la matrice à $(q-k)$ lignes et $(p-k)$ colonnes, définie par $\chi_{k,i}^j = \xi_{k+i}^{k+j}$ (pour $k \in [1\,, q-1]$).

LEMME 4. – *Il existe pour* $k \in [1\,, q]$, *des matrices carrées* P_k et Q_k *à coefficients polynômés sur* Z *en les* y_i^j *et vérifiant* $\det Q_k = \eta_k$ *et* $\det P_k = \eta_k^{p-k}$, *telles que* : $Q_k^{-1} \underline{Y} P_k = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ -\underline{\chi}_k & 0 \end{bmatrix}$ *si* $k < q$, *et* $Q_q^{-1} \underline{Y} P_q = [0 \quad I_q]$ *(on désigne par* I_k *la matrice carrée unité de rang* k*).*

Ecrivons $\underline{Y}$ sous la forme $\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Y}' \\ \underline{Y}'' \end{bmatrix}$ où $\underline{Y}'$ est une matrice à k lignes et p colonnes. Pour $i \in [1\,, k]$ et $j \in [1\,, p-k]$, soit Z_i^j le mineur de rang k de $\underline{Y}'$ obtenu en conservant les k premières colonnes, sauf la i$^{\text{ème}}$, que l'on remplace par la $(k+j)^{\text{ème}}$ colonne. Soit $\underline{Z} = (Z_i^j)$ la matrice ainsi obtenue, à k lignes et $(p-k)$ colonnes. Posons

$$P_k = \begin{bmatrix} \underline{Z} & I_k \\ -\eta_k . I_{p-k} & 0 \end{bmatrix}$$

Le calcul montre que : $\underline{Y} P_k = \begin{bmatrix} 0 & \underline{\eta_k} \\ -\underline{\chi}_k & \Sigma \end{bmatrix}$, où $\begin{bmatrix} \underline{\eta_k} \\ \Sigma \end{bmatrix}$ est la matrice $(y_i^j)\ \begin{matrix} i \in [1\,, q]. \\ j \in [1\,, k] \end{matrix}$ Posons $Q_k' = \begin{bmatrix} \underline{\eta_k} & 0 \\ 0 & I_{q-k} \end{bmatrix}$

On vérifiera que $Q_k'^{-1}\ \underline{Y}\ P_k = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ -\underline{\chi}_k & \Sigma \end{bmatrix} = \underline{Y}'$

En retranchant des $(q-k)$ dernières lignes de $\underline{Y}'$ des combinaisons linéaires des k-premières, on vérifie qu'il existe Q_k'', à coefficients polynômes en les y_i^j et telle que det $Q_k'' = 1$ et

$$Q_k''^{-1}\ \underline{Y}' = \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ -\underline{\chi}_k & 0 \end{bmatrix}$$

Il suffira de poser $Q_k = Q_k' \, . \, Q_k''$. Visiblement, det $Q_k = \eta_k$ et det $P_k = \eta_k^{p-k}$.

7. Caractérisation des modules déterminants lorsque $A = \mathcal{E}$.

Si A est un anneau artinien ou si A est un anneau intègre et de valuation discrète (par exemple Z_p ou $\underline{k}\,[[\underline{x}]]$) on démontre facilement que tout module de type fini sur A est déterminant. La situation est moins simple lorsque $A = \mathcal{E}$ (par exemple $\mathcal{E}\,(x)/(e^{-1/x^2})$ n'est pas un module déterminant sur $\mathcal{E}\,(x)$) ou lorsque

$$A = \mathcal{F} = \underline{k}\,[[x_1\,,\dots,x_n]] \quad \text{quand} \quad n > 1$$

(par exemple $\underline{k}\,[[x\,,y]]/(x^2)$ n'est pas un module déterminant sur $\underline{k}\,[[x\,,y]]$).

Dans toute la suite, nous supposerons $A = \mathcal{E}$ (on aurait des résultats analogues pour $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{A}$). Posons, si $(P\,,Q\,,\underline{u}) \in \Omega_p \times \Omega_q \times \mathcal{E}^n$ et si $M \in \Omega_{p,q}$: $\Gamma_M\,(P\,,Q\,,\underline{u}) = QM + MP + \sum_{i=1}^{n} u_i \dfrac{\partial M}{\partial x_i} \in \Omega_{p,q}$ (on a posé $\underline{u} = (u_1\,,\dots,u_n)$) ; Γ_M est un homomorphisme de $\mathcal{E}$-modules de $\Omega_p \times \Omega_q \times \mathcal{E}^n$ dans $\Omega_{p,q}$.

Si B et C sont des matrices inversibles ($B \in \Omega_p$ et $C \in \Omega_q$), on a la formule :

$$\Gamma_{CMB}\,(P\,,Q\,,\underline{u}) = C\,.\,\Gamma_M\,(BPB^{-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial B}{\partial x_i}\,.\,B^{-1}\,,\,C^{-1}QC + C^{-1}\,.\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial C}{\partial x_i}\,,\,\underline{u})\,.\,B \quad (1)$$

Donc il existe des isomorphismes

$$\theta_{C,B} : \Omega_p \times \Omega_q \times \mathcal{E}^n \rightsquigarrow \Omega_p \times \Omega_q \times \mathcal{E}^n$$

et $\theta'_{C,B} : \Omega_{p,q} \rightsquigarrow \Omega_{p,q}$, tels que $\Gamma_{CMB} = \theta'_{C,B} \circ \Gamma_M \circ \theta_{C,B}$.

Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont des modules isomorphes et de type (p, q) et si $\mathcal{E}^p \xrightarrow{M} \mathcal{E}^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M} \longrightarrow 0$ et $\mathcal{E}^p \xrightarrow{M'} \mathcal{E}^q \xrightarrow{\alpha'} \mathcal{M}' \longrightarrow 0$ sont deux résolutions de type (p, q) de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ respectivement, on aura donc coker $\Gamma_M \simeq$ coker $\Gamma_{M'}$. Ainsi, la classe d'isomorphisme de coker Γ_M dépend uniquement de la classe d'isomorphisme de $\mathcal{M}$: on la note $[\check{\mathcal{M}}]$. Le théorème suivant caractérise les modules déterminants :

THEOREME 2. – *Soit $\mathcal{M}$ un module de type (p, q) sur $\mathcal{E}$ et soit $\mathcal{E}^p \xrightarrow{M} \mathcal{E}^q \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$ une présentation de type (p, q) de $\mathcal{M}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le module $\mathcal{M}$ est déterminant.*

b) *La matrice* M *est quasi-transverse sur chaque strate $(\mathfrak{I}_{k+1}, \mathfrak{I}_k)$ de $\mathcal{O}_{pq,0} = H_{pq}$ $(k \in [0, s-1]$; $s = \inf(p, q))$.*

c) $\dim_R \check{\mathcal{M}} < \infty$.

