ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HAÏM BRÉZIS

Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité

Annales de l'institut Fourier, tome 18, nº 1 (1968), p. 115-175

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_1_115_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 1 (1968), 115-175

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS NON LINÉAIRES DANS LES ESPACES VECTORIELS EN DUALITÉ

par Haïm BREZIS (1)

Un grand nombre d'articles traitant de problèmes variationnels non linéaires ont été publiés ces dernières années. Les premiers résultats essentiels concernant les opérateurs monotones ont été obtenus par F. Browder et G. Minty. Les propriétés de ces opérateurs ont alors été étudiées systématiquement par F. Browder en vue d'application à la résolution de problèmes aux limites elliptiques et paraboliques non linéaires (on trouvera dans [10] et [11] une importante bibliographie). J. Leray et J.L. Lions puis P. Hartman et G. Stampacchia ont montré que l'on pouvait étendre les résultats de F. Browder à des opérateurs plus généraux.

Dans ce travail on introduit deux vastes classes d'opérateurs non linéaires : les opérateurs de type M et les opérateurs pseudo-monotones. Ils englobent les opérateurs monotones ainsi que la plupart des opérateurs non linéaires utilisés par les auteurs précités, et possèdent des propriétés analogues à celles des opérateurs monotones.

On montre qu'un grand nombre des théorèmes énoncés jusqu'à présent dans le cadre des espaces de Banach réflexifs peuvent être généralisés à des espaces vectoriels en dualité.

Enfin, on applique les mêmes techniques pour résoudre des inéquations d'évolution abstraites. Les résultats obtenus dans cette direction se sont déjà révélés riches en applications à la résolution d'équations et d'inéquations d'évolution non linéaires, de problèmes paraboliques avec conditions aux limites unilatérales, etc.

Je suis profondément reconnaissant envers M. Choquet dont les conseils et encouragements m'ont été très précieux. Je remercie bien vivement M. Lions pour l'intérêt qu'il porte à ce travail.

(1) Attaché de recherche au C.N.R.S. Enregistré au C.N.R.S. sous le numéro A.O. 1593.

Le plan est le suivant :

1. Propriétés élémentaires des opérateurs monotones.
2. Les opérateurs de type M et la résolution d'équations non linéaires.
3. L'équation intégrale $u + \mathrm{K}\mathrm{A}u = f$.
4. Les opérateurs pseudo-monotones et la résolution d'inéquations non linéaires.
5. Inéquations d'évolution abstraites.
6. Applications.

1. PROPRIETES ELEMENTAIRES DES OPERATEURS MONOTONES

Soient E et F deux espaces vectoriels sur **R** mis en dualité par une forme bilinéaire (f, u), $f \in \mathrm{F}$, $u \in \mathrm{E}$. On supposera dans la suite que E *est muni d'une topologie d'espace vectoriel topologique, plus fine que* $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et que* F *est muni de la topologie* $\sigma(\mathrm{F}, \mathrm{E})$.

DEFINITION A. – *Soit* X *un sous-ensemble de* E. *On dit qu'une application* A *de* X *dans* F *est monotone si* $(\mathrm{A}x - \mathrm{A}y, x - y) \geqslant 0$, $\forall x, y \in \mathrm{X}$.

Il suffit en général d'imposer en plus de la monotonie une condition de continuité très faible pour avoir des résultats satisfaisants.

DEFINITION B. – *Soit* X *un sous-ensemble convexe de* E. *On dit qu'une application* A *de* X *dans* F *est hémicontinue si pour tout couple* $x, y \in \mathrm{X}$, *l'application* $t \in [0, 1] \longrightarrow (\mathrm{A}(x - tx + ty), x - y)$ *est continue.*

1.1. Exemples d'applications monotones non linéaires.

1) *Les applications de dualité* (F. Browder [11]). Soient E un espace vectoriel normé et E′ son dual. Les applications de dualité sont des ap-

plications monotones ''canoniques'' de E dans E$'$. Soit $x \in$ E, on pose

$$\begin{aligned} \mathrm{J}x &= \{f \in \mathrm{E}' \; ; \; (f, x) = \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \|f\| = \|x\|\} \\ &= \{f \in \mathrm{E}' \; ; \; (f, x) = \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \|f\| \leqslant \|x\|\}. \end{aligned}$$

L'ensemble Jx est un convexe fermé non vide (d'après Hahn-Banach) de E$'$. Si E$'$ *est strictement convexe,* Jx est réduit à un point et l'on désigne par J l'application de dualité $x \in \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{J}x \in \mathrm{E}'$.

Propriétés de J.

i) J *est monotone* ; plus précisément

$$(\mathrm{J}x - \mathrm{J}y \,,\, x - y) \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2 .$$

En effet

$$\begin{aligned} (\mathrm{J}x - \mathrm{J}y \,,\, x - y) = \|x\|^2 - (\mathrm{J}x \,,\, y) - (\mathrm{J}y \,,\, x) \\ + \|y\|^2 \geqslant (\|x\| - \|y\|)^2 . \end{aligned}$$

ii) J *est continu de* E *fort dans* E$'$ *muni de la topologie faible* $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E})$: en effet, supposons que J ne soit pas continu au point $x \in$ E , il existerait un voisinage ouvert U de Jx dans E$'$ faible et un ultrafiltre x_i sur E tels que $x_i \longrightarrow x$ dans E fort et $\mathrm{J}x_i \notin \mathrm{U}$. De plus $\mathrm{J}x_i \longrightarrow f$ dans E$'$ faible avec $f \notin$ U . Par suite,

$$(\mathrm{J}x_i \,,\, x_i) = \|x_i\|^2 \longrightarrow (f, x) = \|x\|^2 \quad \text{et}$$

$$\|f\| \leqslant \liminf \|\mathrm{J}x_i\| = \|x\| .$$

D'où $f = \mathrm{J}x \in \mathrm{U}$, ce qui est absurde.

Remarquons que si E$'$ est uniformément convexe, J est continu de E fort dans E$'$ fort.

2) *Les applications de proximité* (J.J. Moreau [28]). Soient H un espace de Hilbert et φ une fonction convexe semi-continue inférieurement (S.C.I.) de H dans $]-\infty, +\infty]$ non identiquement égale à $+\infty$. J.J. Moreau a montré dans [28] que pour tout $f \in$ H, il existe $u \in$ H unique noté $u = \mathrm{Prox}\, f$ tel que $(f - u \,,\, v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u), \forall v \in \mathrm{H}$. L'application $f \in \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{Prox}_\varphi f$ est monotone et continue de H fort dans H fort ; plus précisément

$$(\mathrm{Prox}_\varphi f_1 - \mathrm{Prox}_\varphi f_2, f_1 - f_2) \geqslant \|\mathrm{Prox}_\varphi f_1 - \mathrm{Prox}_\varphi f_2\|^2 , \forall f_1, f_2 \in \mathrm{H} .$$

En effet, on a :

$$(f_1 - u_1 , u_2 - u_1) \leqslant \varphi(u_2) - \varphi(u_1)$$

$$(f_2 - u_2 , u_1 - u_2) \leqslant \varphi(u_1) - \varphi(u_2) .$$

D'où par addition :

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leqslant (f_1 - f_2 , u_1 - u_2) .$$

En particulier la projection sur un convexe fermé X dans un espace de Hilbert est monotone ; il suffit de remarquer que $\mathrm{Proj}_X = \mathrm{Prox}_\varphi$ où φ désigne la fonction indicatrice de X (c'est-à-dire $\varphi(x) = 0$ si $x \in X$ et $\varphi(x) = +\infty$ si $x \notin X$).

3) Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $2 \leqslant p < +\infty$. L'application

$$u \in L_p(\Omega) \longrightarrow Au = |u|^{p-2} u$$

est monotone hémicontinue de $L_p(\Omega)$ dans son dual. Soient

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ u \in L_p(\Omega) \ ; \ D_i u \in L_p(\Omega) , 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

$\left(\text{où } D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\right.$ désigne la dérivée au sens des distributions$\Big)$ muni de sa norme usuelle, et $W_0^{1,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Alors l'application

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow Au = -\sum_{i=1}^{n} D_i(|D_i u|^{p-2} D_i u)$$

est monotone hémicontinue de $W_0^{1,p}$ dans son dual.

1.2. Caractérisation de certaines applications monotones.

DEFINITION C. – *Soient* E_1 *et* E_2 *deux espaces vectoriels localement convexes séparés,* $x \in E_1$ *et* Ω *un voisinage de* x. *On dit qu'une application* f *de* Ω *dans* E_2 *est différentiable au sens de Gateaux au point* x *s'il existe une application linéaire et continue* $y \longrightarrow f'(x) . y$ *de* E_1 *dans* E_2 *telle que pour tout*

$$y \in E_1 \, , \, \lim_{t \to 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} = f'(x) \, . \, y \, .$$

PROPOSITION 1. – *Soient* E *un espace localement convexe séparé,* E′ *son dual,* Ω *un ouvert convexe de* E *et f une fonction numérique définie sur* Ω*, différentiable au sens de Gateaux dans* Ω*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *f est convexe.*

ii) *L'application* $x \in \Omega \longrightarrow f'(x) \in E'$ *est monotone hémicontinue.*

Démonstration. – Soient $x \, , y \in \Omega$ et $\varphi(t) = f(y + tx - ty)$.

i) $\Longrightarrow$ ii). La fonction φ est convexe et dérivable sur $[0 \, , 1]$ avec $\varphi'(t) = (f'(y + tx - ty) \, , x - y)$. La fonction φ' est donc croissante et continue sur $[0 \, , 1]$. En particulier, $\varphi'(0) \leqslant \varphi'(1)$, c'est-à-dire $(f'(y) \, , x - y) \leqslant (f'(x) \, , x - y)$.

ii) $\Longrightarrow$ i). La fonction φ est dérivable sur $[0 \, , 1]$ et φ' est croissante. Par suite φ est convexe et donc f est aussi convexe.

PROPOSITION 2. – *Soient* Ω *un ouvert convexe de* E *et* A *une application de* Ω *dans* F *différentiable au sens de Gateaux dans* Ω.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) A *est monotone hémicontinu de* Ω *dans* F

ii) $(A'(u) \, . \, x \, , x) \geqslant 0, \forall u \in \Omega \, , \forall x \in E$.

Démonstration. – i) $\Longrightarrow$ ii). On a

$$A'(u) \, . \, x = \lim_{t \to 0} \frac{A(u + tx) - Au}{t}$$

Donc : $$(A'(u) \, . \, x \, , x) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{A(u + tx) - Au}{t} \, , x \right) .$$

Mais $(A(u + tx) - Au \, , tx) \geqslant 0$. D'où : $(A'(u) \, . \, x \, , x) \geqslant 0$.

ii) $\Longrightarrow$ i). Soient $x, y \in \Omega$ et $\varphi(t) = (A(y + tx - ty), x - y)$. La fonction φ est dérivable sur $[0, 1]$ avec

$$\varphi'(t) = (A'(y + tx - ty) . x - y , x - y) \geqslant 0 .$$

Il en résulte que la fonction φ est croissante. En particulier, $\varphi(0) \leqslant \varphi(1)$ montre que A est monotone.

1.3. Quelques propriétés élémentaires des opérateurs monotones.

DEFINITION D. – Soient $x_0 \in E$ et S un sous-ensemble de E avec $x_0 \notin S$. On dit que S *entoure* x_0 si toute demi-droite issue de x_0 rencontre S.

PROPOSITION 3. – *Soient* $x_0 \in E$, S *un sous-ensemble de* E *entourant* x_0 *et* A *une application monotone de* $S \cup \{x_0\}$ *dans* F. *Alors* $Ax_0 \in \overline{c(A(S))}$: *enveloppe convexe fermée de* A(S) *dans* F.

Démonstration. – Supposons que $Ax_0 \notin \overline{c(A(S))}$. Il existe alors $u \in E$ (d'après Hahn-Banach) tel que

$$(Ax , u) < (Ax_0 , u) \quad , \quad \forall x \in S .$$

Mais la demi-droite $x_0 + \lambda u$, $\lambda > 0$ rencontre S au point $x_0 + \lambda_0 u$ et

$$(A(x_0 + \lambda_0 u) - Ax_0 , \lambda_0 u) \geqslant 0 .$$

D'où $(Ax_0 , u) \leqslant (A(x_0 + \lambda_0 u) , u)$; ce qui est absurde.

La proposition 3 généralise un résultat de Kačurovski [18] (théorème 1).

PROPOSITION 4. – *Soient* X *un sous-ensemble convexe de* E, A *une application monotone hémicontinue de* X *dans* F *et* φ *une fonction convexe de* X *dans* $]-\infty, +\infty]$ *non identiquement égale à* $+\infty$. *Soient* $u \in X$ *et* $f \in F$; *les conditions suivantes sont équivalentes*:

i) $(f - Au , v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \quad , \quad \forall v \in X$

ii) $(f - Av , v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \quad , \quad \forall v \in X$

iii) $(f - Av , v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \quad , \quad \forall v \in \overset{\circ}{X}$

Si $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$ ($\overset{\circ}{X}$ *désigne l'intérieur de* X) *et si* φ *n'est pas identiquement égale à* $+\infty$ *sur* $\overset{\circ}{X}$.

Démonstration. – i) $\Longrightarrow$ ii). En effet, on a :

$$(f - Av , v - u) \leqslant (f - Au , v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \quad , \quad \forall\, v \in X$$

ii) $\Longrightarrow$ i). Soit $w \in X$; on pose $v_t = (1-t)u + tw$, $t \in]0,1]$. On a : $t(f - Av_t , w - u) \leqslant t(\varphi(w) - \varphi(u))$. En divisant par t et en passant à la limite quand $t \longrightarrow 0$ on obtient :

$$(f - Au , w - u) \leqslant \varphi(w) - \varphi(u) \quad , \quad \forall\, w \in X .$$

L'implication ii) $\Longrightarrow$ iii) est évidente.

iii) $\Longrightarrow$ i). Soit $w \in \overset{\circ}{X}$, $v_t = (1-t)u + tw \in \overset{\circ}{X}$, $\forall\, t \in]0,1]$. D'où $t(f - Av_t , w - u) \leqslant t(\varphi(w) - \varphi(u))$. En divisant par t et en passant à la limite quand $t \longrightarrow 0$ on obtient :

$$(f - Au , w - u) \leqslant \varphi(w) - \varphi(u) \quad , \quad \forall\, w \in \overset{\circ}{X} .$$

Soit $u_1 \in \overset{\circ}{X}$ tel que $\varphi(u_1) < +\infty$; soit $v \in X$, $w_t = (1-t)v + tu_1 \in \overset{\circ}{X}$, $\forall\, t \in [0,1]$. Donc

$$(f - Au , v - u + tu_1 - tv) \leqslant (1-t)\,\varphi(v) + t\varphi(u_1) - \varphi(u) .$$

En passant à la limite quand $t \longrightarrow 0$, on a :

$$(f - Au , v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \quad , \quad \forall\, v \in X .$$

La proposition 4 généralise un résultat de F. Browder [13].

COROLLAIRE 5. – *Soient* A *une application monotone hémicontinue de* E *dans* F *et* φ *une fonction convexe S.C.I. de* E *dans* $]-\infty, +\infty]$ *non identiquement égale à* $+\infty$. *Alors pour tout* $f \in F$, *l'ensemble des solutions de l'inéquation*

i) $\qquad (f - Au , v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \quad , \quad \forall\, v \in E$

est un convexe fermé de E.

En particulier l'ensemble des solutions de l'équation $Au = f$ *est un convexe fermé de* E.

Démonstration. – D'après la proposition 4, l'inéquation i) est équivalente à l'inéquation ii) ; or il est évident que l'ensemble des solutions de ii) est un convexe fermé.

Remarques. – 1) En général, l'image directe ou l'image réciproque d'un convexe par une application monotone hémicontinue n'est pas convexe.

2) Tout sous-ensemble d'un hyperplan fermé de E peut être considéré comme l'image réciproque d'un point de F par une application monotone (non hémicontinue).

PROPOSITION 6. – *Soient* X *un sous-ensemble convexe de* E *et* A *une application monotone hémicontinue de* E *dans* F. *Pour tout filtre* u_i *qui converge vers* u *dans* X *tel que* $\limsup\,(\mathrm{A}u_i\,,\,u_i-u)\leqslant 0$ *on a :*

$$(\mathrm{A}u\,,\,u-v)\leqslant \liminf\,(\mathrm{A}u_i\,,\,u_i-v)\quad,\quad \forall\, v\in \mathrm{X}\,.$$

Démonstration. – On a $(\mathrm{A}u\,,\,u_i-u)\leqslant(\mathrm{A}u_i\,,\,u_i-u)$.

D'où $$\lim(\mathrm{A}u_i\,,\,u_i-u)=0\,.$$

Soient $v\in\mathrm{X}\,,\,t\in\,]0\,,1]$ et $w=(1-t)u+tv\,.$

On a $$(\mathrm{A}u_i-\mathrm{A}w\,,\,u_i-w)\geqslant 0\,,$$

c'est-à-dire

$$-(\mathrm{A}u_i\,,\,u_i-u)+(\mathrm{A}(u-tu+tv),u_i-u+tu-tv)\leqslant t(\mathrm{A}u_i\,,\,u-v)\,.$$

On obtient donc en passant à la limite

$$t(\mathrm{A}(u-tu+tv)\,,u-v)\leqslant t\,\liminf(\mathrm{A}u_i\,,\,u-v)\,.$$

En divisant par t et en passant à la limite quand $t\longrightarrow 0$, il vient :

$$(\mathrm{A}u\,,\,u-v)\leqslant\liminf(\mathrm{A}u_i\,,\,u-v)=\liminf(\mathrm{A}u_i\,,\,u_i-v)\,.$$

COROLLAIRE 7. – *Soit* A *une application monotone hémicontinue de* E *dans* F. *Pour tout filtre* u_i *sur* E *tel que* $u_i\longrightarrow u$, $\mathrm{A}u_i\longrightarrow f$ *et* $\limsup(\mathrm{A}u_i\,,\,u_i)\leqslant(f\,,\,u)$, *on a* $\mathrm{A}u=f$.

