ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHARLES GOULAOUIC

Prolongements de foncteurs d'interpolation et applications

Annales de l'institut Fourier, tome 18, n^{o} 1 (1968), p. 1-98

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 1 (1968), 1-98

PROLONGEMENTS DE FONCTEURS D'INTERPOLATION ET APPLICATIONS

par Charles GOULAOUIC

Introduction.

La théorie de l'interpolation a été abondamment développée pour les espaces de Banach (cf. [1] [10] [15] [16] [17] [20] [24] . . . .) et elle n'est guère utilisée que dans ces espaces. Les travaux de J.L. Lions et E. Magenes en particulier sur des problèmes aux limites liés à des espaces de fonctions et distributions du type de Gevrey (cf. [19]), nous ont incités à étendre la théorie de l'interpolation à des espaces vectoriels topologiques plus généraux.

Nous n'avons pas cherché une théorie générale, mais des définitions constructives de foncteurs d'interpolation qui "prolongent" les définitions habituelles dans le cadre des espaces de Banach, et nous permettent d'utiliser les résultats connus pour en déduire des théorèmes d'interpolation pour des espaces vectoriels topologiques définis par limites projectives ou inductives (qui se rencontrent fréquemment en analyse).

Nous donnons au chapitre 0 les définitions nécessaires (en langage des catégories) ; puis nous construisons, au chapitre 3, les prolongements par $\varprojlim$ (resp. $\varinjlim$) des foncteurs définis sur les catégories de couples compatibles d'espaces de Banach (resp. de Fréchet).

Au chapitre 1, nous développons une méthode de construction de foncteurs d'interpolation définis sur les catégories de couples compatibles d'espaces de Banach, méthode inspirée de celle de [22] ; c'est cette méthode essentiellement qui nous servira d'outil pour les prolongements que nous utilisons par la suite (sauf au chapitre 5) et on peut montrer qu'elle contient les autres méthodes réelles utilisées généralement (méthode des traces [15] [16] [17], méthode de Gagliardo, méthode des moyennes [20]).

Pour l'application essentielle que nous envisagions (interpolation entre espaces de fonctions C^∞) nous avons dû développer l'interpolation entre espaces L^p avec poids (chapitre 2). Ce faisant nous avons obtenu un résultat sur les fonctions d'interpolation qui complète celui de Peetre [23] (en particulier, nous obtenons également les cas limites $p = 1$ et ∞).

Certains résultats des chapitres 4, 5 et 6 avaient été annoncés dans les notes au C.R.A.S. [8] [9]. Il est évident que les exemples choisis ne sont pas les seuls possibles ; nous aurions pu appliquer les mêmes méthodes pour interpoler entre des espaces de suites (cf. [11])...

Dans le chapitre 5 (espaces $\mathcal{D}_{L^p}$) nous utilisons des méthodes d'interpolation autres que celles du chapitre 1. En particulier, pour obtenir la variante du théorème de G.O. Thorin nous avons dû recourir à la méthode complexe. Nous avons dû démontrer un résultat sur l'interpolation entre L^{p_0} et L^∞ un peu plus précis que celui de [20], afin de pouvoir appliquer la méthode de prolongement du chapitre 3.

Au chapitre 6 nous utilisons des représentations spectrales, ce qui nous permet d'appliquer les résultats du chapitre 2 à l'interpolation entre des espaces de Gevrey, par exemple.

Je suis très heureux de pouvoir exprimer ici ma profonde reconnaissance à Monsieur Lions pour les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer.

Je remercie aussi Monsieur Deny d'avoir bien voulu me donner le sujet de seconde thèse et Monsieur Lelong de s'être intéressé à mon travail et d'avoir accepté la présidence du jury.

Notations utilisées.

Lorsque nous renvoyons à un énoncé du même chapitre, il est indiqué par son numéro (ex : proposition 3). Lorsqu'il s'agit d'un énoncé d'un autre chapitre, nous indiquons aussi le numéro du chapitre (ex : lemme 2.3. signifie le lemme 3 du chapitre 2).

Les nombres entre [ ] renvoient à la bibliographie.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 0

DEFINITIONS GENERALES

Nous conserverons en général le vocabulaire habituel en théorie de l'Interpolation ; cependant, précisons quelques notions :

1. Couple compatible.

DEFINITION 1.– *Un couple compatible* (E_0, E_1, E, i_0, i_1) *d'espaces vectoriels topologiques est constitué par :*

a) 3 *espaces vectoriels topologiques :* E_0, E_1, E, *que l'on supposera toujours localement convexes et séparés.*

b) 2 *injections :* i_0 *de* E *dans* E_0 *et* i_1 *de* E *dans* E_1, *telles que :*

c) *La topologie de* E *est la topologie la moins fine rendant* i_0 *et* i_1 *continues.*

d) $Z = \{(i_0(\alpha), -i_1(\alpha))\ ;\ \alpha \in E\}$ *est un sous-espace fermé de* $E_0 \times E_1$.

E sera noté en général $E_0 \cap E_1$.

Lorsque aucune confusion ne sera à craindre, le couple compatible sera noté (E_0, E_1) au lieu de $(E_0, E_1, E_0 \cap E_1, i_0, i_1)$.

On dit que (E_0, E_1) est un couple compatible d'espaces de Fréchet (resp. de Banach, de type $\mathscr{LF}$ . . .) lorsque E_0 et E_1 sont des espaces de Fréchet (resp. de Banach, de type $\mathscr{LF}$, . . . etc.).

Posons $E_0 + E_1 = \dfrac{E_0 \times E_1}{Z}$; d'après d) la topologie quotient sur $E_0 + E_1$ est localement convexe séparée.

Soient :

$$j_0 : E_0 \longrightarrow E_0 + E_1$$

$$j_1 : E_1 \longrightarrow E_0 + E_1$$

définies par : $j_0(x_0) = \overline{(x_0\,,0)}$ (classe de $(x_0\,,0)$

$$j_1(x_1) = \overline{(0\,,x_1)}$$

j_0 et j_1 sont des injections continues (vérification immédiate).

On peut représenter la situation par le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & E_0 \arrow[dr, "j_0"] & \\
E_0 \cap E_1 \arrow[ur, hook, "i_0"] \arrow[dr, hook, "i_1"'] & & E_0 + E_1 \\
 & E_1 \arrow[ur, hook, "j_1"'] &
\end{tikzcd}$$

$\hookrightarrow$ signifie : injection continue.

Ce diagramme est commutatif : soit $\alpha \in E_0 \cap E_1$;

$$\begin{aligned} j_0 i_0(\alpha) - j_1 i_1(\alpha) &= \overline{(i_0(\alpha)\,,0)} - \overline{(0\,,i_1(\alpha))} \\ &= \overline{(i_0(\alpha)\,, -i_1(\alpha))} \\ &= 0 \ \text{ dans } \ E_0 + E_1\,. \end{aligned}$$

Par la suite, on identifiera toujours les espaces $E_0 \cap E_1$, E_0 , E_1 avec leurs images dans $E_0 + E_1$. On considèrera ces espaces comme sous-espaces du même espace $E_0 + E_1$. Ce qui nous permettra de parler de la restriction à E_0 ou E_1 d'un opérateur défini sur $E_0 + E_1$. Un élément $a \in E_0 + E_1$ peut s'écrire $a = a_0 + a_1$ avec $a_0 \in E_0$ et $a_1 \in E_1$, (cette écriture n'étant en général pas unique).

Cas des espaces normés.

Lorsque E_0 et E_1 sont normés, on prendra pour normes sur $E_0 \cap E_1$ et $E_0 + E_1$:

$$\|a\|_{E_0 \cap E_1} = \|a\|_{E_0} + \|a\|_{E_1}$$

$$\|a\|_{E_0 + E_1} = \inf_{a = a_0 + a_1} (\|a_0\|_{E_0} + \|a_1\|_{E_1})$$

2. Morphismes de couples compatibles.

Soient (E_0, E_1) et (F_0, F_1) deux couples compatibles d'espaces vectoriels topologiques.

DEFINITION 2.– *L'ensemble* Hom $((E_0, E_1), (F_0, F_1))$, *noté aussi* $\mathcal{L}(E_0, F_0) \cap \mathcal{L}(E_1, E_1)$, *des morphismes de* (E_0, E_1) *dans* (F_0, F_1) *est l'espace des applications linéaires de* $E_0 + E_1$ *dans* $F_0 + F_1$ *dont les restrictions à* E_0 *et* E_1 *sont continues respectivement de* E_0 *dans* F_0 *et de* E_1 *dans* F_1.

(Pour plus de cohérence nous imposerons une condition supplémentaire dans le cas des couples compatibles d'espaces de Banach ; cf. ci-dessous).

3. Catégories de couples compatibles.

On sera amené à considérer en particulier les catégories suivantes :

$\mathcal{C}$(*elcs*) - Les objets sont les couples compatibles d'espaces localement convexes séparés.
- Pour tout couple d'objets : (E_0, E_1), (F_0, F_1), *l'ensemble des morphismes est :* $\mathcal{L}(E_0, F_0) \cap \mathcal{L}(E_1, F_1)$ (cf. définition 2).

$\mathcal{C}(\mathcal{LF})$ - Les objets sont les couples compatibles d'espaces $\mathcal{LF}$ (au sens de Grothendieck [10]).
- Les morphismes sont définis comme précédemment.

$\mathcal{C}(\mathcal{F})$ - Les objets sont les couples compatibles d'espaces de Fréchet.
- Les morphismes sont définis comme précédemment.

$\mathcal{C}(\mathcal{B})$ - Les objets sont les couples compatibles d'espaces banachisables.
- Les morphismes sont définis comme précédemment.

$\mathcal{C}(B)$ - Les objets sont les couples compatibles d'espaces de Banach.
- Pour tout couple d'objets : (E_0, E_1), (F_0, F_1), *l'ensemble des morphismes* de (E_0, E_1) dans (F_0, F_1) est constitué par les applications linéaires de $E_0 + E_1$ dans $F_0 + F_1$, dont la restriction

à E_0 (respectivement E_1) est continue et de norme $\leqslant 1$ de E_0 (resp. E_1) dans F_0 (resp. F_1).

Les vérifications sont toutes immédiates.

Remarque.– Dans la pratique, on définit souvent un couple compatible (E_0, E_1) à partir des données : E_0, E_1, $\mathcal{E}$, espaces localement convexes séparés, J_0 injection continue de E_0 dans $\mathcal{E}$ et J_1 injection continue de E_1 dans $\mathcal{E}$.

On pose :

$$E_0 \cap E_1 = \{(e_0, e_1) \in E_0 \times E_1 \ ; j_0(e_0) - j_1(e_1) = 0 \ \text{ dans } \mathcal{E}\}.$$

Et on définit $i_0 : E_0 \cap E_1 \longrightarrow E_0$ et $i_1 : E_0 \cap E_1 \longrightarrow E_1$ par :

$$\left.\begin{array}{l} i_0((e_0, e_1)) = e_0 \\ i_1((e_0, e_1)) = e_1 \end{array}\right\} \text{ pour tout } \quad (e_0, e_1) \in E_0 \cap E_1 .$$

Il est immédiat que $(E_0, E_1, E_0 \cap E_1, i_0, i_1)$ est un couple compatible. Mais un même couple compatible peut être obtenu de cette façon à partir de différents espaces (il suffit ici par exemple de prendre $\mathcal{E}'$ tel que l'on ait une injection $j : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$; alors E_0, E_1, $\mathcal{E}, j_0, j_1$ d'une part et E_0, E_1, $\mathcal{E}', j \circ j_0, j \circ j_1$ d'autre part donneront le même couple compatible).

4. Foncteur d'interpolation.

Soit $\mathcal{C}'$ la catégorie dont les objets sont les espaces localement convexes ; et pour tout couple d'objets (E,F), les morphismes de E dans F sont les applications linéaires continues de E dans F.

$\mathcal{C}$ étant une catégorie de couples compatibles, on définit deux foncteurs covariants particuliers de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, $\Phi_\cap[\ \ ]$ et $\Phi_+[\ \ ]$ par :

$$\begin{cases} (E_0, E_1) \rightsquigarrow \Phi_\cap[E_0, E_1] = E_0 \cap E_1 \\ u \in \operatorname{Hom}((E_0, E_1), (F_0, F_1)) \rightsquigarrow \Phi_\cap[u] = u_{|E_0 \cap E_1} \longrightarrow F_0 \cap F_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases}(E_0\,,E_1) \rightsquigarrow \Phi_+[E_0\,,E_1] = E_0 + E_1 \\ u \in \mathrm{Hom}\,((E_0\,,E_1)\,,(F_0\,,F_1)) \rightsquigarrow \Phi_+[u] = u : E_0 + E_1 \longrightarrow F_0 + F_1\end{cases}$$

En effet : $E_0 \cap E_1$ et $E_0 + E_1$, munis respectivement des topologies limite projective et limite inductive de celles de E_0 et E_1, sont des objets de $\mathcal{C}'$.

u est donnée linéaire de $E_0 + E_1 \longrightarrow F_0 + F_1$ et continue de E_i dans F_i, donc de E_i dans $F_0 + F_1$ ($i = 0{,}1$), donc par définition de la topologie limite inductive, u est continue de $E_0 + E_1$ dans $F_0 + F_1$. De même $u_{|E_0 \cap E_1}$ est continue de $E_0 \cap E_1$ dans $F_0 \cap F_1$.

DEFINITION 3.– *On appelle foncteur d'interpolation défini sur $\mathcal{C}$, tout foncteur $\Phi[\ ]$ covariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, plus fin que $\Phi_+[\ ]$ et moins fin que $\Phi_\cap$ (c'est-à-dire :*

– *Pour tout objet $(E_0\,,E_1)$ de $\mathcal{C}$, on a les inclusions topologiques :* $E_0 \cap E_1 \hookrightarrow \Phi[E_0\,,E_1] \hookrightarrow E_0 + E_1$.

– *Pour tout morphisme* $u \in \mathrm{Hom}\,((E_0\,,E_1),(F_0,F_1))$, $\Phi[u]$ *est la restriction à* $\Phi[E_0,E_1]$ *de l'application* $u : E_0 + E_1 \longrightarrow F_0 + F_1$).

Il résulte de cette définition, que pour *décrire* un foncteur d'interpolation, il suffit de donner la correspondance pour les objets.

5. Remarques.

1. *Morphismes de couples compatibles.*

Soient $(E_0\,,E_1\,,E_0 \cap E_1\,,i_0\,,i_1)$ et $(F_0\,,F_1\,,F_0 \cap F_1\,,j_0\,,j_1)$ deux couples compatibles d'espaces localement convexes séparés ; soit $u \in \mathrm{Hom}\,((E_0\,,E_1)\,,(F_0\,,F_1))$. Cela entraîne :

$u_{|E_0}$ est continue de E_0 dans F_0

$u_{|E_1}$ est continue de E_1 dans F_1

$u_{|E_0 \cap E_1}$ envoie $E_0 \cap E_1$ dans $F_0 \cap F_1$

(et on a montré que cette application était aussi continue).

Réciproquement.— Soient u_0 , u_1 , u telles que :

u_0 est continue de E_0 dans F_0

u_1 est continue de E_1 dans F_1

u est linéaire de $E_0 \cap E_1$ dans $F_0 \cap F_1$

et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & E_0 \arrow[rr, "u_0"] & & F_0 \\
E_0 \cap E_1 \arrow[ur, hook, "i_0"] \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, hook, "i_1"'] & & F_0 \cap F_1 \arrow[ur, hook, "j_0"'] \arrow[dr, hook, "j_1"] & \\
 & E_1 \arrow[rr, "u_1"] & & F_1
\end{tikzcd}$$

Alors : (u_0 , u_1) est linéaire continue de $E_0 \times E_1$ dans $F_0 \times F_1$; on en déduit une application linéaire $\widetilde{u}$ de $E_0 + E_1$ dans $F_0 + F_1$, car si $(e_0 , e_1) \in 0$ dans $E_0 + E_1$, cela entraîne :

$$e_0 = i_0(\alpha) \qquad \text{et} \qquad e_1 = - i_1(\alpha)$$

avec $\quad \alpha \in E_0 \cap E_1$;

donc :
$$\begin{aligned}(u_0(e_0) , u_1(e_1)) &= (u_0 i_0(\alpha) , - u_1 i_1(\alpha)) \\ &= (j_0 u(\alpha) , - j_1 u(\alpha)) \\ &= (j_0(\beta) , - j_1(\beta))\end{aligned}$$

avec $\quad \beta \in F_0 \cap F_1$;

donc :
$$(u_0(e_0) , u_1(e_1)) \in 0$$

dans $\quad F_0 + F_1$.

Les "restrictions" de $\widetilde{u}$ à E_0 et E_1 sont u_0 et u_1 respectivement. Donc les données ci-dessus constituent un morphisme de (E_0 , E_1) dans (F_0 , F_1).

Ce point de vue sera pratique lorsque $E_0 \cap E_1$ (respectivement $F_0 \cap F_1$) sera un sous-espace dense de E_0 et E_1 (respectivement F_0 et F_1), F_0 et F_1 étant complets : Pour se donner

$$u \in \mathrm{Hom}\,((E_0\,,E_1)\,,(F_0\,,F_1))$$

il suffira alors de se donner une application linéaire u de $E_0 \cap E_1$ dans $F_0 \cap F_1$, continue pour les topologies induites par E_0 et F_0 d'une part et pour les topologies induites par E_1 et F_1 d'autre part.

2. *Notion d'espace d'interpolation.*

Soit $(E_0\,,E_1)$ un couple compatible. On dit qu'un espace localement convexe E est *espace d'interpolation entre* E_0 *et* E_1 s'il existe un foncteur d'interpolation $\Phi[\ \ ]$ défini sur la catégorie réduite à $(E_0\,,E_1)$ et tel que $\Phi[E_0\,,E_1] = E$.

CHAPITRE 1

METHODES D'INTERPOLATION REELLES

La méthode de construction de foncteurs d'interpolation qui suit, est inspirée de celle de Peetre [22]. Nous l'appliquons dans les cas des espaces de Banach, des espaces banachisables et des espaces normés.

1. Etude de $K(t,a)$.

Soit (A_0 , A_1) un couple compatible d'espaces de Banach ; pour $a \in A_0 + A_1$ et $t \in]0 , +\infty[$, posons :

$$K(t,a) = K(t,a,A_0 , A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1})$$

PROPOSITION 1.– *Pour tout* a *de* $A_0 + A_1$, *la fonction :* $t \longrightarrow K(t,a)$ *est non décroissante et continue sur* $]0 , +\infty[$; *la fonction :* $t \longrightarrow t^{-1} K(t,a)$ *est non croissante.*

$$\forall t , \forall s \in]0 , \infty[\ : K(t,a) \leqslant \max \left(1 , \frac{t}{s}\right) K(s,a) .$$

Démonstration.– Soit $0 < t_1 \leqslant t_2 < +\infty$; quel que soit

$$(a_0 , a_1) \in A_0 \times A_1 ,$$

on a : $$\|a_0\|_{A_0} + t_1 \|a_1\|_{A_1} \leqslant \|a_0\|_{A_0} + t_2 \|a_1\|_{A_1}$$

donc : $K(t_1 , a) \leqslant K(t_2 , a)$ pour tout $a \in A_0 + A_1$.

De la même manière, on vérifie que la fonction $t \longrightarrow t^{-1} K(t,a)$ est non croissante.

On en déduit : Soit $h > 0$, on a :

$$K(t,a) \leqslant K(t+h,a) \leqslant \frac{t+h}{t} K(t,a) .$$

Ce qui montre que la fonction : $t \longrightarrow K(t,a)$ est continue à droite pour $t \in]0, +\infty[$; de même pour la continuité à gauche de cette fonction, et pour la dernière inégalité de la proposition 1.

PROPOSITION 2.– $\forall t \in]0, +\infty[$, *la fonction* $a \longrightarrow K(t,a)$ *est une norme sur* $A_0 + A_1$.

La démonstration est immédiate.