Comme cas particulier $(q = 1)$ de ce théorème, on retrouve le corollaire 2″ du théorème 1.

La première démonstration du théorème 2 utilisait des méthodes analogues à celles des paragraphes 1 et 2. La démonstration suivante, plus simple, s'inspire pour l'essentiel (i.e. l'implication c) $\Longrightarrow$ a)) de Mather [8].

a) $\Longrightarrow$ b) La condition b) signifie que pour tout $k \in [0, s-1]$, $\bar{J}_{(p-k)(q-k)}(\mathfrak{I}_{k+1}(M)) \supset \underline{m} \cdot \mathfrak{I}_k(M)$. D'après la proposition 6, $\mathcal{M}$ est déterminant, si et seulement si la matrice M est déterminante. Donc il existe un entier r tel que, $\forall M' \in \Omega_{p,q}$ vérifiant $(M - M') \subset \underline{m}^{r+1}$, il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ tel que $[\tau^*(M')] = [M]$. D'après le théorème de quasi-transversalité, on peut choisir M' quasi-transverse sur chaque strate $(\mathfrak{I}_{k+1}, \mathfrak{I}_k)$. D'où

$$\overline{\mathrm{J}}_{(p-k)(q-k)}(\mathfrak{I}_{k+1}(\mathrm{M})) = \overline{\mathrm{J}}_{(p-k)(q-k)}(\mathfrak{I}_{k+1}(\tau^*(\mathrm{M}'))) =$$
$$= \tau^*(\overline{\mathrm{J}}_{(p-k)(q-k)}(\mathfrak{I}_{k+1}(\mathrm{M}'))) \supset \tau^*(\underline{m}\,.\,\mathfrak{I}_k(\mathrm{M}')) =$$
$$= \underline{m}\,.\,\mathfrak{I}_k(\tau^*(\mathrm{M}')) = \underline{m}\,.\,\mathfrak{I}_k(\mathrm{M}).$$

Donc M est quasi-transverse sur chaque strate $(\mathfrak{I}_{k+1}, \mathfrak{I}_k)$ (c.q.f.d.).

b) $\Longrightarrow$ c) Supposons $q \leqslant p$ et posons $\mathrm{M} = (m_i^j)$. Avec les notations des lemmes 3 et 4, désignons par $\eta_k(\mathrm{M})$ (resp. $\xi_\alpha^\beta(\mathrm{M})$) l'élément de $\mathcal{E}$ obtenu en substituant dans η_k (resp. dans ξ_α^β) les m_i^j aux y_i^j. Soit $\mathcal{L}_{k+1}(\mathrm{M})$ l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par les $\xi_\alpha^\beta(\mathrm{M})$ et soit $\widetilde{\mathcal{L}}_{k+1}(\mathrm{M})$ l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par tous les jacobiens, d'ordre $(p-k)(q-k)$,

$$\frac{\mathrm{D}(\xi_\alpha^\beta(\mathrm{M}))}{\mathrm{D}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{(p-k)(q-k)}})}$$

(donc si $(p-k)(q-k) > n$, $\widetilde{\mathcal{L}}_{k+1}(\mathrm{M}) = 0$). On désigne par $\underline{\chi}_k(\mathrm{M})$, $\mathrm{P}_k(\mathrm{M})$, $\mathrm{Q}_k(\mathrm{M})$ respectivement, les matrices $\underline{\chi}_k$, P_k, Q_k dans lesquelles on substitue les m_i^j aux y_i^j. Nous démontrons d'abord un lemme :

LEMME 5. – *Soit* $\mathrm{M}' \in \Omega_{p,q}$ *telle que*

$$(\mathrm{M}') \subset [\eta_k(\mathrm{M})]^{p-k+4}\,.\,\widetilde{\mathcal{L}}_{k+1}(\mathrm{M})$$

(*si* $1 \leqslant k \leqslant q-1$) *ou* $(\mathrm{M}') \subset \widetilde{\mathcal{L}}_1(\mathrm{M})$ *ou* $(\mathrm{M}') \subset [\eta_q(\mathrm{M})]^{p-q+4}\,.\,\mathcal{E}$. *Alors* $\mathrm{M}' \in \mathrm{Im}\,\Gamma_{\mathrm{M}}$.

Supposons $(\mathrm{M}') \subset [\eta_k(\mathrm{M})]^{p-k+4}\,.\,\widetilde{\mathcal{L}}_{k+1}(\mathrm{M})$: la démonstration dans les deux autres hypothèses est très facile et laissée en exercice au lecteur.

Si $\eta_k(\mathrm{M}) = 0$, le lemme est trivial. Si $\eta_k(\mathrm{M}) \neq 0$, soit $\mathcal{E}'$ l'image canonique de $\mathcal{E}$ dans l'anneau de fractions $\mathcal{E}_{\eta_k(\mathrm{M})}$. Si $f \in \mathcal{E}$, nous noterons encore par f, l'image de f dans $\mathcal{E}'$. D'après le lemme 4, les matrices $\mathrm{Q}_k(\mathrm{M})$ et $\mathrm{P}_k(\mathrm{M})$ sont inversibles sur l'anneau $\mathcal{E}_{\eta_k(\mathrm{M})}$ et

$$\mathrm{M}^* = \mathrm{Q}_k(\mathrm{M})^{-1}\,.\,\mathrm{M}\,.\,\mathrm{P}_k(\mathrm{M}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I}_k \\ -\underline{\chi}_k(\mathrm{M}) & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\qquad \mathrm{M}'' = \mathrm{Q}_k(\mathrm{M})^{-1}\,.\,\mathrm{M}'\,.\,\mathrm{P}_k(\mathrm{M})$

a ses coefficients dans $[\eta_k(\mathrm{M})]^{p-k+3} . \widetilde{\mathscr{L}}_{k+1}(\mathrm{M}) . \mathscr{E}'$. Visiblement, il existe des matrices P′ et Q′ à coefficients dans $[\eta_k(\mathrm{M})]^{p-k+3} . \mathscr{E}'$ telles que :