Démonstration. – Il résulte de la proposition 6 que

$$(\mathrm{A}u\,,\,u-v)\leqslant\liminf(\mathrm{A}u_i\,,\,u_i-v)\leqslant(f\,,\,u-v)\quad\forall\,v\in\mathrm{E}\,.$$

D'où $\mathrm{A}u=f\,.$

COROLLAIRE 8. – *Soit* E *un espace de Banach ; toute application* A *linéaire et positive de* E *dans* E′ (*c'est-à-dire* $(\mathrm{A}v\,,\,v) \geqslant 0$, $\forall\, v \in \mathrm{E}$) *est continue de* E *fort dans* E′ *fort.*

Démonstration. – D'après le corollaire 7, le graphe de A est fermé dans $\mathrm{E} \times \mathrm{E}'$; il résulte alors du théorème du graphe fermé que A est continu.

PROPOSITION 9. – *Soit* A *une application monotone hémicontinue de* E *dans* F ; *les restrictions de* A *aux sous-espaces vectoriels de* E *de dimension finie sont continues.*

Démonstration. – On se place d'abord dans le cas où E est de dimension finie. D'après le corollaire 7, le graphe de A est fermé. Il suffit donc de montrer que A est borné (c'est-à-dire transforme les bornés en des bornés). Supposons que A ne soit pas borné ; il existerait une suite u_n de E telle que

$$u_n \longrightarrow u,\ \|\mathrm{A}u_n\| \longrightarrow +\infty,\ z_n = \frac{\mathrm{A}u_n}{\|\mathrm{A}u_n\|} \longrightarrow z \text{ avec } \|z\| = 1\,.$$

D'autre part $(\mathrm{A}u_n - \mathrm{A}v\,,\,u_n - v) \geqslant 0$, $\forall\, v \in \mathrm{E}$. En divisant par $\|\mathrm{A}u_n\|$ et en passant à la limite on obtient $(z\,,\,u - v) \geqslant 0$, $\forall\, v \in \mathrm{E}$; d'où $z = 0$, ce qui est en contradiction avec $\|z\| = 1$. Dans le cas général, soit E_0 un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $v \in \mathrm{E}$, montrons que l'application $u \in \mathrm{E}_0 \longrightarrow (\mathrm{A}u\,,\,v)$ est continue. Soient E_1 l'espace engendré par E_0 et u, j l'injection canonique de E_1 dans E et j^* son adjoint de F sur E'_1. Il est évident que $j^*\mathrm{A}j$ est monotone hémicontinu de E_1 dans E'_1. D'après ce qui précède, $j^*\mathrm{A}j$ est continu, et donc l'application $u \in \mathrm{E}_0 \longrightarrow (\mathrm{A}u\,,\,v)$ est aussi continue.

2. LES OPERATEURS DE TYPE M ET LA RESOLUTION D'EQUATIONS NON LINEAIRES

DEFINITION E. – *On dit qu'une application* A *de* E *dans* F *est de type* M *si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

(M_1) *Pour tout filtre* u_i *porté par un ensemble compact de* E *tel que* $u_i \longrightarrow u$ *dans* E, $Au_i \longrightarrow f$ *dans* F *et* $\limsup (Au_i , u_i) \leqslant (f , u)$ *on a* $Au = f$.

(M_2) *Les restrictions de* A *aux sous-espaces vectoriels de* E *de dimension finie sont continues.*

Remarque. – Si E est un espace de Banach réflexif et séparable muni de la topologie faible $\sigma(E , E')$ avec $F = E'$ et si A est borné, il est équivalent de formuler la propriété (M_1) pour des suites.

Introduisons une *notation* : Soient X et Y deux sous-ensembles convexes de E ; on pose

$$\mathrm{Int}_Y X = \left\{ x \in X , Y - x \subset \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda(X - x) \right\}$$

Ainsi $\mathrm{Int}_X X = X$ et $\mathrm{Int}_E X$ est l'intérieur de X pour la topologie localement convexe la plus fine de E.

2.1. Théorèmes d'existence.

Nous indiquons ici les théorèmes que nous démontrerons par la suite.

THEOREME 10. – *Soient* X *un convexe compact absorbant de* E *et* A *une application de type* M *de* E *dans* F *telle que* $(Av , v) \geqslant 0$, $\forall v \in X$, $v \notin \mathrm{Int}_E X$. *Alors l'ensemble* $\{u \in X ; Au = 0\}$ *est non vide et compact.*

THEOREME 11. – *Soient* X *un convexe compact de* E *contenant* 0 *et* A *une application de type* M *de* E *dans* F *telle que* $(Av , v) > 0$, $\forall v \in E$, $v \notin X$. *Alors l'ensemble* $\{u \in X , Au = 0\}$ *est non vide et compact.*

THEOREME 12. – *On suppose que* $\dim E \geqslant 2$. *Soient* X *un convexe compact de* E *contenant* 0 *et* A *une application de type* M *de* E *dans* F *telle que* $(Av , v) \neq 0$, $\forall \in E$, $v \notin X$. *Alors l'ensemble*

$$\{u \in X , Au = 0\}$$

est non vide et compact.

Les démonstrations de ces théorèmes utilisent un lemme dû à F. Browder. (cf. aussi [16]).

LEMME 13. – *Soient* E *un espace de dimension finie,* X *un convexe compact de* E, A *une application continue de* X *dans* E′ *et* φ *une fonction convexe* S.C.I. *de* X *dans* $]-\infty\,.+\infty]$, *non identiquement égale à* $+\infty$.

Alors pour tout $f \in E'$, *il existe* $u \in X$ *tel que*

$$(f - Au\,,\, v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \qquad \forall\, v \in X\,. \tag{2.1}$$

Démonstration. – Le raisonnement suivant fait appel à la notion d'application de proximité (cf. 1-1) et simplifie la démonstration de F. Browder [13]. On pose $\Psi(x) = \varphi(x)$ si $x \in X$ et $\Psi(x) = +\infty$ si $x \notin X$. Ψ est une fonction convexe S.C.I. de E dans $]-\infty\,,+\infty]$. E identifié avec E′ est muni d'une structure hilbertienne. L'inéquation (2.1) s'écrit :

$$(f - Au + u - u\,,\, v - u) \leqslant \Psi(v) - \Psi(u) \qquad \forall\, v \in E$$

ou encore $u = \operatorname{Prox}_{\Psi}(f - Au + u)$. D'après le théorème de point fixe de Brouwer cette équation admet une solution puisque l'application $\operatorname{Prox}_{\Psi}$ est continue de E dans X.

Démonstration du théorème 10. – On se place d'abord dans le cas où E est de dimension finie. Le lemme 13 appliqué avec $f = 0$ et $\varphi = 0$ montre qu'il existe $u \in X$ tel que

$$(Au\,,\, v - u) \geqslant 0 \qquad \forall\, v \in X\,. \tag{2.2}$$

Si $u \in \operatorname{Int}_E X$, soit $w \in E$; il existe $\lambda > 0$ et $v \in X$ tels que $w = \lambda(v - u)$. D'où $(Au\,,\, w) \geqslant 0$, $\forall\, w \in E$, et par conséquent $Au = 0$.

Sinon $u \notin \operatorname{Int}_E X$; on a alors $(Au\,,\, u) \geqslant 0$ et d'autre part, $(Au\,,\, u) \leqslant 0$ (en prenant $v = 0$ dans (2.2)). D'où $(Au\,,u) = 0$ et par suite $(Au\,,\, v) \geqslant 0$, $\forall\, v \in X$. On en déduit que $Au = 0$ puisque X est absorbant.

Dans le cas général, soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble ordonné filtrant croissant des sous-espaces E_i de E de dimension finie. Soient j_i l'injection canonique de E_i dans E et j_i^* son adjoint de F sur E_i'. L'application $A_i = j_i^* A j_i$ est continue de E_i dans E_i'. $X_i = X \cap E_i$ est un convexe compact absorbant de E_i et $(A_i v, v) \geqslant 0$, $\forall v \in X_i$, $v \notin \mathrm{Int}_{E_i} X_i$. D'après ce qui précède il existe $u_i \in X_i$ tel que $A_i u_i = 0$. Par suite $(Au_i, u_i) = 0$ et $\lim\limits_{\mathcal{F}} Au_i = 0$. Suivant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$ on a $u_i \longrightarrow u$, $Au_i \longrightarrow f$ et $\lim\sup (Au_i, u_i) \leqslant 0$. D'où $Au = 0$. Enfin il est évident que $\{u \in X, Au = 0\}$ est fermé dans X, donc compact.

Démonstration du théorème 11. – On se place d'abord dans le cas où E est de dimension finie. $X \subset B_r = \{x \in E, \|x\| \leqslant r\}$. D'après le théorème 10 il existe $u \subset B_r$ tel que $Au = 0$; ce qui exige $u \in X$.

Dans le cas général, on achève la démonstration comme celle du théorème 10.

Démonstration du théorème 12. – On se place d'abord dans le cas où $2 \leqslant \dim E < +\infty$. Sur le complémentaire de X qui est connexe (Av, v) ne s'annule pas, donc conserve un signe constant. Le théorème 11 appliqué à A où à $-$ A montre qu'il existe $u \in X$ tel que $Au = 0$.

Dans le cas général la démonstration est analogue à celle du théorème 10.

Soit V un espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à deux. V et son dual V′ sont munis des topologies faibles $\sigma(V, V')$ et $\sigma(V', V)$.

COROLLAIRE 14. – *Soit* A *une application de type* M *de* V′ *dans* V *telle que* $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \dfrac{|(Ax, x)|}{\|x\|} = +\infty$. *Alors* A *est surjectif de* V′ *sur* V.

Démonstration. – Soit $f \in V$; on pose $A_1 x = Ax - f$. Soit $r > 0$ tel que $(A_1 x, x) \neq 0$, $\forall x \in V'$, $\|x\| > r$. D'après le théorème 12 il existe $u \in V'$ tel que $A_1 u = 0$. D'où $Au = f$.

COROLLAIRE 15. – *Soient* E *un espace de Banach réflexif et* A *une application hémicontinue de* E *dans* E′ *telle que*

$$(Ax - Ay, x - y) \geqslant c\|x - y\|^2, \forall x, y \in E \quad avec \quad c > 0.$$

Alors A *est bijectif de* E *sur* E′ *et* $\overline{A}^1$ *est monotone continu de* E′ *sur* E.

Démonstration. – A est monotone hémicontinu, donc de type M de E faible dans E'. D'autre part, $\dfrac{(Ax, x)}{\|x\|} \geqslant c\,\|x\| - \|A0\|$, $\forall\, x \in E$. Il résulte du corollaire 14 que A est surjectif. Il est évident que A est injectif et que l'application $\overline{A}^1$ est monotone lipschitzienne de E' sur E.

COROLLAIRE 16. – *Soient* E *un espace de Banach réflexif et* A *une application hémicontinue de* E *dans* E' *telle que*

$$(Ax - Ay\,, x - y) \geqslant c(\|x\| - \|y\|)^2\,, \forall\, x\,, y \in E \quad \textit{avec} \quad c > 0\,.$$

Alors A *est surjectif. Si de plus* E *est strictement convexe* A *est bijectif de* E *sur* E' *et* $\overline{A}^1$ *est monotone, borné et continu de* E' *fort dans* E *faible.*

Démonstration. – Il résulte du corollaire 14 que A est surjectif. Soit $f \in E'$; l'ensemble des solutions de l'équation $Au = f$ est un convexe fermé situé sur une sphère puisque si u et v sont deux solutions on a $\|u\| = \|v\|$. Donc lorsque E est strictement convexe, A est bijectif de E sur E'.

On a aussi $\|\overline{A}^1 f\| \leqslant \dfrac{1}{c}\,(\|f\| + \|A0\|)$, $\forall\, f \in E'$. $\overline{A}^1$ est continu de E' fort dans E faible ; en effet, supposons que f_i converge vers f dans E' fort suivant un filtre $\mathfrak{F}$. $u_i = \overline{A}^1 f_i$ est borné, et donc suivant un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ plus fin que $\mathfrak{F}$, u_i converge vers u dans E faible. Par conséquent, $Au = f$. On en déduit que u_i converge vers u dans E faible suivant $\mathfrak{F}$. Remarquons que si E est uniformément convexe, $\overline{A}^1$ est continu de E' fort dans E fort.

PROPOSITION 17. – *Soient* X *un convexe compact de* E *contenant* 0 *et* A *une application monotone hémicontinue de* E *dans* F. *Soit* S *un sous-ensemble de* X *entourant* 0 *tel que* $(Ax\,, x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in S$. *Alors l'ensemble* $\{u \in X\ ;\ Au = 0\}$ *est un convexe compact non vide de* E.

Démonstration. – On se place d'abord dans le cas où E est de dimension finie. Soit $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$. D'après le corollaire 15, il existe $u_\varepsilon \in E$ tel que $A_\varepsilon u_\varepsilon = Au_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon = 0$. Montrons que $u_\varepsilon \in X$; sinon il existerait $u \in S$ et $\rho > 1$ tels que $u_\varepsilon = \rho u$.

Mais $(Au_\varepsilon - Au, u_\varepsilon - u) \geqslant 0$ implique

$$(Au, u) \leqslant (Au_\varepsilon, u) = -\varepsilon\rho \, \|u\|^2 < 0 ;$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, $Au_\varepsilon \longrightarrow 0$ et suivant un ultrafiltre plus fin que le filtre des voisinages de 0 dans $\mathbf{R}_+$ on a $u_\varepsilon \longrightarrow u$, $Au_\varepsilon \longrightarrow 0$. D'où $Au = 0$.

Dans le cas général, la démonstration est analogue à celle du théorème 10.

Remarque. – La conclusion de la proposition 17 n'est pas valable, même en dimension finie si A est seulement continu. Pour le voir il suffit de considérer $E = \mathbf{R}^2$ et un ensemble S de la forme

S est homéomorphe à un convexe fermé et donc l'identité sur S se prolonge en une application continue A de E sur S telle que $(Ax, x) \geqslant 0$, $\forall x \in S$ et $Ax \neq 0$, $\forall x \in E$.

2.2. Un cas d'addition d'applications de type M.

En général, la somme de deux applications de type M n'est pas de type M même si l'une d'elles est monotone hémicontinue.

Exemple. – Soit H un espace de Hilbert muni d'une base orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$. $Au = -u$ est une application de type M et la projection P sur la boule unité est monotone hémicontinue. Montrons que l'application $B = A + P$ n'est pas de type M dans H faible. Soit $u_n = e_0 + e_n$, $Bu_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) u_n$. On a $u_n \longrightarrow e_0$ dans H faible et $Bu_n \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) e_0$ dans H faible ; enfin

$$(Bu_n, u_n) = (\sqrt{2} - 2) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 .$$

Or $$\mathrm{B}e_0 = 0 \neq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) e_0 .$$

On a toutefois le résultat suivant :

PROPOSITION 18. – *Soit* A *une application de type* M *de* E *dans* F *et* M *une application monotone continue de* E *dans* F, *alors l'application* B = A + M *est de type* M *de* E *dans* F.

Démonstration. – Soit u_i un filtre porté par un ensemble compact de E tel que $u_i \longrightarrow u$, $\mathrm{B}u_i \longrightarrow f$ et $\lim\sup(\mathrm{B}u_i, u_i) \leqslant (f, u)$. On a $\mathrm{M}u_i \longrightarrow \mathrm{M}u$ et $\mathrm{A}u_i \longrightarrow f - \mathrm{M}u$. Mais $(\mathrm{M}u_i - \mathrm{M}u, u_i - u) \geqslant 0$

donc $$(\mathrm{A}u_i, u_i) \leqslant (\mathrm{A}u_i, u) + (\mathrm{B}u_i - \mathrm{M}u, u_i - u) .$$

D'où $$\lim\sup(\mathrm{A}u_i, u_i) \leqslant (f - \mathrm{M}u, u) .$$

On en déduit que $\mathrm{A}u = f - \mathrm{M}u$ et $\mathrm{B}u = f$.

2.3. Exemples d'applications de type M.

1) Toute application monotone hémicontinue de E dans F est de type M.

2) Soit E un espace vectoriel normé ; toute application faiblement continue de E dans E′ (c'est-à-dire continue de E muni de la topologie faible $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ dans E′ muni de la topologie faible $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E})$) est de type M de E faible dans E′ faible. On en déduit que le théorème 10 généralise un résultat dû à M. Altman [1] et démontré par M. Shinbrot dans [29].

3) Les applications pseudo-monotones introduites dans le § 4 constituent une classe importante d'opérateurs de type M. Il en résulte que le théorème 10 et ses corollaires généralisent des résultats de F. Browder [8], [11], [12] et de J. Leray et J.L. Lions [22] (cf. aussi I.M. Višik [31]).

3. L'EQUATION INTEGRALE $u + \mathrm{K}\mathrm{A}u = f$

Certaines équations intégrales non linéaires du type de Hammerstein [15] peuvent se mettre sous la forme $u + \mathrm{KA}u = f$ où K est un opérateur linéaire positif et A un opérateur non linéaire.

Soit E un espace de Banach réflexif. E et E′ sont supposés strictement convexes et munis des topologies faibles $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ et $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E})$. Soient $\mathrm{B}_r = \{x \in \mathrm{E} \,;\, \|x\| \leqslant r\}$ et $\mathrm{S}_r = \{x \in \mathrm{E} \,;\, \|x\| = r\}$.

THEOREME 19. – *Soit* K *une application linéaire et monotone de* E′ *dans* E. *Soit* A *une application de type* M *et bornée (c'est-à-dire transforme les bornés en des bornés) de* E *dans* E′ *telle que* $(\mathrm{A}x, x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathrm{S}_r$. *Alors il existe* $u \in \mathrm{B}_r$ *tel que* $u + \mathrm{KA}u = 0$.