Remarque 1.– Il est souvent pratique (pour les calculs) d'utiliser au lieu de $K(t,a)$ une expression équivalente :

$$K_p(t,a) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0}^p + t^p\|a_1\|_{A_1}^p)^{\frac{1}{p}} ; 1 \leqslant p < +\infty .$$

On a : $$K_p(t,a) \leqslant K(t,a) \leqslant 2^{1-\frac{1}{p}} K_p(t,a) .$$

Et $K_p(t,a)$ a les mêmes propriétés que $K(t,a)$; il suffit d'adapter les démonstrations des propositions 1 et 2. On utilisera aussi :

$$K_\infty(t,a) = \inf_{a=a_0+a_1} \max (\|a_0\|_{A_0} , t\|a_1\|_{A_1})$$

On a : $$K_\infty(t,a) \leqslant K(t,a) \leqslant 2K_\infty(t,a) .$$

2. Normes fonctionnelles.

Soit $\mathcal{C}(]0,\infty[, \mathbf{R}_+)$ l'espace des fonctions continues de $]0,\infty[$ dans $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} ; x \geqslant 0\}$.

DEFINITION 1.– *On appelle norme fonctionnelle, une application* $\Phi : \varphi \longrightarrow \Phi(\varphi)$ *de* $\mathcal{C}(]0,\infty[, \mathbf{R}_+)$ *dans* $\overline{\mathbf{R}}_+ = \{x \in \overline{\mathbf{R}} ; x \geqslant 0\}$, *vérifiant :*

N_1) $$\Phi(\lambda\varphi) = \lambda\Phi(\varphi) ; \forall\lambda \in \mathbf{R}_+ ;$$

$N_2)$
$$\Phi(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi(t) = 0$$

pour une valeur au moins de t dans $]0\,,\infty[$.

$N_3)$ $\quad \Phi\Big(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu\Big) \leqslant \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \Phi(\varphi_\nu)$. *lorsque* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu \in \mathcal{C}(]0\,,\infty[\,,\mathbf{R}_+)$

$N_4)$
$$\varphi \leqslant \psi \Longrightarrow \Phi(\varphi) \leqslant \Phi(\psi)$$

$N_5)$
$$\Phi(\min(1,t)) < +\infty\ .$$

Ces axiomes seront justifiés par la suite.

Notre notion de norme fonctionnelle est plus simple et plus large que celle de [22], mais nous n'avons pas cherché non plus le maximum de généralité.

Donnons quelques exemples de normes fonctionnelles :

Exemple 1.– Soit $a \in\,]\,0\,,\infty[$; $\delta_a : \varphi \longrightarrow \varphi(a)$ est une norme fonctionnelle.

Exemple 2.– Soient : $1 \leqslant p < \infty$, et μ une mesure non nulle, positive sur $]0\,,\infty[$ et vérifiant $\int_0^\infty \min(1,t)^p\, d\mu < \infty$. $\varphi \longrightarrow \left[\int_0^\infty \varphi^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$ est une norme fonctionnelle que l'on notera $\Phi_{\mu,p}$.

Soit $(A_0\,,A_1)$ un couple compatible d'espaces de Banach ; soit Φ une norme fonctionnelle ; on désigne par $\Phi[A_0\,,A_1]$ l'ensemble

$$\{\, a \in A_0 + A_1\ ;\ \Phi(K(t,a,A_0\,,A_1)) < +\infty\}\ .$$

PROPOSITION 3.– $\Phi[A_0\,,A_1]$, *muni de la norme :* $\|a\|_\Phi = \Phi(K(t,a))$, *est un espace de Banach. De plus :*

$$A_0 \cap A_1 \hookrightarrow \Phi[A_0\,,A_1] \hookrightarrow A_0 + A_1$$

$$\|a\|_{A_0+A_1} \leqslant c^{-1}\|a\|_\Phi \qquad , \forall a \in \Phi[A_0\,,A_1]$$

$$\|a\|_\Phi \leqslant c\ \ \|a\|_{A_0\cap A_1}\ , \forall a \in A_0 \cap A_1$$

avec $c = \Phi(\min(1,t))$.

Démonstration.– Que $\Phi[A_0, A_1]$ soit un espace vectoriel normé résulte de la proposition 2 et de la définition d'une norme fonctionnelle.

De la proposition 1 résulte que :

$$\min(1, s)\, K(1, a) \leqslant K(s, a)$$

d'où :

$$c\, K(1, a) \leqslant \Phi(K(s, a))$$

c'est-à-dire : $c\|a\|_{A_0+A_1} \leqslant \|a\|_\Phi$, $\forall a \in \Phi[A_0, A_1]$.

Remarquons ici l'utilité de l'axiome N_5). Si $\Phi(\min(1, t)) = +\infty$, on ne peut avoir $\|a\|_\Phi < \infty$ que si $K(1, a) = 0$; or, $A_0 + A_1$ étant séparé, cela entraîne $a = 0$, donc $\Phi[A_0, A_1] = \{0\}$.

De : $K(t, a) \leqslant \min(1, t)\,(\|a\|_{A_0} + \|a\|_{A_1})$, $\forall a \in A_0 \cap A_1$, résulte que : $\|a\|_\Phi \leqslant c\, \|a\|_{A_0 \cap A_1}$, $\forall a \in A_0 \cap A_1$.

Il nous reste à démontrer que $\Phi[A_0, A_1]$ est complet. D'abord $A_0 + A_1$ est complet, comme quotient de $A_0 \times A_1$ par un sous-espace fermé. Soit donc $(a_\nu)_{\nu \in N}$ une série absolument convergente dans $\Phi[A_0, A_1]$; elle est à fortiori absolument convergente dans $A_0 + A_1$, donc convergente dans $A_0 + A_1$; soit $a = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ dans $A_0 + A_1$.

Montrons que $\sum_{\nu=0}^{\infty} K(t, a_\nu) \in \mathcal{C}(]0, \infty[, R_+)$. On sait déjà que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} K(1, a_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \|a_\nu\|_{A_0+A_1} < +\infty .$$

Pour $t \in [\alpha, \beta]$, avec $0 < \alpha \leqslant 1 \leqslant \beta < +\infty$, on a :

$$K(\alpha, a_\nu) \leqslant K(t, a_\nu) \leqslant K(\beta, a_\nu) \text{ , soit :}$$

$$\alpha K(1, a) \leqslant K(t, a_\nu) \leqslant \beta K(1, a_\nu) \text{ , donc :}$$

$$\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} K(1, a_\nu) \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} K(t, a_\nu) \leqslant \beta \sum_{\nu=0}^{\infty} K(1, a_\nu) .$$

Donc la série $(K(t, a_\nu))_{\nu \in N}$ converge uniformément sur tout compact de $]0, \infty[$, donc sa somme est une fonction continue de t.

On peut alors écrire :

$$\Phi(\mathrm{K}(t,a)) = \Phi\Big(\mathrm{K}\Big(t, \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\Big)\Big) \leqslant \Phi\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathrm{K}(t,a_\nu)\Big) \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi(\mathrm{K}(t,a_\nu)) < \infty$$

Donc $\qquad a \in \Phi[\mathrm{A}_0 , \mathrm{A}_1] \quad$ et $\quad \|a\|_\Phi \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \|a_\nu\|_\Phi$;

donc aussi $\qquad \|a - \sum_0^n a_\nu\|_\Phi \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \|a_\nu\|_\Phi$.

Ce qui montre que $a = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ aussi dans $\Phi[\mathrm{A}_0 , \mathrm{A}_1]$ et donc que cet espace est complet.

3. Foncteur d'interpolation associé à une norme fonctionnelle.

THEOREME 1.– *Soit Φ une norme fonctionnelle. Il lui correspond un foncteur d'interpolation $\Phi[\ ]$ défini sur la catégorie des couples compatibles d'espaces de Banach par :*

$$(\mathrm{A}_0 , \mathrm{A}_1) \text{ objet de } \mathcal{C}(\mathrm{B}) \rightsquigarrow \Phi[\mathrm{A}_0 , \mathrm{A}_1] \ .$$

Démonstration.– Etant donnée la proposition 3, il suffit de vérifier que si $u \in \mathrm{Hom}\,((\mathrm{A}_0 , \mathrm{A}_1) , (\mathrm{B}_0 , \mathrm{B}_1))$, $(\mathrm{A}_0 , \mathrm{A}_1)$ et $(\mathrm{B}_0 , \mathrm{B}_1)$ objets de $\mathcal{C}(\mathrm{B})$, la restriction de u à $\Phi[\mathrm{A}_0 , \mathrm{A}_1]$ envoie continuement $\Phi[\mathrm{A}_0 , \mathrm{A}_1]$ dans $\Phi[\mathrm{B}_0 , \mathrm{B}_1]$.

Par hypothèse :

$$u \in \mathcal{L}(\mathrm{A}_0 , \mathrm{B}_0) \quad \text{et} \quad \|u\|_{\mathcal{L}(\mathrm{A}_0 , \mathrm{B}_0)} = \omega_0 \leqslant 1$$

$$u \in \mathcal{L}(\mathrm{A}_1 , \mathrm{B}_1) \quad \text{et} \quad \|u\|_{\mathcal{L}(\mathrm{A}_1 , \mathrm{B}_1)} = \omega_1 \leqslant 1 \ .$$

Soit $a \in \Phi[\mathrm{A}_0 , \mathrm{A}_1]$; $b = u(a)$, défini dans $\mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1$.

$$\mathrm{K}(t , b , \mathrm{B}_0 , \mathrm{B}_1) \leqslant \inf_{a = a_0 + a_1} (\|u(a_0)\|_{\mathrm{B}_0} + t\|u(a_1)\|_{\mathrm{B}_1})$$

$$K(t\,,b\,,B_0\,,B_1) \leqslant \max\,(\omega_0\,,\omega_1)\;K(t\,,a\,,A_0\,,A_1)$$

donc $\Phi(K(t\,,b\,,B_0\,,B_1)) \leqslant \max\,(\omega_0\,,\omega_1)\;\Phi(K(t\,,a\,,A_0\,,A_1)$

donc $$b \in \Phi[B_0\,,B_1]$$

et $$\|u\|_{\mathcal{L}(\Phi[A_0,A_1]\,,\Phi[B_0,B_1])} \leqslant \max\,(\omega_0\,,\omega_1) \leqslant 1$$

En fait on a montré que $\Phi[\ ]$ est un foncteur de $\mathcal{C}(B)$ dans la catégorie des espaces de *Banach.*

Exemple 3.– A la norme fonctionnelle $\delta_1\ :\ \varphi \longrightarrow \varphi(1)$, correspond le foncteur $\Phi_+[\ ]$; en effet :

$$\delta_1[A_0\,,A_1] = A_0 + A_1 = \Phi_+[A_0\,,A_1]$$

(avec égalité des normes).

On rencontrera d'autres exemples aux chapitres suivants.

Remarque 2.– L'axiome N_3) de la définition 1 (norme fonctionnelle) peut être remplacée par la sous-addivité finie *plus* une autre condition. Il ne semble pas que l'on puisse se contenter de :

$$\Phi(\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant \Phi(\varphi_1) + \Phi(\varphi_2)\ .$$

Remarque 3.– L'axiome N_2) est introduit parce que nous nous intéressons surtout aux cas où : A_0 et A_1 séparés $\Longrightarrow \Phi[A_0\,,A_1]$ séparé.

4. Cas des espaces banachisables.

Si on remplace les normes sur A_0 et A_1 par des normes équivalentes, on obtient le même espace $\Phi[A_0\,,A_1]$ muni aussi d'une nouvelle norme équivalente à la précédente.

Par ailleurs, si on suppose seulement que :

$$u \in \mathcal{L}(A_0\,,B_0) \cap \mathcal{L}(A_1\,,B_1)$$

On en déduit que

$$\|\Phi[u]\|_{\mathcal{L}(\Phi[A_0, A_1], \Phi[B_0, B_1])} < +\infty \ .$$

Donc :

THEOREME 2.– *Soit Φ une norme fonctionnelle. Il lui correspond un foncteur d'interpolation $\Phi[\ ]$ défini sur la catégorie des couples compatibles d'espaces banachisables par :*

$$(A_0, A_1) \ \textit{objet de} \ \mathcal{C}(\mathcal{B}) \rightsquigarrow \Phi[A_0, A_1] \ .$$

En fait on a montré aussi que $\Phi[\ ]$ est un foncteur de $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ dans la catégorie des espaces banachisables.

5. Cas des espaces normés. Applications.

Soit (A_0, A_1) un couple compatible d'espaces normés (non nécessairement complets) ; on peut encore définir l'espace normé $\Phi[A_0, A_1]$ comme au § 3 et associer à une norme fonctionnelle Φ un foncteur d'interpolation $\Phi[\ ]$ défini sur la catégorie des espaces normés.

En particulier, lorsque l'on a des sous-espaces B_0 et B_1 de A_0 et A_1 respectivement, munis des normes induites, il est intéressant de savoir si la norme de $\Phi[B_0, B_1]$ est induite par celle de $\Phi[A_0, A_1]$. Sans faire une étude complète, nous donnons quelques résultats qui nous serviront par la suite.

PROPOSITION 4.– *Soient :* (A_0, A_1) *un couple compatible d'espaces normés,* B_0 (resp. B_1) *un sous-espace de* A_0 (resp. A_1) *muni de la norme induite ; si* $B_0 \cap B_1$ *est dense dans* $A_0 \cap A_1$ on a :

$$\forall t \in]0, \infty[, \forall x \in B_0 + B_1$$

$$K(t, x, B_0, B_1) = K(t, x, A_0, A_1)$$

Démonstration.– Le couple compatible (B_0, B_1) est défini par les injections de B_0 et B_1 dans $A_0 + A_1$; pour $x \in B_0 + B_1$, on a évidemment :

$$K(t\,,x\,,B_0\,,B_1) \geqslant K(t\,,x\,,A_0\,,A_1)\;.$$

Inversement, soit $x = b_0 + b_1$; $b_0 \in B_0$ et $b_1 \in B_1$.

$$K(t\,,x\,,B_0\,,B_1) = \inf_{(m,-n)\in B_0\cap B_1} (\|b_0 + m\|_{A_0} + t\|b_1 + n\|_{A_1})$$

$$K(t\,,x\,,A_0\,,A_1) = \inf_{(p,-q)\in A_0\cap A_1} (\|b_0 + p\|_{A_0} + t\|b_1 + q\|_{A_1})$$

Soit $\varepsilon > 0$; par hypothèse, $\forall (p,q) \in A_0 \cap A_1$, $\exists (m,n) \in B_0 \cap B_1$

tel que $$\|p - m\|_{A_0} + \|q - n\|_{A_1} \leqslant \varepsilon$$

donc : $$\|(b_0 + p) - (b_0 + m)\|_{A_0} = \|p - m\|_{A_0} \leqslant \varepsilon$$

$$\|(b_1 + q) - (b_1 + n)\|_{A_1} = \|q - n\|_{A_1} \leqslant \varepsilon$$

d'où $$K(t\,,x\,,B_0\,,B_1) \leqslant K(t\,,x\,,A_0\,,A_1) + \varepsilon(1 + t)\;.$$

COROLLAIRE 1.– *Soient :* Φ *une norme fonctionnelle,* A_0 , A_1 , B_0 , B_1 , *vérifiant les hypothèses de la proposition* 4 ; *on a, pour tout*

$$x \in B_0 + B_1 :$$

$$\|x\|_{\Phi[B_0,B_1]} = \|x\|_{\Phi[A_0,A_1]}$$

lorsque l'un des deux membres est fini.

Rappelons que si on a : $B \subset A$, A espace de Banach et B muni de la norme induite ; l'adhérence de B dans A, soit $\overline{B}^A$, est un espace de Banach qui induit sur B la norme de B et dans lequel B est dense. C'est donc la complétion de B dans A (cf. [1]) notée $\widetilde{B}^A$. Pour tout espace vectoriel topologique séparé A' tel que $A \hookrightarrow A'$, la complétion de B dans A' est évidemment aussi $\widetilde{B}^A$; donc :

PROPOSITION 5.– *Soient :* A_0 , A_1 , B_0 , B_1 *vérifiant les hypothèses de la proposition* 4, *avec de plus :* A_0 , A_1 *espaces de Banach. Alors :*

1) $\Phi[A_0\,,A_1]$ *est un espace de Banach.*

2) $\overline{\Phi[B_0 , B_1]}^{\Phi[A_0,A_1]} = \Phi\widetilde{[B_0 , B_1]}^{A_0+A_1} = \Phi\widetilde{[B_0 , B_1]}^{\Phi[A_0,A_1]}$

3) *Si* $A_0 \cap A_1$ *est dense dans* $\Phi[A_0 , A_1]$, *on en déduit l'égalité :*

$$\Phi[A_0 , A_1] = \Phi\widetilde{[B_0 , B_1]}^{A_0+A_1} \quad .$$

Démonstration.– Elle est évidente d'après le corollaire 1 et les rappels ci-dessus.

Remarque 3.– On peut évidemment étendre la définition 0.1 au cas d'espaces localement convexes non nécessairement séparés. Soit donc (A_0 , A_1) un couple compatible d'espaces semi-normés, soit p_0 (resp. p_1) la semi norme de A_0 (resp. A_1).

Posons :

$$K(t , a , A_0 , A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} (p_0(a_0) + tp_1(a_1)) \, ; t \in]0 , \infty[\, ; a \in A_0 + A_1 \, .$$

La fonction $t \longrightarrow K(t, a, A_0 , A_0)$ est continue sur $]0 , \infty[$. Soit Φ une norme fonctionnelle ; l'espace

$$\Phi[A_0 , A_1] = \{ a \in A_0 + A_1 \, ; \Phi(K(t , a , A_0 , A_1)) < + \infty\}$$

est un espace vectoriel semi-normé, pour la semi-norme ;

$$p(a) = \Phi(K(t , a , A_0 , A_1)) \, .$$

Et la correspondance : $(A_0 , A_1) \rightsquigarrow \Phi[A_0 , A_1]$ permet d'obtenir un foncteur d'interpolation (en un sens moins restrictif que celui de la définition 0.3) défini sur une catégorie de couples compatibles d'espaces semi-normés. (cf. [14] pour d'autres généralisations).

CHAPITRE 2

INTERPOLATION ENTRE LES ESPACES "L^p AVEC POIDS"

Nous démontrons des résultats un peu plus généraux que ceux de [7] [21] [23] et donnons une méthode pratique de construction d'un foncteur d'interpolation, dont nous nous servirons essentiellement au chapitre 6. Pour plus de clarté, nous traiterons à part le cas des espaces L_M^∞.

Soient : X un espace localement compact, μ une mesure positive sur X, M une fonction mesurable sur X vérifiant $M(x) > 0$ presque partout, E un espace de Banach.

1. Cas des espaces L_M^p avec $1 \leqslant p < \infty$.

Pour $1 \leqslant p < \infty$, on note $L_M^p(X,\mu,E)$ l'espace des (classes de) fonctions a définies sur X à valeurs dans E, fortement μ-mesurables et telles que $\|a\|_E^p M$ soit μ-intégrable. Lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre, on notera cet espace $L_M^p(E)$ ou L_M^p. C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|a\|_{L_M^p} = \left(\int_X \|a(x)\|_E^p \, M(x) \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} .$$

M_0, M_1, R étant données (mesurables sur X et > 0 p.p.), on se propose de chercher un foncteur d'interpolation défini sur $\mathcal{C}(B)$ tel que $\Phi[L_{M_0}^p, L_{M_1}^p] = L_R^p$.

Posons :
$$A_0 = L_{M_0}^p = L_{M_0}^p(X, \mu, E)$$
$$A_1 = L_{M_1}^p = L_{M_1}^p(X, \mu, E)$$

D'après les hypothèses sur M_0 et M_1, on a :

$$M_0 f = 0 \text{ p.p.} \Longleftrightarrow M_1 f = 0 \text{ p.p.} \Longleftrightarrow \min(M_0, M_1) f = 0 \text{ p.p.}$$

Cela permet de plonger $L^p_{M_0}$ et $L^p_{M_1}$ dans $L_{\mathrm{Min}(M_0,M_1)}$; alors

$$L^p_{M_0} \cap L^p_{M_1} = L^p_{\mathrm{Max}(M_0,\,M_1)}$$

avec équivalence des normes. On définit ainsi le couple compatible (A_0 , A_1) d'espaces de Banach.