$$\mathrm{M}'' - \mathrm{Q}'\mathrm{M}^* - \mathrm{M}^*\mathrm{P}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{M}''' & 0 \end{pmatrix},$$

où M‴ est une matrice à $(p-k)$ colonnes et $(q-k)$ lignes à coefficients dans $[\eta_k(\mathrm{M})]^{p-k+3} . \widetilde{\mathscr{L}}_{k+1}(\mathrm{M}) . \mathscr{E}'$. Par la règle de Cramer, il existe $u_1, \ldots, u_n \in [\eta_k(\mathrm{M})]^{p-k+3} . \mathscr{E}'$ tels que :

$$\mathrm{M}''' = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \underline{\mathrm{X}}_k(\mathrm{M})}{\partial x_i}$$

et donc :

$$\Gamma_{\mathrm{M}^*}(\mathrm{P}', \mathrm{Q}', \underline{u}) = \mathrm{Q}'\mathrm{M}^* + \mathrm{M}^*\mathrm{P}' + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \mathrm{M}^*}{\partial x_i} = \mathrm{M}'' =$$

$$= \mathrm{Q}_k(\mathrm{M})^{-1} . \mathrm{M}' . \mathrm{P}_k(\mathrm{M}) = \mathrm{Q}_k(\mathrm{M})^{-1} . \Gamma_{\mathrm{M}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \underline{u}) . \mathrm{P}_k(\mathrm{M}),$$

où d'après la formule (1) :

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_k(\mathrm{M}) . \mathrm{Q}' . \mathrm{Q}_k(\mathrm{M})^{-1} + \mathrm{Q}_k(\mathrm{M}) . \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \mathrm{Q}_k(\mathrm{M})^{-1}}{\partial x_i}$$ a ses coefficients dans $[\eta_k(\mathrm{M})]^{p-k+1} . \mathscr{E}'$.

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_k(\mathrm{M}) . \mathrm{P}' . \mathrm{P}_k(\mathrm{M})^{-1} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \mathrm{P}_k(\mathrm{M})}{\partial x_i} . \mathrm{P}_k(\mathrm{M})^{-1}$$

a ses coefficients dans $[\eta_k(\mathrm{M})]^3 . \mathscr{E}'$.

Donc $\Gamma_{\mathrm{M}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \underline{u}) = \mathrm{M}'$, cette identité étant vérifiée dans $\mathscr{E}'$. Mais, puisque P, Q, $\underline{u}$, M′ ont leurs coefficients dans $\eta_k(\mathrm{M}) . \mathscr{E}$, elle est aussi vérifiée dans $\mathscr{E}$(5). Donc $\mathrm{M}' \in \mathrm{Im}\ \Gamma_{\mathrm{M}}$ (c.q.f.d.).

Si $h \in \mathrm{N}$, posons $\Sigma_{k,h} = \{\mathrm{M}' \in \Omega_{p,q}\ ;\ (\mathrm{M}') \subset \underline{m}^h (\mathfrak{I}_k(\mathrm{M}))^h\}$. Puisque $\mathfrak{I}_0(\mathrm{M}) = \mathscr{E}$ et $\mathfrak{I}_{q+1}(\mathrm{M}) = 0$, pour démontrer b) $\Longrightarrow$ c), il suffit de trouver pour tout $h \in \mathrm{N}$, un entier $\theta(h) \in \mathrm{N}$, tel que, $\forall k \in [0, q]$: $\mathrm{Im}\,\Gamma_{\mathrm{M}} + \Sigma_{k+1,h} \supset \Sigma_{k,\theta(h)}$. On en déduira en effet l'existence d'un entier $h' \geqslant 0$ tel que $\mathrm{Im}\,\Gamma_{\mathrm{M}} \supset \Sigma_{0,h'}$, mais cela signifie que $\dim_{\mathrm{R}} \mathrm{coker}\,\Gamma_{\mathrm{M}} < \infty$.

(5) Si A est un anneau sans nilpotents et si $f \in \mathrm{A}$ et $f \neq 0$, soit γ l'homomorphisme canonique $\mathrm{A} \rightsquigarrow \mathrm{A}_f$. On vérifie que $f . \mathrm{A} \cap \ker \gamma = (0)$.

Si q' est assez grand, l'idéal $(\mathfrak{J}_q(\mathrm{M}))^{q'}$ est engendré par les puissances d'ordre $(p-q+4)$ des mineurs d'ordre q de M, donc d'après le lemme 5, $\mathrm{Im}\,\Gamma_{\mathrm{M}} \supset \Sigma_{q,q'}$. Supposons donc $0 \leqslant k \leqslant q-1$.

Par hypothèse, si $\theta(h)$ est assez grand :

$$\underline{m}^{\theta(h)} \,.\, \mathfrak{J}_k(\mathrm{M})^{\theta(h)} \subset \underline{m}^h (\mathrm{J}_{(p-k)(q-k)}(\mathfrak{J}_{k+1}(\mathrm{M})))^h \,.\, \mathfrak{F}_k^h,$$

où $\mathfrak{F}_k$ est l'idéal de $\mathcal{E}$ engendré par les puissances d'ordre

$$(p-k+4)+(k+2)(p-k)(q-k)$$

des mineurs d'ordre k de M. Considérons l'un de ces mineurs, par exemple $\eta_k(\mathrm{M})$; puisque $[\eta_k(\mathrm{M})]^{k+1} \,.\, \mathfrak{J}_{k+1}(\mathrm{M}) \subset \mathcal{L}_{k+1}(\mathrm{M})$ (voir lemme 3), il en résulte que

$$[\eta_k(\mathrm{M})]^{(k+2)(p-k)(q-k)} \,.\, \mathrm{J}_{(p-k)(q-k)}(\mathfrak{J}_{k+1}(\mathrm{M}))$$
$$\subset \mathrm{J}_{(p-k)(q-k)}(\mathcal{L}_{k+1}(\mathrm{M})) = \mathcal{L}_{k+1}(\mathrm{M}) + \widetilde{\mathcal{L}}_{k+1}(\mathrm{M})\,.$$