Démonstration. – Soit J l'application de dualité de E′ sur E. D'après le corollaire 16, $\mathrm{K}_\varepsilon = \mathrm{K} + \varepsilon \mathrm{J}$ où $\varepsilon > 0$ est bijectif de E′ sur E et $\overline{\mathrm{K}}_\varepsilon^1$ est monotone hémicontinu de E sur E′ avec $\overline{\mathrm{K}}_\varepsilon^1(0) = 0$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble ordonné filtrant croissant des sous-espaces vectoriels E_i de E de dimension finie. L'application $\mathrm{B}_{i\varepsilon} = j_i^* (\overline{\mathrm{K}}_\varepsilon^1 + \mathrm{A})\, j_i$ est continue de E_i dans E_i' et $(\mathrm{B}_{i\varepsilon}\, x, x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathrm{S}_r \cap \mathrm{E}_i$. D'après le théorème 10, il existe $u_{i\varepsilon} \in \mathrm{B}_r \cap \mathrm{E}_i$ tel que

$$y_{i\varepsilon} = \overline{\mathrm{K}}_\varepsilon^1\, u_{i\varepsilon} + \mathrm{A}u_{i\varepsilon} \in \mathrm{E}_i^1$$

Soient $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que $\mathcal{F}$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Suivant $\mathcal{U}$, on a $u_{i\varepsilon} \longrightarrow u_\varepsilon$ dans B_r faible, $y_{i\varepsilon} \longrightarrow 0$ dans E′ faible, $(y_{i\varepsilon}, u_{i\varepsilon}) = 0$ et $\mathrm{A}u_{i\varepsilon} \longrightarrow g_\varepsilon$ dans E′ faible. D'autre part, il résulte de la monotonie de $\overline{\mathrm{K}}_\varepsilon^1$ que $(\overline{\mathrm{K}}_\varepsilon^1\, u_{i\varepsilon} - \overline{\mathrm{K}}_\varepsilon^1\, u_\varepsilon, u_{i\varepsilon} - u_\varepsilon) \geqslant 0$ c'est-à-dire

$$(\mathrm{A}u_{i\varepsilon}, u_{i\varepsilon}) \leqslant (\mathrm{A}u_{i\varepsilon}, u_\varepsilon) + (y_{i\varepsilon} - \overline{\mathrm{K}}_\varepsilon^1\, u_\varepsilon, u_{i\varepsilon} - u_\varepsilon).$$

Donc $\lim\sup(\mathrm{A}u_{i\varepsilon}, u_{i\varepsilon}) \leqslant (g_\varepsilon, u_\varepsilon)$ et par conséquent $\mathrm{A}u_\varepsilon = g_\varepsilon$.

Mais $u_{i\varepsilon} = \mathrm{K}(y_{i\varepsilon} - \mathrm{A}u_{i\varepsilon}) + \varepsilon \mathrm{J}(y_{i\varepsilon} - \mathrm{A}u_{i\varepsilon})$. En appliquant $y_{i\varepsilon} - \mathrm{A}u_{i\varepsilon}$ on obtient $\varepsilon \|y_{i\varepsilon} - \mathrm{A}u_{i\varepsilon}\|^2 \leqslant (u_{i\varepsilon}, y_{i\varepsilon} - \mathrm{A}u_{i\varepsilon}) = -(\mathrm{A}u_{i\varepsilon}, u_{i\varepsilon})$. Par conséquent

$$\sqrt{\varepsilon}\, \|y_{i\varepsilon} - \mathrm{A}u_{i\varepsilon}\| \leqslant \mathrm{C},$$

où C désigne une constante indépendante de i et ε. On en déduit que

$$\|u_{i\varepsilon} - \mathrm{K}(y_{i\varepsilon} - \mathrm{A}u_{i\varepsilon})\| = \varepsilon \|y_{i\varepsilon} - \mathrm{A}u_{i\varepsilon}\| \leqslant \mathrm{C}\sqrt{\varepsilon}$$

D'où en passant à la limite suivant $\mathfrak{U}$, on obtient $\|u_\varepsilon + KAu_\varepsilon\| \leqslant C\sqrt{\varepsilon}$.

Soit alors $$\lambda_\varepsilon = u_\varepsilon + KAu_\varepsilon .$$

Suivant un ultrafiltre Φ plus fin que le filtre des voisinages de 0 dans R_+ on a : $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans B_r faible, $Au_\varepsilon \longrightarrow g$ dans E' faible, et $\lambda_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans E fort. Comme K est monotone on a

$$(KAu_\varepsilon - Kg , Au_\varepsilon - g) \geqslant 0 .$$

D'où lim sup$(Au_\varepsilon , u_\varepsilon) \leqslant (g , u)$; donc $Au = g$. Enfin $u + Kg = 0$ et par conséquent $u + KAu = 0$.

Remarque. — La démonstration est beaucoup plus simple lorsque E est un espace de Hilbert, car alors $\overline{K}^1_\varepsilon = (K + \varepsilon I)^{-1}$ étant linéaire, $\overline{K}^1_\varepsilon + A$ est de type M (proposition 18) et on peut appliquer directement le théorème 10.

COROLLAIRE 20. — *Soit* E *un espace de Banach réflexif tel que* E *et* E' *soient strictement convexes. Soient* K *une application linéaire monotone de* E' *dans* E *et* A *une application hémicontinue et bornée de* E *dans* E' *telle que*

$$(Ax - Ay , x - y) \geqslant c \|x - y\|^2 \ \forall x , y \in E \quad \text{avec} \quad c > 0 .$$

Alors pour tout $f \in E$, *l'équation* $u + KAu = f$ *admet une solution unique.*

Démonstration. — On pose $Bx = A(x + f)$. L'équation s'écrit alors $v + KBv = 0$ avec $v = u - f$. K et B vérifient les hypothèses du théorème 19, d'où l'existence d'une solution. Soient u_1 et u_2 deux solutions. On a $u_1 + KAu_1 = u_2 + KAu_2 = f$. Mais

$$c \|u_1 - u_2\|^2 \leqslant (Au_1 - Au_2 , u_1 - u_2) = (Au_1 - Au_2 , KAu_2 - KAu_1) \leqslant 0,$$

et par suite $u_1 = u_2$.

Le théorème 19 généralise un résultat de Dolph et Minty [15]. La résolution de l'équation intégrale $u + KAu = f$ a été aussi étudiée avec des méthodes différentes par Kolodner dans [20].

4. LES OPERATEURS PSEUDO-MONOTONES ET LA RESOLUTION D'INEQUATIONS NON LINEAIRES

4.1. Propriétés élémentaires des opérateurs pseudo-monotones.

DEFINITION F. – *Soit* X *un sous-ensemble de* E. *On dit qu'une application* A *de* X *dans* F *est pseudo-monotone si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

(PM_1) *Pour tout filtre* u_i *porté par un ensemble compact de* X *tel que* $u_i \longrightarrow u$ *dans* X *et* $\limsup (Au_i, u_i - u) \leqslant 0$ *on a*

$$(Au, u - v) \leqslant \liminf (Au_i, u_i - v) \quad \forall v \in X .$$

(PM_2) *Pour tout* $v \in X$, *l'application* $u \longrightarrow (Au, u - v)$ *est bornée inférieurement sur les sous-ensembles compacts de* X.

Remarque. – Si la topologie induite par E sur les sous-ensembles compacts de X est métrisable, alors la propriété (PM_1) est équivalente à la même propriété formulée pour des suites.

PROPOSITION 21. – *On suppose que* E *est de dimension finie. Soit* X *un ouvert de* E. *Une application* A *de* X *dans* E' *est pseudo-monotone si et seulement si elle est continue.*

Démonstration. – Il est évident que toute application continue est pseudo-monotone.

Inversement, soient A une application pseudo-monotone et u_n une suite qui converge vers u dans X. Montrons que Au_n est borné ; en effet, si Au_n n'était pas borné, on pourrait extraire une sous suite notée encore u_n telle que $u_n \longrightarrow u$, $\|Au_n\| \longrightarrow +\infty$,

et $$z_n = \frac{Au_n}{\|Au_n\|} \longrightarrow z \quad \text{avec} \quad \|z\| = 1 .$$

Soit $v \in X$; on a d'après la propriété (PM_2)

$$C \leqslant (Au_n, u_n - v)$$

En divisant par $\| Au_n \|$ et en passant à la limite on obtient $0 \leqslant (z , u - v)$, $\forall v \in X$. D'où $z = 0$; ce qui est en contradiction avec $\|z\| = 1$. Montrons que Au_n converge vers Au ; sinon on pourrait extraire une sous-suite notée encore u_n telle que $u_n \longrightarrow u$, $Au_n \longrightarrow f \neq Au$.

Donc $\lim\sup(Au_n , u_n - u) \leqslant 0$ et

$$(Au , u - v) \leqslant \liminf_{n \to +\infty}(Au_n , u_n - v) = (f , u - v) \quad \forall v \in X .$$

D'où $Au = f$, ce qui est absurde.

PROPOSITION 22. – *Toute application* A *pseudo-monotone de* E *dans* F *est de type* M.

Démonstration. – Soit u_i un filtre porté par un ensemble compact de E tel que $u_i \longrightarrow u$, $Au_i \longrightarrow f$ et $\lim\sup(Au_i , u_i) \leqslant (f, u)$. On a donc $\lim\sup(Au_i , u_i - u) \leqslant 0$. D'où :

$$(Au , u - v) \leqslant \liminf(Au_i , u_i - v) \leqslant (f , u - v) \quad \forall v \in E .$$

Par conséquent $Au = f$.

La propriété (M_2) résulte aisément de la proposition 21.

PROPOSITION 23. – *Soit* X *un sous-ensemble convexe de* E. *La somme* B = A + M *d'une application* A *pseudo-monotone de* X *dans* F *et d'une application* M *monotone hémicontinue est pseudo-monotone.*

Démonstration. – Soit u_i un filtre porté par un ensemble compact de X tel que $u_i \longrightarrow u$ dans X et $\lim\sup(Bu_i , u_i - u) \leqslant 0$.

On a $(Au_i , u_i - u) \leqslant (Bu_i , u_i - u) - (Mu , u_i - u)$. Par conséquent :

$$\lim\sup(Au_i , u_i - u) \leqslant \lim\sup(Bu_i , u_i - u) \leqslant 0.$$

Donc

$$\lim(Au_i , u_i - u) = 0 \text{ et } (Au , u - v) \leqslant \liminf(Au_i , u_i - v), \forall v \in X.$$

D'où $\lim\sup(Mu_i , u_i - u) \leqslant 0$. Il résulte de la proposition 6 que

$$(Mu , u - v) \leqslant \liminf(Mu_i , u_i - v) \quad \forall v \in X .$$

Par suite,

$$(Bu\,,\,u - v) \leqslant \lim\inf(Au_i\,,\,u_i - v) + \lim\inf(Mu_i\,,\,u_i - v)$$

$$\leqslant \lim\inf(Bu_i\,,\,u_i - v) \quad \forall\, v \in X\,.$$

D'autre part, on a

$$(Bu\,,\,u - v) \geqslant (Au\,,\,u - v) + (Mv\,,\,u - v)\,.$$

D'où la propriété (PM_2).

Remarque. – La réciproque de la proposition 22 est inexacte. Il existe des applications de type M qui ne sont pas pseudo-monotones.

Exemple. – Soit H un espace de Hilbert muni d'une base orthonormale $(e_n)_{n\in N}$. L'application $Au = -u$ est de type M mais n'est pas pseudo-monotone. En effet, si A était pseudo-monotone, l'application $B = A + P$ (où P désigne la projection sur la boule unité de H) serait pseudo-monotone, donc de type M. Or B n'est pas de type M dans H faible (cf. 2.2).

4.2. Théorèmes d'existence.

THEOREME 24. – *Soient* X *un convexe compact de* E, A *une application pseudo-monotone de* X *dans* F *et* φ *une fonction convexe S.C.I. de* X *dans* $]-\infty\,,+\infty]$ *non identiquement égale à* $+\infty$. *Alors pour tout* $f \in F$, *il existe* $u \in X$ *tel que*

$$(f\,,\,v - u) - (Au\,,\,v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \qquad \forall\, v \in X\,. \tag{4.1}$$

L'ensemble des solutions de (4.1) est compact ; il est convexe compact lorsque A *est monotone hémicontinu.*

Si de plus, $(Ax - Ay\,,\,x - y) > 0\,,\ \forall\, x\,,y \in X\,,\ x \neq y$, *alors la solution de (4.1) est unique.*

La démonstration du théorème 24 se fait en plusieurs étapes.

LEMME 25. – *Soient* E *un espace dimension finie,* X *un convexe fermé de* E *et* Y *un sous-ensemble convexe de* X *partout dense dans* X. *Alors* $\overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{Y}$.

Démonstration. – Soit $n = \dim E$; on peut toujours supposer que $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$. Montrons que $\overset{\circ}{Y} \neq \emptyset$. En effet, on peut trouver $n + 1$ points de Y affinement indépendants (sinon Y serait contenu dans une variété de dimension strictement inférieure à n et X aussi). Le barycentre de ces $n + 1$ points est intérieur à Y. Enfin $\overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{\bar{Y}} = \overset{\circ}{Y}$.

LEMME 26. – *La conclusion du théorème* 24 *est valable si on suppose de plus que* $\dim E < +\infty$, $f = 0$, $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$ et D_φ *partout dense dans* X *avec*

$$D_\varphi = \{x \in X \, ; \varphi(x) < +\infty\},$$

Démonstration. – D'après le lemme 25, $\overset{\circ}{D}_\varphi = \overset{\circ}{X}$ et donc $\varphi(x) < +\infty$ sur $\overset{\circ}{X}$. On peut trouver une suite croissante X_n de convexes compacts tels que $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \overset{\circ}{X}$ (il suffit par exemple d'utiliser la jauge de X). Il résulte de la proposition 21 que A est continu sur chacun des X_n. Donc il existe $u_n \in X_n$ (lemme 13) tel que

$$-(Au_n\, , v - u_n) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u_n) \qquad \forall\, v \in X_n\, .$$

La suite Au_n est bornée ; sinon on pourrait extraire une sous-suite notée encore u_n telle que

$$u_n \longrightarrow u, \; \|Au_n\| \longrightarrow +\infty \; \text{ et } \; \frac{Au_n}{\|Au_n\|} \longrightarrow z \; \text{ avec } \; \|z\| = 1\, ,$$

Soit $v \in X$, on a

$$C \leqslant (Au_n\, , u_n - v) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u_n)$$

D'où en divisant par $\|Au_n\|$ et en passant à la limite on obtient :

$$0 \leqslant (z\, , u - v) \leqslant 0 \qquad \forall\, v \in \overset{\circ}{X}\, .$$

Donc $z = 0$; ce qui est en contradiction avec $\|z\| = 1$. Il en résulte que

$$\limsup_{n \to +\infty} (Au_n\, , u_n - u) \leqslant 0$$

et

$$(Au\, , u - v) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} (Au_n\, , u_n - v) \qquad \forall\, v \in X\, .$$

On déduit que

$$-(Au\, , v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \qquad \forall\, v \in \overset{\circ}{X}$$

et d'après la proposition 4 :

$$-(\mathrm{A}u\,,\,v-u)\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)\qquad\forall\,v\in\mathrm{X}\,.$$

LEMME 27. – *La conclusion du théorème* 24 *est valable si on suppose de plus que* dim E $<+\infty$ *et* $f=0$.

Démonstration. – On se ramène aisément au cas où $0\in\mathrm{X}$ et $\overline{\mathrm{D}}_\varphi=\mathrm{X}$. Soient alors E_0 l'espace engendré par X, j_0 l'injection canonique de E_0 dans E et j_0^* son adjoint de E′ sur E_0'. D'après le lemme 26, il existe $u\in\mathrm{X}$ tel que :

$$-(j_0^*\,\mathrm{A}j_0\,u\,,\,v-u)\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)\qquad\forall\,v\in\mathrm{X}\,.$$

c'est-à-dire :

$$-(\mathrm{A}u\,,\,v-u)\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)\qquad\forall\,v\in\mathrm{X}\,.$$

Démonstration du théorème 24. – On peut toujours supposer que $0\in\mathrm{X}$, $f=0$ et $\varphi(0)=0$. Soient $\mathcal{F}$ l'ordonné filtrant croissant des sous-espaces vectoriels E_i de E de dimension finie, j_i l'injection canonique de E_i dans E et j_i^* son adjoint de F sur E_i'. $\mathrm{A}_i=j_i^*\,\mathrm{A}j_i$ est pseudo-monotone de $\mathrm{X}\cap\mathrm{E}_i$ dans E_i'. D'après le lemme 27 il existe $u_i\in\mathrm{X}\cap\mathrm{E}_i$ tel que

$$-(\mathrm{A}u_i\,,\,v-u_i)\leqslant\varphi(v)-\varphi(u_i)\qquad\forall\,v\in\mathrm{X}\cap\mathrm{E}_i\,.$$

Il résulte de la propriété (PM_2) que $\varphi(u_i)$ est borné (il suffit de prendre $v=0$). Suivant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que F, on a $u_i\longrightarrow u$, $\varphi(u)\leqslant\liminf_{\mathcal{U}}\varphi(u_i)<+\infty$ et $\limsup_{\mathcal{U}}(\mathrm{A}u_i\,,\,u_i-u)\leqslant 0$.

Par conséquent, il vient

$$-(\mathrm{A}u\,,\,v-u)\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)\qquad\forall\,v\in\mathrm{X}\,.$$

Montrons que l'ensemble des solutions de (4.1) est fermé. Soit u_k un filtre sur l'ensemble des solutions de (4.1) qui converge vers u. On a

$$(f\,,\,v-u_k)-(\mathrm{A}u_k\,,\,v-u_k)\leqslant\varphi(v)-\varphi(u_k)\qquad\forall\,v\in\mathrm{X}\,.$$

Il en résulte que $\varphi(u_k)$ est borné, $\varphi(u)\leqslant\liminf\varphi(u_k)<+\infty$ et $\limsup(\mathrm{A}u_k\,,\,u_k-u)\leqslant 0$. On en déduit que :

$$(f\,,\,v-u)-(\mathrm{A}u\,,\,v-u)\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)\qquad\forall\,v\in\mathrm{X}\,.$$

Lorsque A est monotone hémicontinu, on sait d'après le corollaire 5 que l'ensemble des solutions de (4.1) est convexe.

Si de plus $(Ax - Ay, x - y) > 0$, $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, alors la solution de (4.1) est unique. En effet, soient u_1 et u_2 deux solutions de (4.1), on a en particulier :

$$(f, u_2 - u_1) - (Au_1, u_2 - u_1) \leqslant \varphi(u_2) - \varphi(u_1)$$

$$(f, u_1 - u_2) - (Au_2, u_1 - u_2) \leqslant \varphi(u_1) - \varphi(u_2)$$

D'où par addition :

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) \leqslant 0 \quad \text{et donc} \quad u_1 = u_2 .$$

COROLLAIRE 28. – *Soient* X *un convexe de* E *et* K *un sous-ensemble convexe compact de* X *avec* $0 \in \mathrm{Int}_X K$. *Soient* A *une application pseudo-monotone de* K *dans* F *et* φ *une fonction convexe S.C.I. de* X *dans* $]-\infty, +\infty]$ *avec* $\varphi(0) = 0$

On suppose que $(Ax, x) + \varphi(x) \geqslant 0$, $\forall x \in K$, $x \notin \mathrm{Int}_X K$. *Alors il existe* $u \in K$ *tel que*

$$-(Au, v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \qquad \forall v \in X .$$

Démonstration. – On sait d'après le théorème 24 qu'il existe $u \in K$ tel que

$$-(Au, v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \qquad \forall v \in K \tag{4.1}$$

Si $u \in \mathrm{Int}_X K$, pour tout $w \in X$, il existe $v \in K$ et $\lambda \geqslant 1$ tels que $w - u = \lambda(v - u)$.