Conformément à la remarque 1.1, on pose, pour

$$t \in \,]0\,,\infty[\quad \text{et} \quad a \in A_0 + A_1 \ :$$

$$K_p(t\,,a) = \inf_{a = a_0 + a_1} (\|a_0\|^p_{A_0} + t^p \|a_1\|^p_{A_1})^{\frac{1}{p}}$$

$$= \inf_{a = a_0 + a_1} \left(\int_X (\|a_0(x)\|^p_E \, M_0(x) + \|a_1(x)\|^p_E \, t^p M_1(x)) d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Soit $X_t = x \in X \ ; M_0(x) \leqslant t^p M_1(x)$ (défini à un ensemble μ-négligeable près) ; posons :

$$\widetilde{a}_0(x) = \begin{cases} a(x) & \text{si} \quad x \in X_t \\ 0 & \text{si} \quad x \notin X_t \end{cases}$$

$$\widetilde{a}_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in X_t \\ a(x) & \text{si} \quad x \notin X_t \end{cases}$$

Les fonctions $\widetilde{a}_0$ et $\widetilde{a}_1$ sont mesurables et on vérifie que :

1) $\widetilde{a}_0 \in A_0$ (on note de la même manière une fonction et sa classe dans $L^p_{\mathrm{Min}(M_0,\,M_1)}$) :

$$\int_X \|\widetilde{a}_0(x)\|^p_E \, M_0(x) d\mu = \int_{X_t} \|a_0(x) + a_1(x)\|^p_E \, M_0(x) d\mu$$

avec $\qquad a_0 + a_1 = a_0$ et $a_0 \in A_0 \,, a_1 \in A_1$;

donc :

$$\|\widetilde{a}_0\|_{A_0} \leqslant \left(\int_{X_t} \|a_0(x)\|^p_E \, M_0(x) d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{X_t} \|a_1(x)\|^p_E \, M_0(x) d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

(inégalité de Minkowsky).

La première intégrale est finie car $X_t \subset X$ et la seconde de même en remarquant que sur X_t on a : $M_0(x) \leqslant t^p M_1(x)$.

2) $\widetilde{a}_1 \in A_1$: Même démonstration.

3) On a bien sûr :

$$K_p(t\,,a) \leqslant (\|\widetilde{a}_0\|^p_{A_0} + t^p \|\widetilde{a}_1\|^p_{A_1})^{\frac{1}{p}}$$

Mais aussi :

$$\|a_0(x) + a_1(x)\|^p_E \leqslant 2^{p-1}\,(\|a_0(x)\|^p_E + \|a_1(x)\|^p_E)$$

$$\|\widetilde{a}_0(x)\|^p_E\, M_0(x) \leqslant 2^{p-1}\,(\|a_0(x)\|^p_E\, M_0(x) + \|a_1(x)\|^p_E\, M_0(x))$$

et si $x \in X_t$:

$$\|\widetilde{a}_0(x)\|^p_E\, M_0(x) \leqslant 2^{p-1}\,(\|a_0(x)\|^p_E\, M_0(x) + \|a_1(x)\|^p_E\, t^p M_1(x))$$

et si $x \in X - X_t$, on a de même :

$$\|\widetilde{a}_1(x)\|^p_E\, t^p M_1(x) \leqslant 2^{p-1}\,(\|a_0(x)\|^p_E\, M_0(x) + \|a_1(x)\|^p_E\, t^p M_1(x))$$

donc, quelle que soit la décomposition : $a = a_0 + a_1$, on a :

$$\int_{X_t} \|\widetilde{a}_0(x)\|^p_E M_0(x)d\mu + \int_{X-X_t} \|a_1(x)\|^p_E\, t^p M_1(x)d\mu \leqslant 2^{p-1}(\|a_0\|^p_E + t^p \|a_1\|^p_{A_1})$$

Posons, pour $t \in]0\,,\infty[$ et $a \in A_0 + A_1$:

$$\widetilde{K}_p(t\,,a) = \Big(\int_{X_t} \|a(x)\|^p_E\, M_0(x)d\mu + t^p \int_{X-X_t} \|a(x)\|^p_E\, M_1(x)d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}$$

On a démontré le

LEMME 1.– $K_p(t\,,a) \leqslant \widetilde{K}_p(t\,,a) \leqslant 2^{1-\frac{1}{p}} K_p(t\,,a)$ *pour* $t \in]0,\infty[$ *et* $a \in A_0 + A_1$.

On peut aussi écrire : $\widetilde{K}_p(t\,,a) = \|a\|_{L^p_M}$ avec

$$M(x) = \min(M_0(x)\ ;\ t^p M_1(x))$$

c'est-à-dire :

$$\widetilde{K}_p(t\,,a) = \left(\int_X \|a(x)\|_E^p \min(M_0(x)\,,t^pM_1(x))\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

On vérifie, comme pour $K(t\,,a)$, que $\widetilde{K}_p(t\,,a)$ est une fonction de t continue sur $]0\,,\infty[$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ (les fonctions : $t \longrightarrow \widetilde{K}_p(t,a)$ et $t \longrightarrow t^{-1}\widetilde{K}_p(t\,,a)$ sont respectivement non-décroissante et non-croissante).

Considérons maintenant des normes fonctionnelles du type :

$$\Phi_{\gamma,p} : \varphi \longrightarrow \Phi_{\gamma,p}(\varphi) = \left(\int_0^\infty (\varphi(t))^p d\gamma\right)^{\frac{1}{p}}$$

où $\begin{cases} 1)\ \gamma \text{ est une mesure non nulle, positive sur }]0\,,\infty[\\ 2)\ \int_0^\infty \min(1\,,t^p)d\gamma < +\infty\ . \end{cases}$

Il est immédiat que $\Phi_{\gamma,p}$ est une norme fonctionnelle (définition 1.1) ;

$$\Phi_{\gamma,p}(\widetilde{K}_p(t\,,a)) = \left(\int_0^\infty \left\{\int_X \|a(x)\|_E^p \min(M_0(x)\,,t^pM_1(x))d\mu\right\}d\gamma\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_X \|a(x)\|_E \left\{\int_0^\infty \min(M_0(x)\,,t^pM_1(x))d\gamma\right\}d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

puisque les fonctions considérées sont toutes positives.

Soit $$R(x) = \int_0^\infty \min(M_0(x)\,,t^pM_1(x))d\gamma\ ;$$

d'après le lemme 1, on a donc démontré que :

$$\Phi_{\gamma,p}(K_p(t\,,a)) \leqslant \Phi_{\gamma,p}(\widetilde{K}_p(t\,,a)) = \|a\|_{L^p_R} \leqslant 2^{1-\frac{1}{p}}\,\Phi_{\gamma,p}(K_p(t\,,a))\ ,$$

d'où le :

THEOREME 1.– *Soit γ une mesure sur* $]0\,,\infty[$, *non nulle, positive et vérifiant :*

$$\int_0^\infty \min(1\,,t^p)\,d\gamma < \infty \quad .$$

Le foncteur d'interpolation $\Phi_{\gamma,p}[\ ]$ *défini sur* $\mathcal{C}(\mathrm{B})$ *vérifie :*

$$\Phi_{\gamma,p}[\mathrm{L}^p_{\mathrm{M}_0}\,,\mathrm{L}^p_{\mathrm{M}_1}] = \mathrm{L}^p_{\mathrm{R}}$$

$$\|a\|_{\Phi_{\gamma,p}} \leqslant \|a\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{R}}} \leqslant 2^{1-\frac{1}{p}}\,\|a\|_{\Phi_{\gamma,p}}$$

avec $$\mathrm{R}(x) = \int_0^\infty \min(\mathrm{M}_0(x)\,,t^p\mathrm{M}_1(x))\,d\gamma\ .$$

explicitement : Si $(\mathrm{E}_0\,,\mathrm{E}_1)$ est un objet de $\mathcal{C}(\mathrm{B})$, l'espace

$$\Phi_{\gamma,p}[\mathrm{E}_0\,,\mathrm{E}_1] = \left\{e \in \mathrm{E}_0 + \mathrm{E}_1\ ;\ \|e\|_{\Phi_{\gamma,p}} = \left(\int_0^\infty \mathrm{K}^p_p(t\,,e)\,d\gamma\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}.$$

Remarque 1.– L'application $t \longrightarrow t^p$ est un homéomorphisme de $\mathbf{R}_+$ sur lui-même ; soit γ' l'image de γ par cet homéomorphisme ; on peut écrire :

$$\mathrm{R}(x) = \int_0^\infty \min(\mathrm{M}_0(x)\,,t\,\mathrm{M}_1(x))\,d\gamma'$$

avec γ' mesure positive sur $]0\,,\infty[$, non nulle et

$$\int_0^\infty \min(1\,,t)\,d\gamma' < \infty\ .$$

2. Application.

$\mathrm{M}_0\,,\mathrm{M}_1\,,\mathrm{R}$ étant données (mesurables et > 0 presque partout) nous cherchons un foncteur d'interpolation de la forme $\Phi_{\gamma,p}[\ ]$ tel que :

$$\Phi_{\gamma,p}[\mathrm{L}^p_{\mathrm{M}_0}\,,\mathrm{L}^p_{\mathrm{M}_1}] = \mathrm{L}^p_{\mathrm{R}}\ .$$

Moyennant la remarque 1, il est équivalent de chercher une mesure γ sur $]0\,,\infty[$, positive, non nulle, vérifiant :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \min(1\,,t)\,d\gamma < +\infty & (1) \\ \displaystyle\int_0^\infty \min(M_0(x)\,,t\,M_1(x))\,d\gamma = R(x)\ . & (2) \end{cases}$$

On peut, sans diminuer la généralité, supposer $M_1(x) \equiv 1$; posons $M_0(x) = M(x)$. Nous supposons de plus que $X = \mathbf{R}$ (ou un ouvert de $\mathbf{R}$), que M et R sont suffisamment dérivables. Nous cherchons γ sous la forme $f.\nu$, ν étant la mesure de Lebesgue sur $]0\,,\infty[$ et f une fonction vérifiant :

$$\begin{cases} f \geqslant 0 \\ \displaystyle\int_0^\infty \min(1\,,t)\,f(t)\,dt < +\infty \\ \displaystyle\int_0^\infty \min(M\,,t)\,f(t)\,dt = R\ . & (2') \end{cases}$$

(2') peut se mettre sous la forme :

$$\int_0^{M(x)} tf(t)\,dt + M(x)\int_{M(x)}^\infty f(t)\,dt = R(x)\ . \qquad (2'')$$

De (2''), on déduit que f doit vérifier :

$$\int_{M(x)}^\infty f(t)\,dt = \frac{R'(x)}{M'(x)}$$

$$f(M(x)) = \frac{-1}{M'(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{R'(x)}{M'(x)}\right)$$

Lorsque M est inversible sur $]a\,,b[$, cela déterminera une fonction f sur $]M(a)\,,M(b)[$. Dans le cas où $]M(a)\,,M(b)[\, = \,]0\,,\infty[$, il ne restera plus qu'à vérifier que f convient :

Exemple 1.– $X = \mathbf{R}$; $R(x) = M^{\theta}(x)$ avec $0 < \theta < 1$. On trouve immédiatement : $f(t) = \theta(1-\theta)t^{\theta-2}$, et il est évident que $f(t).\nu$ est une mesure γ qui convient.

Mais lorsque $]M(a)\,,M(b)[\, \neq\,]0\,,\infty[$, il faut chercher à prolonger f à $]0\,,\infty[$ (soit $\widetilde{f}$ ce prolongement) de façon que :

$\widetilde{R} = \int_0^{\infty} \min(M,t)\,\widetilde{f}(t)\,dt$ soit un poids équivalent à R, et que $\widetilde{f}$ vérifie : $\widetilde{f} \geqslant 0$ et

$$\int_0^{\infty} \min(1\,,t)\,\widetilde{f}(t)\,dt < +\infty\,.$$

Comme exemple, nous démontrons la

PROPOSITION 1.– *Soient* : $X = \mathbf{R}_+$ (*ou un ouvert de* $\mathbf{R}_+$) ; $1 \leqslant p < \infty$; $0 \leqslant s_1 < s < s_0 < \infty$; μ *une mesure positive sur* X ; E *un espace de Banach.*

Il existe un foncteur $\Phi_{g,p}[\ ]$ *défini sur* $\mathcal{C}(B)$ *tel que :*

$$\Phi_{g,p}\,[L^p_{e^{x^{s_0}}}(X\,,\mu\,,E)\,,L^p_{e^{x^{s_1}}}(X\,,\mu\,,E)] = L^p_{e^{x^s}}(X\,,\mu\,,E)$$

avec équivalence des normes.

Démonstration :

Posons
$$\left.\begin{aligned} M(x) &= e^{x^{s_0}-x^{s_1}} \\ R(x) &= e^{x^{s}-x^{s_1}} \end{aligned}\right\}\quad x \in\,]0\,,\infty[$$

cherchons f telle que :

$$\int_{M(x)}^{\infty} f(t)\,dt = \frac{e^{x^s}\,(sx^{s-1} - s_1x^{s_1-1})}{e^{x^{s_0}}\,(s_0x^{s_0-1} - s_1x^{s_1-1})} \tag{3}$$

Pour $x \geqslant 1$: $M'(x) > 0$

$\dfrac{R'(x)}{M'(x)}$ est strictement décroissante.

Donc (3) définit $f(\mathrm{M}(x)) > 0$ pour $x \in]1, \infty[$, et M étant croissante de $]1, \infty[$ sur $]1, \infty[$, f est ainsi définie, positive sur $]1, \infty[$.

Prenons $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour} \quad x \in]1, \infty[\\ 0 & \text{pour} \quad x \in]0, 1] \end{cases}$$

On a bien : $\tilde{f} \geqslant 0$

et $$\int_0^\infty \min(1, t)\,\tilde{f}(t)\,dt = \int_1^\infty f(t)\,dt = \frac{s - s_1}{s_0 - s_1} < \infty \,.$$

Calculons $$\tilde{\mathrm{R}}(x) = \int_0^{\mathrm{M}(x)} t\,\tilde{f}(t)\,dt + \mathrm{M}(x) \int_{\mathrm{M}(x)}^\infty \tilde{f}(t)\,dt \,.$$

$$\tilde{\mathrm{R}}(x) = \begin{cases} e^{x^{s_0} - x^{s_1}} \displaystyle\int_1^\infty f(t)\,dt & \text{pour} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ \displaystyle\int_1^{\mathrm{M}(x)} t\,f(t)\,dt + e^{x^{s_0} - x^{s_1}} \int_{\mathrm{M}(x)}^\infty f(t)\,dt \\ \text{pour } x > 1 \end{cases}$$

Remarquons que pour $x > 1$:

$$\int_1^{\mathrm{M}(x)} t\,f(t)\,dt = \int_1^x \mathrm{M}(u)\,f(\mathrm{M}(u))\,\mathrm{M}'(u)\,du = \int_1^x \mathrm{M}(u) \left(- \frac{\mathrm{R}'(u)}{\mathrm{M}'(u)}\right)' du$$

$$= \left[- \mathrm{M}(u) \frac{\mathrm{R}'(u)}{\mathrm{M}'(u)} \right]_1^x + \int_1^x \mathrm{R}'(u)\,du$$

d'où :

$$\tilde{\mathrm{R}}(x) = \begin{cases} e^{x^{s_0} - x^{s_1}} \dfrac{s - s_1}{s_0 - s_1} & \text{pour} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ e^{x^{s} - x^{s_1}} + \dfrac{s - s_0}{s_0 - s_1} & \text{pour} \quad x > 1 \,. \end{cases}$$

Il est immédiat que $\widetilde{\mathrm{R}}$ est > 0, continu et est équivalent à R (c'est-à-dire, qu'il existe 2 constantes k_1 et k_2 positives telles que : $k_1 \mathrm{R}(x) \leqslant \widetilde{\mathrm{R}}(x) \leqslant k_2 \mathrm{R}(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$).

$g.\nu$ est l'image de $\widetilde{f}.\nu$ dans l'homéomorphisme $t^p \longrightarrow t$ de $]0, \infty[$ sur lui-même (ν : mesure de Lebesgue sur $]0, \infty[$), c'est-à-dire :

$$p\, t^{p-1}\, f(t^p) = g(t)\ ;$$

pour $t \in]0, \infty[$.

Remarques :

1) On n'a pas calculé explicitement f puisque ce n'était pas utile ; s'il le fallait, on saurait le faire ; ainsi pour $s_1 = 0$, $s = 1$, $s_0 = 2$, on trouve :

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{1+\operatorname{Log} x}}\ (3 + 2 \operatorname{Log} x - \sqrt{1 + \operatorname{Log} x})}{4e\, x^2\, (1 + \operatorname{Log} x)^{\frac{3}{2}}} .$$

2) Les calculs de l'exemple 2 s'adaptent évidemment au cas :

$$\mathrm{X} = \mathbf{R}\ ; \quad \begin{cases} \mathrm{M}(x) = e^{|x|^{s_0} - |x|^{s_1}} \\ \mathrm{R}(x) = e^{|x|^{s} - |x|^{s_1}} \end{cases}$$

ainsi qu'aux cas : X = **N** ou **Z** avec les mêmes poids.

3. Cas des espaces $\mathrm{L}^\infty_\mathrm{M}$.

Ce cas se traite de façon analogue au cas $p < +\infty$.

On fait les mêmes hypothèses qu'au paragraphe 1 sur X , μ , E,M ; $\mathrm{L}^\infty_\mathrm{M}(\mathrm{X},\mu,\mathrm{E})$ est l'espace des (classes de) fonctions a définies sur X, à valeur dans E, fortement μ-mesurables et telles que

$$\mu\text{-}\sup_{x \in \mathrm{X}} \|a(x)\|_\mathrm{E}\, \mathrm{M}(x) < +\infty .$$

On notera aussi cet espace $L^\infty_M(E)$ ou L^∞_M. C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\| a \|_{L^\infty_M} = \mu\text{-}\sup_{x \in X} \| a(x) \|_E \, M(x) .$$

Pour M_0 et M_1 vérifiant les hypothèses sur M, le couple $(L^\infty_{M_0}, L^\infty_{M_1})$ est un couple compatible d'espaces de Banach ; soient $A_0 = L^\infty_{M_0}$ et $A_1 = L^\infty_{M_1}$.

Pour $t \in]0, \infty[$ et $a \in A_0 + A_1$, posons :

$$K_\infty(t, a) = \inf_{a = a_0 + a_1} (\max(\| a_0 \|_{A_0}, t \| a_1 \|_{A_1}) .$$

Considérons seulement des normes fonctionnelles du type :

$$\Phi_{f,\infty} : \varphi \longrightarrow \Phi_{f,\infty}(\varphi) = \sup_{t>0} \varphi(t) f(t)$$

où
1) f est une fonction non nulle, positive, mesurable pour la mesure de Lebesgue sur $]0, +\infty[$
2) $\sup_{t>0} \min(1, t) f(t) < \infty$.

On trouve de la même manière qu'au paragraphe 1 :

$$\Phi_{f,\infty}(K_\infty(t, a)) \leqslant \| a \|_{L^\infty_R} \leqslant 2\, \Phi_{f,\infty}(K_\infty(t, a))$$

avec $$R(x) = \sup_{t>0} \min(M_0(x), t\, M_1(x) f(t) .$$

On obtient ainsi un théorème analogue au théorème 1.

THEOREME 2.– *Soit une fonction mesurable f, non nulle, positive sur* $]0, \infty[$ *et vérifiant :*

$$\sup_{t>0} (\min(1, t)) f(t) < +\infty .$$

Le foncteur d'interpolation $\Phi_{f,\infty}[\ ]$, *défini sur* $\mathcal{C}(B)$, *vérifie* :

$$\Phi_{f,\infty}[L^{\infty}_{M_0}, L^{\infty}_{M_1}] = L^{\infty}_{R}$$

$$\|a\|_{\Phi_{f,\infty}} \leqslant \|a\|_{L^{\infty}_{R}} \leqslant 2\,\|a\|_{\Phi_{f,\infty}}$$

avec $$R(x) = \sup_{t>0} \min(M_0(x), t\,M_1(x))\,f(t))$$

$$= \max\Big(M_1 \sup_{t\,M_1 < M_0} t\,f(t), M_0 \sup_{t\,M_1 > M_0} f(t)\Big)$$

Application.– L'expression de $R(x)$ donnée au théorème 2 permet aussi de déterminer des foncteurs d'interpolation $\Phi_{f,\infty}[\ ]$ tels que :

$$\Phi_{f,\infty}[L^{\infty}_{M_0}, L^{\infty}_{M_1}] = L^{\infty}_{R},$$

pour M_0, M_1, R convenables, donnés à priori : par exemple, soient :

$M(x) = e^{x^{s_0} - x^{s_1}}$; $R(x) = e^{x^{s} - x^{s_1}}$; $x \in]0, \infty[$; $0 \leqslant s_1 < s < s_0 < \infty$.

