Annales de l'institut Fourier

Jean-Louis Koszul

Déformations de connexions localement plates

Annales de l'institut Fourier, tome 18, nº 1 (1968), p. 103-114
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_1_103_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 1 (1968), 103-114

DÉFORMATIONS DE CONNEXIONS LOCALEMENT PLATES

par J. L. KOSZUL

1. Soient M une variété différentiable[1] connexe de dimension n et TM l'espace fibré des vecteurs de M. Les connexions linéaires sur M constituent un sous-espace de l'espace des applications différentiables du produit fibré $TM \times_M TM$ dans l'espace T(TM) des vecteurs de TM (la topologie considérée est la topologie "compacts-ouverts"). On notera P le sous-espace constitué par les connexions localement plates, c'est-à-dire les connexions dont la courbure et la torsion sont nulles. Toute connexion $D \in P$ définit une connexion localement plate sur les revêtements de M. On dit que D est une connexion *hyperbolique* lorsqu'un revêtement universel de M, muni de cette connexion, est isomorphe à un ouvert convexe saillant dans R^n, c'est-à-dire un ouvert convexe ne contenant pas de droite. On notera P_h le sous-espace de P constitué par les connexions hyperboliques.

THEOREME 1. – *Si* M *est une variété compacte, pour qu'une connexion localement plate sur* M *soit hyperbolique, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

Il existe une forme différentielle fermée de degré 1 *sur* M *dont la différentielle covariante est définie positive.*

Ce Théorème n'est qu'une nouvelle formulation du résultat démontré dans [2].

COROLLAIRE. – *Si* M *est une variété compacte, l'espace des connexions hyperboliques sur* M *est un ouvert de l'espace des connexions localement plates sur* M.

(1) Le mot différentiable sera employé dans le sens différentiable de classe ∞.

Soient en effet $D_0 \in P_h$ et α une 1-forme fermée sur M telle que la différentielle covariante $D_0\,\alpha$ soit définie positive. L'application

$$(D\,,\nu) \longrightarrow (D\alpha)\,(\nu\,,\nu)$$

de P x TM dans **R** est une fonction continue. Puisque M est compacte, l'ensemble K des $\nu \in TM$ tels que $(D_0\,\alpha)\,(\nu\,,\nu) = 1$ est compact. Il existe donc un voisinage V de D_0 dans P tel que $(D\alpha)\,(\nu\,,\nu) > 0$ pour tout $D \in V$ et tout $\nu \in K$. Ceci entraîne que $D\alpha$ est définie positive quelle que soit $D \in V$; par conséquent $V \subset P_h$.

On appellera variété localement plate hyperbolique, ou plus brièvement variété hyperbolique, une variété connexe munie d'une connexion hyperbolique. Dans tous les exemples de variétés hyperboliques compactes que je connais, les revêtements universels sont isomorphes à des cônes ouverts dans des espaces R^n . On sait du reste que si un revêtement universel d'une variété hyperbolique compacte est homogène en ce sens qu'il admet un groupe transitif d'automorphismes affines, alors ce revêtement est isomorphe à un cône [1]. Mais, comme l'ont montré Vinberg et Katz, [4], il existe des variétés hyperboliques compactes dont les revêtements universels ne sont pas homogènes.

Lorsque les revêtements universels d'une variété hyperbolique compacte M sont isomorphes à un cône, il existe des déformations non triviales de la connexion localement plate sur M. D'après le Corollaire au Théorème 1, de petites déformations conduisent à des connexions qui sont encore hyperboliques. En général, les revêtements universels ne restent pas isomorphes à un ouvert fixe de R^n (cf. N° 5). Dans cet article, on montrera que, du moins, si au départ les revêtements universels sont isomorphes à un cône, il en sera de même après une petite déformation de la connexion (N° 4, Théorème 3). On commencera par expliciter au N° 2 quelques propriétés élémentaires de l'application exponentielle qui permettent de traduire les déformations de connexions localement plates en termes de déformations de représentations affines du groupe fondamental.