D'où $$-(Au, w - u) \leqslant \varphi(w) - \varphi(u) \qquad \forall w \in X .$$

Si $u \notin \mathrm{Int}_X K$ on a $(Au, u) + \varphi(u) \geqslant 0$. On a d'autre part

$$(Au, u) + \varphi(u) \leqslant 0$$

(il suffit de faire $v = 0$ dans (4.1)). D'où

$$(Au, u) + \varphi(u) = 0 ,$$

et par conséquent, $-(Au, v) \leqslant \varphi(v)$, $\forall v \in K$. Soit $w \in X$, il existe $v \in K$ et $\lambda \geqslant 1$ tels que $w = \lambda v$. D'où :

$$-(Au, w) \leqslant \lambda\, \varphi\left(\frac{w}{\lambda}\right) \leqslant \varphi(w)$$

Il en résulte que :

$$-(\mathrm{A}u\,,\,w-u)\leqslant\varphi(w)-\varphi(u)\qquad\forall\,w\in\mathrm{X}\,.$$

COROLLAIRE 29. – *Soit* X *un convexe de* E, K *un sous-ensemble convexe compact de* X *avec* $0\in\mathrm{K}$. *Soient* A *une application pseudo-monotone de* X *dans* F *et* φ *une fonction convexe S.C.I. de* X *dans* $]-\infty\,,+\infty]$ *avec* $\varphi(0)=0$. *On suppose que* $(\mathrm{A}x\,,x)+\varphi(x)>0$, $\forall\,x\in\mathrm{X}$, $x\notin\mathrm{K}$. *Alors il existe* $u\in\mathrm{K}$ *tel que*

$$-(\mathrm{A}u\,,\,v-u)\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)\qquad\forall\,v\in\mathrm{X}\,.$$

Démonstration. – Soient $x\in\mathrm{X}$ et $\mathrm{K}_x=c(\mathrm{K}\cup\{x\})$ l'enveloppe convexe de K et $\{x\}$; K_x est un convexe compact.

Soit $\mathrm{S}_x=\{u\in\mathrm{K}\;;\;(\mathrm{A}u\,,\,u-v)\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)\,,\;\forall\,v\in\mathrm{K}_x\}$. S_x est un sous-ensemble compact de K.

Montrons que $\bigcap_{x\in\mathrm{X}}\mathrm{S}_x\neq\emptyset$. Sinon on pourrait trouver $x_i\in\mathrm{X}$, $1\leqslant i\leqslant n$ tels que $\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{S}_{x_i}=\emptyset$. Soit K′ l'enveloppe convexe de K et des x_i, $1\leqslant i\leqslant n$. D'après le théorème 24, il existe $u\in\mathrm{K}'$ tel que

$$-(\mathrm{A}u\,,\,v-u)\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)\qquad\forall\,v\in\mathrm{K}'\,.$$

En prenant $v=0$, on a $(\mathrm{A}u\,,u)+\varphi(u)\leqslant 0$. D'où $u\in\mathrm{K}$ et $u\in\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{S}_{x_i}$; ce qui est absurde.

COROLLAIRE 30. – *Soient* E *un espace de Banach réflexif,* X *un convexe fermé de* E *avec* $0\in\mathrm{X}$. *Soient* A *une application pseudo-monotone de* X *faible dans* E′ *et* φ *une fonction convexe S.C.I. de* X *dans* $]-\infty\,,+\infty]$ *avec* $\varphi(0)<+\infty$. *On suppose que*

$$\lim_{\substack{\|x\|\to+\infty\\ x\in\mathrm{X}}}\frac{(\mathrm{A}x\,,x)+\varphi(x)}{\|x\|}=+\infty$$

Alors pour tout $f\in\mathrm{E}'$ *il existe* $u\in\mathrm{X}$ *tel que :*

$$(f,\,v-u)-(\mathrm{A}u\,,\,v-u)\leqslant\varphi(v)-\varphi(u)\qquad\forall\,v\in\mathrm{X}\,.\tag{4.2}$$

L'ensemble des solutions de (4.2) est faiblement compact ; il est convexe faiblement compact lorsque A *est monotone hémicontinu.*

Si de plus $(Ax - Ay, x - y) > 0$, $\forall\, x, y \in X$, $x \neq y$, *alors la solution de (4.2) est unique.*

4.3. Exemples d'applications pseudo-monotones.

Il est aisé de vérifier que les applications suivantes sont pseudo-monotones :

1) Les applications monotones hémicontinues et plus généralement les applications semi-monotones introduites par F. Browder dans [6]. Soit V un espace vectoriel normé et X un sous-ensemble convexe de V'. On dit qu'une application A de X dans V' est *semi-monotone* si A peut se mettre sous la forme $Au = A(u, u)$ où $A(u, v)$ est une application de $X \times X$ dans V, monotone hémicontinue par rapport à la première variable et continue de X faible dans V fort par rapport à la seconde variable.

2) Les applications de X dans V de la forme $Au = S(u, u) + Cu$ où S est semi-monotone et C compact (c'est-à-dire continu de X fort dans V fort et transforme les ensembles bornés de X en des ensembles relativement compacts de V fort) avec l'hypothèse supplémentaire que pour tout filtre u_i porté par un ensemble borné de X tel que $u_i \longrightarrow u$ dans X faible et $(S(u_i, u_i) - S(u, u_i), u_i - u) \longrightarrow 0$ alors $Cu_i \longrightarrow Cu$ dans V faible. Ces applications ont été considérées par F. Browder dans [11], [12], [14].

3) Les applications introduites par J. Leray et J.L. Lions [22] puis utilisées par P. Hartman et G. Stampacchia [16] :

Soient E un espace normé, X un convexe de E, et $Au = A(u, u)$ où $A(u, v)$ est une application de $X \times X$ dans E' vérifiant les hypothèses suivantes :

(L_1) $\forall\, v \in X$, l'application $u \longrightarrow A(u, v)$ est monotone hémicontinue.

(L_2) $\forall\, v \in X$, l'application $v \longrightarrow A(u, v)$ est bornée.

(L_3) Pour tout filtre u_i porté par un ensemble borné de X tel que $u_i \longrightarrow u$ dans X faible et $(A(u_i, u_i) - A(u, u_i), u_i - u) \longrightarrow 0$, alors $A(v, u_i) \longrightarrow A(v, u)$ dans E' faible, $\forall\, v \in X$.

(L_4) Pour tout filtre u_i porté par un ensemble borné de X tel que $u_i \longrightarrow u$ dans X faible et $A(v, u_i) \longrightarrow A(v, u)$ dans E′ faible, alors $(A(v, u_i), u_i) \longrightarrow (A(v, u), u)$.

(Si E est réflexif et séparable, il est équivalent de formuler les propriétés (L_3) et (L_4) pour des suites).

4) Les applications demi-monotones introduites par H. Brezis dans [3] sont pseudo-monotones.

Le théorème 24 et ses corollaires généralisent donc des résultats de F. Browder [7], [13], [14] et de P. Hartman et G. Stampacchia [16], [30]. Ils sont à rapprocher des résultats de Ky-Fan [21].

4.4. Une démonstration constructive.

On peut donner une démonstration constructive du théorème 24 lorsque A est monotone hémicontinu. Elle est basée uniquement sur la méthode classique des approximations successives et ne fait pas appel au théorème de point fixe de Brouwer.

PROPOSITION 31. – *Soient* H *un espace de Hilbert et* X *un convexe fermé de* H. *Soit* A *une application lipschitzienne de* X *dans* H *vérifiant* $(Ax - Ay, x - y) \geqslant c\,\|x - y\|^2$, $\forall\, x, y \in X$ *avec* $c > 0$. *Soit* φ *une fonction convexe S.C.I. de* X *dans* $]-\infty, +\infty]$ *non identiquement égale à* $+\infty$. *Alors pour tout* $f \in H$ *il existe* $u \in X$ *unique tel que*

$$(f, v - u) - (Au, v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \quad \forall\, v \in X. \qquad (4.3)$$

De plus l'inéquation (4.3) peut être résolue par une méthode d'approximations successives.

Démonstration. – On a $\|Ax - Ay\| \leqslant M\,\|x - y\|$, $\forall\, x, y \in X$. Soient $\rho > 0$ et Ψ la fonction convexe S.C.I. de H dans $]-\infty, +\infty]$ définie par $\Psi(x) = \varphi(x)$ si $x \in X$ et $\Psi(x) = +\infty$ si $x \notin X$.

L'inéquation (4.3) est équivalente à

$$(\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \leqslant \rho\Psi(v) - \rho\Psi(u), \forall\, v \in H,$$

c'est-à-dire avec les notations de 1.1 :

$$u = \mathrm{Prox}_{\rho\Psi}(\rho f - \rho Au + u).$$

Montrons que si ρ est convenablement choisi, l'application

$$v \longrightarrow Fv = \mathrm{Prox}_{\rho\Psi}(\rho f - \rho Av + v)$$

est contractante.

En effet,

$$\|Fv_1 - Fv_2\|^2 \leqslant \|v_1 - v_2 - \rho Av_1 + \rho Av_2\|^2$$
$$\leqslant (1 - 2\rho c + \rho^2 M^2)\|v_1 - v_2\|^2 = k^2 \|v_1 - v_2\|^2 .$$

Si l'on prend $\rho = \dfrac{c}{M^2}$, alors $k^2 = 1 - \dfrac{c^2}{M^2} < 1$ et l'équation $u = Fu$ peut être résolue par une méthode d'approximations successives.

PROPOSITION 32. – *Soient* E *un espace de dimension finie,* X *un convexe compact de* E *et* A *une application monotone continue de* E *dans* E'. *Alors il existe une suite* A_n *d'applications lipschitziennes de* X *dans* E' *qui convergent uniformément vers* A *sur* X *et telles que*

$$(A_n x - A_n y\,,\; x - y) \geqslant c_n \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in X \quad \text{avec} \quad c_n > 0$$

Démonstration. – Soit k_n une fonction numérique $\geqslant 0$, indéfiniment dérivable, à support compact contenu dans la boule $B_{1/n}$ et telle que $\int_E k_n(x)\,dx = 1$. On pose $A_n = (k_n * A) + \dfrac{1}{n} I$; c'est-à-dire

$$A_n u = \int_E A(u - x)\,k_n(x)\,dx + \frac{1}{n} u$$

Il est évident que les applications A_n sont lipschitziennes sur X et convergent uniformément vers A sur X.

En utilisant uniquement les propositions 31 et 32, on peut démontrer le théorème 24 lorsque A est monotone hémicontinu.

Remarque. – L'équation $Au = f$ peut aussi être résolue par une méthode itérative dans un espace de Hilbert lorsque A est lipschitzienne sur les ensembles bornés de H et vérifie $(Ax - Ay, x - y) \geqslant c\|x - y\|^2$, $\forall x, y \in H$ avec $c > 0$ (cf. H. Brezis et M. Sibony [4]).

5. INEQUATIONS D'EVOLUTION ABSTRAITES

DEFINITION G. – *Soient* X *un sous-ensemble de* E *et* D(L) *un sous-espace vectoriel de* E. *On dit qu'une application* L *linéaire et monotone de* D(L) *dans* F *est compatible avec* X *si pour tout* $u \in X$ *il existe une suite "régularisante"* u_n *d'éléments de* $D(L) \cap X$ *telle que*

a) u_n *converge fortement vers* u *(c'est-à-dire pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de* F).

b) $\limsup_{n \to +\infty} (Lu_n , u_n - u) \leqslant 0$.

DEFINITION H. – *On dit qu'une application* A *de* X *dans* F *est bornée si elle transforme tout sous-ensemble faiblement compact de* X *en un ensemble borné de* F.

5.1. Théorèmes d'existence.

THEOREME 33. – *Soient* X *un convexe compact de* E *et* L *une application linéaire et monotone de* D(L) *dans* F *compatible avec* X. *Soit* A *une application pseudo-monotone et bornée de* X *dans* F. *Alors pour tout* $f \in F$, *il existe* $u \in X$ *tel que*

$$(f, v - u) - (Au, v - u) - (Lv, v - u) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(L) \cap X \tag{5.1}$$

L'ensemble des solutions de (5.1) est compact.

Démonstration. – On se ramène aisément au cas où $0 \in X$ et $f = 0$. Soit $\mathfrak{F}$ l'ordonné filtrant croissant des sous-espaces E_i de D(L) de dimension finie. Comme $j_i^* Aj_i + j_i^* Lj_i$ est pseudo-monotone de $E_i \cap X$ dans E_i', il existe $u_i \in E_i \cap X$ tel que

$$-(Au_i , v - u_i) - (Lu_i , v - u_i) \leqslant 0 , \forall v \in E_i \cap X .$$

Suivant un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ plus fin que $\mathfrak{F}$, u_i converge vers u dans X et

$$\limsup_{\mathfrak{U}} (Au_i , u_i - v) \leqslant (Lv , v - u) \quad \forall v \in D(L) \cap X .$$

Soit $u_n \in D(L) \cap X$ la suite régularisante de u. On a

$$(Au_i\,,u_i - u) = (Au_i\,,u_i - u_n) + (Au_i\,,u_n - u)\,.$$

Or $|(Au_i\,,u_n - u)| \leqslant \theta(n)$, $\forall\, i$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta(n) = 0$ (puisque Au_i est borné et u_i converge fortement vers u). D'où

$$\lim_{\mathfrak{u}} \sup(Au_i\,,u_i - u) \leqslant (Lu_n\,,u_n - u) + \theta(n)\ \forall n\,.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{\mathfrak{u}} \sup(Au_i\,,u_i - u) \leqslant 0$, et

$$(Au\,,u - v) \leqslant \lim_{\mathfrak{u}} \inf(Au_i\,,u_i - v) \qquad \forall\, v \in X\,.$$

On en déduit que

$$-(Au\,,v - u) - (Lv\,,v - u) \leqslant 0 \qquad \forall\, v \in D(L) \cap X\,.$$

L'ensemble des solutions de (5.1) est fermé ; en effet, si u_k est un filtre sur l'ensemble des solutions de (5.1) qui converge vers u dans X, on a :

$$-(Au_k\,,v - u_k) - (Lv\,,v - u_k) \leqslant 0 \qquad \forall\, v \in D(L) \cap X\,.$$

On conclut alors comme dans la première partie de la démonstration que u est aussi solution de (5.1).

THEOREME 34. – *Soient* X *un convexe de* E *et* K *un sous-ensemble convexe compact de* X *avec* $0 \in \mathrm{Int}_X K$ (*resp.* $0 \in K$). *Soit* L *une application linéaire monotone de* D(L) *dans* F *compatible avec* X. *Soit* A *une application pseudo-monotone et bornée de* X *dans* F. *On suppose que*

$(Ax\,,x) \geqslant 0\,, \forall x \in K\,, x \notin \mathrm{Int}_X K$ (resp. $(Ax\,,x) > 0\,, \forall\, x \in X\,, x \notin K$))

Alors il existe $u \in K$ *tel que*

$$-(Au\,,v - u) - (Lv\,,v - u) \geqslant 0 \qquad \forall\, v \in D(L) \cap X\,.$$

Démonstration. – Le raisonnement est analogue à celui du théorème 33 ; pour démontrer le résultat lorsque E est de dimension finie on applique le corollaire 28 (resp. 29).

PROPOSITION 35. – *Soient* X *un convexe de* E *et* K *un sous-ensemble convexe compact de* X *avec* $0 \in \mathrm{Int}_X K$ (*resp.* $0 \in K$).

Soient L *une application linéaire monotone de* D(L) *dans* F *compatible avec* X *et* L' *une application linéaire de* D(L') *dans* F *telle que* $D(L) \subset D(L')$ *et* $L' = -L$ *sur* D(L). *Soit* A *une application pseudo-monotone et bornée de* X *dans* F. *On suppose que :*

$(Ax, x) \geqslant 0$, $\forall x \in K$, $x \notin \mathrm{Int}_X K$ (*resp.* $(Ax, x) > 0$, $\forall x \in X, x \notin K$).

Alors il existe $u \in K$ *tel que :*

$$-(Au, v-u) - (L'v, u) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(L') \cap X. \tag{5.2}$$

Toute solution de (5.2) vérifie

$$-(Au, v-u) - (Lv, v-u) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(L) \cap X.$$

Démonstration. – Il résulte de l'hypothèse que $(Lv, v) = 0$, $\forall v \in D(L)$. Soit $\mathfrak{F}'$ l'ordonné filtrant croissant des sous-espaces E_i de D(L') de dimension finie.

Soient $A_i = j_i^* A j_i$, $L_i' = j_i^* L' j_i$ et ${}^tL_i'$ le transposé de L_i'. $A_i + {}^tL_i'$ est pseudo-monotone de $E_i \cap X$ dans E_i'. D'après le corollaire 28 (resp. 29) il existe $u_i \in E_i \cap K$ tel que

$$-(Au_i, v-u_i) - ({}^tL'u_i, v-u_i) \leqslant 0 \quad \forall v \in E_i \cap X.$$

D'où :

$$-(Au_i, v-u_i) - (L'v, u_i) \leqslant 0 \quad \forall v \in E_i \cap X.$$

Suivant un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ plus fin que $\mathfrak{F}'$, u_i converge vers u dans K et

$$\lim_{\mathfrak{U}} \sup (Au_i, u_i - v) \leqslant (L'v, u) \quad \forall v \in D(L') \cap X.$$

On en déduit comme dans la démonstration du théorème 33 que

$$\lim_{\mathfrak{U}} \sup (Au_i, u_i - u) \leqslant 0 \text{ et } (Au, u-v) \leqslant \lim_{\mathfrak{U}} \inf (Au_i, u_i - v), \ \forall v \notin X.$$

D'où $\quad -(Au, v-u) - (L'v, u) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(L') \cap X.$

On peut obtenir des théorèmes d'existence sans faire aucune hypothèse de compatibilité sur L lorsque l'opérateur A est monotone continu.