Cherchons f telle que :

$$e^{x^{s} - x^{s_1}} = \max\Big(e^{x^{s_0} - x^{s_1}} \sup_{t>0} f(t), \sup_{0<t<M} t\,f(t)\Big).$$

Si nous supposons f non-croissante et telle que $t\,f$ soit non-décroissante, nous trouvons :

$$M(x)\,f(M(x) = R(x) = e^{x^{s} - x^{s_1}}$$

ce qui détermine $f(t)$ pour $t \geqslant 1$.

Soit $$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < t < 1\,. \end{cases}$$

On vérifie que : $\tilde{f}$ est une fonction non nulle, positive et mesurable sur $]0, \infty[$, et détermine un foncteur d'interpolation $\Phi_{\tilde{f},\infty}[\ ]$ tel que :

$$\Phi_{\tilde{f},\infty}[L^\infty_M , L^\infty_1] = L^\infty_{\tilde{R}}$$

avec : $\qquad \widetilde{R}(x) = \max\ e^{x^{s_0} - x^{s_1}} \sup_{t>M} \widetilde{f}(t) , \quad \sup_{0<t<M} t\,\widetilde{f}(t)$

$$\widetilde{R}(x) = \begin{cases} R(x) & \text{pour} \quad x \geqslant 1 \\ M(x) & \text{pour} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

et on a bien :

$$\Phi_{\tilde{f},\infty}[L^\infty_M , L^\infty_1] = L^\infty_R$$

avec des normes équivalentes soit :

$$\Phi_{\tilde{f},\infty}[L^\infty_{e^{s^{s_0}}} , L^\infty_{e^{x^{s_1}}}] = L^\infty_{e^{x^s}}$$

avec des normes équivalentes.

Remarque 2 :

Pour $1 \leqslant p < \infty$, la notion de poids que nous avons utilisée est $\mathcal{M}^p, \mathcal{M}$ étant le poids que l'on trouve le plus généralement (cf. [23]) ; pour $p = +\infty$, nous utilisons la notion habituelle. Ce choix est déterminé par des simplifications des expressions et des calculs, et il montre mieux que les mesures γ qui conduisent à des fonctions d'interpolation (pour les poids considérés) sont indépendantes de p, pour $1 \leqslant p < \infty$ (cf. paragraphe 4).

4. Fonctions d'interpolation d'ordre p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

On écrit L^p_M pour $L^p_M(X , \mu , E)$.

DEFINITION 1.– *Une fonction* $(z_0 , z_1) \longrightarrow H(z_0 , z_1)$ *de* $]0 , \infty[\times]0 , \infty[$ *dans* $]0 , \infty[$ *, mesurable, est dite fonction d'interpolation d'ordre p si : pour tout couple compatible d'espace de Banach* $(L^p_{M_0} , L^p_{M_1})$ *et tout morphisme u de* $(L^p_{M_0} , L^p_{M_1})$ *dans lui-même, on a :*

$$L^p_{M_0} \cap L^p_{M_1} \hookrightarrow L^p_{H(M_0, M_1)} \hookrightarrow L^p_{M_0} + L^p_{M_1} \ .$$

Et la restriction de u à $L^p_{H(M_0, M_1)}$ *est continue de* $L^p_{H(M_0, M_1)}$ *dans lui-même et de norme* $\leqslant$ C *(qui ne dépend que de* H *et non de* X, μ, M_0, M_1, u).

Du théorème 1 résulte alors la

PROPOSITION 2.– *Soit* γ *une mesure non nulle, positive sur* $]0, \infty[$ *et telle que*

$$\int_0^\infty \min(1, t)\, d\gamma < +\infty \ .$$

La fonction H_γ *définie par :*

$$H_\gamma(z_0, z_1) = \int_0^\infty \min(z_0, tz_1)\, d\gamma$$

est une fonction d'interpolation d'ordre p pour tout $p \in [1, \infty[$.

De même du théorème 2 résulte la

PROPOSITION 3.– *Soit f une fonction mesurable, non nulle, positive sur* $]0, \infty[$ *et telle que :*

$$\sup_{t>0} f(t) \min(1, t) < +\infty \ .$$

La fonction H_f *définie par*

$$H_f(z_0, z_1) = \sup_{t>0} f(t) \min(z_0, tz_1)$$

est une fonction d'interpolation d'ordre ∞ .

En général les fonctions d'interpolation H_γ et H_f des propositions 2 et 3 ne sont pas des fonctions d'interpolation exacte, c'est-à-dire que l'on a en général $C > 1$.

On a :

$H_f(z_0, z_1) = z_1 h_f(z_0 z_1^{-1})$ *avec* : $z \longrightarrow h_f(z)$, *fonction concave non nulle de* $]0, \infty[$ *dans* $]0, \infty[$ *(en particulier,* h_f *est continue, non décroissante et* $z \longrightarrow z^{-1} h_f(z)$ *est non croissante).*

Réciproquement : Soit $z \longrightarrow h(z)$ une fonction concave non nulle de $]0, \infty[$ dans $]0, \infty[$. Posons : $f(t) = t^{-1} h(t)$, on a :

$$\sup_{t>0} \min(z, t) f(t) = \max\Big(z \sup_{t>z} f(t), \sup_{t<z} tf(t)\Big)$$

$$= \max(h(z), h(z)) = h(z)$$

De plus : $\sup_{t>0} \min(1, t) f(t) = f(1) = h(1) < +\infty$

Donc : $(z_0, z_1) \longrightarrow z_1 h(z_0 z_1^{-1})$ est une fonction d'interpolation d'ordre ∞ , (de la forme H_f).

Remarquons que ceci montre qu'il suffit, dans la proposition 3, de prendre f continue, non croissante et telle que $tf(t)$ soit non décroissante.

Remarquons que l'on peut avoir :

$$z_0 = H_f(z_0, z_1) \qquad \text{pour} \qquad f(t) = 1$$

$$z_1 = H_f(z_0, z_1) \qquad \text{pour} \qquad f(t) = t^{-1}$$

Alors que pour $p < +\infty$, les fonctions d'interpolation obtenues par la proposition 2 ont toutes la propriété :

$$H_\gamma(z_0, z_1) \longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \qquad z_0 \quad \textit{ou} \quad z_1 \longrightarrow 0 .$$

Mais on peut étendre la classe des fonctions d'interpolation d'ordre $p < \infty$ et on obtient le résultat :

THEOREME 3.– *Soit* $H : (z_0, z_1) \longrightarrow H(z_0, z_1)$ *une fonction de* $]0, \infty[\times]0, \infty[$ *dans* $]0, \infty[$ *, homogène de degré* 1. *Posons*

$$H(z_0, z_1) = z_1 F(z_0 . z_1^{-1}) .$$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) H *est une fonction d'interpolation d'ordre p pour tout* $p \in [1, \infty]$.

b) H *est une fonction d'interpolation d'ordre p pour une valeur de p dans* $[1, \infty]$.

c) $\exists$ *une fonction* G *de* $]0, \infty[$ *dans* $]0, \infty[$, *concave, équivalente à* F (*c'est-à-dire :* $\exists k_1$ *et* $k_2 > 0$ *tels que :*

$$k_1 \, G(z) \leqslant F(z) \leqslant k_2 \, G(z) \; ; \; \forall z \in]0, \infty[) .$$

d) $\exists f$, *fonction mesurable non nulle positive de* $]0, \infty[$ *dans* $\mathbf{R}_+$ *telle que :*

$$\sup_{t>0} \min(1, t) f(t) < +\infty$$

$$\sup_{t>0} \min(z, t) f(t) = G(z) ,$$

G *équivalente à* F.

e) $\exists \gamma$, *mesure positive sur* $]0, \infty[$ *telle que :*

$$\int_0^\infty \min(1, t) \, d\gamma < +\infty$$

F *équivalente à* G *avec :*

$$G(z) = a + bz + \int_0^\infty \min(z, t) \, d\gamma \quad ; \quad a, b \in \mathbf{R}_+ .$$

γ *non nulle ou bien :* a ou $b > 0$.

Démonstration :

$a \Longrightarrow b$: évident.

$d \Longrightarrow c$: déjà démontré.

$e \Longrightarrow c$: résulte immédiatement du fait que $z \longrightarrow \int_0^\infty \min(z, t) \, d\gamma$ est concave.

e et $d \Longrightarrow a$, et comme $e \Longrightarrow d$, $e \Longrightarrow a$.

(Remarquons que

$$(z_0\,,z_1) \longrightarrow az_0 + bz_1 + \int_0^\infty \min(z_0\,,tz_1)\,d\gamma$$

est une fonction d'interpolation d'ordre p $(1 \leqslant p < \infty)$, puisque :

$$(z_0\,,z_1) \longrightarrow az_0 + bz_1$$

et
$$(z_0\,,z_1) \longrightarrow \int_0^\infty \min(z_0\,,tz_1)\,d\gamma$$

sont des fonctions d'interpolation d'ordre p lorsqu'elles ne sont pas identiquement nulles et que la somme de 2 fonctions d'interpolation d'ordre p est une fonction d'interpolation du même ordre).

$c \Longrightarrow e$: En remplaçant éventuellement G par une fonction équivalente, on peut toujours supposer que G est deux fois continuement dérivable sur $]0\,,\infty[$; soit $z \in\,]0\,,\infty[$; $0 < \varepsilon \leqslant z \leqslant N < \infty$.

$$-\int_\varepsilon^N \min(z\,,t)\,G''(t) = -\int_\varepsilon^z t\,G''(t)\,dt - z\int_z^N G''(t)\,dt$$

$$= [-tG'(t)]_\varepsilon^z + \int_\varepsilon^z G'(t)\,dt - z\,G'(N) + z\,G'(z)$$

$$= G(z) - G(\varepsilon) + \varepsilon G'(\varepsilon) - z\,G'(N)$$

$\exists a = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} G(\varepsilon)$ et $\varepsilon G'(\varepsilon) \longrightarrow 0$ (puisque G est concave et positive) ; de même G' est une fonction décroissante et $\geqslant 0$ donc :

$$\exists b = \lim_{N \to \infty} G'(N)\,.$$

Donc :

$$-\int_0^\infty \min(z\,,t)\,G''(t)\,dt = G(z) - a - bz$$

On a évidemment : $\quad - G''(t))\,dt \geqslant 0$.

et $$\int_0^{\infty} \min(1\,,t)\,(-\,G''(t))\,dt < \infty\,.$$

$b \Longrightarrow c$: La démonstration est peu différente de celle de [23]. Soit H une fonction d'interpolation d'ordre 1. Nous choisissons :

$$X = \{x_0\,, x_1\,, x_2\}\,;$$

μ est la mesure de Dirac en chaque point : les poids sont $M_1(x_i) = 1$; $i = 0\,,1\,,2$; $M(x_i) = M_0(x_i) = z_i \geqslant 0$; $i = 0\,,1\,,2$; $z_0 \neq 0$.

Nous considérons les opérateurs Π de la forme :

$$a \longrightarrow \Pi a \qquad \text{défini par} \quad \begin{cases} (\Pi a)(x_0) = 0 \\ (\Pi a)(x_i) = \beta_i\, a(x_0) \\ i = 1\,,2\,; \beta_i \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Pi \in \mathcal{L}(L^1(X\,,\mu)\,, L^1(X\,,\mu))$$

et $$\|\Pi\|_{\mathcal{L}(L^1,L^1)} = \sup_{a \in L^1} \frac{|\beta_1\, a(x_0)| + |\beta_2\, a(x_0)|}{|a(x_0)| + |a(x_1)| + |a(x_2)|} = \beta_1 + \beta_2\,.$$

de même : $\Pi \in \mathcal{L}(L^1_M\,, L^1_M)$ et $\Pi \in \mathcal{L}(L^1_{H(1\,,M)}\,, L^1_{H(1\,,M)})$

$$\|\Pi\|_{\mathcal{L}(L^1_M,L^1_M)} = \frac{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2}{z_0}$$

$$\|\Pi\|_{\mathcal{L}(L^1_H,L^1_H)} = \frac{\beta_1 H(1\,,z_1) + \beta_2 H(1\,,z_2)}{H(1\,,z_0)}$$

Par hypothèse, $\exists C > 0$ tel que :

$$\beta_1 + \beta_2 = 1$$

$$z_0 = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2$$

entraîne : $$\beta_1 F(z_1) + \beta_2 F(z_2) \leqslant C\, F(z_0)\,.$$

ce qui montre que F est équivalente à une fonction concave G de]0 , ∞[dans]0 , ∞[définie par :

$$G(z) = \sup_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, z_1, z_2 \geqslant 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = z}} (\alpha_1 F(z_1) + \alpha_2 F(z_2)) \; .$$

CHAPITRE 3

PROLONGEMENTS DE FONCTEURS D'INTERPOLATION

1. Introduction.

a) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de couples compatibles et $\Phi[\ ]$ un foncteur d'interpolation défini sur $\mathcal{C}$(1). Supposons donnée une famille projective $(A_0^i, A_1^i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$, admettant dans $\mathcal{C}$ une limite projective (A_0, A_1) (définie à un isomorphisme près).

Cela signifie que : $\forall\, i \in I$, $\exists\, \mu_i : (A_0, A_1) \longrightarrow (A_0^i, A_1^i)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & (A_0^i, A_1^i) \\ (A_0, A_1) \arrow[ur, "\mu_i"] \arrow[dr, "\mu_j"'] & \\ & (A_0^j, A_1^j) \arrow[uu, "\mu_{ji}"'] \end{tikzcd}$$

$\forall i \in I$, $\forall j \in I$ tels que μ_{ji} existe.

On en déduit par $\Phi[\ ]$ le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \Phi[A_0^i, A_1^i] \\ \Phi[A_0, A_1] \arrow[ur, "\Phi[\mu_i]"] \arrow[dr, "\Phi[\mu_j]"'] & \\ & \Phi[A_0^j, A_1^j] \arrow[uu, "\Phi[\mu_{ji}]"'] \end{tikzcd}$$

La famille $(\Phi[A_0^i, A_1^i])_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}'$ est aussi une famille projective et admet dans $\mathcal{C}'$ une limite projective notée $\varprojlim_{i\in I} \Phi\, [A_0^i, A_1^i]$.

Donc, d'après le diagramme précédent, il existe un morphisme μ :

$$\Phi[A_0, A_1] \longrightarrow \varprojlim_{i\in I} \Phi[A_0^i, A_1^i]$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

(1) Dans ce chapitre (sauf au paragraphe 5), $\Phi[\ ]$ désigne un foncteur d'interpolation quelconque défini sur $\mathcal{C}$, (qui pourra être en particulier le foncteur $[\ ]_\theta$ construit par la méthode holomorphe et qui sera utilisé à la fin du chapitre 5 (Théorème 5.2)).

$$\begin{tikzcd}
 & \varprojlim_{i\in I} \Phi[A_0^i , A_1^i] \arrow[d] \\
\Phi[A_0 , A_1] \arrow[ur, "\mu"] \arrow[r, "\Phi[\mu_i]"'] & \Phi[A_0^i , A_1^i]
\end{tikzcd} \qquad \forall i \in I$$

En général μ ne sera pas un isomorphisme ; on donnera des contre-exemples.

b) De même, si (A_0 , A_1) est limite inductive dans $\mathcal{C}$ d'une famille $(A_0^i , A_1^i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$, il existe un morphisme ν :

$$\varinjlim_{i\in I} \Phi[A_0^i , A_1^i] \longrightarrow \Phi[A_0 , A_1] .$$

La démonstration est la même que ci-dessus, en inversant le sens des flèches.

En général ν ne sera pas un isomorphisme.

Nous allons donc considérer des situations moins générales.

2. Limites projectives strictes.

DEFINITION 1.– *Un espace localement convexe séparé* E *est dit projective stricte d'une famille* $(E_i)_{i\in I}$ *d'espaces de Banach si :*

1) $E = \bigcap_{i\in I} E_i$

2) E *est muni de la topologie limite projective de celles des* E_i.

3) $\forall i \in I$, E *est dense dans* E_i.

4) *La famille* $(E_i)_{i\in I}$ *est filtrante décroissante.*

La dernière condition signifie que pour toute sous-famille finie J de I, $\exists k \in I$ tel que E_k soit contenu algébriquement et topologiquement dans E_j pour tout j de J. Elle sera évidemment réalisée lorsque la famille $(E_i)_{i\in I}$ est une suite décroissante.

On notera $E = \varprojlim_{i\in I} E_i$.

On a le :

LEMME 1.– *Soit* E (*respectivement :* F) *une limite projective stricte d'une famille* $(E_i)_{i\in I}$ (*respectivement :* $(F_j)_{j\in J}$) *d'espaces de Banach. Pour qu'une application linéaire u de* E *dans* F *soit continue il faut et il suffit que :* $\forall j \in J, \exists i \in I$ *tel que u se prolonge en une application linéaire continue de* E_i *dans* F_j .

Démonstration.– E étant dense dans E_i, on peut parler du prolongement de u à E_i ; on le notera encore u.

Si u est continue de E_i dans F_j, u est à fortiori continue de E dans F_j, et cela pour tout j de J, donc u est continue de E dans F.

Réciproquement, si u est continue de E dans F, elle est continue de E dans F_j, quel que soit $j \in J$; cela entraîne que u est continue de $\varprojlim_{k\in K} E_k$ dans F_j, avec K partie finie de I ; donc $\exists i \in I$, tel que u soit continue de E_i dans F_j .

DEFINITION 2.– *Un couple compatible* (A_0 , A_1) *d'espaces localement convexes séparés est dit limite projective stricte de la famille* $(A_0^i , A_1^j)_{(i,j)\in I\times J}$ *de couples compatibles d'espaces de Banach si :*

1) $A_0 = \varprojlim_{i\in I} A_0^i$; $A_1 = \varprojlim_{j\in J} A_1^j$

2) *Les espaces* A_0^i , A_1^j *sont des sous-espaces d'un même espace* $\mathfrak{A}$.

3) $\forall (i,j) \in I \times J$, $A_0 \cap A_1$ *est dense dans* $A_0^i \cap A_1^j$.

On notera alors :

$$(A_0 , A_1) = \varprojlim_{i,j} (A_0^i , A_1^j)$$

Soient $\Phi[\;]$ un foncteur d'interpolation défini sur $\mathcal{C}(B)$ et

$$(A_0 , A_1) = \varprojlim_{i,j} (A_0 , A_1) ;$$

posons $$A^{ij} = \Phi[A_0^i , A_1^j] .$$

On définit $A = \varprojlim_{i,j} A^{ij}$ comme l'ensemble $\bigcap_{i,j} A^{ij}$ muni de la topologie limite projective ; A est un espace localement convexe séparé.

Soient :
$$(A_0\,,A_1)=\varprojlim_{i,j}(A_0^i\,,A_1^j)$$
$$(B_0\,,B_1)=\varprojlim_{k,l}(B_0^k\,,B_1^l)$$
$$u\in \mathrm{Hom}((A_0\,,A_1)\,,(B_0\,,B_1))\,.$$

D'après la définition 2, $\forall(k\,,l)$, $\exists(i\,,j)$ tel que u se prolonge en :

$$\begin{cases} u_0 : A_0^i \longrightarrow B_0^k \\ u_1 : A_1^j \longrightarrow B_1^l \end{cases}$$

u_0 et u_1 coïncident sur $A_0 \cap A_1$, donc aussi sur $A_0^i \cap A_1^j$, d'où :

$$u\in \mathrm{Hom}((A_0^i\,,A_1^j)\,,(B_0^k\,,B_1^l))$$
$$\Longrightarrow u\in \mathcal{L}(\Phi[A_0^i\,,A_1^j]\,,\Phi[B_0^k\,,B_1^l])=\mathcal{L}(A^{ij}\,,B^{kl})$$
$$\Longrightarrow u\in \mathcal{L}(A\,,B^{kl})\quad \text{pour tout}\quad (k\,,l)\,,$$
$$\Longrightarrow u\in \mathcal{L}(A\,,B)\,.$$

Cela montre en particulier que A *ne dépend que de* $(A_0\,,A_1)$ *et pas de la famille particulière* $(A_0^i\,,A_1^j)_{(i,j)\in I\times J}$ *choisie* ; on notera : $A=\widetilde{\Phi}[A_0\,,A_1]$; on remarque que si $(A_0\,,A_1)$ est un couple compatible d'espaces de Banach, $\widetilde{\Phi}[A_0\,,A_1]=\Phi[A_0\,,A_1]$.