D'où :

$$\eta_k(\mathrm{M})^{(p-k+4)+(k+2)(p-k)(q-k)} \,.\, \mathrm{J}_{(p-k)(q-k)}(\mathfrak{J}_{k+1}(\mathrm{M}))$$
$$\subset \eta_k(\mathrm{M})^{p-k+4} \,.\, \widetilde{\mathcal{L}}_{k+1}(\mathrm{M}) + \mathfrak{J}_{k+1}(\mathrm{M})\,.$$

Il résulte aussitôt du lemme 5 que : $\mathrm{Im}\,\Gamma_{\mathrm{M}} + \Sigma_{k+1,h} \supset \Sigma_{k,\theta(h)}$.

c) $\Longrightarrow$ a) Par hypothèse, il existe un entier $s>0$, tel que, $\forall\, \mathrm{N} \in \Omega_{p,q}$ vérifiant $(\mathrm{N}) \subset \underline{m}^{s+1}$, alors $\mathrm{N} \in \mathrm{Im}\,\Gamma_{\mathrm{M}}$. Nous allons démontrer que $\forall\, \mathrm{M}' \in \Omega_{p,q}$ vérifiant $(\mathrm{M}') \subset \underline{m}^{s+3}$, il existe $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ et des matrices inversibles $\mathrm{P} \in \Omega_p$ et $\mathrm{Q} \in \Omega_q$ telles que :

$$\mathrm{M} + \mathrm{M}' = \mathrm{Q} \,.\, \tau^*(\mathrm{M}) \,.\, \mathrm{P}\,.$$

Soient $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbf{R}^n$ et I l'intervalle $[0\,,1]$. Si N est une matrice à coefficients dans $\mathcal{E}$, on désigne par $\underline{\mathrm{N}}$ une matrice à coefficients dans $\mathcal{E}(\mathcal{V})$, induisant le germe N à l'origine. Si $\mathrm{N}(\underline{x}\,,t)$ est une matrice à p colonnes et q lignes à coefficients dans $\mathcal{E}(\mathcal{V} \times \mathrm{I})$, on désigne par $\Gamma_{\mathrm{N}(\underline{x},t)}$ l'homomorphisme :

$$(\mathrm{P}(\underline{x}\,,t)\,,\mathrm{Q}(\underline{x}\,,t)\,,\underline{u}(\underline{x}\,,t)) \in \mathcal{E}(\mathcal{V} \times \mathrm{I})^{p^2+q^2+n} \longrightarrow \mathrm{N}(\underline{x}\,,t)\,\mathrm{P}(\underline{x}\,,t) +$$
$$+ \mathrm{Q}(\underline{x}\,,t)\,\mathrm{N}(\underline{x}\,,t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(\underline{x}\,,t)\,\frac{\partial \mathrm{N}(\underline{x}\,,t)}{\partial x_i} \in \mathcal{E}(\mathcal{V} \times \mathrm{I})^{pq}$$

Soit $M' \in \Omega_{p,q}$, telle que $(M') \subset \underline{m}^{s+3}$. Posons $M(\underline{x}, t) = \underline{M} + t\underline{M}'$. Montrons que, si $\mathcal{V}$ est assez petit, $-\underline{M}' \in \underline{m}^2_{\mathcal{V}} . \operatorname{Im} \Gamma_{M(\underline{x},t)}$ ($\underline{m}_{\mathcal{V}}$ est l'idéal de $\mathcal{E}(\mathcal{V})$ formé des fonctions nulles à l'origine).

Or, les matrices $\underline{M}'$ et $\dfrac{\partial \underline{M}'}{\partial x_i}$ ont leurs coefficients respectivement dans $\underline{m}^{s+3}_{\mathcal{V}}$ et $\underline{m}^{s+2}_{\mathcal{V}}$, et donc en diminuant $\mathcal{V}$ si nécessaire :

$\operatorname{Im} \Gamma_{M(\underline{x},t)} \subset \operatorname{Im} \Gamma_{\underline{M}} \subset \operatorname{Im} \Gamma_{M(\underline{x},t)} + \underline{m}_{\mathcal{V}} . \operatorname{Im} \Gamma_{\underline{M}}$ et $-\underline{M}' \in \underline{m}^2_{\mathcal{V}} . \operatorname{Im} \Gamma_{\underline{M}}$.

On en déduit, si $\mathcal{V}$ est assez petit :

$$\operatorname{Im} \Gamma_{\underline{M}} = \operatorname{Im} \Gamma_{M(\underline{x},t)} \quad \text{et} \quad -M' \in \underline{m}^2_{\mathcal{V}} . \operatorname{Im} \Gamma_{M(\underline{x},t)} .$$

Donc, il existe des matrices $\alpha(\underline{x}, t)$, $\beta(\underline{x}, t)$, $\underline{u}(\underline{x}, t)$ à coefficients dans $\underline{m}^2_{\mathcal{V}} . \mathcal{E}(\mathcal{V} \times I)$ telles que :

$$\beta(\underline{x}, t)\, M(\underline{x}, t) + M(\underline{x}, t)\, \alpha(\underline{x}, t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(\underline{x}, t) \frac{\partial M(\underline{x}, t)}{\partial x_i} + \underline{M}' = 0$$

(α, β, matrices carrées d'ordre p et q respectivement et

$$\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)) \tag{2}$$

Puisque $\underline{u}(\underline{0}, t) = \dfrac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}(\underline{0}, t) = \underline{0}$, en choisissant $\mathcal{V}$ assez petit, il il existe

$$\tau(\underline{x}, t) = \underline{x} + \nu(\underline{x}, t) \in \mathcal{E}(\mathcal{V} \times I)^n$$

tel que
$$\nu(\underline{0}, t) = \frac{\partial \nu}{\partial x_i}(\underline{0}, t) = \nu(\underline{x}, 0) = \underline{0}$$

et :
$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(\underline{x}, t) = \underline{u}(\tau(\underline{x}, t), t) \tag{3}$$

Donc pour chaque valeur fixée de t, $\tau_t(\underline{x}) = \tau(\underline{x}, t)$ définit un difféomorphisme local au voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^n$.