PROPOSITION 36. – *Soient* X *un convexe de* E *et* K *un sous-ensemble convexe compact de* X *avec* $0 \in \mathrm{Int}_X K$ (*resp.* $0 \in K$). *Soient* L *une application linéaire monotone de* D(L) *dans* F *et* A *une application monotone continue de* X *dans* F. *On suppose que*

$(Ax\,,x) \geqslant 0,\ \forall x \in K, x \notin \mathrm{Int}_X K$ (*resp.* $(Ax\,,x) > 0,\ \forall x \in X, x \notin K$).

Alors il existe $u \in K$ *tel que*

$$-(Au\,, v-u) - (Lv\,, v-u) \leqslant 0 \qquad \forall v \in D(L) \cap X$$

et il existe $u' \in K$ *tel que*

$$-(Au'\,, v-u') - (Lv\,, u') \leqslant 0 \qquad \forall v \in D(L) \cap X\,.$$

Démonstration. – En dimension finie on sait qu'il existe $u_i \in E_i \cap K$ tel que :

$$-(Au_i\,, v-u_i) - (Lv\,, v-u_i) \leqslant 0 \qquad \forall v \in E_i \cap X$$

et $u_i' \in E_i \cap K$ tel que

$$-(Au_i'\,, v-u_i') - (Lv\,, u_i') \leqslant 0 \qquad \forall v \in E_i \cap X\,.$$

Suivant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que le filtre $\mathcal{F}$ des sous-espaces E_i de D(L) de dimension finie, on a $u_i \longrightarrow u$ dans K, $u_i' \longrightarrow u'$ dans K.

Par ailleurs $(Au\,, u-v) \leqslant \liminf\limits_{\mathcal{U}} (Au_i\,, u_i - v),\ \forall v \in X$. En effet, on a $(Au_i - Au\,, u_i - u) \geqslant 0$; d'où $(Au\,, u) \leqslant \liminf\limits_{\mathcal{U}} (Au_i\,, u_i)$.

On en déduit que :

$$-(Au\,, v-u) - (Lv\,, v-u) \leqslant 0 \qquad \forall v \in D(L) \cap X$$

$$-(Au'\,, v-u') - (Lv\,, u') \leqslant 0 \qquad \forall v \in D(L) \cap X\,.$$

5.2. Propriétés de l'ensemble des solutions ; un théorème d'unicité.

PROPOSITION 37. – *Soient* X *un convexe de* E, L *une application linéaire monotone de* D(L) *dans* F *compatible avec* X, *et* A *une application monotone hémicontinue et bornée de* X *dans* F.

Soient $u \in X$ *et* $f \in F$; *les conditions suivantes sont équivalentes*

i) $(f, v-u) - (Au\,, v-u) - (Lv\,, v-u) \leqslant 0 \qquad \forall v \in D(L) \cap X$

ii) $(f, v-u) - (Av\,, v-u) - (Lv\,, v-u) \leqslant 0 \qquad \forall v \in D(L) \cap X\,.$

Démonstration. – Il est évident que i) implique ii) puisque A est monotone.

Montrons que ii) implique i). Soient u_i la suite régularisante de u, $w \in D(L) \cap X$ et $t \in]0\,,1[$. On prend

$$v_n = (1-t)\,u_n + tw \in D(L) \cap X$$

dans ii). On a alors $\alpha_n \leqslant \beta_n$ avec :

$$\alpha_n = (f, v_n - u) - (Av_n\,, v_n - u) \quad \text{et} \quad \beta_n = (Lv_n\,, v_n - u)\,.$$

Mais :

$$-(Av_n\,, v_n - u) = -(Av_n\,, u_n - u) + \frac{t}{1-t}(Av_n\,, v_n - w)\,.$$

D'après la proposition 6 on a :

$$(Av\,, v - w) \leqslant \liminf_{n \to +\infty}(Av_n\,, v_n - w) \quad \text{où} \quad v = (1-t)\,u + tw$$

D'où : $$(f, v - u) + \frac{t}{1-t}(Av\,, v - w) \leqslant \limsup_{n \to +\infty} \alpha_n\,.$$

Et

$$\beta_n = (1-t)\,(Lu_n\,, u_n - u) + t(1-t)\,(Lu_n\,, w - u_n)$$
$$+\, t(Lw\,, u_n - u) + t^2(Lw\,, w - u_n)\,.$$

Or $$t(1-t)\,(Lu_n\,, w - u_n) \leqslant t(1-t)\,(Lw\,, w - u_n)\,.$$

D'où $$\limsup_{n \to +\infty} \beta_n \leqslant t(Lw\,, w - u)\,.$$

On en déduit que :

$$(f, w - u) - (A(u - tu + tw)\,, w - u) - (Lw\,, w - u) \leqslant 0\,.$$

Enfin en passant à la limite quand $t \longrightarrow 0$ on obtient :

$$(f, w - u) - (Au\,, w - u) - (Lw\,, w - u) \leqslant 0 \quad \forall\, w \in D(L) \cap X\,.$$

THEOREME 38. – *Soient* X *un convexe de* E *et* L *une application linéaire monotone de* D(L) *dans* F *compatible avec* X. *Soit* A *une application de* X *dans* F *telle que*

$$(Ax - Ay\,, x - y) > 0 \quad \forall\, x\,, y \in X\,, x \neq y\,.$$

Alors pour tout $f \in F$, *l'inéquation*

$$(f, v - u) - (Au\,, v - u) - (Lv\,, v - u) \leqslant 0 \quad \forall\, v \in D(L) \cap X \qquad (5.1)$$

admet au plus une solution.

Démonstration. – Soient x et y deux solutions de (5.1). On a

$$(f, v - x) - (Ax, v - x) - (Lv, v - x) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(L) \cap X \quad (5.3)$$

$$(f, v - y) - (Ay, v - y) - (Lv, v - y) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(L) \cap X . (5.4)$$

Soient $u = \dfrac{x + y}{2}$ et u_n la suite régularisante de u. On prend $v = u_n$ dans (5.3) et (5.4). Par addition de (5.3) et (5.4), il vient

$$(f, 2u_n - x - y) - (Ax, u_n - x) - (Ay, u_n - y) \leqslant 2(Lu_n, u_n - u).$$

En passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ on obtient :

$$(Ax - Ay, x - y) \leqslant 0 . \quad \text{D'où} \quad x = y .$$

COROLLAIRE 39. – *Soient* E *un espace de Banach réflexif et* X *un convexe fermé de* E *avec* $0 \in X$. *Soient* L *une application linéaire monotone de* D(L) *dans* E′ *compatible avec* X *et* A *une application pseudo-monotone et bornée de* X *faible dans* E′.

On suppose que $$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in X}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|} = +\infty$$

Alors pour tout $f \in E'$, *il existe* $u \in X$ *tel que*

$$(f, v - u) - (Au, v - u) - (Lv, v - u) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(L) \cap X . (5.1)$$

L'ensemble des solutions de (5.1) est faiblement compact ; il est convexe faiblement compact lorsque A *est monotone hémicontinu et borné. Si de plus* $(Ax - Ay, x - y) > 0$, $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, *alors la solution de (5.1) est unique.*

COROLLAIRE 40. – *Soient* E *un espace de Banach réflexif et* X *un convexe fermé de* E *avec* $0 \in X$. *Soient* L *une application linéaire monotone de* D(L) *dans* E′ *compatible avec* X *et* L′ *une application linéaire monotone de* D(L′) *dans* E′ *telle que* $D(L) \subset D(L')$ *et* $L' = -L$ *sur* D(L).

Soit A *une application pseudo-monotone et bornée de* X *dans* E′ *vérifiant*

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in X}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|} = +\infty$$

Alors pour tout $f \in E'$ *il existe* $u \in X$ *tel que*

$$(f, v-u) - (Au, v-u) - (L'v, u) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(L') \cap X. \tag{5.5}$$

L'ensemble des solutions de (5.5) est faiblement compact ; il est convexe faiblement compact lorsque A *est monotone hémicontinu et borné. Si de plus* $(Ax - Ay, x - y) > 0$, $\forall x, y \in X, x \neq y$, *alors la solution de (5.5) est unique.*

Remarque. – Dans le cas particulier où X est un *cône convexe* de sommet 0, l'inéquation (5.5) est équivalente au système

$$(f, v) - (Au, v) - (L'v, u) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(L') \cap X \tag{5.6}$$

$$-(f, u) + (Au, u) = 0. \tag{5.7}$$

En effet, par addition de (5.6) et (5.7) on obtient (5.5). Inversement (5.6) résulte aisément de (5.5) puisque X est un cône convexe. D'autre part, si l'on fait $v = 0$ dans (5.5) on a $-(f, u) + (Au, u) \leqslant 0$. Enfin, on prend $v = u_n$ (suite régularisante de u) dans (5.6) ; en passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ on obtient $(f, u) - (Au, u) \leqslant 0$ (il suffit de remarquer que

$$\lim_{n \to +\infty} \sup (L'u_n, u) = \lim \sup (Lu_n, u_n - u) \leqslant 0).$$

COROLLAIRE 41. – *Soient* E *un espace de Banach réflexif et* X *un convexe fermé de* E *avec* $0 \in X$. *Soient* L *une application linéaire monotone de* D(L) *dans* E' *et* A *une application monotone continue de* X *faible dans* E' *faible.*

On suppose que $$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in X}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|} = +\infty$$

Alors pour tout $f \in E'$, *il existe* $u \in X$ *tel que*

$$(f, v-u) - (Au, v-u) - (Lv, v-u) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(L) \cap X \tag{5.8}$$

et il existe $u' \in X$ *tel que*

$$(f, v-u') - (Au', v-u') - (Lv, u') \leqslant 0 \quad \forall v \in D(L) \cap X \tag{5.9}$$

L'ensemble des solutions de (5.8) (resp. (5.9)) est faiblement compact ; il est convexe faiblement compact lorsque A *est affine.*

Remarque. — En général, si l'on ne fait aucune hypothèse de compatibilité, l'ensemble des solutions de (5.8) (resp. (5.9)) n'est pas convexe. Et il n'y a pas unicité de la solution même si A est linéaire et vérifie $(Ax, x) \geqslant c \|x\|^2$, $\forall x$ E avec $c > 0$.

Le corollaire 41 généralise un résultat de J.L. Lions [26].

5.3. Générateur infinitésimal d'un semi-groupe compatible avec un convexe.

Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\ , \ )$ et de la norme $| \ |$. Soit V un espace de Banach réflexif muni de la norme $\| \ \|$, inclus dans H avec injection continue et dense dans H. On identifie H à son dual et à un sous-espace de V'.

Soit $G(s)$ un semi-groupe continu (cf. [23] ou [32]) de contractions sur H (c'est-à-dire $|G(s)u| \leqslant |u|$, $\forall u \in H$, $\forall s \geqslant 0$). On suppose que la restriction de G à V définit un semi-groupe continu dans V. Soit $-\Lambda$ le générateur infinitésimal de G de domaines $D(\Lambda, H)$ dans H et $D(\Lambda, V)$ dans V. On pose $D(L) = D(\Lambda, H) \cap V$ et $L = \Lambda$ sur $D(L)$; L est linéaire et monotone de $D(L)$ dans V'.

PROPOSITION 42. — *Soient* X *un convexe fermé de* V *vérifiant*

$$(1 - \alpha\varepsilon)(I + \varepsilon\Lambda)^{-1} X \subset X \quad , \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \textit{avec} \quad \alpha \in \mathbf{R} . \qquad (5.10)$$

Alors L *et* X *sont compatibles.*

En particulier L *et* X *sont compatibles si*

$$e^{-\alpha s}\, G(s)\, X \subset X \quad , \quad \forall s \geqslant 0 \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbf{R} .$$

Démonstration. — Soient $u \in X$ et $u_n = \left(1 - \dfrac{\alpha}{n}\right) n(nI + \Lambda)^{-1} u$. $u_n \in D(\Lambda, H) \cap X$ et $u_n \longrightarrow u$ dans V fort puisque G définit un semi-groupe continu sur V. On a $\left(1 - \dfrac{\alpha}{n}\right)u = u_n + \dfrac{1}{n} Lu_n$. D'où $\dfrac{1}{n} Lu_n \longrightarrow 0$ et $(Lu_n, u_n - u) = -\left(Lu_n, \dfrac{1}{n} Lu_n + \dfrac{\alpha}{n} u\right)$. Par conséquent $\limsup\limits_{n \to +\infty} (Lu_n, u_n - u) \leqslant 0$. En particulier L et X sont compatibles si $e^{-as}G(s)\,X \subset X$, $\forall s \geqslant 0$. En effet, soit $u \in X$; on a :

$$(I + \varepsilon\Lambda)^{-1} u = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{+\infty} e^{-s/\varepsilon}\, G(s)\, u\, ds$$

Par suite :

$$\frac{\varepsilon (I + \varepsilon\Lambda)^{-1} u}{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-s/\varepsilon} e^{as}\, ds} \in X$$

c'est-à-dire $$(1 - \alpha\varepsilon)(I + \varepsilon\Lambda)^{-1} u \in X .$$

Le semi-groupe $G^*(s)$ adjoint de $G(s)$ est aussi un semi-groupe continu de contractions sur H et son générateur infinitésimal $-\Lambda^*$ est l'adjoint de $-\Lambda$.

PROPOSITION 43. — *Soit* X *un convexe fermé de* V *contenant* 0 *et compatible avec* L. *Soit* A *une application pseudo-monotone et bornée de* X *faible dans* V' *vérifiant :*

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in X}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|} = +\infty$$

Alors pour tout $f \in V'$, *il existe* $u \in X$ *tel que*

$$(f, v-u) - (Au, v-u) - (\Lambda v, v-u) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(\Lambda\,;H) \cap X. \tag{5.11}$$

Toute solution de (5.11) est aussi solution de

$$(f, v-u) - (Au, v-u) - (\Lambda^* v, u) \leqslant 0\,, \forall v \in D(\Lambda\,;H) \cap D(\Lambda^*\,;H) \cap X \tag{5.12}$$

L'ensemble des solutions de (5.11) est faiblement compact ; il est convexe faiblement compact lorsque A *est monotone hémicontinu et borné. Si de plus* $(Ax - Ay, x - y) > 0$, $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, *alors la solution de (5.11) est unique.*

Démonstration. — L'existence d'une solution et les propriétés de l'ensemble des solutions résultent du corollaire 39. Montrons que toute solution de (5.11) vérifie (5.12). Soient

$$w \in D(\Lambda\,;H) \cap D(\Lambda^*\,;H) \cap X \quad \text{et} \quad t \in \,]0\,,1]$$

On prend $v_n = (1-t)\,u_n + tw$ dans (5.11). D'où $\alpha_n \leqslant \beta_n$ avec

$$\alpha_n = (f\,,\,v_n - u) - (\mathrm{A}u\,,\,v_n - u) \quad \text{et}$$

$$\beta_n = (\mathrm{A}v_n\,,\,v_n - u) = (1-t)\,(\mathrm{A}u_n\,,\,u_n - u) + t(w\,,\,u_n - u)$$
$$+\, t^2(\Lambda w\,,\,w - u_n) + t(1-t)\,(\Lambda u_n\,,\,w - u_n)$$

On a $$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = t(f\,,\,w-u) - t(\mathrm{A}u\,,\,w-u) \quad \text{et}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \beta_n \leqslant t^2(\Lambda w\,,\,w-u) + t(1-t)\,(\Lambda^* w\,,\,u)$$

Donc :

$$(f\,,\,w-u) - (\mathrm{A}u\,,\,w-u) \leqslant t(\mathrm{A}w\,,\,w-u) + (1-t)\,(\Lambda^* w\,,\,u)\,.$$

On obtient (5.12) en passant à la limite quand $t \longrightarrow 0$.

Remarque. — Supposons de plus que Λ vérifie (5.10). Soient u une solution de (5.11) et $u_n = \left(1 - \dfrac{\alpha}{n}\right) n\,(n\mathrm{I} + \Lambda)^{-1}\,u$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,|\Lambda u_n|^2 = \lim_{n\to+\infty} n\,|u_n - u|^2 = 0$$

En effet :

$$(f\,,\,u_n - u) - (\mathrm{A}u\,,\,u_n - u) \leqslant (\Lambda u_n\,,\,u_n - u) = -\frac{1}{n}\,|\Lambda u_n|^2 - \frac{\alpha}{n}\,(\Lambda u_n\,,\,u).$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,|\Lambda u_n|^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n\,|u_n - u|^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,|\alpha u + \Lambda u_n|^2 = 0.$$

PROPOSITION 44. — *Soit* X *un convexe fermé de* V *contenant* 0 *et compatible avec* L. *Soit* A *une application pseudo-monotone et bornée de* X *faible dans* V' *telle que*

$$\lim_{\substack{\|x\|\to+\infty \\ x\in \mathrm{X}}} \frac{(\mathrm{A}x\,,\,x)}{\|x\|} = +\infty\,.$$

Alors pour tout $f \in \mathrm{V}'$ *il existe* $u \in \mathrm{X}$ *tel que :*

$$(f\,,\,v-u) - (\mathrm{A}u\,,\,v-u) - (\Lambda v\,,\,v-u) \leqslant 0 \qquad \forall\, v \in \mathrm{D}(\Lambda\,;\,\mathrm{H}) \cap \mathrm{X} \tag{5.13}$$

et

$$(f, v - u) - (Au, v - u) - (\Lambda^* v, u) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(\Lambda^* ; H) \cap X \tag{5.14}$$

Démonstration. – Soit $h > 0$; l'application $v \longrightarrow B_h v$ où $B_h v = Av + \dfrac{v - G(h) v}{h}$ est pseudo-monotone de X dans V'. Par conséquent il existe $u_h \in X$ tel que

$$(f, v - u_h) - (Au_h, v - u_h) - \left(\frac{u_h - G(h) u_h}{h}, v - u_h\right) \leqslant 0 \;\; \forall v \in X$$

D'où :

$$(f, v - u_h) - (Au_h, v - u_h) - \left(\frac{v - G(h) v}{h}, v - u_h\right) \leqslant 0 \;\; \forall v \in X$$

Il en résulte aisément que u_h est borné dans X. Donc suivant un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ plus fin que le filtre des voisinages de 0 dans $\mathbf{R}_+$, u_h converge vers u dans X faible et

$$\limsup_{\mathfrak{U}} (Au_h, u_h - v) \leqslant (\Lambda v, v - u) - (f, v - u) \;\; \forall v \in D(\Lambda ; H) \cap X.$$

En prenant $v = u_n$ (suite régularisante de u) on déduit que

$$\limsup_{\mathfrak{U}} (Au_h, u_h - u) \leqslant 0$$

et $$(Au, u - v) \leqslant \liminf_{\mathfrak{U}} (Au_h, u_h - v) \quad \forall v \in X$$

D'où :

$$(f, v - u) - (Au, v - u) - (\Lambda v, v - u) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(\Lambda ; H) \cap X$$

D'autre part,

$$(f, v - u_h) - (Au_h, v - u_h) - \left(\frac{v - G^*(h) v}{h}, u_h\right) \leqslant 0 \quad \forall v \in X.$$

En passant à la limite suivant $\mathfrak{U}$, il vient

$$(f, v - u) - (Au, v - u) - (\Lambda^* v, u) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(\Lambda^* ; H) \cap X$$

Remarque. – Dans le cas particulier où $(Ax - Ay, x - y) > 0$, $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, la solution de (5.11) qui est unique vérifie donc nécessairement (5.14).