2. *Revêtement et exponentielle.*

Soit M une variété différentiable connexe de dimension n munie d'une connexion linéaire D. Pour tout chemin différentiable par morceaux $\alpha : [0\,,1] \longrightarrow M$, d'origine a et d'extrémité b, on note $f_D(\alpha)$ l'application linéaire de $T_a M$ dans $T_b M$ définie par le transport parallèle le long de α. On note $q_D(\alpha)$ le déroulement de α dans $T_b M$, c'est-à-dire l'élément $-\int_0^1 f_D(\alpha_\theta)\,\alpha'(\theta)\,d\theta$ ou α_θ est le chemin défini par $\alpha_\theta(t) = \alpha(\theta + (1-\theta)\,t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. Si α et β sont deux chemins différentiables dans M et si $\alpha(0) = \beta(1)$, alors en notant $\alpha\,.\,\beta$ le chemin composé, on a :

$$f_D(\alpha\,.\,\beta) = f_D(\alpha) \circ f_D(\beta)\,, \tag{1}$$

$$q_D(\alpha\,.\,\beta) = f_D(\alpha)\,q_D(\beta) + q_D(\alpha)\,, \tag{2}$$

On supposera dans la suite que la connexion D est localement plate. L'application linéaire $f_D(\alpha)$ et l'élément $q_D(\alpha)$ ne dépendent alors que de la classe d'homotopie de α. On fera choix d'un point a dans M et on notera Γ le groupe fondamental de M au point a. Par restriction aux lacets en a et par factorisation, f_D définit une application f_D de Γ dans $Gl(T_a M)$, q_D définit une application q_D de Γ dans $T_a M$. Compte tenu des relations (1) et (2), on a

$$f_D(rs) = f_D(r) \circ f_D(s)$$

$$q_D(rs) = f_D(r)\,q_D(s) + q_D(r)$$

quels que soient $r\,, s \in \Gamma$. Ces relations signifient que le couple $(f_D\,, q_D)$ est une représentation affine de Γ dans $T_a M$: le transformé d'un élément $v \in T_a M$ par $s \in \Gamma$ étant $f_D(s)\,v + q_D(s)$. Pour tout $s \in \Gamma$, l'application $D \longrightarrow (f_D(s), q_D(s))$ est une application continue de l'espace des connexions localement plates sur M dans le groupe des automorphismes affines de V.

On notera dans la suite $\exp_D$ l'application exponentielle définie par la connexion D et E_a^D l'ouvert de $T_a M$ constitué par les vecteurs d'origine a sur lesquels $\exp_D$ est définie.

LEMME 1. – *Si* D *est une connexion localement plate sur* M *et si deux points quelconques de* M *appartiennent à l'image d'une géodésique, alors :*

1) E_a^D *est convexe.*

2) $\exp_D : E_a^D \longrightarrow M$ *est un revêtement,*

3) E_a^D *est stable par la représentation affine* (f_D, q_D) *de* Γ *dans* $T_a M$,

4) *pour tout* $s \in \Gamma$, *la transformation affine* $(f_D(s), q_D(s))$ *de* $T_a M$ *a pour restriction à* E_a^D *l'automorphisme de* E_a^D, *considéré comme espace de revêtement de* M *qui est associé au point* 0 *et à l'élément s.*