Il existe des matrices

$$Q(\underline{x}, t) = I_q + Q'(\underline{x}, t) \; ; \; P(\underline{x}, t) = I_p + P'(\underline{x}, t)$$

telles que $Q'(\underline{x}, t)$, $P'(\underline{x}, t)$ aient leurs coefficients dans $t . \underline{m}_{\mathcal{V}} . \mathcal{E}(\mathcal{V} \times I)$ (donc $P(\underline{x}, t)$ et $Q(\underline{x}, t)$ sont inversibles, si $\mathcal{V}$ est assez petit) et :

$$Q^{-1}(\underline{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} Q(\underline{x}, t) = \beta(\tau(\underline{x}, t), t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\underline{x}, t) \cdot P^{-1}(\underline{x}, t) = \alpha(\tau(\underline{x}, t), t) \tag{4}$$

D'après (2), (3) et (4) :

$$Q^{-1}(\underline{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} [Q(\underline{x}, t) \cdot M(\tau(\underline{x}, t), t) \cdot P(\underline{x}, t)] \cdot P^{-1}(\underline{x}, t) =$$

$$= \beta(\tau(\underline{x}, t), t) \cdot M(\tau(\underline{x}, t), t) + M(\tau(\underline{x}, t), t) \cdot \alpha(\tau(\underline{x}, t), t)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial M}{\partial x_i} (\tau(\underline{x}, t), t) \cdot u_i(\tau(\underline{x}, t), t) + \underline{M}'(\tau(\underline{x}, t)) = 0$$

si $\mathcal{V}$ est assez petit. Donc la matrice $Q(\underline{x}, t) \cdot M(\tau(\underline{x}, t), t) \cdot P(\underline{x}, t)$ est indépendante du paramètre t, et :

$$Q(\underline{x}, 0) \cdot M(\tau(\underline{x}, 0), 0) \cdot P(\underline{x}, 0) = \underline{M} =$$

$$= Q(\underline{x}, 1) \cdot \{(\underline{M} + \underline{M}') \circ \tau(\underline{x}, 1)\} \cdot P(\underline{x}, 1).$$

D'où en passant aux germes à l'origine : $M + M' = Q \cdot \tau^*(M) \cdot P$, où $\tau \in \mathrm{Dif}(n)$ et P et Q sont inversibles (c.q.f.d.).

Appendice.

1. Soit $\mathfrak{F} = \underline{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$ l'anneau des séries formelles à n variables, à coefficients dans un corps commutatif $\underline{k}$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathfrak{F}$.

PROPOSITION 1. – *Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de tous les $\underline{k}$-homomorphismes de $\mathfrak{F}/\mathfrak{p}$ dans $\underline{k}[[t]]$. Alors, si $\underline{k}$ est algébriquement clos,* $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} \mathrm{Ker}\, H = (0)$.

En effet, soit h la cohauteur de $\mathfrak{p}$; si $h = 0$, le résultat est trivial ; sinon il existe des formes linéaires indépendantes $y_1, \ldots, y_n$ telles que, si l'on pose $\mathfrak{F}' = \underline{k}[[y_1, \ldots, y_h]]$:

1) L'homomorphisme $\mathfrak{F}' \longrightarrow \mathfrak{F}/\mathfrak{p}$, composé de l'injection canonique de $\mathfrak{F}'$ dans $\mathfrak{F}$ et de la projection canonique de $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{F}/\mathfrak{p}$ est

injectif (i.e. $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{F}' = (0)$) et le corps K des fractions de $\mathfrak{F}/\mathfrak{p}$ est un espace vectoriel de dimension finie r sur le corps des fractions de $\mathfrak{F}'$.

2) Il existe un polynôme distingué :

$$\mathrm{P} = y_{h+1}^{r} + a_{r-1}\, y_{h+1}^{r-1} + \ldots + a_0 \in \mathfrak{p}\,,$$

les a_i appartenant à l'idéal maximal de $\mathfrak{F}'$. Si Δ est le discriminant de ce polynôme, $\Delta \neq 0$ et $\Delta \in \mathfrak{F}'$. Désignons par $\mathfrak{F}'_\Delta$ le sous-anneau de K formé des fractions dont le numérateur appartient à $\mathfrak{F}'$ et le dénominateur est une puissance de Δ. On a l'inclusion :

$$\mathfrak{F}/\quad \subset \mathfrak{F}'_\Delta\,[y_{h+1}]\,:$$

tout élément de $\mathfrak{F}/$ s'écrit comme un polynôme en y_{h+1} de degré $\leqslant r-1$, à coefficients dans $\mathfrak{F}'_\Delta$.

Soit H' un $\underline{k}$-homomorphisme de $\mathfrak{F}'$ dans $\underline{k}[[t^{r!}]]$, tel que $\mathrm{H}'(\Delta) \neq 0$. Le théorème de Puiseux affirme l'existence d'une série formelle $\xi \in \underline{k}[[t]]$ telle que : $\xi^r + \mathrm{H}'(a_{r-1})\,\xi^{r-1} + \ldots + \mathrm{H}'(a_0) = 0$. Puisque $\mathrm{H}'(\Delta) \neq 0$, l'homomorphisme H' se prolonge de façon unique en un homomorphisme H de $\mathfrak{F}'_\Delta[y_{h+1}]$ dans le corps des fractions de $\underline{k}[[t]]$, tel que $\mathrm{H}(y_{h+1}) = \xi$. Mais on vérifie que $\mathrm{H}(\mathfrak{F}/\mathfrak{p}) \subset \underline{k}[[t]]$. En effet, tout élément y de $\mathfrak{F}/\mathfrak{p}$ vérifie une équation :

$$y^s + b_{s-1}\, y^{s-1} + \ldots + b_0 = 0$$

où les $b_i \in \mathfrak{F}'$. Donc $[\mathrm{H}(y)]^s + \mathrm{H}(b_{s-1})\,[\mathrm{H}(y)]^{s-1} + \ldots + \mathrm{H}(b_0) = 0$, et puisque les $\mathrm{H}'(b_i) = \mathrm{H}(b_i) \in \underline{k}[[t]]$, $\mathrm{H}(y) \in \underline{k}[[t]]$ (car $\underline{k}[[t]]$ est intégralement clos).

Soit $f \notin$: nous devons construire un homomorphisme $\mathrm{H} \in \mathcal{H}$ tel que $\mathrm{H}(f) \neq 0$(6). Or, il existe $g \in \mathfrak{F}$ et $f' \in \mathfrak{F}'$, $f' \neq 0$, tels que $fg - f' \in$. Avec les notations précédentes, nous pouvons choisir H' tel que $\mathrm{H}'(\Delta\,.\,f') \neq 0$, et donc, si H prolonge H', $\mathrm{H}(fg) = \mathrm{H}'(f') \neq 0$, donc $\mathrm{H}(f) \neq 0$, c.q.f.d.