La solution de (5.11) satisfait à une propriété supplémentaire de régularité lorsque V = H.

PROPOSITION 45. – *Soit* X *un convexe fermé de* H *contenant* 0 *et vérifiant (5.10). Soit* A *une application pseudo-monotone et bornée de* X *faible dans* H *telle que*

$$\lim_{\substack{|x| \to +\infty \\ x \in X}} \frac{(Ax\,,\,x)}{|x|} = +\infty\,.$$

Alors pour tout $f \in H$, *il existe* $u \in D(\Lambda\,;\,H) \cap X$ *tel que*

$$(f, v-u) - (Au\,,\,v-u) - (\Lambda u\,,\,v-u) \leqslant 0 \qquad \forall\, v \in X\,.$$

Démonstration. – La proposition 43 appliquée avec V = H montre qu'il existe $u \in X$ tel que

$$(f, v-u) - (Au\,, v-u) - (\Lambda v\,,\,v-u) \leqslant 0 \quad \forall\, v \in D(\Lambda\,;\,H) \cap X \quad (5.11)$$

On prend $v = u_n = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) n(nI + \Lambda)^{-1}\, u$ dans (5.11). D'où :

$$|\Lambda u_n|^2 \leqslant |Au - f + \alpha u|\,|\Lambda u_n| + \alpha\,|Au - f|\,|u|$$

Par conséquent Λu_n demeure dans un borné de H et donc $u \in D(\Lambda\,;\,H)$. Soit alors $w \in D(\Lambda\,;\,H) \cap X$; on prend $v = (1-t)\,u + tw$ dans (5.11). En passant à la limite quand $t \longrightarrow 0$, il vient

$$(f, w-u) - (Au\,,\,w-u) - (\Lambda u\,,\,w-u) \leqslant 0, \forall\, w \in D(\Lambda\,;\,H) \cap X\,.$$

Comme $D(\Lambda\,;\,H) \cap X$ est dense dans X, on en déduit la proposition.

Dans le cas particulier où X = H et A est monotone hémicontinu et borné on retrouve un résultat de F. Browder [11] (théorème 15).

4.4 Cas des semi-groupes pseudo-unitaires.

DEFINITION 1. – *On dit qu'un semi-groupe* G *sur* H *est pseudo-unitaire si* $G^*(s)\,G(s) = I$, $\forall\, s \geqslant 0$.

LEMME 46. – *Soit* G *un semi-groupe continu et pseudo-unitaire sur* H. *Alors* G *et* G^* *sont des semi-groupes de contractions. De plus* $D(\Lambda\ ;\ H) \subset D(\Lambda^*\ ;\ H)$ et $\Lambda^* = -\Lambda$ *sur* $D(\Lambda\ ;\ H)$.

Démonstration. – Il est évident que

$$|G(s)\,u| = |u| \quad \text{et} \quad |G^*(s)\,u| \leqslant |u|,\ \forall u \in H,\ \forall s \geqslant 0\,.$$

Soient $u \in D(\Lambda\ ;H)$ et $x_h = \dfrac{G(h)\,u - u}{h}$. On a donc $x_h \longrightarrow -\Lambda u$ et $\dfrac{G^*(h)\,u - u}{h} = -\,G^*(h)\,x_h$. Mais $G^*(h)\,x_h \longrightarrow -\Lambda u$; en effet

$$\begin{aligned}|G^*(h)\,x_h + \Lambda u| &\leqslant |G^*(h)\,x_h + G^*(h)\,\Lambda u| + |G^*(h)\,\Lambda u - \Lambda u| \\ &\leqslant |x_h + \Lambda u| + |G^*(h)\,\Lambda u - \Lambda u|\,.\end{aligned}$$

Par conséquent $u \in D(\Lambda^*\ ;\ H)$ et $\Lambda^* u = -\,\Lambda u$.

COROLLAIRE 47. – *Soient* X *un convexe fermé de* V *contenant* 0 *et* G(*s*) *un semi-groupe continu et pseudo-unitaire sur* H *dont le générateur infinitésimal est compatible avec* X.

Soit A *une application pseudo-monotone et bornée de* X *dans* V′ *vérifiant :*

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in X}} \frac{(Ax\,,\,x)}{\|x\|} = +\infty$$

Alors pour tout $f \in V'$ *il existe* $u \in X$ *tel que*

$$(f, v - u) - (Au\,, v - u) - (\Lambda^* v\,, u) \leqslant 0 \quad \forall v \in D(\Lambda^*\ ; H) \cap X\,. \tag{5.15}$$

Toute solution de (5.15) est aussi solution de

$$(f\,, v - u) - (Au\,, v - u) - (\Lambda v\,, v - u) \leqslant 0 \qquad \forall v \in D(\Lambda\ ; H) \cap X$$

L'ensemble des solutions de (5.15) est faiblement compact ; il est convexe faiblement compact lorsque A *est monotone hémicontinu et borné. Si de plus* $(Ax - Ay\,, x - y) > 0$, $\forall x\,, y \in X$, $x \neq y$, *alors la solution de (5.15) est unique.*

Démonstration. – On pose $D(L) = D(\Lambda\ ; H) \cap V$ et $L = \Lambda$ sur V, $D(L') = D(\Lambda^*\ ; H) \cap V$ et $L' = \Lambda^*$ sur $D(L')$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 40 et le lemme 46.

Remarque. – Dans le cas particulier où X est un *cône convexe,* (5.15) équivaut au système

$$\begin{cases} (f, v) - (\mathrm{A}u, v) - (\Lambda^* v, u) \leqslant 0 & \forall v \in \mathrm{D}(\Lambda^* ; \mathrm{H}) \cap \mathrm{X} \\ -(f, u) + (\mathrm{A}u, u) = 0 . \end{cases}$$

5.5. Un résultat de régularité.

Soit $\mathrm{G}(s)$ un semi-groupe continu de contractions sur H. On suppose que la restriction de G à V définit un semi-groupe continu dans V et que $\mathrm{G}^*(s)\, \mathrm{V} \subset \mathrm{V}$.

THEOREME 48. – [1] *Soit* X *un convexe fermé de* V *contenant* 0 *et compatible avec le générateur infinitésimal de* G.

On suppose qu'il existe $\rho > 0$ *tel que*

$$\mathrm{G}(s)\, v + \mathrm{G}^*(s) v - \mathrm{G}^*(s)\, \mathrm{G}(s) v + (\rho - 1) v \in (\rho + \theta(s))\, \mathrm{X}, \ \forall v \in \mathrm{X}, \ \forall s \geqslant 0$$

avec $$|\theta(s)| \leqslant k s^2 \quad , \quad \forall s \geqslant 0 .$$

Soit A *une application hémicontinue et bornée de* V *dans* V′ *vérifiant*

$$(\mathrm{A}x - \mathrm{A}y , x - y) \geqslant c \, \|x - y\|^2 \quad \forall x , y \in \mathrm{V} \quad \textit{avec} \quad c > 0 \quad \textit{et} \tag{5.16}$$

$$(\mathrm{A}v , \mathrm{G}^*(s)\, w) = (\mathrm{AG}(s)\, v , w) \quad \forall v , w \in \mathrm{V}, \quad \forall s \geqslant 0 . \tag{5.17}$$

Alors pour tout $f \in \mathrm{D}(\Lambda ; \mathrm{H})$, *il existe* $u \in \mathrm{D}(\Lambda ; \mathrm{V}) \cap \mathrm{X}$ *unique tel que*

$$(f, v - u) - (\mathrm{A}u , v - u) - (\Lambda u , v - u) \leqslant 0 \quad , \quad \forall v \in \mathrm{X}$$

De plus

$$c \, \| \Lambda u \|^2 \leqslant (\Lambda f, \Lambda u) + k(f - \mathrm{A}u - \Lambda u , u) .$$

Démonstration. – Soit $h > 0$; d'après le corollaire 30, il existe $u_h \in \mathrm{X}$ tel que

$$(f, v - u_h) - (\mathrm{B}_h u_h , v - u_h) \leqslant 0 \quad \forall v \in \mathrm{X} \tag{5.18}$$

avec $$\mathrm{B}_h v = \mathrm{A}v + \frac{v - \mathrm{G}(h)\, v}{h} .$$

[1] Dans le cas particulier où A est linéaire et G est un groupe unitaire, ce résultat m'a été communiqué par M. Lions.

Soit $s > 0$, on multiplie (5.18) par $\rho + \theta(s)$ et on prend $v \in X$ tel que

$$(\rho + \theta(s))\, v = G(s)\, u_h + G^*(s)\, u_h - G^*(s)\, G(s)\, u_h + (\rho - 1)\, u_h$$

D'où :

$$(B_h\, G(s)\, u_h - B_h\, u_h\,,\, G(s)\, u_h - u_h) \leqslant (G(s) f - f\,,\, G(s)\, u_h - u_h) \\ + \theta(s)\,(f - B_h\, u_h\,,\, u_h)\,. \qquad (5.19)$$

Il résulte de (5.19) que $u_h \in D(\Lambda\,;\,V)$ et

$$c\, \|\Lambda u_h\|^2 \leqslant (\Lambda f,\, \Lambda u_h) + k(f - B_h\, u_h\,,\, u_h) \qquad (5.20)$$

(il suffit de diviser (5.19) par s^2 et de passer à la limite quand $s \longrightarrow 0$). On déduit de (5.20) que Λu_h demeure dans un borné de V.

On achève alors la démonstration comme celle de la proposition 44 : quand $h \longrightarrow 0, u_h \longrightarrow u$ dans V faible et $\lim\sup(Au_h\,,\, u_h - u) \leqslant 0$. Donc $u_h \longrightarrow u$ dans V fort et $\Lambda u_h \longrightarrow \Lambda u$ dans V faible. De plus

$$(f, v - u) - (Au, v - u) - (\Lambda v, v - u) \leqslant 0 \quad \forall\, v \in D(\Lambda\,;\,H) \cap X\,. \qquad (5.21)$$

Soit enfin $w \in D(\Lambda\,;\,H) \cap X$; en prenant $v = (1 - t)\,u + tw$ dans (5.21) et en passant à la limite quand $t \longrightarrow 0$ on a :

$$(f, w - u) - (Au\,,\, w - u) - (\Lambda u\,,\, w - u) \leqslant 0 \quad \forall\, w \in D(\Lambda\,;\,H) \cap X$$

D'où le théorème puisque $D(\Lambda\,;\,H) \cap X$ est partout dense dans X.

Remarques. — 1) La conclusion du théorème 48 reste valable lorsque l'on affaiblit l'hypothèse (5.17) : il suffit de supposer que $\forall\, v \in X$, $\exists\, \tau \geqslant 0$ tel que

$$|(A(G(s)\, v)\,,\, G(s)\, v - v) - (Av\,,\, G^*(s)\, G(s) v - G^*(s)\, v)| \\ \leqslant \tau s\, \|G(s)\, v - v\| \quad \forall\, s \geqslant 0\,.$$

2) Si l'on remplace l'hypothèse (5.16) par

$$(Ax - Ay\,,\, x - y) \geqslant c\, |x - y|^2 \;\forall\, x\,,\, y \in V \quad \text{avec} \quad c > 0 \quad \text{et}$$

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in X}} \frac{(Ax\,,\, x)}{\|x\|} = +\infty\,,$$

pour tout $f \in D(\Lambda\,;H)$ il existe $u \in D(\Lambda\,;H) \cap X$ unique tel que

$$(f, v-u) - (Au, v-u) - (\Lambda u, v-u) \leqslant 0 \qquad \forall v \in X$$

De plus $\qquad c\,|\Lambda u|^2 \leqslant (\Lambda f, \Lambda u) + k(f - Au - \Lambda u, u)$.

6. APPLICATIONS

6.1. Application à la résolution d'une équation d'évolution non linéaire.

Hypothèses. – Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni du produit scalaire (,) et de la norme | |, et $H = L_2([0, T], \mathcal{H})$. Pour tout $t \in [0, T]$ soit $B(t)$ une application linéaire monotone de $D(B(t)) \subset \mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.

On suppose qu'un opérateur d'évolution est associé à B, c'est-à-dire qu'il existe une application continue $U(t, s)$ de $[0, T] \times [0, T]$ dans $\mathcal{L}(H, H)$ et un sous-espace Z partout dense dans H tels que, pour tout $f \in Z$, la fonction $u(t) = Uf(t) = \int_0^t U(t, s) f(s)\, ds$ vérifie :

1) $u \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{H}) \quad u(0) = 0$

2) $u(t) \in D(B(t))$ p.p. sur $[0, T]$

3) $\dfrac{du}{dt} + B(t)\,u(t) = f(t)$ p.p. sur $[0, T]$.

Il en résulte qu'inversement toute fonction u vérifiant 1), 2), 3) avec $f \in H$ est nécessairement égale à $u(t) = \int_0^t U(t, s) f(s)\, ds$.

THEOREME 49. – *Soient* $u_0 \in \mathcal{H}$ *et*

$$B(u_0, r) = \{x \in \mathcal{H}\,;\,|x - u_0| \leqslant r\}$$

Soit $f(t, x)$ *une application continue de* $[0, T] \times B(u_0, r)$ *dans* $\mathcal{H}$ *telle que*

$(f(t,x) - f(t,y), x - y) \leqslant c\,|x - y|^2$, $\forall\, t \in [0, T]$, $\forall\, x, y \in B(u_0, r)$

avec $c \geqslant 0$.

Alors il existe $0 < h \leqslant T$ *tel que l'équation*

$$\frac{du}{dt} + B(t)\,u(t) = f(t, u(t)),\ u(0) = u_0$$

admette une solution faible unique sur $[0, h]$; *c'est-à-dire qu'il existe une fonction* $u(t)$ *continue de* $[0, h]$ *dans* $\mathcal{H}$ *et une seule vérifiant*

$$u(t) = \int_0^t U(t, s)\, f(s, u(s))\, ds + U(t, 0)\, u_0\,. \tag{6.1}$$

Plus précisément si $|f(t, x)| \leqslant M$, $\forall\, t \in [0, T]$, $\forall\, x \in B(u_0, r)$ *et si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

a) $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]} |U(t, 0)\, u_0 - u_0| + MT < r$

b) $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{t\in[0,T]} |U(t, 0)\, u_0 - u_0| + e^{cT} \int_0^T e^{-cs}\, |f(s, u_0)|\, ds < r$

alors l'équation (6.1) admet une solution et une seule définie sur $[0, T]$.

Avant de démontrer ce théorème, il est nécessaire de rappeler quelques propriétés des applications maximales monotones.

DEFINITION J. – *Soient* H *un espace de Hilbert,* D(L) *un sous-espace vectoriel de* H ; *on dit qu'une application monotone* L *de* D(L) *dans* H *est maximale monotone s'il n'existe aucune application linéaire monotone qui prolonge strictement* L.

Propriétés des applications maximales monotones. (cf. [23] ou [32]).

– Soit L une application maximale monotone de D(L) dans H. Alors D(L) est partout dense dans H et le graphe de L est fermé.

– Soit L une application maximale monotone ; il existe un semi-groupe continu de contractions sur H et un seul dont le générateur infinitésimal est – L. Inversement si – L est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions, alors L est maximal monotone.

LEMME 50. – *L'application* $f \in \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{U}f(t) = \int_0^t \mathrm{U}(t, s)\, f(s)\, ds$ *est linéaire continue et injective de* H *dans* $\mathcal{C}([0, \mathrm{T}], \mathcal{H})$. U *est monotone de* H *dans* H *et* $\mathrm{L} = \overline{\mathrm{U}}^1$ *est maximal monotone de* D(L) *sur* H.

Démonstration. – Il est évident que U est linéaire et continue de H dans $\mathcal{C}([0, \mathrm{T}], \mathcal{H})$. Soient

$$\mathrm{D}(\mathrm{L}_0) = \{ v \in \mathcal{C}^1([0, \mathrm{T}], \mathcal{H}), v(0) = 0, v(t) \in \mathrm{D}(\mathrm{B}(t)$$

$$\text{p.p. sur } [0, \mathrm{T}] \text{ et } \frac{dv}{dt} + \mathrm{B}v \in \mathrm{H}\}, \text{ et } \mathrm{L}_0 v = \frac{dv}{dt} + \mathrm{B}v ;$$

L_0 est une application monotone de $\mathrm{D}(\mathrm{L}_0)$ dans H. D'après le lemme de Zorn, L_0 se prolonge en une application maximale monotone L de D(L) dans H. Soit $f \in \mathrm{H}$; il existe une suite $f_n \in \mathrm{Z}$ telle que $f_n \longrightarrow f$, $\mathrm{U}f_n \in \mathrm{D}(\mathrm{L}_0)$ et $\mathrm{L}_0 \mathrm{U}f_n = f_n$. D'où $\mathrm{U}f \in \mathrm{D}(\mathrm{L})$ et $\mathrm{LU}f = f$. Il en résulte que U est injectif et monotone de H dans H, puisque

$$\int_0^t (\mathrm{U}f, f)\, dt = \int_0^{\mathrm{T}} (\mathrm{U}f, \mathrm{LU}f)\, dt \geqslant 0 \quad \forall f \in \mathrm{H}.$$

Par suite $\mathrm{D}(\overline{\mathrm{U}}^1) \subset \mathrm{D}(\mathrm{L})$ et $\mathrm{L} = \overline{\mathrm{U}}^1$ sur $\mathrm{D}(\overline{\mathrm{U}}^1)$. Inversement soit $x \in \mathrm{D}(\mathrm{L})$; on a :

$$\int_0^{\mathrm{T}} (\mathrm{L}x - f, x - \mathrm{U}f)\, dt \geqslant 0 \quad \forall f \in \mathrm{H}.$$

Donc $x = \mathrm{UL}x$ et par conséquent $x \in \mathrm{D}(\overline{\mathrm{U}}^1)$. On en déduit que $\mathrm{L} = \overline{\mathrm{U}}^1$ est maximal monotone de D(L) sur H.