Puisque deux points quelconques de M appartiennent à l'image d'une géodésique, les revêtements universels de M sont isomorphes à un ouvert convexe de R^n. Il en résulte que E_a^D est convexe. On sait que la convexité de E_a^D entraîne la propriété 2) (cf. [2], Lemme 3). Soit z l'extrémité d'un chemin d'origine 0 dans E_a^D dont la projection dans M est un lacet de classe s au point a. Soit $\rho(s)$ l'automorphisme de E_a^D, considéré comme espace de revêtement de M, qui transforme z en 0. On sait que $\exp_D$ est une application affine de E_a^D dans M. Par suite, en identifiant $T(E_a^D)$ et $E_a^D \times T_a M$,

on a $f_D(s)\, v = \exp_D^T(z, v) = \exp_D^T \rho(s)^T (z, v) = \rho(s) v - \rho(s) 0$

et $\quad q_D(s) = \exp_D^T(z, -z) = \exp_D^T \rho(s) \ (z, -z) = \rho(s) 0$

pour tout $v \in T_a M$. Il en résulte que $\rho(s) v = f_D(s) v + q_D(s)$ ce qui démontre les assertions 3) et 4).

LEMME 2. – *Si* D *est une connexion hyperbolique sur* M, *pour que* E_a^D *soit un cône, il faut que la représentation affine* (f_D, q_D) *de* Γ *dans* $T_a M$ *soit semblable à la représentation linéaire* f_D, *c'est-à-dire qu'elle laisse fixe un point de* $T_a M$. *Si de plus* M *est compacte cette condition est suffisante.*

Lorsque D est hyperbolique, les hypothèses du Lemme 1 sont vérifiées : $\exp_D E_a^D \longrightarrow M$ est donc un revêtement universel de M et c'est un cône saillant dans $T_a M$. Puisqu'un cône saillant ne possède qu'un sommet, ce sommet est invariant par les transformations affines $(f_D(s), q_D(s))$ qui, d'après le Lemme 1, conservent toutes l'ouvert E_a^D. Inversement, si $x \in T_a M$ et si $f_D(s) x + q_D(s) = x$ quel que soit $s \in \Gamma$, alors la composante connexe neutre du normalisateur de l'image de (f, q) dans le groupe des transformations affines de $T_a M$ contient toutes les homothéties positives de centre x. Or si M est compact, E_a^D est stable par la composante connexe neutre de ce normalisateur (cf. [5]). Par conséquent, E_a^D est un cône de sommet x.

3. *Nullité de certaines classes de cohomologie.*

LEMME 3. – *Soient* M *une variété connexe et* D *une connexion localement plate hyperbolique sur* M. *Si les revêtements universels de* M *sont isomorphes à un cône, il existe sur* M *un champ de vecteurs* H *et une métrique riemannienne de tenseur g tels que :*

1) $D_X H = X$ *pour tout champ de vecteurs* X *sur* M, D_X *désignant la dérivation covariante par rapport à* X,

2) *la dérivée de Lie de g par rapport à* H *est nulle.*

Soient en effet V un espace vectoriel réel de dimension égale à la dimension de M, Ω un cône ouvert convexe saillant de sommet origine dans V et q une application affine de Ω dans M telle que $q : \Omega \longrightarrow M$ soit un revêtement. Soit H' le champ de vecteurs sur V défini par $H'(x) = (x, x)$ quel que soit $x \in V$, TV étant identifié de la manière habituelle à $V \times V$. C'est le champ de vecteurs dérivé du groupe des homothéties dans V. Pour tout champ de vecteurs X' sur V, on a $D_{X'} H' = X'$. Le champ H' est invariant par $Gl(V)$. Puisque Ω est saillant tout automorphisme affine de Ω est restriction d'un élément de $Gl(V)$. La restriction de H' à Ω est donc invariante par les automorphismes affines de Ω. Par conséquent, il existe un champ de vecteurs H sur M et un seul tel que $H \circ q = q^T \circ H'$. Puisque q est localement un isomorphisme de variétés localement plates, ce champ H vérifie la condition 1). On sait qu'il existe sur Ω une métrique riemannienne invariante par tout automorphisme affine de Ω et en particulier par toute homothétie positive [5]. Par passage au quotient, une telle métrique définit sur M une métrique riemannienne dont le tenseur aura une dérivée de Lie par rapport à H égale à 0.