On a donc démontré le :

THEOREME 1.– *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie de couples compatibles limites projectives strictes de couples compatibles d'espaces de Banach ; soit* $\Phi[\ ]$ *un foncteur d'interpolation défini sur* $\mathcal{C}$ (B).

On en déduit un foncteur d'interpolation $\widetilde{\Phi}[\ ]$ *défini sur* $\mathcal{C}$ *par :*

$$(A_0\,,A_1)=\varprojlim_{i,j}(A_0^i\,,A_1^j)\rightsquigarrow\widetilde{\Phi}[A_0\,,A_1]=\varprojlim_{i,j}\Phi[A_0^i\,,A_1^j]$$

La restriction de $\widetilde{\Phi}[\ ]$ *à* $\mathcal{C}$(B) *est* $\Phi[\ ]$.

Remarque 1.– Supposons que I = J et que

$$\varprojlim_{i,j} (A_0^i, A_1^j) = \varprojlim_{k\in I} (A_0^k, A_1^k) ;$$

on peut alors écrire :

$$\widetilde{\Phi}[A_0, A_1] = \varprojlim_{k\in I} \Phi[A_0^k, A_1^k] .$$

Cette condition sera réalisée lorsque : $\forall (i, j) \in I \times I$, $\exists k \in I$ et un morphisme $(A_0^k, A_1^k) \longrightarrow (A_0^i, A_1^j)$ dont les restrictions à A_0^k et A_1^k sont des inclusions topologiques de A_0^k dans A_0^i et de A_1^k dans A_1^j .

Remarque 2.– Toutes les démonstrations et tous les énoncés de ce paragraphe 2 restent valables si on y remplace "espace de Banach" par "espace banachisable".

3. Limites inductives.

Rappelons que l'on appelle espace $(\mathcal{LF})$ tout espace localement convexe séparé E qui est limite inductive d'une *suite* $(E_n)_{n\in N}$ d'espaces $(\mathcal{F})$ par des applications linéaires u_n telles que les $u_n(E_n)$ engendrent E.

Nous supposerons que les E_n forment une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E, munis de topologies propres qui en font des espaces $(\mathcal{F})$, l'application identique de E_n dans E_{n+1} étant continue et E étant la réunion des E_n . Une telle suite $(E_n)_{n\in N}$ est appelée une suite de définition de l'espace $(\mathcal{LF})$ E, et on note : $E = \varinjlim_n E_n$.

On a le :

LEMME 2.– *Soient* E *et* F *deux espaces* $(\mathcal{LF})$, (E_n) *et* (F_n) *des suites de définition de* E *et* F *respectivement. Pour qu'un opérateur linéaire u de* E *dans* F *soit continu, il faut et il suffit que pour tout n de* **N** *il existe* $p \in \mathbf{N}$ *tel que la restriction de u à* E_n *soit continue de* E_n *dans* F_p .

Démonstration :

Soit u continue de E dans F ; $\forall n \in \mathbf{N}$, u est continue de E_n dans F ; or (cf. [11]) cela entraîne qu'il existe $p(n)$ tel que u soit continue de E_n dans $F_{p(n)}$.

Réciproquement, supposons que pour tout n, il existe p tel que u soit continue de E_n dans F_p ; donc u est continue de E_n dans F, donc u est continue de E dans F.

DEFINITION 3.– *Un couple compatible* (A_0 , A_1) *d'espaces localement convexes séparés est dit de type* $(\mathcal{LF})$ *et admettant pour suite de définition* $(A_0^m , A_1^n)_{(m,n)\in \mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ *si :*

1) A_0 *et* A_1 *sont de type* $(\mathcal{LF})$ *et admettant pour suites de définition respectives* $(A_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $(A_1^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

2) $\forall (m , n)\in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, *la compatibilité du couple* (A_0^m , A_1^n) *est définie par le plongement de* A_0^m *et* A_1^n *dans* $A_0 + A_1$.

On note alors : $(A_0 , A_1) = \varinjlim\limits_{m,n} (A_0^m , A_1^n)$.

Soit $\Phi[\ \ ]$ un foncteur d'interpolation défini sur la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ des couples compatibles d'espaces de Fréchet ; soit

$$(A_0 , A_1) = \varinjlim_{m,n} (A_0^m , A_1^n) .$$

Posons $A^{mn} = \Phi[A_0^m , A_1^n]$; on définit $A = \varinjlim\limits_{m,n} A^{mn}$ comme le sous-espace de $A_0 + A_1$ engendré par les A^{mn}, muni de la topologie limite inductive. A est un espace localement convexe.

Soient :
$$(A_0 , A_1) = \varinjlim_{m,n} (A_0^m , A_1^n)$$
$$(B_0 , B_1) = \varinjlim_{p,q} (B_0^p , B_1^q)$$
$$u \in \mathrm{Hom}((A_0 , A_1) , (B_0 , B_1)) .$$

Par définition, u est une application linéaire de $A_0 + A_1$ dans $B_0 + B_1$ dont la restriction à A_0 (respectivement A_1) est continue de A_0 dans B_0 (resp. de A_1 dans B_1) ; donc, $\forall (m,n)\in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $\exists (p,q)\in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ tel que u soit continue de A_0^m dans B_0^p et de A_1^n dans B_1^q. De la compatibilité (A_0^m , A_1^n) et (B_0^p , B_1^q), on déduit donc que :

$$u \in \mathrm{Hom}((A_0^m , A_1^n) , (B_0^p , B_1^q)) .$$

Donc $\quad u \in \mathcal{L}(\Phi[A_0^m , A_1^n] , \Phi[B_0^p , B_1^q]) = \mathcal{L}(A^{mn} , B^{pq})$,

donc $\quad u \in \mathcal{L}\left(A^{mn} , \varinjlim_{p,q} B^{pq}\right) = \mathcal{L}(A^{mn} , B)$,

et cela pour $\forall (m , n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, donc :

$$u \in \mathcal{L}(A , B) .$$

Cela montre en particulier que A *ne dépend que de* (A_0 , A_1) *et pas de la suite de définition choisie* ; on notera $A = \widetilde{\Phi}[A_0 , A_1]$. On remarque que si (A_0 , A_1) est un couple compatible d'espaces de Fréchet, on a :

$$\widetilde{\Phi}[A_0 , A_1] = \Phi[A_0 , A_1] .$$

On a donc démontré le

THEOREME 2. – *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie de couples compatibles de type* $(\mathcal{L}\mathcal{F})$; *soit* $\Phi[\ ]$ *un foncteur d'interpolation défini sur* $\mathcal{C}(\mathcal{F})$.

On en déduit un foncteur d'interpolation $\widetilde{\Phi}[\ ]$ *défini sur* $\mathcal{C}$ *par :*

$$(A_0 , A_1) = \underset{m,n}{\underrightarrow{\mathrm{Lim}}} (A_0^m , A_1^n) \longrightarrow \widetilde{\Phi}[A_0 , A_1] = \varinjlim_{m,n} \Phi[A_0^m , A_1^n] .$$

La restriction de $\widetilde{\Phi}[\ ]$ *à* $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ *est* $\Phi[\ ]$.

Remarque 3. – (analogue à la remarque 1). Lorsque

$$\underset{m,n}{\underrightarrow{\mathrm{Lim}}} (A_0^m , A_1^n) = \underset{p}{\underrightarrow{\mathrm{Lim}}} (A_0^p , A_1^p) ,$$

on peut écrire aussi :

$$\widetilde{\Phi}[A_0 , A_1] = \varinjlim_{p} \Phi[A_0^p , A_1^p] .$$

Remarque 4. – Soit $\tilde{\tilde{\mathcal{C}}}$ la catégorie de couples compatibles de type $(\mathcal{LF})$ admettant une suite de définition constituée de couples compatibles limites projectives strictes de couples compatibles d'espaces de Banach.

Soit $\Phi[\ ]$ un foncteur d'interpolation défini sur $\mathcal{C}(B)$; en utilisant successivement les théorèmes 1 et 2 on lui associe un foncteur d'interpolation $\tilde{\tilde{\Phi}}[\ ]$ défini sur $\tilde{\tilde{\mathcal{C}}}$, par :

$$(A_0\,,A_1) = \varinjlim_{m,n}(A_0^m\,,A_1^n) = \varinjlim_{m,n}\left(\varprojlim_{i,j}(A_0^{m,i}\,,A_1^{n,j})\right)$$

$$\rightsquigarrow \tilde{\tilde{\Phi}}[A_0\,,A_1] = \varinjlim_{m,n}\left(\varprojlim_{i,j}\Phi[A_0^{m,i}\,,A_1^{n,j}]\right)$$

(Il résulte de la démonstration des théorèmes 1 et 2 que si on a aussi

$$(A_0\,,A_1) = \varinjlim_{m,n}\varprojlim_{i,j}(B_0^{m,i}\,,B_1^{n,j})\,,$$

alors $$\varinjlim_{m,n}\left(\varprojlim_{i,j}\Phi[A_0^{m,i}\,,A_1^{n,j}]\right) = \varinjlim_{m,n}\left(\varprojlim_{i,j}\Phi[B_0^{m,i}\,,B_1^{n,j}]\right).$$

$\tilde{\tilde{\Phi}}[\ ]$ coïncide avec $\tilde{\Phi}[\ ]$, prolongement de $\Phi[\ ]$ par limite projective, sur les couples compatibles d'espaces de Fréchet qui sont limites projectives strictes de couples compatibles d'espaces de Banach.

Remarque 5. – Soient $\Phi[\ ]$ et $\Psi[\ ]$ deux foncteurs d'interpolation définis sur $\mathcal{C}(B)$ tels que pour tout objet $(A_0\,,A_1)$ de $\mathcal{C}(B)$ on ait $\Phi[A_0\,,A_1] \hookrightarrow \Psi[A_0\,,A_1]$.

Alors les foncteurs $\tilde{\Phi}[\ ]$ et $\tilde{\Psi}[\ ]$ obtenus par prolongement par limite projective vérifient :

$\tilde{\Phi}[A_0\,,A_1] \hookrightarrow \tilde{\Psi}[A_0\,,A_1]$ pour tout couple compatible limite projective stricte de couples compatibles d'espaces de Banach.

On a un résultat analogue pour le prolongement par limite inductive.

4. Dualité.

Nous notons ${}^p\tilde{\mathcal{C}}$ la catégorie des couples compatibles limites projectives strictes d'une *suite* de couples compatibles d'espaces de

Banach *réflexifs* tels que : Pour tout objet (A_0, A_1) de ${}^p\widetilde{\mathcal{C}}$, $A_0 \cap A_1$ est *dense* dans A_0 et dans A_1.

Nous notons ${}^i\widetilde{\mathcal{C}}$ la catégorie des couples compatibles de type $(\mathcal{LF})$ admettant une suite de définition constituée de couples compatibles d'espaces de *Banach.*

$\Phi[\ ]$ étant un foncteur d'interpolation défini sur la catégorie $\mathcal{C}(B)$, notons ${}^p\widetilde{\Phi}[\ ]$ (resp. ${}^i\widetilde{\Phi}[\ ]$) le foncteur défini sur ${}^p\widetilde{\mathcal{C}}$ (resp. ${}^i\widetilde{\mathcal{C}}$) à partir de $\Phi[\ ]$ par prolongement par limite projective (resp. par limite inductive). On peut aussi dire que ${}^p\widetilde{\Phi}[\ ]$ (resp. ${}^i\widetilde{\Phi}[\ ]$) est la restriction à ${}^p\widetilde{\mathcal{C}}$ (resp. ${}^i\widetilde{\mathcal{C}}$) du foncteur $\widetilde{\widetilde{\Phi}}[\ ]$ défini sur $\widetilde{\widetilde{\mathcal{C}}}$ (cf. remarque 4).

Soient $\Phi[\ ]$ et $\Psi[\ ]$ deux foncteurs d'interpolation définis sur $\mathcal{C}(B)$; nous dirons que $\Psi[\ ]$ est un foncteur d'interpolation dual de $\Phi[\ ]$ si :

Pour tout objet (A_0, A_1) de $\mathcal{C}(B)$ tel que $A_0 \cap A_1$ soit dense dans A_0 et dans A_1, on a :

$$(\Phi[A_0, A_1])'_\tau = \Psi[A'_0, A'_1]$$

(le couple compatible (A'_0, A'_1) étant défini par l'injection continue de A'_0 et A'_1 dans $(A_0 \cap A_1)'$ et E'_τ désignant E' muni de la topologie de Mackey $\tau(E', E)$).

Nous démontrons le

THEOREME 3. – *Soient* $\Phi[\ ]$ *et* $\Psi[\ ]$ *deux foncteurs d'interpolation définis sur* $\mathcal{C}(B)$, $\Psi[\ ]$ *étant un foncteur d'interpolation dual de* $\Phi[\ ]$.

Pour tout objet (A_0, A_1) *de* ${}^p\widetilde{\mathcal{C}}$, *on a :*

1) (A'_0, A'_1) *est un objet de* ${}^i\widetilde{\mathcal{C}}$.

2) $({}^p\widetilde{\Phi}[A_0, A_1])'_\tau = {}^i\widetilde{\Psi}[A'_0, A'_1]$

(*c'est-à-dire aussi :* $(\widetilde{\widetilde{\Phi}}[A_0, A_1])'_\tau = \widetilde{\widetilde{\Psi}}[A'_0, A'_1])$.

Démonstration. – 1) Soit $(A_0, A_1) = \mathrm{Lim}\,(A_0^n, A_1^n)$ un objet de ${}^p\widetilde{\mathcal{C}}$;

A_i^n étant réflexif pour tout $n \geq 0$, A_i est réflexif (cf. [11]) ; $i = 0, 1$.

A_i est dense dans A_i^n pour tout $n \geqslant 0$, donc $A_i' = \varinjlim_{n \in \mathbf{N}} A_i^{n'}$ (l'égalité étant vraie à priori pour les topologies de Mackey $\tau(A_i', A_i)$ et $\tau(A_i^{n'}, A_i^n)$, donc aussi pour les topologies fortes d'après la réflexivité de A_i et des A_i^n) ; $i = 0, 1$. (cf. [13]).

$A_0 \cap A_1$ est dense dans A_0^n et A_1^n pour tout $n \geqslant 0$; donc tous les espaces $A_0^{n'}$ et $A_1^{n'}$ s'injectent continuement dans $(A_0 \cap A_1)'$; donc $(A_0', A_1') = \varinjlim_n (A_0^{n'}, A_1^{n'})$ est un objet de ${}^i\widetilde{\mathfrak{C}}$ (remarquons que la suite $A_i^{n'}$ peut être choisie croissante puisqu'on peut toujours supposer la suite A_i^n décroissante).

2) ${}^p\widetilde{\Phi}[A_0, A_1] = \varprojlim_n \Phi[A_0^n, A_1^n]$ et :

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A_0^n \cap A_1^n$ est dense dans $\Phi[A_0^n, A_1^n]$ puisque

$$\Phi[A_0^n, A_1^n]' = \Psi[A_0^{n'}, A_1^{n'}]$$

est un sous-espace de $(A_0^n \cap A_1^n)'$.

Donc $A_0 \cap A_1$, qui est dense dans $A_0^n \cap A_1^n$ (par définition d'une limite projective stricte), est dense dans $\Phi[A_0^n, A_1^n]$, et à fortiori, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \Phi[A_0^n, A_1^n]$ est dense dans $\Phi[A_0^n, A_1^n]$, pour tout $n \in \mathbf{N}$; donc (cf. [13])

$$\begin{aligned}({}^p\widetilde{\Phi}[A_0, A_1])_\tau' &= \varinjlim_n (\Phi[A_0^n, A_1^n])_\tau' \\ &= \varinjlim_n \Psi[A_0^{n'}, A_1^{n'}] \\ &= {}^i\widetilde{\Psi}[A_0', A_1'] .\end{aligned}$$

5. Foncteurs d'interpolation définis par une norme fonctionnelle.

Soit (A_0, A_1) un couple compatible d'espaces localement convexes séparés.

La topologie de A_0 est définie par la famille de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$, celle de A_1 par $(q_j)_{j \in J}$. Nous supposons les familles $(p_i)_{i \in I}$ et $(q_j)_{j \in J}$ *filtrantes.*

Soit $a \in A_0 + A_1$; $t \in]0, \infty[$; posons :

$$K_{ij}(t, a) = \inf_{\substack{a = a_0 + a_1 \\ a_0 \in A_0, a_1 \in A_1}} (p_i(a_0) + t q_j(a_1))$$

(cf. remarque 1.3).

Soit Φ une norme fonctionnelle ; posons :

$$r_{ij}(a) = \Phi(K_{ij}(t, a))$$

(finie ou infinie).

$$A = \Phi[A_0, A_1] = \{a \in A_0 + A_1 \; ; r_{ij}(a) < +\infty, \forall i \in I \text{ et } \forall j \in J\}$$

PROPOSITION 1. – *L'espace* A *est un espace localement convexe séparé, tel que :* $A_0 \cap A_1 \hookrightarrow A \hookrightarrow A_0 + A_1$.

En effet la famille $(r_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ définit une famille de semi-normes sur A ; la topologie correspondante est plus fine que celle de $A_0 + A_1$ et donc séparée, et moins fine que celle de $A_0 \cap A_1$.

PROPOSITION 2. – *Soit* Φ *une norme fonctionnelle. Il lui correspond un foncteur d'interpolation* $\Phi[\ ]$ *défini sur la catégorie des couples compatibles d'espaces localement convexes séparés par :*

$$(A_0, A_1) \text{ objet de } \mathcal{C}(elcs) \rightsquigarrow \Phi[A_0, A_1].$$

Démonstration. – Soient (A_0, A_1) et (B_0, B_1) deux objets de $\mathcal{C}(elcs)$, et $u \in \mathrm{Hom}((A_0, A_1), (B_0, B_1))$. Les topologies de A_0, A_1, B_0, B_1 sont supposées définies par des familles filtrantes de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$, $(q_j)_{j \in J}$, $(p'_k)_{k \in K}$, $(q_l)_{l \in L}$. (On peut toujours se ramener à ce cas).