COROLLAIRE. — *Soit $f \in \mathfrak{F}$, telle que $f(0) = 0$. Il existe un entier $p > 0$ et $g_1, \ldots, g_n \in \mathfrak{F}$ tels que :* $f^p = \sum_{i=1}^{n} g_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

(6) Si $\mathrm{H} \in \mathcal{H}$, on désigne encore par H l'homomorphisme de $\mathfrak{F}$ dans $\underline{k}[[t]]$ composé de H avec la projection canonique de $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{F}/$.

Pour la démonstration, on peut supposer $\underline{k}$ algébriquement clos. Désignons par I l'idéal engendré dans $\mathfrak{F}$ par les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \in [1, n]$. Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ les idéaux premiers associés à I. Il nous suffit de prouver que $f \in \mathfrak{p}_j$, $\forall j \in [1, s]$. Posons $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}$: avec les notations de la proposition I, montrons que $\forall$ H $\in \mathcal{H}$, H$(f) = 0$. Or,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{H}(f) = \frac{d}{dt}f(\mathrm{H}(y_1), \ldots, \mathrm{H}(y_n)) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) \cdot \frac{d}{dt}\mathrm{H}(y_i).$$

Puisque les $\frac{\partial f}{\partial y_i} \in \mathfrak{p}$, $\forall i \in [1, n]$, $\mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) = 0$ et donc $\frac{d}{dt}\mathrm{H}(f) = 0$. Puisque $f(0) = 0$, H$(f) = 0$. D'après la proposition I, $f \in \mathfrak{p}$ (c.q.f.d.).

2. *Fonctions différentiables et ensembles analytiques* (cf. Malgrange [7]).

Si $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathcal{O} = \mathbf{R}\{\{x_1, \ldots, x_n\}\}$, désignons par $\hat{\mathcal{J}}$ l'idéal engendré par $\mathcal{J}$ dans $\mathfrak{F} = \mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$. Si $\mathcal{V}$ est un germe d'ensemble analytique au voisinage de l'origine de R^n, désignons par $\mathcal{J}^k(\mathcal{V})$ (resp. $\mathcal{K}^k(\mathcal{V})$) l'idéal de $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{E}$) formé des germes k-plats sur $\mathcal{V}$, c'est-à-dire nuls sur $\mathcal{V}$ ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclus. On note $\mathcal{J}^0(\mathcal{V}) = \mathcal{J}(\mathcal{V})$; $\mathcal{K}^0(\mathcal{V}) = \mathcal{K}(\mathcal{V})$. On désigne par T la projection canonique de $\mathcal{E}$ sur $\mathfrak{F}$.

PROPOSITION 2. – *Avec les notations précédentes*

$$\widehat{\mathcal{J}(\mathcal{V})} = \mathrm{T}[\mathcal{K}(\mathcal{V})].$$

Soient $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_s$ les composantes irréductibles de $\mathcal{V}$; alors :

$\mathcal{J}(\mathcal{V}) = \mathcal{J}(\mathcal{V}_1) \cap \ldots \cap \mathcal{J}(\mathcal{V}_s)$; $\mathcal{K}(\mathcal{V}) = \mathcal{K}(\mathcal{V}_1) \cap \ldots \cap \mathcal{K}(\mathcal{V}_s)$.

Puisque $\mathfrak{F}$ est un module plat sur $\mathcal{O}$: $\widehat{\mathcal{J}(\mathcal{V})} = \widehat{\mathcal{J}(\mathcal{V}_1)} \cap \ldots \cap \widehat{\mathcal{J}(\mathcal{V}_s)}$. Donc :

$$\widehat{\mathcal{J}(\mathcal{V})} \subset \mathrm{T}[\mathcal{K}(\mathcal{V})] \subset \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{T}[\mathcal{K}(\mathcal{V}_i)].$$

Si, $\forall i \in [1, s]$, $\widehat{\mathcal{J}(\mathcal{V}_i)} = \mathrm{T}[\mathcal{K}(\mathcal{V}_i)]$, on aura $\widehat{\mathcal{J}(\mathcal{V})} = \mathrm{T}[\mathcal{K}(\mathcal{V})]$. Ainsi, il suffit de faire la démonstration lorsque $\mathcal{V}$ est un germe irréductible de dimension h. Posons $\mathcal{J}(\mathcal{V}) = \mathcal{J}$; $\mathcal{K}(\mathcal{V}) = \mathcal{K}$.

La complétée de l'algèbre analytique intégre $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ est une algèbre intègre $\mathcal{F}/\hat{\mathcal{J}}$ (Malgrange [7]). Donc $\mathcal{J}$ et $\hat{\mathcal{J}}$ sont des idéaux premiers de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$ respectivement et Coht $(\mathcal{J})$ = coht $(\hat{\mathcal{J}}) = h$.

Supposons que $T(\mathcal{K}) \supsetneq \hat{\mathcal{J}}$. Alors coht $(T(\mathcal{K})) <$ coht $(\hat{\mathcal{J}}) = h$. Le germe $\mathcal{V}$ est induit par un ensemble analytique $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$ dans un voisinage ouvert Ω de l'origine. Notons $\underset{\sim}{\mathcal{K}}$ l'idéal de $\mathcal{E}(\Omega)$ formé des fonctions nulles sur $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$. D'après le corollaire de la proposition 1, chapitre 1, il existe un voisinage ouvert $\Omega' \subset \Omega$ de 0 tel que :

$$\forall \underline{a} \in \Omega', \text{coht}(T_a(\underset{\sim}{\mathcal{K}})) \leqslant \text{coht}(T(\mathcal{K})) < \text{coht}(\hat{\mathcal{J}}) = h.$$

Or $\underset{\sim}{\mathcal{V}} \cap \Omega'$ contient des points au voisinage desquels $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$ est une variété analytique de dimension h. En un tel point $\underline{a}$, il est clair que coht $(T_{\underline{a}}(\underset{\sim}{\mathcal{K}})) = h$. D'où la contradiction.

PROPOSITION 3. – *Le germe d'ensemble analytique $\mathcal{V}$ est cohérent, si et seulement si $\mathcal{K}(\mathcal{V}) = \mathcal{J}(\mathcal{V}).\mathcal{E}$.*

Dans ce cas, $\quad \forall k \in \mathbf{N}, \mathcal{K}^{(k)}(\mathcal{V}) = \mathcal{J}^{(k)}(\mathcal{V}).\mathcal{E}$.