On observera que tout champ de vecteurs H vérifiant la condition (1) est un champ de vecteurs *affine*. En effet

$$D_{D_X Y} H = D_X Y = D_X D_Y H$$

et par suite

$$[H, D_X Y] = D_{[H,X]} Y + D_X [H, Y]$$

quels que soient les champs de vecteurs X et Y. D'autre part, si M est hyperbolique et compacte, il existe au plus un champ de vecteurs H sur M vérifiant la condition (1) : en effet, sur une variété hyperbolique compacte, le champ de vecteur 0 est le seul champ de vecteurs ayant une différentielle covariante nulle.

Dans la suite de ce N° *on désigne par* M *une variété orientable connexe munie d'une connexion localement plate* D. *On suppose donné un champ de vecteurs* H *sur* M *tel que* $D_X H = X$ *pour tout champ de vecteurs* X *et une métrique riemannienne dont le tenseur à une dérivée de Lie par rapport à* H *égale à* 0. On note w la forme volume définie par la métrique et une orientation. Soient T et T* respectivement les espaces fibrés tangent et cotangent de M. Quels que soient les entiers p, $q \geqslant 0$, on note T^p_q l'espace fibré $(\overset{p}{\otimes} T) \otimes (\overset{q}{\otimes} T^*)$. Les formes différentielles alternées de degré r sur M à valeurs dans T^p_q s'identifient à certaines sections de T^p_{q+r}. Quels que soient p et $q \geqslant 0$, la métrique riemannienne sur M définit une forme bilinéaire (,) sur le module des sections de T^p_q. On note $\theta(H)$ la dérivation de Lie par rapport à H des sections de T^p_q. Puisque $\theta(H)$ annule le tenseur métrique, on a

$$H \,.\, (\sigma , \tau) = (\theta(H)\, \sigma , \tau) + (\sigma , \theta(H)\, \tau) \tag{3}$$

quelles que soient les sections σ et τ de T^p_q.

La connexion D définit dans chaque espace fibre T^p_q une connexion linéaire de courbure nulle. On note D_H la dérivation covariante par rapport à H quel que soit l'espace T^p_q considéré. Pour toute section σ de T^p_q, on a

$$\theta(H)\, \sigma = D_H\, \sigma - (p - q)\, \sigma \,. \tag{4}$$

En effet, si X est un champ de vecteurs sur M,

$$\theta(H)\, X = [H , X] = D_H X - D_X H = D_H X - X$$

puisque la torsion de D est nulle. Si σ est une section de T*, autrement dit une forme différentielle scalaire, alors

$$(\theta(H)\, \sigma)\, (X) = H \,.\, \sigma(X) - \sigma([H , X]) = H \,.\, \sigma(X) - \sigma(D_H X)$$
$$+ \sigma(X) = (D_H\, \sigma)\, (X) + \sigma(X)$$

pour tout champ de vecteurs X et par conséquent $\theta(H)\, \sigma = D_H\, \sigma + \sigma$. Le cas général s'en déduit en observant que $\theta(H) - D_H$ se comporte comme une dérivation vis-à-vis du produit tensoriel.

On définit un produit scalaire $< \ , \ >$ sur l'espace des sections de T^p_q en posant

$$< \sigma , \tau > = \int_M (\sigma , \tau)\, w$$

quelles que soient les sections σ et τ de T^p_q.