LEMME 51. – *Soient* φ *et* Ψ *deux fonctions numériques continues et* $\geqslant 0$ *sur* $[0, \mathrm{T}]$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

i) $\frac{1}{2}\varphi^2(t) - \frac{1}{2}\varphi^2(t') \leqslant \int_{t'}^t \varphi(s)\,\Psi(s)\, ds \quad \forall t' < t$

ii) $\varphi(t) - \varphi(t') \leqslant \int_{t'}^t \Psi(s)\, ds \quad \forall t' < t.$

Démonstration. – On se ramène aisément au cas où φ et Ψ sont définies continues et vérifient i) ou ii) sur **R** : il suffit de prolonger φ et

Ψ par deux fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et constantes en dehors de $[0\,,T]$.

Il est évident que si φ est dérivable :

$$\text{i)} \Longleftrightarrow \text{ii)} \Longleftrightarrow (\varphi' \leqslant \Psi)\,.$$

Dans le cas général supposons ii) vérifié ; il existe deux suites φ_n et Ψ_n de fonctions $\geqslant 0$ indéfiniment dérivables, qui convergent uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}$ vers φ et Ψ et telles que

$$\varphi_n(t) - \varphi_n(t') \leqslant \int_{t'}^{t} \Psi_n(s)\,ds \qquad \forall\, t' < t\,.$$

On prend par exemple $\varphi_n = \varphi * k_n$ et $\Psi_n = \Psi * k_n$ où k_n désigne une fonction $\geqslant 0$ indéfiniment dérivable à support dans $\left]-\frac{1}{n}\,, +\frac{1}{n}\right[$ avec $\int_{\mathbf{R}} k_n(x)\,dx = 1$. ii) $\Longrightarrow$ i). En effet, on a

$$\varphi_n(t) - \varphi_n(t') \leqslant \int_{t'}^{t} \Psi_n(s)\,ds \qquad \forall\, t' < t$$

D'où :

$$\frac{1}{2}\,\varphi_n^2(t) - \frac{1}{2}\,\varphi_n^2(t') \leqslant \int_{t'}^{t} \varphi_n(s)\,\Psi_n(s)\,ds \qquad \forall\, t' < t\,.$$

En passant à la limite on obtient i).

i) $\Longrightarrow$ ii). On a $F(t) - F(t') \leqslant \int_{t'}^{t} G(s)\,ds \quad \forall\, t' < t$, avec

$$F(t) = \frac{1}{2}\,\varphi^2(t) \qquad \text{et} \qquad G(t) = \varphi(t)\,\Psi(t)\,.$$

Soient F_n et G_n deux suites de fonctions $\geqslant 0$ indéfiniment dérivables qui convergent uniformément vers F et G sur $[0\,,T]$ et telles que

$$F_n(t) - F_n(t') \leqslant \int_{t'}^{t} G_n(s)\,ds \qquad \forall\, t' < t$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; les fonctions $\varphi_{\varepsilon n} = \sqrt{2F_n(t) + \varepsilon}$ et $\Psi_{\varepsilon n}(t) = \dfrac{G_n(t)}{\varphi_{\varepsilon n}(t)}$ sont $\geqslant 0$, indéfiniment dérivables et vérifient :

$$\frac{1}{2}\varphi_{\varepsilon n}^2(t) - \frac{1}{2}\varphi_{\varepsilon n}^2(t') \leqslant \int_{t'}^{t} \varphi_{\varepsilon n}(s)\,\Psi_{\varepsilon n}(s)\,ds \qquad \forall\, t' < t$$

D'où :

$$\varphi_{\varepsilon n}(t) - \varphi_{\varepsilon n}(t') \leqslant \int_{t'}^{t} \Psi_{\varepsilon n}(s)\,ds \qquad \forall\, t' < t$$

En passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\sqrt{\varphi^2(t)+\varepsilon} - \sqrt{\varphi^2(t')+\varepsilon} \leqslant \int_{t'}^{t} \Psi(s)\,ds \qquad \forall\, t' < t\,.$$

LEMME 52. – *On a*

$$\frac{1}{2}\,|v(t)|^2 - \frac{1}{2}\,|v(t')|^2 \leqslant \int_{t'}^{t} (\mathrm{L}v\,,\,v)\,ds \qquad \forall\, t' < t$$

et

$$|\mathrm{U}f(t)| \leqslant \int_0^t |f(s)|\,ds \qquad \forall\, f \in \mathrm{H}\,,\ \forall\, t \in [0\,,\mathrm{T}]\,.$$

Démonstration. – Soit $f \in \mathrm{Z}$ et $v = \mathrm{U}f$; on a

$$\mathrm{L}_0\, v = \frac{dv}{dt} + \mathrm{B}(t)\,v(t) = f\,.$$

D'où : $\displaystyle \frac{1}{2}\,|v(t)|^2 - \frac{1}{2}\,|v(t')|^2 \leqslant \int_{t'}^{t} (\mathrm{L}v\,,\,v)\,ds \qquad \forall\, t' < t\,.$

Dans le cas général, $v \in \mathrm{D(L)}$, $\mathrm{L}v = f \in \mathrm{H}$; on considère une suite $f_n \in \mathrm{Z}$ qui converge vers f. En appliquant le résultat précédent à $v_n = \mathrm{U}f_n$ on obtient

$$\frac{1}{2}\,|v_n(t)|^2 - \frac{1}{2}\,|v_n(t')|^2 \leqslant \int_{t'}^{t} (\mathrm{L}v_n\,,\,v_n)\,ds \qquad \forall\, t' < t\,.$$

On passe à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$; il vient

$$\frac{1}{2}\,|v(t)|^2 - \frac{1}{2}\,|v(t')|^2 \leqslant \int_{t'}^{t} (\mathrm{L}v\,,\,v)\,ds \qquad \forall\, t' < t\,.$$

Soit $f \in \mathrm{H}$, $v = \mathrm{U}f \in \mathrm{D(L)}$. On a donc :

$$\frac{1}{2}\,|\mathrm{U}f(t)|^2 - \frac{1}{2}\,|\mathrm{U}f(t')|^2 \leqslant \int_{t'}^{t} (f\,,\,\mathrm{U}f)\,ds \leqslant \int_{t'}^{t} |f(s)|\,|\mathrm{U}f(s)|\,ds$$

$\forall\, t' < t$

Il résulte du lemme 51 que $|Uf(t)| \leqslant \int_0^t |f(s)|\,ds$.

LEMME 53. – *Soient* $v \in D(L)$ *et* $c \in \mathbf{R}$. *On a* $e^{ct} v \in D(L)$ *et* $L(e^{ct} v) = e^{ct}(Lv + cv)$. *Par conséquent*

$$(I + \varepsilon L)^{-1} f(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{(s-t)/\varepsilon}\, U(t, s) f(s)\, ds. \quad \forall \varepsilon > 0$$

Démonstration. – Soient $f \in Z$ et $v = Uf$. Alors $e^{ct} v \in D(L_0)$ et $L(e^{ct} v) = e^{ct}(Lv + cv)$. Dans le cas général, soient $v \in D(L)$ et $f = Lv$; on considère une suite $f_n \in Z$ qui converge vers f. On obtient le résultat en appliquant ce qui précède à $v_n = Uf_n$ et en passant à la limite. Soit $u = (I + \varepsilon L)^{-1} f$; on a $Lu + \frac{1}{\varepsilon} u = \frac{1}{\varepsilon} f$. D'où

$$e^{\frac{1}{\varepsilon} t}\left(Lu + \frac{1}{\varepsilon} u\right) = \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{1}{\varepsilon} t} f = L\left(e^{\frac{1}{\varepsilon} t} u\right)$$

Par suite :

$$u(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\, U(t, s) f(s)\, ds$$

Démonstration du théorème 49. – On suppose d'abord que $u_0 = 0$. L'équation (6.1) s'écrit donc $Lu(t) = f(t, u)$. On fait le changement de variable $u(t) = e^{ct} v(t)$. L'équation (6.1) devient alors $Lv + cv = e^{-ct} f(t, e^{ct} v)$ ou encore $Lv + Av = 0$ avec

$$Av(t) = cv(t) - e^{-ct} f(t, e^{ct} v).$$

Soit $X = \{u \in H \; ; \; e^{ct} |u(t)| \leqslant r,$ p.p. sur $[0, T]\}$. X est un convexe fermé borné de H et A est une application monotone hémicontinue et bornée de X dans H. Plus précisément

$$(Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t)) \geqslant 0, \forall u_1, u_2 \in X, \forall t \in [0, T].$$

D'autre part L et X sont compatibles : en effet, soient $u \in X$ et

$$u_\varepsilon = (I + \varepsilon L)^{-1} u.$$

On a
$$|u_\varepsilon(t)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}(s-t)}\, r\, e^{-cs}\, ds \quad .$$

D'où : $$e^{ct}\,|u_\varepsilon(t)| \leqslant \frac{r}{1-\varepsilon c}.$$

Par conséquent $(1-\varepsilon c)\,(\mathrm{I}+\varepsilon\,\mathrm{L})^{-1}\,u \in \mathrm{X}$, $\forall\,\varepsilon > 0$. Il résulte alors de la proposition 42 que L et X sont compatibles.

D'après la proposition 45, il existe $v \in \mathrm{D(L)} \cap \mathrm{X}$ tel que

$$\int_0^{\mathrm{T}} (\mathrm{L}v + \mathrm{A}v\,,\, v - w)\,ds \leqslant 0 \qquad \forall\, w \in \mathrm{X}\,. \tag{6.2}$$

L'inégalité (6.2) étant vérifiée pour tout $w \in \mathrm{X}$ on a aussi

$$(\mathrm{L}v + \mathrm{A}v\,,\, v - w) \leqslant 0 \quad \text{p.p. sur } [0\,,\mathrm{T}]\,,\ \forall\, w \in \mathrm{X}\,. \tag{6.3}$$

Majoration à priori de la solution.

– *Cas où l'hypothèse a) est vérifiée.* – On a $u = e^{ct}\,v$; en prenant $w = 0$ dans (6.3), on obtient $(\mathrm{L}u - f(t\,,u)\,,u) \leqslant 0$ p.p. sur $[0\,,\mathrm{T}]$. D'où

$$\frac{1}{2}\,|u(t)|^2 - \frac{1}{2}\,|u(t')|^2 \leqslant \int_{t'}^{t} (f(s\,,u(s))\,,u(s))\,ds\,,\ \ \forall\, t' < t\,.$$

Il résulte alors du lemme 51 que

$$|u(t)| \leqslant \mathrm{M}t \leqslant \mathrm{MT} < r\,.$$

– *Cas où l'hypothèse b) est vérifiée.* – En appliquant (6.3) avec $w = 0$ il vient

$$\frac{1}{2}\,|v(t)|^2 - \frac{1}{2}\,|v(t')|^2 \leqslant - \int_{t'}^{t} (\mathrm{A}v\,,v)\,ds \leqslant - \int_{t'}^{t} (\mathrm{A}o\,,v)\,ds \quad \forall\, t' < t$$

D'où $$e^{ct}\,|v(t)| \leqslant e^{ct} \int_0^{t} e^{-cs}\,|f(s\,,o)|\,ds \qquad \forall\, t \in [0\,,\mathrm{T}]\ \ .$$

Dans les deux cas, on a

$$e^{ct}\,|v(t)| \leqslant r' < r \qquad \forall\, t \in [0\,,\mathrm{T}]\,.$$

Soient alors $z \in \mathcal{C}([0\,,\mathrm{T}]\,,\mathcal{H})$ et $w_t = (1-t)\,v + tz$. Pour $t > 0$ assez petit, $w_t \in \mathrm{X}$, et par conséquent

$$\int_0^{\mathrm{T}} (\mathrm{L}v + \mathrm{A}v\,,\, v - w_t)\,ds \leqslant 0$$

D'où

$$\int_0^T (Lv + Av, v - z)\, ds \leqslant 0 \qquad \forall z \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{H})$$

Il en résulte que $Lv + Av = 0$.

Unicité.

Soient v_1 et v_2 deux solutions de (6.1). On a

$Lv_1 + Av_1 = Lv_2 + Av_2 = 0$. Or $(Av_1(t) - Av_2(t), v_1(t) - v_2(t)) \geqslant 0$,

$\forall t \in [0, T]$

D'où

$$(Lv_2 - Lv_1, v_2(t) - v_1(t)) = 0, \ \forall t \in [0, T]$$

et par conséquent $v_1 = v_2$.

Cas où $u_0 \neq 0$.

On cherche u tel que

$$u(t) = \int_0^t U(t, s) f(s, u(s))\, ds + U(t, o)\, u_0 .$$

Soit $u_1(t) = u(t) - U(t, o)\, u_0$, u_1 satisfait à l'équation

$$u_1(t) = \int_0^t U(t, s) f_1(s, u_1(s))\, ds$$

où $f_1(t, x_1) = f(t, x_1 + U(t, o)\, u_0)$; $f_1(t, x_1)$ est défini et continu de $[0, T] \times B(u_0, r - \alpha)$ dans $\mathcal{H}$ avec $\alpha = \sup\limits_{t \in [0,T]} |U(t, o)\, u_0 - u_0|$.

On a

$$(f_1(t, x_1) - f_1(t, y_1), x_1 - y_1) \leqslant c\, |x_1 - y_1|^2$$

Par conséquent on est ramené au problème précédent.

COROLLAIRE 54. – *Soient* $u_0 \in \mathcal{H}$ et $f(t, x)$ *une application continue de* $[0, T] \times B(u_0, r)$ *dans* $\mathcal{H}$ *telle que*

$(f(t, x) - f(t, y), x - y) \leqslant c\, |x - y|^2$, $\forall t \in [0, T]$, $\forall x, y \in B(u_0, r)$.

Alors il existe $0 < h \leqslant T$ *tel que l'équation différentielle*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t\,,u) \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{6.4}$$

admette une solution unique (unicité à droite) de classe C^1 *sur* $[0\,,h]$. *Plus précisément si* $|f(t\,,x)| \leqslant M\,, \forall t \in [0\,,T]\,, \forall x \in B(u_0\,,r)$ *et si l'une des conditions suivantes est réalisée*

a) $MT < r$

b) $e^{cT} \displaystyle\int_0^T e^{-cs}\,|f(s\,,u_0)|\,ds < r\,,$

alors l'équation (6.4) admet une solution unique de classe C^1 *sur* $[0\,,T]$.

Le théorème 49 généralise des résultats dus à F. Browder [5] et T. Kato [19]. Cette démonstration assure l'existence de solutions locales et contrairement aux démonstrations de [5] et [19] ne fait pas appel au théorème de Peano.

6.2. Application à la résolution d'un problème parabolique avec conditions aux limites unilatérales.

Notations et hypothèses. – Soient Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ de frontière Γ régulière et $0 < T \leqslant +\infty$. On pose $\Sigma = [0\,,T] \times \Gamma$

$L_2(\Omega)$ muni de son produit scalaire $(\ ,\ )$ et de sa norme $|\ \ |$ usuels est un espace de Hilbert. $H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega)\ ;\ D_i v \in L_2(\Omega),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ $\left(\text{où } D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \text{ désigne la dérivée au sens des distributions}\right)$. $H^1(\Omega)$ muni de sa norme usuelle $\|\ \ \|$ est un espace de Hilbert.

$\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω. $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. $H^{-1}(\Omega)$ est le dual de $H_0^1(\Omega)$.

$$V = L_2([0\,,T]\,, H^1(\Omega))$$
$$H = L_2([0\,,T]\,, L_2(\Omega))$$

V et H munis de leurs produits scalaires usuels sont des espaces de Hilbert ; V est inclus dans H avec injection continue et V est dense dans H.

On sait (J.L. Lions [25]) que toute fonction $v \in V$ telle que $\dfrac{dv}{dt} \in L_2([0\,,T]\,,H^{-1}(\Omega))$ est égale p.p. à une fonction continue de $[0\,,T]$ dans $L_2(\Omega)$.

Soit $X = \{v \in V\ ;\ v \geqslant 0 \text{ p.p. sur } \Sigma\}$. On considère le semi-groupe G défini par

$$G(s)\,v(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < s \\ v(t-s) & \text{si} \quad s < t < T\,. \end{cases}$$

G est un semi-groupe continu sur V et un semi-groupe continu de contractions sur H. Son générateur infinitésimal $-\Lambda$ dans H est défini par :

$$D(\Lambda\,;H) = \left\{v \in H\ ;\frac{dv}{dt} \in H\,,\ v(0) = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad \Lambda = \frac{d}{dt}.$$

Soient $a_{ij}(t\,,x)\,,\qquad a_0(t\,,x) \in L_\infty([0\,,T] \times \Omega)$.

Pour chaque couple $u\,,v \in H^1(\Omega)$ on pose

$$a(t\,,u\,,v) = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij}(t\,,x)\,D_j u\,D_i v\,dx + \int_\Omega a_0(t\,,x)\,uv\,dx\,.$$

On fait l'hypothèse d'ellipticité :

$$a(t\,,v\,,v) \geqslant \alpha\,\|v\|^2 \text{ p.p. en } t \in [0\,,T] \text{ et } \forall\, v \in H^1(\Omega) \text{ avec } \alpha > 0\,.$$

On introduit l'opérateur

$$Bv = -\sum_{i,j} D_i(a_{ij}\,D_j v) + a_0 v\,,$$

qui est linéaire et continu de V dans $L_2([0\,,T]\,,H^{-1}(\Omega))$. Enfin

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_B} = \sum_{ij} a_{ij}\,D_j v \cos(\nu\,,x_i)$$

où $\cos(\nu\,,x_i)$ est le $i^{\text{ème}}$ cosinus directeur de la normale extérieure à Γ.