1. *La condition est suffisante* : Supposons $\mathcal{V}$ non cohérent. Soient $f_1, \ldots, f_p$ des générateurs de $\mathcal{J}(\mathcal{V})$ sur $\mathcal{A}$; Ω un voisinage de 0 dans lequel les f_i sont définies et posons :

$$\underset{\sim}{\mathcal{V}} = \{\underline{a} \in \Omega \,;\, f_1(\underline{a}) = \ldots = f_p(\underline{a}) = 0\}$$

Puisque $\mathcal{V}$ n'est pas cohérent, il existe une suite $\{\underline{a}_l\}_{l\in\mathbf{N}}$ de points distincts de $\underset{\sim}{\mathcal{V}} - \{0\}, \underline{a}_l \longrightarrow 0$; une suite $\{g_l\}_{l\in\mathbf{N}}$ de fonctions analytiques au voisinage de $\underline{a}_l$, nulles sur $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$ au voisinage de $\underline{a}_l$, telles que $\forall l \in \mathbf{N}, g_l$ ne soit pas combinaison linéaire des f_i, à coefficients analytiques au voisinage de $\underline{a}_l$. Donc par le théorème 4, chapitre 0, g_l n'est pas combinaison linéaire des f_i, à coefficients C^∞ au voisinage de $\underline{a}_l$.

Soit $\{\phi_l\}_{l\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{E}(\Omega)$, telle que : $\phi_l = 1$ au voisinage de $\underline{a}_l$; le support S_l de ϕ_l est contenu dans l'ouvert de définition de g_l et $S_l \cap S_{l'} = 0$, si $l \neq l'$; la fonction $\phi_l . g_l$ (égale à $\phi_l . g_l$ sur S_l et à 0 sur Ω-S_l) est nulle sur $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$. Par un argument bien connu de la théorie des espaces de Fréchet, il existe une suite $\{\lambda_l\}_{l\in N}$ de nombres réels $\neq 0$ tels que la série $\sum_{\lambda\in N} \lambda_l . \phi_l . g_l$ converge dans $\mathcal{E}(\Omega)$ vers une fonction g.

Si g_0 est le germe de g à l'origine, $g_0 \in \mathcal{K}(\mathcal{V})$, mais $g_0 \notin \mathcal{I}(\mathcal{V}).\mathcal{E}$.

2. *La condition est nécessaire* : Supposons $\mathcal{V}$ cohérent. Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions analytiques sur un voisinage ouvert Ω de l'origine, engendrant en tout point $\underline{a} \in \Omega$ l'idéal $\mathcal{I}_{\underline{a}}$ des germes de fonctions analytiques au voisinage de $\underline{a}$, nuls au voisinage de $\underline{a}$ sur $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$ ($\underset{\sim}{\mathcal{V}}$ est un sous-ensemble analytique de Ω induisant le germe $\mathcal{V}$ à l'origine). Soient $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par les f_i dans $\mathcal{E}(\Omega)$; $\mathcal{K}$ l'idéal de $\mathcal{E}(\Omega)$ formé des fonctions nulles sur $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$. L'idéal $\mathcal{I}$ est fermé (Théorème 2, chapitre 0) et d'après la proposition 2, $\forall \underline{a} \in \Omega$, $T_{\underline{a}}(\mathcal{K}) = \hat{\mathcal{I}}_{\underline{a}} = T_{\underline{a}}(\mathcal{I})$. Ainsi, par le théorème 1, chapitre 0, $\mathcal{I} = \mathcal{K}$, et donc $\mathcal{K}(\mathcal{V}) = \mathcal{I}(\mathcal{V}).\mathcal{E}$.

3. Supposons démontré que pour tout $h \leqslant k$, $\mathcal{K}^{(h)}(\mathcal{V}) = \mathcal{I}^{(h)}(\mathcal{V}).\mathcal{E}$, et démontrons que $\mathcal{K}^{(k+1)}(\mathcal{V}) = \mathcal{I}^{(k+1)}(\mathcal{V}).\mathcal{E}$. Considérons la suite exacte de $\mathcal{O}$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{(k+1)}(\mathcal{V}) \xrightarrow{i} \mathcal{I}^{(k)}(\mathcal{V}) \xrightarrow{\Psi} [\mathcal{O}/\mathcal{I}^{(k)}(\mathcal{V})]^n$$

où i est l'injection canonique et Ψ l'homomorphisme de $\mathcal{O}$-modules défini par la formule : $\Psi(f) = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$. En tensorisant cette suite exacte par $\mathcal{E}$, en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $\mathcal{E}$ est un module plat sur $\mathcal{O}$ (théorème 4, chapitre 0), on obtient une suite exacte de $\mathcal{E}$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{(k+1)}(\mathcal{V}).\mathcal{E} \xrightarrow{\tilde{i}} \mathcal{K}^{(k)}(\mathcal{V}) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} [\mathcal{E}/\mathcal{K}^{(k)}(\mathcal{V})]^n$$

Visiblement, le noyau de $\tilde{\Psi}$ est $\mathcal{K}^{(k+1)}(\mathcal{V})$. Ainsi

$$\mathcal{I}^{(k+1)}(\mathcal{V}).\mathcal{E} = \mathcal{K}^{(k+1)}(\mathcal{V}) :$$

ceci achève la démonstration, par récurrence sur k.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}$: l'idéal $\check{\mathfrak{p}}$ engendré par $\mathfrak{p}$ dans $\mathcal{E}$ n'est pas premier en général. On a cependant le résultat suivant :

PROPOSITION 4. – *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}$. Soient f et $g \in \mathcal{E}$ tels que $fg \in \check{\mathfrak{p}}$ et supposons que* $T(f) \notin \hat{\mathfrak{p}}$ *; alors $g \in \check{\mathfrak{p}}$.*

Supposons l'idéal $\mathfrak{p}$ engendré sur $\mathfrak{A}$ par des fonctions $f_1, \ldots, f_p$ analytiques sur un voisinage ouvert Ω de l'origine de $\mathbf{R}^n$. Soient $\underset{\sim}{f}$ et $\underset{\sim}{g} \in \mathcal{E}(\Omega)$ des représentants de f et g respectivement ; $\mathfrak{J}$ l'idéal engendré par les f_i dans $\mathcal{E}(\Omega)$; $\mathfrak{J}'$ l'idéal engendré par les f_i et $\underset{\sim}{f}$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$. Par hypothèse : $\operatorname{coht}(\mathrm{T}(\mathfrak{J}')) < \operatorname{coht} \hat{\mathfrak{p}} = \operatorname{coht} \mathfrak{p} = h$. D'après le corollaire de la proposition 1, chapitre 1, : $\operatorname{coht}(\mathrm{T}_{\underline{a}}(\mathfrak{J}')) < h$ pour tout $\underline{a} \in \Omega' \subset \Omega$, où Ω' est un voisinage ouvert de l'origine.