Soit $a \in \Phi[A_0, A_1]$; $(k, l) \in K \times L$

$$ua \in B_0 + B_1$$

$$r'_{kl}(ua) = \Phi(K_{kl}(t, ua))$$

Or :
$$K_{kl}(t, ua) = \inf_{ua = b_0 + b_1} (p'_k(b_0) + t q'_l(b_1))$$

$$\leqslant \inf_{a = a_0 + a_1} (p'_k(ua_0) + t q'_l(ua_1))$$

Puisque u est continue de A_0 dans B_0 et de A_1 dans B_1 et que les familles (p_i) et (q_j) sont filtrantes, $\exists\, i(k) \in I$, $j(l) \in J$ et $M > 0$ tels que :

$$p'_k\,(ua_0) \leqslant M\, p_{i(k)}\,(a_0)$$

$$q'_l\,(ua_1) \leqslant M\, q_{j(l)}\,(a_1)$$

Donc : $$K_{kl}\,(t\,,ua) \leqslant M \inf_{a=a_0+a_1} (p_{i(k)}\,(a_0) + t q_{j(l)}\,(a_1))$$

$$K_{kl}\,(t\,,ua) \leqslant M\, K_{i(k)\,j(l)}\,(t\,,a)$$

$$r'_{kl}\,(ua) \quad \leqslant M\, r_{i(k)\,j(l)}\,(a)\,,$$

donc $$u \in \mathcal{L}(\Phi[A_0\,,A_1]\,,\Phi[B_0\,,B_1])\,.$$

Cela montre en particulier que $\Phi[A_0\,,A_1]$ *ne dépend que de la topologie de* A_0 *et* A_1 *et non des semi-normes choisies.*

PROPOSITION 3. – *Soit* Φ *une norme fonctionnelle. Lorsque* $(A_0\,,A_1)$ *est limite projective stricte d'une famille* $(A_0^i\,,A_1^j)_{i\in I\,,j\in J}$ *de couples compatibles d'espaces de Banach, on a :*

$$\Phi[A_0\,,A_1] = \widetilde{\Phi}[A_0\,,A_1] = \varprojlim_{i,j} \Phi[A_0^i\,,A_1^j]$$

Démonstration :

Soit $A^{ij} = \Phi[A_0^i\,,A_1^j]$; A^{ij} a pour norme : $\|a\|_{A^{ij}} = \Phi(K_{ij}(t\,,a))$; l'espace $\Phi[A_0\,,A_1]$ est limite projective des espaces A^{ij} ; remarquons que nous utilisons ici :

$$K_{ij}\,(t\,,a) = \inf_{\substack{a=a_0+a_1 \\ a_0\in A_0\,,a_1\in A_1}} (p_i\,(a_0) + t q_j\,(a_1))$$

$$= \inf_{\substack{a=\alpha_0+\alpha_1 \\ \alpha_0\in A_0^i\,,\alpha_1\in A_1^j}} (p_i(\alpha_0) + t q_j(\alpha_1))$$

ce qui résulte de : $A_0 \cap A_1$ dense dans $A_0^i \cap A_1^j$, $\forall (i\,,j) \in I \times J$ (cf. proposition 1.4).

Remarque 6. – On peut essayer d'obtenir un résultat analogue à celui de la proposition 3 pour des foncteurs d'interpolation construits par d'autres méthodes. Par exemple un foncteur d'interpolation $\Phi[\ ]$ construit par la "méthode holomorphe" (cf. [3] [10] [27]) peut être défini *directement* sur des couples compatibles d'espaces localement convexes séparés ; à partir de la restriction de $\Phi[\ ]$ à $\mathcal{C}(B)$, on peut aussi définir $\widetilde{\Phi}[\ ]$; on ne sait pas si $\Phi[\ ]$ et $\widetilde{\Phi}[\ ]$ coïncident sur les couples compatibles limites projectives strictes de couples compatibles d'espaces de Banach.

CHAPITRE 4

APPLICATIONS

Nous regroupons dans ce chapitre quelques applications de l'interpolation des espaces de Lebesgue avec poids (chapitre 2) et du prolongement par limite projective et limite inductive des foncteurs d'interpolation (chapitre 3).

1. Limites projectives d'espaces "L^p avec poids".

Nous utiliserons les lemmes suivants :

LEMME 2. – *Soient* : $1 \leqslant p < \infty$, μ *une mesure positive sur un espace localement compact* X, $(M_i)_{i\in I}$ *une famille de fonctions réelles* μ*-mesurables localement intégrables sur* X *et vérifiant :*

1) $M_i(x) > 0$ p.p. $\forall i \in I$.

2) *La famille* $(M_i)_{i\in I}$ *est filtrante croissante.*

Alors l'espace $\bigcap_{i\in I} L^p_{M_i}(X, \mu, E)$ *muni de la topologie limite projective stricte de la famille* $(L^p_{M_i}(X, \mu, E))_{i\in I}$.

On note : $\mathcal{L}_p(M_i) = \varprojlim_{i\in I} L^p_{M_i}(X, \mu, E)$.

Démonstration. – La famille $(M_i)_{i\in I}$ étant filtrante croissante (c'est-à-dire : $\forall i, \forall j \in I$, $\exists k \in I$ tel que $M_k(x) \geqslant \max_{i,j} (M_i(x), M_j(x))$ p.p.), la famille $(L^p_{M_i})_{i\in I}$ est filtrante décroissante. Et $\bigcap_{i\in I} L^p_{M_i}$ est dense dans L_{M_i} pour tout $i \in I$, puisque les fonctions continues à support compact le sont (les fonctions M_i étant localement intégrables).

LEMME 2. – *Soient* $(M_i)_{i\in I}$ *et* $(N_j)_{j\in J}$ *satisfaisant les hypothèses du lemme 1. Supposons de plus* M_i *et* N_j *localement bornées,* $\forall i \in I$. $\forall j \in J$.

Alors le couple compatible $(\mathcal{L}_p(\mathrm{M}_i)\ ,\ \mathcal{L}_q(\mathrm{N}_j))$ *est limite projective stricte des couples compatibles d'espaces de Banach* $(\mathrm{L}^p_{\mathrm{M}_i}\ ,\ \mathrm{L}^q_{\mathrm{N}_j})$, *pour* $1 \leqslant p\ ,\ q < \infty$.

On note : $$(\mathcal{L}_p(\mathrm{M}_i)\ ,\ \mathcal{L}_q(\mathrm{N}_j)) = \varprojlim_{i,j} (\mathrm{L}^p_{\mathrm{M}_i}\ ,\ \mathrm{L}^q_{\mathrm{N}_j})\ .$$

Démonstration. – Tous les espaces $\mathrm{L}^p_{\mathrm{M}_i}$ et $\mathrm{L}^q_{\mathrm{N}_j}$ sont des sous-espaces de $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}} + \mathrm{L}^q_{\mathrm{loc}}$, et les fonctions continues à support compact (donc à fortiori $\mathcal{L}_p(\mathrm{M}_i) \cap \mathcal{L}_q(\mathrm{N}_j)$) sont denses dans $\mathrm{L}^p_{\mathrm{M}_i} \cap \mathrm{L}^q_{\mathrm{N}_j}$ pour $\forall\, i \in \mathrm{I}$ et $\forall\, j \in \mathrm{J}$ ($\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}$ est l'espace des classes de fonctions μ-mesurables, de puissance p-ième localement intégrable).

2. Isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{B})$.

Certains espaces usuels apparaissent comme limites projectives d'espaces de Sobolev avec poids. Il est possible d'expliciter les espaces d'interpolation entre de tels espaces de Sobolev sur $\mathbf{R}^n$ avec des poids convenables, correspondant aux foncteurs d'interpolation $\Phi_{\gamma,p}[\ ]$ (on peut en utilisant une paramétrix du laplacien, se ramener à des espaces de Lebesgue avec poids). Nous éviterons la plupart des difficultés techniques et obtiendrons des résultats plus généraux en utilisant des espaces différents des espaces de Sobolev par les ensembles de dérivées partielles considérés, qui conduisent aux mêmes limites projectives et sont plus simples du point de vue de l'interpolation :

Soients : A un espace de Banach.

M une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}^n$ et vérifiant l'hypothèse :

$$(\mathrm{H}) \begin{cases} \mathrm{M} \text{ est mesurable}, > 0 \text{ p.p. et :} \\ \forall\, i \in \{1\ , \dots , n\}\ ,\ \exists\, \alpha_i \text{ et } \mathrm{L}_i \text{ constantes} > 0 \text{ telles que :} \\ \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\alpha_i t}\, \mathrm{M}(x_1\ , \dots , x_i + t, \dots , x_n)\, dt \leqslant \mathrm{L}_i \mathrm{M}(x_1\ , \dots , x_n)\ p.p. \end{cases}$$

$$1 \leqslant p \leqslant +\infty \quad ; \quad q \in \mathbf{N}\ .$$

$$\mathrm{H}^{p,q}_{\mathrm{M}} = \mathrm{H}^{p,q}_{\mathrm{M}}(\mathrm{A}) = \{f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{M}}(\mathbf{R}^n\ , 1\ , \mathrm{A})\ ;\ \mathrm{D}^{(m)} f \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{M}}\ , \forall\, m = (m_1\ , \dots , m_n)$$
$$\text{tel que} \max_{i=1,\dots,n} m_i \leqslant q\}$$

On a alors le

LEMME 3. – a) *L'opérateur* $T : f \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha\right)^q \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} + \alpha\right)^q f$ *est continu de*

$$H_M^{p,q} \quad \textit{dans} \quad L_M^p\,, \textit{pour tout} \quad \alpha \in C\,.$$

b) *L'opérateur* $U : f \longrightarrow f * Y(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-\alpha(x_1 + \ldots + x_n)} \dfrac{(x_1 \ldots x_n)^{q-1}}{((q-1)!)^n}$ *est continu de*

$$L_M^p \quad \textit{dans} \quad H_M^{p,q} \quad \textit{pour} \quad \alpha > \max_{i=1,\ldots,n} \alpha_i$$

c) $$T \circ U = \textit{Identité de} \quad L_M^p$$
$$U \circ T = \textit{Identité de} \quad H_M^{p,q}\,.$$

Démonstration :

Le a) est évident.

Pour démontrer le b) il suffit de montrer que :

$$f \longrightarrow f * Y(x_1, \ldots, x_r)\, e^{-\alpha(x_1 + \ldots + x_r)}\, x_1^{\beta_1} \ldots x_r^{\beta_r} \otimes \delta_{x_{r+1}} \cdots \otimes \delta_{x_n}$$

est continu de L_M^p dans L_M^p pour $0 \leqslant r \leqslant n$ et $0 \leqslant \beta_1, \ldots, \beta_r \leqslant q$.

Donc il suffit de montrer que : $f \longrightarrow f * U_i$ est continu de L_M^p dans L_M^p pour $i = 1, 2, \ldots, n$, avec

$$U_i = Y(x_i)\, e^{-\alpha x_i} \bigotimes_{j \neq i} \delta_{x_j}$$

(et de réitérer) ; or, par exemple :

$$f * U_1 = \int_0^\infty f(x_1 - t, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-\alpha t}\, dt.$$

$$|f * U_1|^p \leqslant \int_0^\infty |f(x_1 - t, x_2, \ldots, x_n)|^p\, e^{-kpt}\, dt \,.\left(\int_0^\infty e^{-\varepsilon p' t}\right)^{\frac{p}{p'}}$$

avec $$k + \varepsilon = \alpha \quad ; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,;$$

donc :

$$\|f * U_1\|^p_{L^p_M} \leqslant K \cdot \int_{\mathbf{R}^n} M(x_1, \ldots, x_n) \cdot \int_0^\infty |f(x_1 - t, x_2, \ldots, x_n)|^p e^{-kpt}\, dt \,.\, dx$$

$$\leqslant K \cdot \int_{\mathbf{R}^n} |f(y_1, y_2, \ldots, y_n)|^p \cdot \left(\int_0^\infty M(y_1 + t, y_2, \ldots, y_n)\, e^{-kpt}\, dt\right) dy$$

Et on peut choisir $k > \alpha_1$ et utiliser l'hypothèse (H).

Le c) est immédiat.

Soient : M_0, M_1 vérifiant l'hypothèse (H) ; $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant +\infty$; $q \in \mathbf{N}$. Nous pouvons définir le couple compatible d'espaces banachisables $(L^{p_0}_{M_0}, L^{p_1}_{M_1})$ par les injections continues de $L^{p_0}_{M_0}$ et $L^{p_1}_{M_1}$ dans $\mathcal{E} = L^{p_0}_M + L^{p_1}_M$ avec $M(x) = \inf(M_0(x), M_1(x))$; de même $(H^{p_0,q}_{M_0}, H^{p_1,q}_{M_1})$ est défini par les injections continues de $H^{p_0,q}_{M_0}$ et $H^{p_1,q}_{M_1}$ dans $\mathcal{E}$.

Du lemme 3 on déduit immédiatement un morphisme T de $(H^{p_0,q}_{M_0}, H^{p_1,q}_{M_1})$ dans $(L^{p_0}_{M_0}, L^{p_1}_{M_1})$, (dont la restriction à $H^{p_i,q}_{M_i}$ est l'opérateur T défini au lemme 3, $i = 0, 1$), et un morphisme U de $(L^{p_0}_{M_0}, L^{p_1}_{M_1})$ dans $(H^{p_0,q}_{M_0}, H^{p_1,q}_{M_1})$, (dont la restriction à $L^{p_i}_{M_i}$ est l'opérateur U défini au lemme 3, $i = 0, 1$).

On a de plus : $T \circ U = \text{Identité } (L^{p_0}_{M_0}, L^{p_1}_{M_1})$

$U \circ T = \text{Identité } (H^{p_0,q}_{M_0}, H^{p_1,q}_{M_1})$

Il en résulte en particulier, que pour tout foncteur d'interpolation $\Phi[\ ]$ défini sur $\mathcal{C}(\mathcal{B})$, $\Phi[T]$ est un isomorphisme de $\Phi[H^{p_0,q}_{M_0}, H^{p_1,q}_{M_1}]$ sur $\Phi[L^{p_0}_{M_0}, L^{p_1}_{M_1}]$.

Remarque 1. – De façon générale, soient : E un espace de Banach ; $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ des opérateurs non bornés dans E, commutatifs, vérifiant : $\Lambda_i + \alpha$ est inversible pour $\alpha > \alpha_i$; $i = 1, \ldots, n$.

Alors l'opérateur non borné ${}^{qa}\Lambda$ défini par :

$$\begin{cases} {}^{qa}\Lambda = (\Lambda_1 + \alpha)^q \circ \ldots \circ (\Lambda_n + \alpha)^q \\ \mathcal{D}({}^{qa}\Lambda) = \mathcal{D}(\Lambda_1^q \ldots \Lambda_n^q) \end{cases}$$

est aussi inversible pour $\forall \alpha \geqslant \max\limits_{i=1,\ldots,n} \alpha_i$, et ${}^{qa}\Lambda$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}({}^{qa}\Lambda)$ sur E.

Dans le lemme 3, on avait $E = L^p_M(\mathbf{R}^n, 1, A)$, $\Lambda_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$; (on peut vérifier que, contrairement au cas $M = 1$, même lorsque M vérifie (H), Λ_i n'est pas, dans le cas général, générateur infinitésimal d'un semi groupe d'opérateurs dans E.

3. Interpolation des espaces $\mathcal{S}^\Gamma$.

DEFINITION 1. – $\forall \xi \in \mathbf{C}^n$, *on pose* $\mathcal{S}^\xi = \{u \,;\, e^{\xi x} u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)\}$ *et on munit cet espace de la topologie déduite de celle de* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$; (cf. [25]).

Soit Γ *un ensemble convexe dans* $\mathbf{C}^n$; *on pose*

$$\mathcal{S}^\Gamma = \{u \,;\, e^{\xi x} u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \quad \textit{pour tout } \xi \in \Gamma\}$$

et on le munit de la topologie limite projective, pour $\xi \in \Gamma$, *des topologies des espaces* $\mathcal{S}^\xi$.

Ces espaces interviennent dans la transformation de Laplace. *Nous nous proposons d'obtenir des théorèmes d'interpolation entre les espaces* $\mathcal{S}^\Gamma$.

Γ étant un convexe de $\mathbf{C}^n$, on peut trouver une famille $(K_i)_{i \in I}$ de compacts contenus dans Γ, dont la réunion est Γ et qui soit filtrante pour la relation $\supset$; la limite projective étant associative, on a donc :

$$\mathcal{S}^\Gamma = \varprojlim_{i \in I} . \varprojlim_{\xi \in K_i} \mathcal{S}^\xi = \varprojlim_{i \in I} \mathcal{S}^{K_i}$$

LEMME 4. – *Soit* $1 \leqslant p < \infty$.

$$\mathcal{S}^{\xi} = \varprojlim_{q,m\in\mathrm{N}} \mathrm{H}^{p,q}_{(1+|x|^2)^{\frac{mp}{2}}\,|e^{\xi p x}|}$$

En effet, les deux membres sont des espaces de Fréchet ; $\mathcal{S}^{\Gamma}$ est contenu topologiquement dans chaque espace $\mathrm{H}^{p,q}_{(1+|x|^2)^{\frac{mp}{2}}\,|e^{p\xi x}|}$, donc dans la limite projective ; et :

Soit $f \in \varprojlim_{q,m\in\mathrm{N}} \mathrm{H}^{p,q}_{(1+|x|^2)^{\frac{mp}{2}}\,|e^{p\xi x}|}$; f est donc indéfiniment différentiable et :

$$\forall (q) \in \mathrm{N}^n,\ \forall m \in \mathrm{N},\ \mathrm{D}^{(q)} f.(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}\,|e^{\xi x}| \in \mathrm{L}^p$$

donc : $\forall (q) \in \mathrm{N}^n,\ \forall m \in \mathrm{N},\quad \mathrm{D}^{(q)} f.(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}}.|e^{\xi x}| \in \mathrm{L}^\infty$

donc : $\forall (q) \in \mathrm{N}^n,\ \forall m \in \mathrm{N},\quad \mathrm{D}^{(q)}(e^{\xi x} f)(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}} \in \mathrm{L}^\infty$

c'est-à-dire : $\qquad e^{\xi x} f \in \mathcal{S}$, donc $f \in \mathcal{S}^{\xi}$.

LEMME 5. – $\forall \mathrm{K}_i$, *compact contenu dans* Γ, *on pose*

$$\mathrm{M}_i^m = (1+|x|^2)^{\frac{mp}{2}} \sup_{\xi\in\mathrm{K}_i} |e^{p\xi x}|\ ;$$

alors :
$$\mathcal{S}^{\Gamma} = \varprojlim_{i\in\mathrm{I};\, m,q\in\mathrm{N}} \mathrm{H}^{p,q}_{\mathrm{M}_i^m}$$

en effet : $\mathcal{S}^{\mathrm{K}_i} = \varprojlim_{\xi\in\mathrm{K}_i} \mathcal{S}^{\xi} = \varprojlim_{\xi\in\mathrm{K}_i} \varprojlim_{q\in\mathrm{N},\, m\in\mathrm{N}} \mathrm{H}^{p,q}_{(1+|x|^2)^{\frac{mp}{2}}|e^{p\xi x}|}$

$$= \varprojlim_{q\in\mathrm{N},\, m\in\mathrm{N}} \Big[\varprojlim_{\xi\in\mathrm{K}_i} \mathrm{H}^{p,q}_{(1+|x|^2)^{\frac{mp}{2}}\,|e^{p\xi x}|}\Big]$$

et le terme entre crochets est l'espace de Banach $\mathrm{H}^{p,q}_{\mathrm{M}_i^m}$; on en déduit le lemme en prenant encore la limite projective suivant $i \in \mathrm{I}$.

On a plus précisément :

LEMME 6. – *Soit* $1 \leqslant p < \infty$

$$\mathcal{S}^{\Gamma} = \varprojlim_{i \in I, q \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}} H^{p,q}_{M_i^m}$$

Il reste à vérifier que $\mathcal{S}^{\Gamma}$ est dense dans $H^{p,q}_{M_i^m}$. (Or, pour $p < \infty$, $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, donc à fortiori $\mathcal{S}^{\Gamma}$ est dense dans $H^{p,q}_{M_i^m}$, $\forall q \geqslant 0$, $\forall m \geqslant 0$, $\forall i \in I$) et que la famille $(H^{p,q}_{M_i^m})_{i \in I, m \geqslant 0, q \geqslant 0}$ est filtrante décroissante ; cela vient de ce que la famille est décroissante par rapport à q et m et que $(K_i)_{i \in I}$ est une famille filtrante croissante de compacts.

On en déduit la

PROPOSITION 1. – *Soient :* Γ_0 *et* Γ_1 *deux ensembles convexes de* $\mathbf{C}^n$, *recouverts respectivement par les familles filtrantes de compacts* $(K_i^0)_{i \in I}$ et $(K_j^1)_{j \in J}$; $1 \leqslant p < \infty$.

Soient, $\forall m \in \mathbf{N}$:

$$M_i^m = (1 + |x|^2)^{\frac{mp}{2}} \sup_{\xi \in K_i^1} |e^{p\xi x}|$$

$$N_j^m = (1 + |x|^2)^{\frac{mp}{2}} \sup_{\xi \in K_j^1} |e^{p\xi x}|$$

Alors :

$$(\mathcal{S}^{\Gamma_0}, \mathcal{S}^{\Gamma_1}) = \varprojlim_{q \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}, i \in I, j \in J} (H^{p,q}_{M_i^m}, H^{p,q}_{N_i^m})$$

Les vérifications sont immédiates. – Tous les espaces $H^{p,q}_{M_i^m}$ et $H^{p,q}_{N_j^m}$ sont des sous-espaces de L^p_{loc}.