Soient σ et τ deux sections de T^p_q. Puisque $\theta(H)$ annule le tenseur de la métrique riemannienne, on a $\theta(H)\,w = 0$ et par suite :

$$\theta(H)\,((\sigma\,,\tau)\,w) = (\theta(H)\,\sigma\,,\tau)\,w + (\sigma\,,\theta(H)\,\tau)\,w = (D_H\,\sigma\,,\tau)\,w$$
$$+ (\sigma\,,D_H\,\tau)\,w - 2(p-q)\,(\sigma\,,\tau)\,w\,.$$

Puisque M est compacte, la formule de Stokes donne

$$\int_M \theta(H)\,((\sigma\,,\tau)\,w) = 0\,.$$

On a donc :

$$< D_H\sigma\,,\tau > + < \sigma\,,D_H\,\tau > = 2(p-q) < \sigma\,,\tau >\,. \tag{5}$$

Soit ω une forme différentielle alternée sur M à valeurs dans T^p_q. On note $\iota(H)\,\omega$ le produit intérieur de ω par H et $d\omega$ la différentielle extérieure de ω définie par la connexion linéaire dans T^p_q. Si ω est une forme de degré r, $\iota(H)\,\omega$ est de degré $r-1$, $d\omega$ est de degré $r+1$ et l'on a

$$(d\circ\iota(H) + \iota(H)\circ d - D_H)\,\omega = r\omega\,. \tag{6}$$

En effet, pour toute suite $X_1\,,X_2\,,\dots X_r$ de champs de vecteurs sur M, on a :

$$((d\circ\iota(H) + \iota(H)\circ d)\,\omega)\,(X_1\,,X_2\,,\dots X_r)$$
$$= D_H(\omega(X_1\,,X_2\,,\dots X_r)) - \sum_i \omega(X_1\,,\dots [H\,,X_i]\,,\dots X_r)$$
$$= (D_H\,\omega)\,(X_1\,,X_2\,,\dots X_r) - \sum_i \omega(X_1\,,\dots [H\,,X_i] - D_H X_i\,,\dots X_r)$$
$$= (D_H\,\omega)\,(X_1\,,X_2\,,\dots X_r) + r\omega(X_1\,,X_2\,,\dots X_r)\,.$$

Compte tenu de (4), la relation (6) montre que, quel que soit r,

$$(d\circ\iota(H) + \iota(H)\circ d)\,\omega = \theta(H)\,\omega + (p-q)\,\omega\,.$$

Puisque la courbure de la connexion linéaire dans T^p_q est nulle, on a $d^2 = 0$. Par conséquent, la relation (6) donne

$$d\circ\iota(H)\circ d = d\circ D_H + rd \tag{7}$$

$$d\circ\iota(H)\circ d = D_H\circ d + (r+1)\,d \tag{8}$$

sur les formes différentielles alternées de degré r à valeurs dans T^p_q. De (7) et (8) on déduit que

$$d \circ D_H - D_H \circ d = d. \tag{9}$$

On définit les formes harmoniques du complexe des formes différentielles alternées à valeurs dans T^p_q en utilisant la restriction du produit scalaire $< \ , \ >$ aux espaces T^p_{q+r} $(r \geqslant 0)$.

PROPOSITION 1. – *Soit ω une forme différentielle alternée sur* M *à valeurs dans* T^p_q. *Si ω est harmonique, alors $D_H\,\omega$ est harmonique.*

La forme $D_H\,\omega$ est fermée d'après (9). Compte tenu des relations (5) et (9), si r est le degré de ω, pour toute forme alternée ω' de degré $r-1$, à valeurs dans T^p_q, on a

$$\begin{aligned} < D_H\omega\,, d\omega' > &= 2(p-q-r) < \omega\,, d\omega' > - < \omega\,, D_H d\omega' > \\ &= 2(p-q-r) < \omega\,, d\omega' > - < \omega\,, dD_H\omega' > \\ &\quad + < \omega\,, d\omega' > . \end{aligned}$$

Cette relation montre que si ω est orthogonale à l'image de d, il en est de même de $D_H\,\omega$.

COROLLAIRE 1. – *Soit ω une forme différentielle alternée de degré r à valeurs dans* T^p_q. *Si ω est harmonique, alors* $D_H\,\omega = -r\omega$.