THEOREME 55. — *Pour tout $f \in H$, il existe $u \in X$ unique tel que*

$$\int_0^T (f\,,v-u)\,dt - \int_0^T a(t\,,u\,,v-u)\,dt - \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}\,,v-u\right) dt \leqslant 0$$

$$\forall\, v \in D(\Lambda\,;H) \cap X\,. \quad (6.5)$$

L'inéquation (6.5) équivaut formellement au système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{B}u = f & \text{dans} \quad]0\,,\mathrm{T}[\; \times \Omega & (6.6) \\ u \geqslant 0 & \text{sur} \quad \Sigma & (6.7) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathrm{B}}} \geqslant 0 & \text{sur} \quad \Sigma & (6.8) \\ u \, . \dfrac{\partial u}{\partial \nu_{\mathrm{B}}} = 0 & \text{sur} \quad \Sigma & (6.9) \\ u(0\,,x) = 0 & \forall\, x \in \Omega & (6.10) \end{cases}$$

Démonstration. – On pose $(\mathrm{A}u\,,v) = \int_0^{\mathrm{T}} a(t\,,u\,,v)\,dt$. Il est évident que l'existence et l'unicité de la solution de l'inéquation (6.5) résultent de la proposition 43.

Montrons que toute solution du système (6.6) . . . (6.10) est solution de (6.5). En effet (6.7) implique $u \in \mathrm{X}$. En multipliant (6.6) par u et en intégrant formellement par parties on obtient

$$\frac{1}{2}\,|u(\mathrm{T})|^2 + \int_0^{\mathrm{T}} a(t\,,u\,,u)\,dt = \int_0^{\mathrm{T}} (f,u)\,dt \tag{6.11}$$

On multiplie (6.6) par $v \in \mathrm{D}(\Lambda\,;\mathrm{H}) \cap \mathrm{X}$ et on intègre formellement par parties. D'où

$$\int_0^{\mathrm{T}} (f,v)\,dt - \int_0^{\mathrm{T}} a(t\,,u\,,v)\,dt + \int_0^{\mathrm{T}} \left(\frac{dv}{dt}, u\right) dt - (u(\mathrm{T})\,v(\mathrm{T}))$$

$$\leqslant - \int_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathrm{B}}}, v\right) d\Sigma \leqslant 0\,. \tag{6.12}$$

Par addition de (6.11) et (6.12) il vient

$$\int_0^{\mathrm{T}} (f,v-u)\,dt - \int_0^{\mathrm{T}} a(t\,,u\,,v-u)\,dt - \int_0^{\mathrm{T}} \left(\frac{dv}{dt}, v-u\right) dt$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}\,|v(\mathrm{T}) - u(\mathrm{T})|^2 \leqslant 0 \qquad \forall\, v \in \mathrm{D}(\Lambda\,;\mathrm{H}) \cap \mathrm{X}.$$

Inversement soit u la solution de (6.5) ; on a (6.7) puisque $u \in \mathrm{X}$. Toute fonction $v \in \mathcal{D}([0\,,\mathrm{T}[\,\times\,\Omega)$ est dans $\mathrm{D}(\Lambda\,;\mathrm{H}) \cap \mathrm{X}$. Il résulte alors de (6.5) que

$$\int_0^{\mathrm{T}} (f, v)\,dt - \int_0^{\mathrm{T}} a(t\,,u\,,v)\,dt + \int_0^{\mathrm{T}} \left(\frac{dv}{dt}\,,u\right) dt = 0$$

$$\forall v \in \mathcal{D}(]0\,,\mathrm{T}[\,\times\,\Omega)\,.$$

Par conséquent on a $\dfrac{du}{dt} + \mathrm{B}u = f$ au sens des distributions. On en déduit que u est égal p.p. à une fonction continue de $[0\,,\mathrm{T}]$ dans $\mathrm{L}_2(\Omega)$. D'autre part soit $u_n = n(n\mathrm{I} + \Lambda)^{-1}\,u \in \mathrm{D}(\Lambda\,;\mathrm{H}) \cap \mathrm{X}$, u_n est la solution de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\dfrac{du_n}{dt} + u_n = u \\ u_n(0) = 0\,. \end{cases}$$

On a par suite au sens des distributions

$$\frac{1}{n}\frac{d^2u_n}{dt^2} + \frac{du_n}{dt} = f - \mathrm{B}u\,.$$

D'où

$$\frac{du_n}{dt} = (f - \mathrm{B}u) * k_n + nu(0)\,e^{-nt}$$

$$\text{avec } k_n(s) = \begin{cases} ne^{-ns} & s > 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases}$$

Donc

$$\sqrt{\frac{1 - e^{-n\mathrm{T}}}{2n}}\,\|u(0)\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega)} \leqslant \frac{1}{n}\,\|f - \mathrm{B}u\|_{\mathrm{L}^2([0\,,\mathrm{T}]\,,\mathrm{H}^{-1}(\Omega))} + \frac{1}{n}\left|\frac{du_n}{dt}\right|_{\mathrm{H}}$$

Or d'après la remarque de la proposition 43 on a $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left|\dfrac{du_n}{dt}\right|_{\mathrm{H}} = 0$. Par suite $u(0) = 0$. De plus on a $u_n(\mathrm{T}) \longrightarrow u(\mathrm{T})$ dans $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Soit $\lambda \geqslant 0$; on prend $v = \lambda u_n$ dans (6.5) et on passe à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$; il vient

$$(\lambda - 1)\int_0^{\mathrm{T}} (f, u)\,dt - (\lambda - 1)\int_0^{\mathrm{T}} a(t, u, u)\,dt - \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}\,|u(\mathrm{T})|^2 \leqslant 0.$$

Enfin en faisant tendre λ vers 1 par valeurs supérieures puis inférieures on obtient

$$\int_0^T (f, u)\, dt - \int_0^T a(t, u, u)\, dt - \frac{1}{2} |u(T)|^2 = 0 .$$

En multipliant (6.6) par $v \in D(\Lambda ; H) \cap X$ et en intégrant formellement par parties on a

$$- \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_B} v d\Sigma = \int_0^T (f, v)\, dt - \int_0^T a(t, u, v)\, dt + \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, u\right) dt$$

$$- (u(T), v(T)) \leqslant \frac{1}{2} |u(T) - v(T)|^2$$

Comme cette inéquation est vérifiée pour tout $v \in D(\Lambda ; H) \cap X$ on a

$$\int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_B} v d\Sigma \geqslant 0 \qquad \forall v \in D(\Lambda ; H) \cap X .$$

D'où (6.8).

En multipliant (6.6) par u et en intégrant formellement par parties on a :

$$- \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu_B} u d\Sigma = \int_0^T (f, u)\, dt - \int_0^T a(t, u, u) - \frac{1}{2} |u(T)|^2 = 0$$

On en déduit (6.9) $\left(\text{puisque } u \geqslant 0 \text{ et} \dfrac{\partial u}{\partial \nu_B} \geqslant 0 \text{ sur } \Sigma\right)$.

Remarques. — 1) Dans le cas particulier où $T = +\infty$, le théorème 55 a été démontré par J.L. Lions et G. Stampacchia dans [25] avec des méthodes assez différentes.

On montre de façon analogue l'existence et l'unicité de la solution du problème périodique, c'est-à-dire (6.6), (6.7), (6.8), (6.9) et (6.10′) avec

$$u(0, x) = u(T, x) \qquad \forall v \in \Omega . \tag{6.10′}$$

(Ce résultat a été démontré par J.L. Lions dans [26] avec une autre méthode).

2) Les théorèmes d'existence et d'unicité du § 5 permettent de retrouver d'autres résultats analogues à ceux de F. Browder [9], [11], et J.L. Lions [24].

6.3. Un résultat de régularité.

On fait les mêmes hypothèses que dans 6.2. On suppose ici de plus que $a(t, u, v) = a(u, v)$ est indépendant de t.

THEOREME 56. – *Pour tout* $f \in \mathrm{H}$ *tel que* $\dfrac{df}{dt} \in \mathrm{H}$ *et* $f(0) = 0$, *il existe* $u \in \mathrm{X}$ *unique vérifiant*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} \in \mathrm{V}, u(0) = 0 \\ \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} (f, v - u)\, dt - \int_0^{\mathrm{T}} a(u, v - u)\, dt - \int_0^{\mathrm{T}} \left(\frac{du}{dt}, v - u\right) dt \leqslant 0, \\ \hfill \forall v \in \mathrm{X}. \end{cases}$$

Démonstration. – L'adjoint G^* de G est défini par

$$\mathrm{G}^*(s)\, v(t) = \begin{cases} v(t+s) & \text{si } 0 < t < \mathrm{T} - s \\ 0 & \text{si } \mathrm{T} - s < t < \mathrm{T}. \end{cases}$$

On a :

$$\mathrm{G}^*(s)\,\mathrm{G}(s)\, v(t) = \begin{cases} v(t) & \text{si } 0 < t < \mathrm{T} - s \\ 0 & \text{si } \mathrm{T} - s < t < \mathrm{T}. \end{cases}$$

Par conséquent

$$\mathrm{G}(s)\, v + \mathrm{G}^*(s)\, v + v - \mathrm{G}^*(s)\,\mathrm{G}(s)\, v \in \mathrm{X} \qquad \forall s \geqslant 0$$

De plus

$$(\mathrm{A}v, \mathrm{G}^*(s)\, w) = \int_0^{\mathrm{T}-s} a(v(t), w(t+s))\, dt = \int_s^{\mathrm{T}} a(v(t-s), w(t))\, dt$$

$$= (\mathrm{A}(\mathrm{G}(s)\, v), w) \qquad \forall v, w \in \mathrm{V}.$$

On peut alors appliquer le théorème 48 et en déduire le résultat.

Remarques. – 1) On démontre de façon analogue la régularité de la solution du problème périodique.

2) En appliquant la remarque du théorème 48, on généralise aisément le théorème 56 au cas où l'application $t \longrightarrow a(t, u, v)$ est de classe C^1 sur $[0, \mathrm{T}]$ pour tout couple $u, v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ et vérifie

$$|a'(t\,,u\,,v)| \leqslant M\,\|u\|\,\|v\| \quad \forall t \in [0\,,T], \quad \forall u\,,v \in H^1(\Omega)\,.$$

(On doit supposer de plus que $a(o\,,u\,,v) = a(T\,,u\,,v)$, $\forall\, u\,,v \in H^1(\Omega)$ pour obtenir la régularité de la solution du problème périodique).

6.4. Une généralisation du théorème de Peano.

On peut obtenir à l'aide des théorèmes de point fixe une généralisation simple du théorème de Peano dans les espaces localement convexes.

THEOREME 57. – *Soient* E *un espace localement convexe séparé,* C *un convexe de* E, K *un convexe compact de* E *et* $f(t\,,x)$ *une application continue de* $[0\,,T] \times C$ *dans* K. *Soit* $u_0 \in C$ *tel que* $u_0 + TK \subset C$. *Alors l'équation différentielle*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(t\,,u) \text{ admet une solution de classe } C^1 \text{ sur } [0\,,T] \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

La démonstration fait appel à trois résultats préliminaires.

THEOREME DE POINT FIXE DE Hukuhara [17]. – *Soit* $\mathcal{E}$ *un espace localement convexe séparé,* X *un convexe fermé de* $\mathcal{E}$. *A une application continue de* X *dans* X *telle que* $\overline{A(X)}$ *soit compact. Alors il existe* $u \in X$ *tel que* $Au = u$.

THEOREME D'Ascoli. – *Soient* I *un espace topologique compact,* X *un espace uniforme séparé et* H *une partie équicontinue de* $\mathcal{C}(I\,,X)$ *telle que* $\overline{H(t)}$ *soit compact pour tout* $t \in I$. *Alors* $\overline{H}$ *est compact dans* $\mathcal{C}(I\,,X)$ *muni de la topologie de la convergence uniforme.*

LEMME 58. – *Soient* I *un espace topologique compact,* X *et* Y *des espaces uniformes et* $Z \subset X$ *compact. Soit* $f(t\,,x)$ *une application continue de* $I \times X$ *dans* Y. *Alors pour tout* V *entourage de* Y, *il existe* U *entourage de* X *tel que*

$$\forall z \in Z\,,\ \forall x \in U(z)\,,\ \forall t \in I \text{ on ait } (f(t\,,x)\,,f(t\,,z)) \in V\,.$$

La démonstration de ce lemme est évidente.

Démonstration du théorème 57. – Soit $\mathcal{E} = \mathcal{C}([0\,,T]\,,E)$; $\mathcal{E}$ muni de la topologie de la convergence uniforme est un espace localement convexe séparé. Soit $C' = u_0 + c(\mathrm{TK} \cup \{0\})$. C'est un sous-ensemble convexe compact de C. L'application A de X dans X est définie par

$$u \in X \longrightarrow Au(t) = u_0 + \int_0^t f(s\,,u(s))\,ds\,.$$

L'intégrale a un sens puisque E est un espace localement convexe séparé, $f(x\,,u(s))$ est continue et prend ses valeurs dans K convexe compact. Résoudre l'équation différentielle équivaut à trouver un point fixe de A. On vérifie aisément à l'aide du lemme 58 que A est continu de X dans X. Le théorème d'Ascoli montre que $\overline{A(X)}$ est compact. Il résulte alors du théorème de Hukuhara que A admet un point fixe dans X.

Remarque. – Ce résultat généralise le théorème classique de Peano en dimension finie (Bourbaki [2], Chap. IV, 1). Il généralise aussi un théorème de F. Browder [5] (théorème 7) qui montre l'existence d'une solution dans le cas où E est un espace de Hilbert et $f(t\,,x)$ est faiblement continue. La solution est alors de classe C^1 pour la topologie faible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ALTMAN, A fixed point theorem in Hilbert space, *Bull. Acad. Pol. Sc. Ser. Sc. Math.* t. 5 (1957), p. 19-22.

[2] N. BOURBAKI, Fonctions d'une variable réelle, chap. 4-7, Paris, Hermann, (1951).

[3] H. BREZIS, Une généralisation des opérateurs monotones, Inéquations d'évolution abstraites, *C.R. Acad. Sci. Paris.* t. 264 (1967) 683-686 et 732-735.

[4] H. BREZIS et M. SIBONY, Méthodes d'approximation et d'itération pour les opérateurs monotones. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* t. 28 (1968), 59-82.

[5] F. BROWDER, Non linear equations of evolution, *Annals of Math. Serie* 2, t. 80 (1964) p. 485-523.

[6] F. BROWDER, Mapping theorems for non compact non linear operators in Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci.* U.S.A. t. 54 (1965) p. 337-342.

[7] F. BROWDER, Non linear monotone operators and convex sets in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* t. 71 (1965) p. 780-785.

[8] F. BROWDER, Non linear elliptic boundary value problems II, *Trans. Amer. Math. Soc.* t. 117 (1965). p. 530-550.

[9] F. BROWDER, Non linear initial value problems, *Annals of math.* t. 82 (1965) p. 51-87.

[10] F. BROWDER, Existence and uniqueness theorems for solutions of non linear boundary value problems, Application of non linear partial differential equations in mathematical physics p. 24-49, Providence *Amer. Math. Soc.* (1965) (Proceedings of symposia in applied mathematics 17).

[11] F. BROWDER, Problèmes non linéaires, Université de Montréal 1966.

[12] F. BROWDER, Non linear elliptic functionnal equations in non reflexive Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* t. 72 (1966) p. 89-95.

[13] F. BROWDER, On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone non linear operators in Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci.* U.S.A. t. 56, (1966) p. 419-425.

[14] F. BROWDER, Existence and approximation of solution of non linear variational inequations, *Proc. Nat. Acad. Sci.* U.S.A. t. 56 (1966) p. 1080-1086.

[15] C. DOLPH and G. MINTY, On non linear integral equations of the Hammerstein type, Non linear integral equations, Proceedings of one advanced Seminar conducted by Mathematics Research Center, p. 99-154. Madison, *The University of Wisconsin Press* (1964).

[16] P. HARTMAN and G. STAMPACCHIA, On some non linear elliptic differential functionnal equations, *Acta. Math.* t. 115, (1966) p. 271-310.

[17] M. HUKUHARA, Sur l'existence des points invariants d'une transformation de l'espace fonctionnel, *Japan J. of Math.* t. 20, (1950) p. 1-4.

[18] R.I. KACUROVSKI, Monotone non linear operators in Banach spaces, *Dokladi Akad. Nauk.* S.S.S.R. 163 (1965) p. 559-562.

[19] T. KATO, Non linear evolution equations in Banach spaces, Applications of non linear partial differential equations in mathematical physics ; p. 50-65. Providence *Amer. Math. Soc.* (1965), Proceedings of Symposia in applied mathematics 17).

[20] I. KOLODNER, Equations of Hammerstein type in Hilbert spaces, *Journal of Math. and Mech.* 13 (1964) p. 701-750.

[21] KY-FAN, Applications of a theorem concerning sets with convex sections, *Math. Ann.* 163 (1966) p. 189-303.

[22] J. LERAY et J.L. LIONS, Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, *Bull. Soc. Math.* France. t. 93, (1965) p. 97-107.

[23] J.L. LIONS, Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles, Université de Montréal, (1962).

[24] J.L. LIONS, Sur certaines équations paraboliques non linéaires, *Bull. Soc. Math. France,* t. 93 (1965) p. 155-175.

[25] J.L. LIONS et G. STAMPACCHIA, Sur un nouveau type de problème non linéaire pour des opérateurs paraboliques du 2ème ordre, Séminaire Leray : Equations aux dérivées partielles, Collège de France. (1965/66).

[26] J.L. LIONS, Remarks on evolution inequalities, *J. Math. Soc. Japan* 18 (1966) p. 331-342.

[27] G. MINTY, On a monotonicity method for the solution of non linear equations in Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci.* U.S.A. t. 50 (1963), p. 1038-1041.

[28] J.J. MOREAU, Proximité et dualité dans un espace hilbertien, *Bull. Soc. Math France* t. 93 (1965), p. 273-299.

[29] M. SHINBROT, A fixed point theorem and some applications, *Arch. Rat. Mech. Anal.* t. 17 (1964) p. 255-271.

[30] G. STAMPACCHIA, Formes bilinéaires coercives sur les ensembles convexes *C.R. Acad. Sci.* Paris t. 258 (1964), p. 4413-4415.

[31] I.M. VIŠIK, Systèmes différentiels quasi-linéaires fortement elliptiques sous forme divergente (en russe), *Trudy Moscow Math. Soc.* t. 12 (1963) p. 125-184.

[32] K. YOSIDA, Functional analysis Springer Verlag 1965.

Manuscrit reçu le 2 juin 1967.

Haïm BREZIS,
28 rue Berthollet
Paris 5e