$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, donc à fortiori $\mathcal{S}^{\Gamma_0} \cap \mathcal{S}^{\Gamma_1}$, est dense dans $H^{p,q}_{M_i^m} \cap H^{p,q}_{N_j^m}$ pour tout $q \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $i \in I$, $j \in J$.

On aura besoin du

LEMME 7. – *Soit* $1 \leqslant p < \infty$. K *étant un compact de* $\mathbf{C}^n$, *la fonction* $M(x) = (1 + |x|^2)^{\beta} \sup_{\xi \in K} |e^{p\xi x}|$ *vérifie l'hypothèse* (H), pour $\beta \geqslant 0$.

Il suffit de montrer qu'il existe deux constantes α et $L > 0$ telles que :

$$\int_0^\infty e^{-at}\, M(x_1 + t, x_2, \ldots, x_n)\, dt \leqslant L \,.\, M(x_1, \ldots, x_n), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

On a : $$\int_0^\infty e^{-at}\, M(x_1 + t, x_2, \ldots, x_n)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-at}\, (1 + (x_1 + t)^2 + \ldots + x_n^2) \,.\, \sup_{\xi \in K} |e^{p\xi_1 t} . e^{p\xi x}| \,.\, dt.$$

$$= M(x_1, \ldots, x_n) \,.\, \int_0^\infty e^{-at} \sup_{\xi \in K} |e^{p\xi_1 t}| \,.\, \left(\frac{1 + (x_1 + t)^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right)^\beta dt$$

Prenons $\alpha = 1 + \sup\limits_{\xi \in K} \mathrm{Re}\,(p\xi_1) < +\infty$ puisque K est compact, et on a alors :

$$\int_0^\infty e^{-at}\, M(x_1 + t, x_2, \ldots, x_n)\, dt \leqslant L\, M(x_1, \ldots, x_n)$$

avec : $$L = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \,.\, \int_0^\infty e^{-t} \left(1 + \frac{t^2 + 2tx_1}{1 + |x|^2}\right)^\beta dt < +\infty \,.\ \text{cqfd}$$

Soit $0 < \theta < 1$. Soit $\Phi_\theta[\ ] = \Phi_{\gamma,p}[\ ]$ le foncteur d'interpolation défini sur la catégorie $\mathcal{C}(B)$ (ou $\mathcal{C}(\mathcal{B})$) par $\gamma = p\,\theta(1 - \theta)\, t^{\theta p - p - 1} \,.\, \nu$ où ν est la mesure de Lebesgue sur $]0, \infty[$. (voir chapitre 2).

On a le :

THEOREME 1. — *Soient : Γ_0 et Γ_1 deux ensembles convexes de $\mathbf{C}^n$; $0 < \theta < 1$.*

soit $$\Gamma = \{\xi = (1 - \theta)\,\xi_0 + \theta\xi_1 \ ;\ \xi_0 \in \Gamma_0 \ ;\ \xi_1 \in \Gamma_1\} \ ;$$

alors : $$\widetilde{\Phi}_\theta\, [\mathcal{S}^{\Gamma_0}, \mathcal{S}^{\Gamma_1}] = \mathcal{S}^\Gamma$$

($\widetilde{\Phi}_\theta[\ ]$ *désigne le prolongement par limite projective stricte de* $\Phi_\theta[\ ]$).

Démonstration. – D'après le chapitre 2 (exemple 1) on a :

$$\Phi_\theta\,[L^p_{M_i^m}, L^p_{N_j^m}] = L^p_{R_{ij}^m}$$

avec :

$$R_{ij}^m = (M_i^m)^{1-\theta}\,(N_j^m)^\theta = (1+|x|^2)^{\frac{mp}{2}} \sup_{\substack{\xi_0\in K_i^0\\ \xi_1\in K_i^1}} |e^{p(\theta\xi_1+(1-\theta)\,\xi_0)\,x}|$$

Posons $\quad K_{ij} = \{\xi = (1-\theta)\,\xi_0 + \theta\xi_1 \ ;\ \xi_0 \in K_i^0 \ ;\ \xi_1 \in K_j^1\}$

$$R_{ij}^m = (1+|x|^2)^{\frac{mp}{2}} \sup_{\xi\in K_{ij}} |e^{p\xi x}| \ ;$$

et R vérifie aussi la propriété (H) ; on a donc :

$$\Phi_\theta\,[H^{p,q}_{M_i^m}, H^{p,q}_{N_j^m}] = H^{p,q}_{R_{ij}^m} \ .$$

Et la proposition résulte alors du théorème 1 du chapitre 3.

Remarque 2. – En appliquant un foncteur d'interpolation $\Phi_{\gamma,p}[\ ]$ (cf. chapitre 2) on trouve de façon générale :

$$\Phi_{\gamma,p}\,[L^p_{M_i^m}, L^p_{N_j^m}] = L^p_{R_{ij}^m}$$

avec :

$$R_{ij}^m = (1+|x|^2)^{\frac{mp}{2}} \int_0^\infty \min\Big(\sup_{\xi\in K_i^0} |e^{p\xi x}|\,,\ t \sup_{\xi\in K_j^1} |e^{p\xi x}|\Big) d\gamma$$

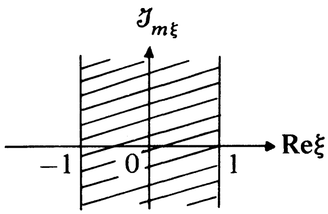
On peut encore montrer que R_{ij}^m vérifie l'hypothèse (H), donc :

$$\Phi_{\gamma,p}\,[H^{p,q}_{M_i^m}, H^{p,q}_{N_j^m}] = H^{p,q}_{R_{ij}^m}$$

Et par passage à la limite projective, on peut obtenir des espaces autres que $\mathcal{S}^\Gamma$ pour Γ intermédiaire entre Γ_0 et Γ_1.

Prenons un exemple très simple :

$$n = 1 \quad ; \quad \Gamma_0 = \{0\} \quad ; \quad \Gamma_1 = [-1, +1] \ ;$$



on peut choisir $p = 1$.

Γ_0 et Γ_1 sont compacts, donc :

$$\sup_{\xi \in K_i^0} |e^{p\xi x}| = 1$$

$$\sup_{\xi \in K_j^1} |e^{p\xi x}| = e^{|x|}$$

$$R_{ij}^m = (1 + |x|^2)^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty \min(1, te^{|x|})\, d\gamma$$

On peut trouver γ telle que $R_{ij}^m = (1 + |x|^2)^{\frac{m}{2}} e^{|x|^s}$, $0 < s < 1$, (cf. chapitre 2) et alors $\varprojlim_{i,j,m,q} H^{p,q}_{R_{ij}^m}$ n'est pas un espace $\mathcal{S}^\Gamma$.

En effet : Soit $H = \varprojlim_{i,j,m,q} H^{p,q}_{R_{ij}^m}$; soit φ une fonction indéfiniment différentiable sur $\mathbf{R}$ telle que :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x \geqslant 2 \\ 0 & \text{pour} \quad x \leqslant 1 \end{cases}$$

On ne peut avoir $H = \mathcal{S}^\Gamma$ avec $\Gamma = \{0\}$ car la fonction

$$x \longrightarrow \varphi(x)\, e^{-|x|^{\frac{s}{2}}}$$

appartient à $\mathcal{S}$ et n'appartient pas à H.

On ne peut avoir non plus $H = \mathcal{S}^\Gamma$ avec $\xi \in \Gamma$, Re $\xi > 0$ car la fonction $x \longrightarrow \varphi(x)\, e^{-2|x|^s}$ appartient à H et n'appartient pas à $\mathcal{S}^\xi$, donc n'appartient pas à $\mathcal{S}^\Gamma$. (de même si Re $\xi < 0$ en remplaçant $\varphi(x)$ par $\varphi(-x)$).

Remarque 3 :

Nous supposons Γ ouvert ; dans la définition de $\mathcal{S}^\Gamma = \varprojlim_{i,m,q} H^{p,q}_{M_i^m}$ (cf. lemme 6), on peut remplacer $(H^{p,q}_{M_i^m})_{i \in I, q \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}}$ par une suite extraite décroissante (il suffit de voir que l'on peut supposer la famille $(K_i)_{i \in I}$ dénombrable). On peut prendre $1 < p < \infty$; les espaces $H^{p,q}_{M_i^m}$ sont des espaces de Banach réflexifs ($H^{p,q}_{M_i^m}$ est isomorphe à $L^p_{M_i^m}$).

Notons $\mathcal{S}'^{\Gamma}$ le dual (fort) de $\mathcal{S}^{\Gamma}$. En utilisant les résultats du chapitre 3 (théorème 3.3) et un résultat de [20] sur la dualité, on obtient la

PROPOSITION 2. – (avec les notations du théorème 1), Γ_0 *et* Γ_1 *étant supposés ouverts, on a :*

1) $(\mathcal{S}^{\Gamma_0}, \mathcal{S}^{\Gamma_1})$ *est un objet de* ${}^{p}\widetilde{\mathcal{C}}$.

2) $\widetilde{\widetilde{\Phi}}_\theta [\mathcal{S}'^{\Gamma_0}, \mathcal{S}'^{\Gamma_1}] = (\widetilde{\widetilde{\Phi}}_\theta [\mathcal{S}^{\Gamma_0}, \mathcal{S}^{\Gamma_1}])' = \mathcal{S}'^{\Gamma}$.

Il suffit de remarquer que sur $\mathcal{S}'^{\Gamma}$ la topologie forte coïncide avec la topologie $\tau = \tau((\mathcal{S}^{\Gamma})', \mathcal{S}^{\Gamma})$.

4. Interpolation des espaces de fonctions holomorphes.

Soit E un espace de Banach. Notons $\mathcal{H}_R(E)$ l'espace des fonctions holomorphes dans le disque $|z| < R$ à valeurs dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Soit p fixé dans $[1, \infty[$; on peut définir la topologie de $\mathcal{H}_R(E)$ par les normes :

$$0 < r < R$$

$$\|a\|_r = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_E^p \, r^{np}\Big)^{\frac{1}{p}} \quad ; \quad \forall a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{H}_R(E).$$

Soient : (E_0, E_1) un couple compatible d'espaces de Banach ; $0 < R_0 \leqslant R_1 < \infty$; $(\mathcal{H}_{R_0}(E_0), \mathcal{H}_{R_1}(E_1))$ est un couple compatible (par l'injection de $\mathcal{H}_{R_0}(E_0)$ et $\mathcal{H}_{R_1}(E_1)$ dans $\mathcal{H}_{R_0}(E_0 + E_1)$) et on montre que $(\mathcal{H}_{R_0}(E_0), \mathcal{H}_{R_1}(E_1))$ est isomorphe, dans $\mathcal{C}(\mathcal{F})$, à

$$\varprojlim_{t<1} (l^p_{tR_0}(E_0), l^p_{tR_1}(E_1)), \quad \text{où} \quad l^p_a(E) \quad \text{désigne}$$

$$\Big\{a = (a_n) \in E^{\mathbf{N}} \quad ; \quad \|a\|_{l^p_a} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_E^p \, \alpha^{np}\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\Big\}$$

Soit $\Phi_\theta[\ ]$ le foncteur d'interpolation du théorème 1. On sait (cf. [10]) que $\Phi_\theta[l^p_{t\mathrm{R}_0}(\mathrm{E}_0), l^p_{t\mathrm{R}_1}(\mathrm{E}_1)] = l^p_{t\mathrm{R}}(\mathrm{E})$ avec $\mathrm{E} = \Phi_\theta[\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1]$ et $\mathrm{R} = \mathrm{R}_0^{1-\theta}\,\mathrm{R}_1^\theta$.

Par application du théorème 3.1, on trouve le

THEOREME 2. – *Soient* : $(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1)$ *un couple compatible d'espaces de Banach* ; $0 < \theta < 1$; $0 < \mathrm{R}_0 \leqslant \mathrm{R}_1 < \infty$ *on a :*

$$\widetilde{\Phi}_\theta[\mathcal{H}_{\mathrm{R}_0}(\mathrm{E}_0), \mathcal{H}_{\mathrm{R}_1}(\mathrm{E}_1)] = \mathcal{H}_{\mathrm{R}}(\mathrm{E})\,;$$

avec : $\qquad \mathrm{E} = \Phi_\theta[\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1] \quad ; \quad \mathrm{R} = \mathrm{R}_0^{1-\theta}\,\mathrm{R}_1^\theta$.

$\widetilde{\Phi}_\theta[\ ]$ est le même foncteur d'interpolation qu'au théorème 1. On retrouve en particulier que $\mathcal{H}_{\mathrm{R}}(\mathbf{C})$ est un espace d'interpolation entre $\mathcal{H}_{\mathrm{R}_0}(\mathbf{C})$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{R}_1}(\mathbf{C})$ pour $\mathrm{R}_0 \leqslant \mathrm{R} \leqslant \mathrm{R}_1$.

Du théorème 2 et de la remarque 3.4, on déduit le résultat suivant :

THEOREME 3. – *Soient* : $\mathcal{H}_{\mathrm{K}_i}(\mathrm{E}_i)$ *l'espace des fonctions holomorphes dans le disque* $\mathrm{K}_i = \{z \in \mathbf{C}\ ;\ |z| \leqslant \mathrm{R}_i\}$ *à valeurs dans l'espace de Banach* E_i ; $i = 0, 1$; $0 < \theta < 1$.

On a :

1) $\widetilde{\widetilde{\Phi}}_\theta[\mathcal{H}_{\mathrm{K}_0}(\mathrm{E}_0), \mathcal{H}_{\mathrm{K}_1}(\mathrm{E}_1)] = \mathcal{H}_{\mathrm{K}_\theta}(\mathrm{E})$

avec $\qquad \mathrm{K}_\theta = \{z \in \mathbf{C} \quad ; \quad |z| \leqslant \mathrm{R} = \mathrm{R}_0^{1-\theta}\,\mathrm{R}_1^\theta\}$

$$\mathrm{E} = \Phi_\theta[\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1]$$

2) $\widetilde{\widetilde{\Phi}}_\theta[\mathcal{H}_{\mathrm{R}_0}(\mathrm{E}_0), \mathcal{H}_{\mathrm{K}_1}(\mathrm{E}_1)] = \mathcal{H}_{\mathrm{K}_\theta}(\mathrm{E})$

Démonstration :

1) Il suffit de remarquer que $(\mathcal{H}_{\mathrm{K}_0}(\mathrm{E}_0), \mathcal{H}_{\mathrm{K}_1}(\mathrm{E}_1))$ est un objet de la catégorie $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{C}}}$, et que

$$(\mathcal{H}_{\mathrm{K}_0}(\mathrm{E}_0), \mathcal{H}_{\mathrm{K}_1}(\mathrm{E}_1)) = \varinjlim_{n\in\mathrm{N}} (\mathcal{H}_{\mathrm{R}_0\rho_n}(\mathrm{E}_0), \mathcal{H}_{\mathrm{R}_1\rho_n}(\mathrm{E}_1)),$$

ρ_n étant une suite décroissante tendant vers 1 quand $n \longrightarrow \infty$.

2) De même :

$$(\mathcal{H}_{R_0}(E_0), \mathcal{H}_{K_1}(E_1)) = \varinjlim_{n \in \mathbf{N}} (\mathcal{H}_{R_0}(E_0), \mathcal{H}_{R_1 \rho_n}(E_1)).$$

CHAPITRE 5

INTERPOLATION DES ESPACES $\mathcal{D}_L^p$

1. Introduction.

Nous utilisons essentiellement dans ce chapitre des foncteurs d'interpolation construits par la méthode des moyennes (cf. [20]) ; ces foncteurs peuvent être construits par la méthode des normes fonctionnelles (cf. chapitre 1 et introduction), mais nous pouvons ainsi abréger les démonstrations en nous référant aux résultats de [20].

Rappelons brièvement :

Soit (A_0, A_1) un couple compatible d'espaces de Banach. Soient : $0 < \theta < 1$; $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$; on pose :

$$W(p_0, p_1, \theta, A_0, A_1)$$

$$= \{(u_n)_{n \in Z} \; ; (e^{(1-\theta)n} u_n) \in l^{p_0}(A_0) \; ; (e^{-\theta n} u_n) \in l^{p_1}(A_1)\}$$

C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|(u_n)\|_W = \|(e^{(1-\theta)n} u_n)\|_{l^{p_0}(A_0)} + \|(e^{-\theta n} u_n)\|_{l^{p_1}(A_1)}$$

Soit :

$$S(p_0, p_1, \theta, A_0, A_1) = \left\{a = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n \text{ (dans } A_0 + A_1) \; ; (u_n) \in W\right\}$$

C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|a\|_S = \inf_{a = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n} \|(u_n)\|_W .$$

Enfin, $(A_0, A_1) \rightsquigarrow S(p_0, p_1, \theta, A_0, A_1)$ est un foncteur d'interpolation défini sur la catégorie $\mathcal{C}(B)$ des couples compatibles d'espaces de Banach, que l'on notera : $S(p_0, p_1, \theta, \quad , \quad)$.

On notera aussi $S(p_0\ ,p_1\ ,\theta\ ,\quad ,\quad)$, le foncteur d'interpolation correspondant défini sur la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ des couples compatibles d'espaces banachisables.

2. Interpolation des espaces $L^{p_i}(A_i)$.

Soient : $A_0\ , A_1$ des espaces de Banach ; $1 \leqslant p_0\ ,\ p_1 \leqslant \infty$; $0 < \theta < 1$.

Lorsque $(A_0\ , A_1)$ est un couple compatible d'espaces de Banach, il en est de même du couple $(L^{p_0}(A_0)\ , L^{p_1}(A_1))$ et d'après [20], on a le résultat :

$$S(p_0\ ,p_1\ ,\theta\ , L^{p_0}(A_0)\ , L^{p_1}(A_1)) = L^p(S(p_0\ ,p_1\ ,\theta\ , A_0\ , A_1))$$

avec équivalence des normes ; $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$

($L^p(A)$ désigne $L_1^p(X\ ,\mu\ , A)$ selon les définitions et notations du chapitre 2).

Dans le cas $1 \leqslant p_0 < p_1 = \infty$, nous pouvons préciser ce résultat.

Soient : $L_0^\infty(A_1)$ = adhérence dans $L^\infty(A_1)$ du sous-espace des fonctions à support compact.

$C_0(A_1)$ = adhérence dans $L^\infty(A_1)$ du sous-espace des fonctions continues à support compact.

1) D'après la construction même des espaces de moyennes, on a :

$$S(p_0,\infty,\theta,L^{p_0}(A_0),C_0(A_1)) \hookrightarrow S(p_0,\infty,\theta,L^{p_0}(A_0),L_0^\infty(A_1))$$
$$\hookrightarrow S(p_0,\infty,\theta,L^{p_0}(A_0),L^\infty(A_1))$$

les inclusions étant de norme $\leqslant 1$.

2) Nous noterons :

$$S = S(p_0\ ,\infty\ ,\theta\ , L^{p_0}(A_0)\ , L^\infty(A_1))$$

$$S_0 = S(p_0\ ,\infty\ ,\theta\ , L^{p_0}(A_0)\ , L_0^\infty(A_1))$$

$$\mathfrak{S} = S(p_0\ ,\infty\ ,\theta\ , L^{p_0}(A_0)\ , C_0(A_1))$$

$$\begin{aligned}
W &= W(p_0\,,\infty\,,\theta\,,L^{p_0}(A_0)\,,L^{\infty}(A_1))\\
W_0 &= W(p_0\,,\infty\,,\theta\,,L^{p_0}(A_0)\,,L^{\infty}_0(A_1))\\
\mathcal{W} &= W(p_0\,,\infty\,,\theta\,,L^{p_0}(A_0)\,,C_0(A_1))\\
A &= S(p_0\,,\infty\,,\theta\,,A_0\,,A_1)
\end{aligned}$$

Soit $a \in L^p(A)$ et à support compact. Soit $\varepsilon > 0$; $\exists (u_n(x))_{n\in Z} \in W$ telle que :

$$a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x)$$

$$\|a\|_S (1+\varepsilon) \geqslant \|(u_n)\|_W$$

Soit Ψ la fonction caractéristique du support de a ; on a aussi :

$$a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x)\,\Psi(x)\,.$$

$$(u_n\,\Psi)_{n\in Z} \in W_0$$

$$\|(u_n\,\Psi)\|_{W_0} \leqslant \|(u_n)\|_W \leqslant \|a\|_S (1+\varepsilon)$$

et ε étant arbitraire, il vient : $\|a\|_{S_0} \leqslant \|a\|_S$.