En effet, d'après (6), $(d \circ \iota(H))\,\omega = r\omega + D_H\,\omega$. Puisque $r\omega + D_H\,\omega$ est harmonique, ceci entraîne $r\omega + D_H\omega = 0$.

COROLLAIRE 2. – *Si $p \neq q$, tous les espaces de cohomologie du complexe des formes différentielles alternées à valeurs dans* T^p_q *sont nuls*(²).

En effet, si ω est une forme différentielle harmonique de degré r à valeurs dans T^p_q, on a $< D_H\,\omega\,, \omega > = (p-q-r) < \omega\,, \omega >$ d'après (5) et ceci entraîne $(p-q) < \omega\,, \omega > = 0$ d'après le Cor. 1. Toute classe de cohomologie contenant une forme harmonique, l'assertion en résulte.

(²) Seul interviendra dans la suite le cas $p = 1$, $q = 0$. C'est Y. Matsushima qui m'a fait remarquer que ma démonstration s'étendait à tous les cas où $p \neq q$.

4. *Déformation des connexions hyperboliques.*

En conjugant le Lemme 1 et le Cor. 2 à la Proposition 1, on obtient le résultat suivant :

THEOREME 2. – *Soient* M *une variété localement plate hyperbolique compacte et connexe dont les revêtements universels sont isomorphes à un cône. Quels que soient les entiers* $p, q \geqslant 0$, *soit* T_q^p *l'espace fibré des tenseurs de type* (p, q) *sur* M. *Si* $p \neq q$, *le complexe des formes différentielles alternées sur* M *à valeurs dans* T_q^p *a un espace de cohomologie nul en chaque degré.*

Pour $p = 1$, $q = 0$, ceci signifie en particulier que si la différentielle covariante d'un champ de vecteurs est nulle, ce champ est égal à 0, résultat déjà observé plus haut.

COROLLAIRE 1. – *Soient* V *un espace vectoriel réel de dimension finie,* Ω *un cône ouvert convexe saillant de sommet origine dans* V *et* Γ *un sous-groupe discret de* $Gl(\mathrm{V})$ *tel que* $\Gamma\Omega = \Omega$ *et que* $\Gamma\backslash\Omega$ *soit compact. Si* $p \neq q$, *on a* $\mathrm{H}^r(\Gamma, (\overset{p}{\otimes}\mathrm{V}) \otimes (\overset{q}{\otimes}\mathrm{V}^*)) = (0)$ *pour tout* $r \geqslant 0$ (³).

On sait que Γ opère proprement dans Ω. Puisque $\Gamma\backslash\Omega$ est compact, Γ est donc engendré par un nombre fini d'éléments. Par suite Γ contient un sous-groupe invariant Γ' d'indice fini et sans torsion [3]. On peut choisir Γ' de sorte que tous ses éléments aient un déterminant > 0. Compte tenu de la suite spectrale de Hochschild-Serre, il suffit de montrer que la cohomologie de Γ' à valeurs dans $\mathrm{V}_q^p = (\overset{p}{\otimes}\ \mathrm{V}) \otimes (\overset{q}{\otimes}\ \mathrm{V}^*)$ est nulle. Or Γ' opère librement dans Ω qui peut donc être considéré comme un espace fibré principal de groupe Γ' et de base $\Gamma'\backslash\Omega$ qui est une variété hyperbolique compacte orientable. L'espace fibré de fibre type V_q^p associé à Ω s'identifie à l'espace fibré T_q^p des tenseurs de type (p, q) sur $\Gamma'\backslash\Omega$. D'après un Théorème de S. Eilenberg, $\mathrm{H}^r(\Gamma', \mathrm{V})$ est canoniquement isomorphe à l'espace des classes de cohomologie de degré r du complexe des formes différentielles alternées sur $\Gamma'\backslash\Omega$ à valeurs dans T_q^p, la différentiation étant celle qui se déduit de la connexion localement plate sur $\Gamma'\backslash\Omega$.