Si $\mathfrak{p}_{\underline{a}}$ est l'idéal de $\mathfrak{A}$, induit par $\mathfrak{p}$ en un point $\underline{a}$ suffisamment voisin de l'origine, *ou* $\mathfrak{p}_{\underline{a}} = \mathfrak{A}$, *ou* $\mathfrak{p}_{\underline{a}} = \mathfrak{p}_{\underline{a},1} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_{\underline{a},j_{\underline{a}}}$ où $j_{\underline{a}} \in \mathrm{N}^+$ et $\mathfrak{p}_{\underline{a},1}, \ldots, \mathfrak{p}_{\underline{a},j_{\underline{a}}}$ sont des idéaux premiers de $\mathfrak{A}$, de cohauteur h. (Ceci résulte trivialement de la cohérence d'un ensemble analytique complexe $\mathfrak{W} \subset \mathbf{C}^n$ et du fait que si $\mathfrak{W}$ est irréductible et de dimension h à l'origine, alors il existe un voisinage Ω de 0 dans $\mathbf{C}^n$, tel que $\forall \underline{a} \in \mathfrak{W} \cap \Omega$, $\dim_{\underline{a}} \mathfrak{W} = h$). On peut donc choisir Ω' assez petit pour que : $\forall \underline{a} \in \Omega'$, on ait, soit $\mathrm{T}_{\underline{a}}(\mathfrak{J}) = \hat{\mathfrak{p}}_{\underline{a}} = \mathfrak{F}$; soit

$$\mathrm{T}_{\underline{a}}(\mathfrak{J}) = \hat{\mathfrak{p}}_{\underline{a}} = \hat{\mathfrak{p}}_{\underline{a},1} \cap \ldots \cap \hat{\mathfrak{p}}_{\underline{a},j_{\underline{a}}} \quad \text{où} \quad \hat{\mathfrak{p}}_{\underline{a},1}, \ldots, \hat{\mathfrak{p}}_{\underline{a},j_{\underline{a}}}$$

sont des idéaux de $\mathfrak{F}$, de cohauteur h.

Finalement, si Ω' est assez petit, $\forall \underline{a} \in \Omega'$, $\mathrm{T}_{\underline{a}}(\underset{\sim}{g}) \cdot \mathrm{T}_{\underline{a}}(\mathfrak{J}') \subset \mathrm{T}_{\underline{a}}(\mathfrak{J})$. Si $\mathrm{T}_{\underline{a}}\mathfrak{J} = \mathfrak{F}$, alors $\mathrm{T}_{\underline{a}}(\underset{\sim}{g}) \in \mathrm{T}_{\underline{a}}(\mathfrak{J})$; sinon, $\forall i \in [1, j_{\underline{a}}]$: $\mathrm{T}_{\underline{a}}\underset{\sim}{g} \cdot \mathrm{T}_{\underline{a}}\mathfrak{J}' \subset \hat{\mathfrak{p}}_{\underline{a},i}$ et puisque $\operatorname{coht}(\mathrm{T}_{\underline{a}}\mathfrak{J}') < \operatorname{coht}(\hat{\mathfrak{p}}_{\underline{a},i}) = h$, $\mathrm{T}_{\underline{a}}\mathfrak{J}' \not\subset \hat{\mathfrak{p}}_{\underline{a},i}$ et donc $\mathrm{T}_{\underline{a}}\underset{\sim}{g} \in \hat{\mathfrak{p}}_{\underline{a},i}$. Finalement, $\mathrm{T}_{\underline{a}}\underset{\sim}{g} \in \mathrm{T}_{\underline{a}}\mathfrak{J}$, ceci $\forall \underline{a} \in \Omega'$. Il en résulte que $\underset{\sim}{g}$ appartient ponctuellement sur Ω' à l'idéal engendré par les f_i dans $\mathcal{E}(\Omega')$. D'après les théorèmes 1 et 2, chapitre 0, $\underset{\sim}{g}$ appartient effectivement à cet idéal. Donc $g \in \check{\mathfrak{p}}$ (c.q.f.d.).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, chapitre 1, 2, 3, 4.

[2] L. HORMANDER, On the division of distributions by polynomials, *Arkiv för Mathematik* 3 (1958) p. 555-568.

[3] N. KUIPER, C^r-functions near non degenerate critical points, Notes polycopiées Uni. of Warwick (1966) – et résultats non publiés.

[4] N. LEVINSON, A polynomial canonical form for certain analytic functions of two variables at a critical point, *Bull. Ann. Math. Soc*, 66, (1960), p. 366.

[5] S. ŁOJASIEWICZ, Sur le problème de la division, *Studia Math* 18 (1959) p. 87-136.

[6] B. MALGRANGE, Ideals of differentiable functions, *Oxford Uni. Press* (1966).

[7] B. MALGRANGE, Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques, *Bull. Soc. Math. France* 91, (1963), p, 113 à 127.

[8] J. MATHER, On the preparation theorem of Malgrange ; Structural stability of mappings – notes miméographiées, Princeton 1966.

[9] J.P. SERRE, Algèbre locale, Multiplicités, *Lecture Notes in Mathematics*, 11, (1965).

[10] R. THOM, Un lemme sur les applications différentiables, *Bol. Soc. Mat Mexicana*, (1956) p. 59-71.

[11] R. THOM, Local Topological properties of differentiable mappings, Bombay colloquium on differential analysis, Oxford *Uni. Press* (1964).

[12] J. Cl. TOUGERON, Une généralisation du théorème des fonctions implicites, Equivalence des idéaux de fonctions différentiables, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 262, p. 487-489 et p. 563-565.

[13] H. WHITNEY, Local properties of analytic varieties.

Manuscrit reçu le 5 juin 1967

Jean Claude TOUGERON
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
35 – Rennes