(³) La cohomologie se présente donc comme si Γ contenait un groupe d'homothéties non trivial ; cette propriété est en fait vérifiée lorsque Ω est un cône irréductible.

COROLLAIRE 2. – *Les hypothèses étant celles du Corollaire* 1, *les représentations affines de* Γ *dans* V *qui sont semblables à une représentation linéaire, c'est-à-dire qui laissent fixe un point de* V, *constituent un voisinage de l'injection identique* $\Gamma \longrightarrow Gl(V)$.

Soit en effet f_0 l'injection identique de Γ dans $Gl(V)$ et, pour toute représentation linéaire f de Γ dans V, soit V_f l'espace V muni de la structure de Γ-module définie par f. Puisque Γ est engendré par un nombre fini d'éléments et que V est de dimension finie, la dimension de $H^1(\Gamma, V_f)$ est une fonction semi-continue supérieurement de f. D'après le Cor. 1, $H^1(\Gamma, V_{f_0}) = (0)$. Pour toute représentation affine (f, q) de Γ dans V assez voisine de la représentation linéaire f_0, on a donc $H^1(\Gamma, V_f) = (0)$. Si $H^1(\Gamma, V_f) = (0)$, alors q, qui est un 1-cocycle sur Γ à valeurs dans V_f, est le cobord d'un élément $x \in V_f$, c'est-à-dire de la forme $q(s) = f(s)x - x$ pour tout $s \in \Gamma$. Le point $-x$ est alors un point fixe de la représentation affine (f, q).

THEOREME 3. – *Soit* M *une variété connexe compacte. L'ensemble des connexions localement plates hyperboliques sur* M *telles que les revêtements universels de* M *soient isomorphes à un cône est un ouvert de l'espace des connexions localement plates sur* M.

Soient en effet a un point de M et Γ le groupe fondamental de M au point a. On a défini au N° 2 une application continue $D \longrightarrow (f_D, q_D)$ de l'espace P des connexions localement plates sur M dans l'espace des représentations affines de Γ dans $T_a M$. Soit D_0 une connexion hyperbolique sur M telle que les revêtements universels de M soient isomorphes à un cône. L'ouvert $E_a^{D_0}$ de $T_a M$ sur lequel est définie l'application $\exp_{D_0}$ est alors un cône, d'après le Lemme 1. Par suite, la représentation affine (f_{D_0}, q_{D_0}) admet un point fixe (Lemme 2). Cette représentation étant d'autre part fidèle (d'après le Lemme 1), le Cor. 2 au Théorème 2 montre qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de D_0 dans P tel que (f_D, q_D) admette un point fixe pour toute connexion $D \in \mathcal{V}$. Compte tenu du Théorème 1, on peut choisir $\mathcal{V}$ de sorte que tous ses éléments soient des connexions hyperboliques. Si $D \in \mathcal{V}$, il résulte alors du Lemme 1 que $\exp : E_a^D \longrightarrow M$ est un revêtement affine de M (munie de la connexion D) et d'autre part, E_a^D est un cône d'après le Lemme 2.

Remarques et exemples.

Soit M une variété différentiable connexe compacte de dimension n et soit D une connexion hyperbolique sur M. On va voir que si les revêtements universels de M sont isomorphes à un cône, il existe des déformations non triviales de la structure localement plate de M. Pour simplifier, on supposera M orientable. Les notations seront celles du N° 2 : a désigne un point de M, Γ le groupe fondamental de M au point a, et E_a^D le cône ouvert domaine de définition de $\exp_D$ dans $T_a M$. Soient u le sommet de E_a^D et $\Omega = E_a^D - u$ le cône de sommet origine translaté de E_a^D dans $T_a M$. On sait qu'il existe une forme volume sur Ω invariante par tous les automorphismes de $T_a M$ de déterminant > 0 qui appliquent Ω sur Ω. Soient w une forme volume invariante par translations sur $T_a M$ et K la fonction numérique sur Ω telle que $v = Kw$. Pour tout $x \in \Omega$, on a alors $K(x) = K(f_D(s)x) \det f_D(s) = K(\lambda x)\lambda^n$ quels que soient $s \in \Gamma$ et $\lambda > 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on note f_D^λ la représentation linéaire de Γ dans $T_a M$ définie par $f_D^\lambda(s) = (\det f_D(s))^\lambda f_D(s)$ pour tout $s \in \Gamma$. Si $1 - \lambda n > 0$, on définit d'autre part un difféomorphisme θ_λ de M en posant $\theta_\lambda(x) = K(x)^\lambda x$ pour tout $x \in \Omega$. Il est clair que Ω est stable par $f_D(s)$ et que $\theta_\lambda f_D(s) = f_D(s)\, \theta_\lambda$ pour tout $s \in \Gamma$. Compte tenu du Lemme 1, il en résulte que pour tout $\lambda < 1/n$, l'application $q_\lambda : \Omega \longrightarrow M$ définie par $q_\lambda(x) = \exp_D(\theta_\lambda(x) + u)$ est un revêtement universel de M dont les automorphismes sont les $f_D(s)$. Pour tout $\lambda < 1/n$, il existe donc une connexion localement plate D_λ sur M et une seule telle que q_λ soit une application affine. Du fait que M est compact, on déduit que K tend vers ∞ à la frontière de Ω. Par suite, on ne peut avoir $\det f_D(s) = 1$ pour tout $s \in \Gamma$. Si $\lambda \neq 0$, la représentation f_D^λ n'est donc pas semblable à f_D et par suite, les connexions D_λ constituent des déformations non triviales de D.

Dans ces déformations, les revêtements universels (munis des structures localement plates induites) restent isomorphes au cône Ω. En s'inspirant d'exemples donnés par Vinberg et Katz [4], on peut obtenir des variétés localement plates hyperboliques compactes (de dimensions $n \geqslant 3$) dont la structure localement plate admet des déformations continues telles que les revêtements universels ne restent pas isomorphes à un ouvert fixe de $\mathbf{R}^n$. La construction se fait en partant de la représentation linéaire canonique d'un groupe de Coxeter hyperbolique compact(4) dont le graphe comporte un cycle et en déformant cette représentation. On obtient sur une variété compacte M des familles à un paramètre de connexions hyperboliques D_t ayant les propriétés suivantes : pour $t = 0$, les revêtements universels sont isomorphes à un cône homogène défini par une forme quadratique de signature $(n - 1, 1)$ où $n = \dim M$; pour $t \neq 0$, les revêtements universels sont isomorphes à des cônes non homogènes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.L. KOSZUL, Sous-groupes discrets des groupes de transformations affines admettant une trajectoire convexe, *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 259, (1964), 3675-3677.

[2] J.L. KOSZUL, Variétés localement plates et convexité, *Osaka J. of Math.,* t. 2, (1965), 285-290.

[3] A. SELBERG, On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces, Proc. Conferences on Analytic Functions, Bombay, (1960).

[4] E. VINBERG-V. KATZ, Kvaziodnorodnye konusy, *Matematiceskie Zametki,* t. 1, (1967), 347-354.

[5] E. VINBERG, Teoria odnorodnyh vypuklyh konusov, *Trudy Moscow, Mat. Obshch.,* t. 12, (1963), 303-358. = *Trans. Moscow Math. Soc.,* t. 12, (1963), 340-403.

Manuscrit reçu le 12 février 1968

Jean-Louis KOSZUL,
Université de Grenoble
B.P. 116,
38 St. Martin d'Hères.

(4) Il s'agit des groupes de Coxeter proprement hyperboliques au sens de J. Tits : cf. J. Tits, Groupes et Géométries de Coxeter, Institut des hautes études scientifiques, Bures sur Yvette, 1961.