D'où : $$\|a\|_{S_0} = \|a\|_S\,.$$

Et les fonctions de $L^p(A)$ à support compact sont denses dans $L^p(A)$ pour $1 \leqslant p < \infty$, donc :

PROPOSITION 1. – *Pour* $1 \leqslant p_0 < p < \infty$, *on a :*

$$S = S_0 = L^p(A)\,.$$

Supposons désormais que $X = \mathbf{R}^n$, et μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$.

Soit E l'ensemble des fonctions de $L^p(A)$ à support compact ; soit $(\rho_i)_{i\in N}$ une suite régularisante (cf. [25]) :

$$\rho_i \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \quad ; \quad \rho_i(x) \geqslant 0 \quad ; \quad \int_{\mathbf{R}^n} \rho_i(x)\, dx = 1 \,.$$

$$\rho_i \longrightarrow \delta \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \quad \text{quand} \quad i \longrightarrow +\infty$$

Soit $\varepsilon > 0$; considérons :

$$\mathrm{E}_\varepsilon = \{ \rho_i * \Psi_a \ ; \ \Psi_a \in \mathrm{E} \ ; \ i \quad \text{tel que} \quad \| \Psi_a - \rho_i * \Psi_a \|_{\mathrm{L}^p(\mathrm{A})} \leqslant \varepsilon \}$$

1) E_ε est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{A})$; en effet E est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{A})$ et $\rho_i * \Psi_a \longrightarrow \Psi_a$ dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{A})$ lorsque $i \longrightarrow +\infty$.

2) On a les inégalités pour $\rho_i * \Psi_a \in \mathrm{E}_\varepsilon$:

$$\| \Psi_a \|_{\mathrm{L}^p(\mathrm{A})} \leqslant \| \rho_i * \Psi_a \|_{\mathrm{L}^p(\mathrm{A})} \leqslant \| \Psi_a \|_{\mathrm{L}^p(\mathrm{A})} + \varepsilon$$

3) D'après la proposition 1, $\forall\, \Psi_a \in \mathrm{E}$, $\exists (u_n) \in \mathrm{W}$ telle que :

$$\Psi_a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$$

$$\| (u_n) \|_{\mathrm{W}_0} \leqslant \| \Psi_a \|_{\mathrm{L}^p(\mathrm{A})} (1 + \varepsilon)$$

Soit $\qquad a \in \mathrm{E}_\varepsilon \quad ; \quad a = \rho_i * \Psi_a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_i * u_n$

et $\qquad (\rho_i * u_n)_{n \in \mathbf{Z}} \in \mathfrak{W} \ , \quad$ donc $\quad a \in \mathfrak{S}$

et : $\| a \|_{\mathfrak{S}} \leqslant \| (\rho_i * u_n) \|_{\mathfrak{W}} \leqslant \| (u_n) \|_{\mathrm{W}_0} \leqslant \| \Psi_a \|_{\mathrm{L}^p(\mathrm{A})} (1 + \varepsilon)$

$$\| a \|_{\mathfrak{S}} \leqslant \| \rho_i * \Psi_a \|_{\mathrm{L}^p(\mathrm{A})} (1 + \varepsilon) + \varepsilon = \| a \|_{\mathrm{L}^p(\mathrm{A})} (1 + \varepsilon) + \varepsilon$$

Et ε étant arbitraire et chaque E_ε dense dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{A})$, on en déduit que : $\mathfrak{S} = \mathrm{L}^p(\mathrm{A})$, avec égalité des normes.

PROPOSITION 2. – *Lorsque* $\mathrm{X} = \mathbf{R}^n$ *et* μ *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbf{R}^n$ *, on a :*

$$\begin{aligned} S(p_0\,,\infty\,,\theta\,,L^{p_0}(A_0)\,,L^\infty(A_1)) &= S(p_0\,,\infty\,,\theta\,,L^{p_0}(A_0)\,,C_0(A_1)) \\ &= L^p(A) \end{aligned}$$

avec :

$$1 \leqslant p_0 < +\infty$$

$$0 < \theta < 1$$

$$A = S(p_0\,,\infty\,,\theta\,,A_0\,,A_1)$$

Remarque 1. – On peut étendre la proposition 2 à d'autres cas (X et μ plus généraux), en particulier une démonstration analogue conviendra pour le cas $X = \Omega$, ouvert de $\mathbf{R}^n$, à condition d'imposer que le support de ρ_i soit contenu dans une boule de centre 0 et de rayon r_i, $r_i \longrightarrow 0$ quand $i \longrightarrow \infty$.

3. Interpolation des espaces $\mathcal{D}_{L^p}$.

Pour les définitions et les propriétés des espaces $\mathcal{D}_{L^p}$ on peut se reporter à [25] dont nous utiliserons les notations.

On pourrait utiliser la définition de $\mathcal{D}_{L^p}$ comme limite projective d'espaces de Sobolev $W^{p,q}$; et on connaît des résultats d'interpolation entre les espaces $W^{p,q}$ pour $1 < p < \infty$ (cf. [10]), mais on ne pourra ainsi obtenir les cas $p = 1$ ou $+\infty$; considérons donc plutôt, comme au chapitre 4 :

$$H^{p,q} = H^{p,q}(A) = \{u \in L^p(A)\,;\, D^m u \in L^p(A)\,,\ \forall\, m = (m_1\,,\ldots,m_n) \text{ tel que } m_i \leqslant q \text{ pour } i = 1\,,\ldots,n.\}$$

pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$; $0 \leqslant q$ entier ; A espace de Banach

$$\|u\|_{H^{p,q}} = \sum_{\max m_i \leqslant q} \|D^m u\|_{L^p(A)}$$

Et :

$$C_0^q = \{u \in C_0(A)\,;\, D^m u \in C_0(A)\,,\ \forall\, m = (m_1\,,\ldots,m_n) \text{ tel que } m_i \leqslant q \text{ pour } i = 1\,,\ldots,n.\}$$

$$\|u\|_{C_0^q} = \sum_{\max m_i \leqslant q} \|D^m u\|_{C_0(A)}$$

Les espaces $H^{p,q}$ et C_0^q sont des espaces de Banach.

PROPOSITION 3. – *Pour* $1 \leqslant p < \infty$, $\mathcal{D}_{L^p}(A)$ *est limite projective stricte des espaces* $H^{p,q}(A)$.

$\dot{\mathcal{D}}_{L^\infty}(A) = \dot{\mathcal{B}}(A)$ *est limite projective stricte des espaces* $C_0^q(A)$.

On écrira :

$$\mathcal{D}_{L^p}(A) = \varprojlim_{q \in N} H^{p,q}(A)$$

$$\dot{\mathcal{B}}(A) = \varprojlim_{q \in N} C_0^q(A)$$

Démonstration de la proposition 3 :

La suite $(H^{p,q}(A))_{q \in N}$ est une suite décroissante d'espaces de Banach, dont l'intersection est $\mathcal{D}_{L^p}(A)$, et $\mathcal{D}_{L^p}(A) = \varprojlim_{q \in N} H^{p,q}(A)$.
Pour $1 \leqslant p < \infty$, $\mathcal{D} \otimes A$, donc à fortiori $\mathcal{D}_{L^p}(A)$, est dense dans $H^{p,q}(A)$ pour tout q de N.

Pour $p = \infty$, $\dot{\mathcal{B}}$ est l'adhérence de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}_{L^\infty}$; $\dot{\mathcal{B}}(A) = \varprojlim_{q \in N} C_0^q(A)$ et la suite $(C_0^q(A))_{q \in N}$ est une suite décroissante d'espaces de Banach dont l'intersection est $\dot{\mathcal{B}}(A)$; $\mathcal{D} \otimes A$, donc à fortiori $\dot{\mathcal{B}}(A)$, est dense dans chaque espace $C_0^q(A)$.

PROPOSITION 4. – *Soit* $1 \leqslant p_0, p_1 < \infty$; *supposons* (A_0, A_1) *un couple compatible d'espaces de Banach ; alors :*

1) *Le couple compatible* $(\mathcal{D}_{L^{p_0}}(A_0), \mathcal{D}_{L^{p_1}}(A_1))$ *est limite projective stricte de la famille de couples compatibles d'espaces de Banach* $(H^{p_0,q}(A_0), H^{p_1,q}(A_1))_{q \in N}$.

2) *Le couple compatible* $(\mathcal{D}_{L^{p_0}}(A_0), \dot{\mathcal{B}}(A_1))$ *est limite projective stricte de la famille de couples compatibles d'espaces de Banach* $(H^{p_0,q}(A_0), C_0^q(A_1))_{q \in N}$.

En effet : Tous les espaces $H^{p_0,q}(A_0)$ et $H^{p_1,q}(A_1)$ sont des sous-espaces de $L^{p_0}(A_0) + L^{p_1}(A_1)$.

De même, les espaces $H^{p_0,q}(A_0)$ et $C_0^q(A_1)$ sont des sous-espaces de $L^{p_0}(A_0) + L^{\infty}(A_1)$.

$\mathcal{D} \otimes (A_0 \cap A_1)$ est dense dans $L^{p_0}(A_0) \cap L^{p_1}(A_1)$ et dans $L^{p_0}(A_0) \cap C_0(A_1)$. Or, d'après les démonstrations des propositions 5 et 6 (voir ci-dessous), cela suffit à montrer que $\mathcal{D}_* \otimes (A_0 \cap A_1)$ est dense dans $H^{p_0,q}(A_0) \cap H^{p_1,q}(A_1)$ et dans $H^{p_0,q}(A_0) \cap C_0^q(A_1)$ pour tout q de $\mathbf{N}$.

PROPOSITION 5.

$$S(p_0, p_1, \theta, H^{p_0,q}(A_0), H^{p_1,q}(A_1)) = H^{p,q}(A)$$

avec
$$1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty, 0 < \theta < 1$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

$$A = S(p_0, p_1, \theta, A_0, A_1)$$

Démonstration. – Les couples compatibles $(H^{p_0,q}(A_0), H^{p_1,q}(A_1))$ et $(L^{p_0}(A_0), L^{p_1}(A_1))$ sont isomorphes dans la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ des couples compatibles d'espaces banachisables (cf. lemme 4.3).

Nous avons en effet :

$$(H^{p_0,q}(A_0), H^{p_1,q}(A_1)) \underset{U}{\overset{T}{\rightleftarrows}} (L^{p_0}(A_0), L^{p_1}(A_1))$$

$$T \circ U = \text{Identité } (L^{p_0}(A_0), L^{p_1}(A_1))$$

$$U \circ T = \text{Identité } (H^{p_0,q}(A_0), H^{p_1,q}(A_1))$$

avec :

$$T(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + 1\right)^q \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} + 1\right)^q f$$

$$U(g) = g * Y(x_1, \dots, x_n)\, e^{-(x_1 + \dots + x_n)} \frac{x_1^{q-1} \dots x_n^{q-1}}{((q-1)!)^n}$$

PROPOSITION 6.

$$S(p_0\ ,\infty\ ,\theta\ ,H^{p_0,q}\ (A_0)\ ,C_0^q\ (A_1)) = H^{p,q}\ (A)$$

avec :

$$1 \leqslant p_0 < \infty\ , 0 < \theta < 1$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$$

$$A = S(p_0\ ,\infty\ ,\theta\ ,A_0\ ,A_1)$$

Démonstration. – Nous avons comme précédemment :

$$(H^{p_0,q}\ (A_0)\ ,C_0^q\ (A_1)) \underset{U}{\overset{T}{\rightleftarrows}} (L^{p_0}\ (A_0)\ ,C_0\ (A_1))$$

$$T \circ U = \text{Identité}\ (L^{p_0}\ (A_0)\ ,C_0\ (A_1))$$

$$U \circ T = \text{Identité}\ (H^{p_0,q}\ (A_0)\ ,C_0^q\ (A_1))$$

avec :

$$T(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + 1\right)^q \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} + 1\right)^q f$$

$$U(g) = g * Y(x_1\ ,\ldots,x_n)\ e^{-(x_1+\ldots+x_n)}\ \frac{x_1^{q-1}\ldots x_n^{q-1}}{((q-1)\,!)^n}$$

En effet :

Nous utilisons le lemme 4.3 ; de plus :

La restriction de T à $C_0^q\ (A_1)$ est évidemment continue de $C_0^q\ (A_1)$ dans $C_0\ (A_1)$.

La restriction de U à $C_0\ (A_1)$ est continue de $C_0\ (A_1)$ dans $H^{\infty,q}\ (A_1)$.

Il nous reste donc à vérifier que :

1) $f \in C_0\ (A_1) \Longrightarrow f * u$ continue (en posant :

$$u = Y(x_1\ ,\ldots,x_p)\ e^{-(x_1+\ldots+x_p)}\ x_1^{\alpha_1}\ldots x_p^{\alpha_p} \otimes \delta_{x_{p+1}} \otimes \ldots \otimes \delta_{x_n}$$

$$0 \leqslant p \leqslant n\ \ ;\ \ 0 \leqslant \alpha_1,\ldots,\alpha_p \leqslant q\ .$$

2) $(u * f)(x) \longrightarrow 0$ quand $|x| \longrightarrow \infty$.

Puisque u est continue de $C_0(A_1)$ dans $H^{\infty,q}(A_1)$, on peut supposer f continue à support compact.

Alors le 1) résulte du théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale (on écrit :

$$u * f = \int_{R^n} f(x_1 - t_1, \ldots, x_p - t_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) Y(t_1, \ldots, t_p) e^{-(t_1+\ldots+t_p)} t_1^{a_1} \ldots t_p^{a_p} dt).$$

Pour le 2), supposons que le support de f est dans le pavé $[-N, N]^n$ et soit $M = \sup_{x \in N^n} \|f(x)\|$; on a immédiatement :

$$\|(u * f)(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant M . \prod_{i=1}^{p} \int_{x_i - N}^{x_i + N} e^{-t_i} t_i^{a_i} dt_i . \varphi(x_{p+1}, \ldots, x_p)$$

où
$$\varphi(x_{p+1}, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sup_{i=p+1,\ldots,n} |x_i| \leqslant N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit donc que $(u * f)(x) \longrightarrow 0$ quand $|x| \longrightarrow \infty$.

On a donc démontré le théorème :

THEOREME 1. – *Soient* : $1 \leqslant p_0$, $p_1 < \infty$

1) $\widetilde{S}(p_0, p_1, \theta, \mathcal{D}_{L^{p_0}}(A_0), \mathcal{D}_{L^{p_1}}(A_1)) = \mathcal{D}_{L^p}(A)$

avec $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{1}{p_1}$; $0 < \theta < 1$; $A = S(p_0, p_1, \theta, A_0, A_1)$

2) $\widetilde{S}(p_0, \infty, \theta, \mathcal{D}_{L^{p_0}}(A_0), \dot{\mathcal{B}}(A_1)) = \mathcal{D}_{L^p}(A)$

avec $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0}$ *et* $0 < \theta < 1$; $A = S(p_0, \infty, \theta, A_0, A_1)$

($\widetilde{S}$ *désignant le foncteur d'interpolation, prolongement de* S *par limite projective).*

COROLLAIRE 1. – *Soit* $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$; *tout automorphisme du couple* $(\mathcal{D}_{L^{p_0}}, \mathcal{D}_{L^{p_1}})$ *définit par restriction une application linéaire continue de* $\mathcal{D}_{L^p}$ *dans lui-même pour* $p_0 < p < p_1$.

Il suffit de remarquer que, dans le cas $p_0 < +\infty$ et $p_1 = +\infty$, $\dot{\mathcal{B}}$ est l'adhérence de $\mathcal{D}_{L^{p_0}}$ dans $\mathcal{D}_{L^\infty}$.

On obtient une variante du théorème de M. Riesz (cf. [20] [27] pour le théorème de M. Riesz dans les espaces L^p), sous la forme :

COROLLAIRE 2. – *Soient* $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$ *avec* $p_0 \leqslant q_0$, $p_1 \leqslant q_1$; $0 < \theta < 1$.

Tout morphisme de $(\mathcal{D}_{L^{p_0}}, \mathcal{D}_{L^{p_1}})$ *dans* $(\mathcal{D}_{L^{q_0}}, \mathcal{D}_{L^{q_1}})$ *définit par restriction une application linéaire continue de* $\mathcal{D}_{L^p}$ *dans* $\mathcal{D}_{L^q}$ *avec*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad ; \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Démonstration :

On sait (cf. [20]) que pour tout objet (A_0, A_1) de $\mathcal{C}(B)$ on a :

$$S(p_0, p_1, \theta, A_0, A_1) \hookrightarrow S(q_0, q_1, \theta, A_0, A_1)$$

donc d'après la remarque 3.5 :

$$\widetilde{S}(p_0, p_1, \theta, A_0, A_1) \hookrightarrow \widetilde{S}(q_0, q_1, \theta, A_0, A_1)$$

pour tout (A_0, A_1) de $\mathcal{C}(\mathfrak{F})$.

En particulier :

$$\widetilde{S}(p_0, p_1, \theta, \mathcal{D}_{L^{q_0}}, \mathcal{D}_{L^{q_1}}) \hookrightarrow \widetilde{S}(q_0, q_1, \theta, \mathcal{D}_{L^{q_0}}, \mathcal{D}_{L^{q_1}}) = \mathcal{D}_{L^q}.$$

Soit $\qquad u \in \mathrm{Hom}((\mathcal{D}_{L^{p_0}}, \mathcal{D}_{L^{p_1}}), (\mathcal{D}_{L^{q_0}}, \mathcal{D}_{L^{q_1}}))$

$$u \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_{L^p}, \widetilde{S}(p_0, p_1, \theta, \mathcal{D}_{L^{q_0}}, \mathcal{D}_{L^{q_1}})),$$

donc à fortiori :

$$u \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_{L^p}, \mathcal{D}_{L^q}).$$

(si q_1 est infini et $q_0 < \infty$, on utilise encore le fait que $\dot{\mathcal{B}}$ est l'adhérence de $\mathcal{D}_{L^{q_0}}$ dans $\mathcal{D}_{L^\infty}$).

Nous pouvons aussi obtenir la variante du théorème de Thorin (cf. [10] [29]), en utilisant le prolongement des foncteurs d'interpolation définis par la méthode complexe. Utilisons les notations de [10] ; on sait que :

$$[L^{p_0}, L^{p_1}]_\theta = L^p \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad ; \quad 0 < \theta < 1 \quad ;$$

$$1 \leqslant p_0 , p_1 \leqslant \infty .$$

Avec une technique analogue à celle du paragraphe 2 on obtient aussi

$$[L^{p_0}, C_0]_\theta = L^p \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} \quad ; \quad p_0 < \infty \quad ; \quad 0 < \theta < 1 .$$

Toutes les démonstrations du paragraphe 3 restent valables en remplaçant $\widetilde{S}(p_0, p_1, \theta, L^{p_0}, L^{p_1})$ par $[L^{p_0}, L^{p_1}\widetilde{]}_\theta$ (prolongement par limite projective du foncteur $[\ ]_\theta$), en remplaçant aussi éventuellement L^∞ par C_0. On obtient donc le

THEOREME 2. – *Soient* : $1 \leqslant p_0 , p_1 < \infty$.

1) $[\mathcal{D}_{L^{p_0}}, \mathcal{D}_{L^{p_1}}\widetilde{]}_\theta = \mathcal{D}_{L^p}$

avec
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad ; \quad 0 < \theta < 1 .$$

2) $[\mathcal{D}_{L^{p_0}}, \dot{\mathcal{B}}\widetilde{]}_\theta = \mathcal{D}_{L^p}$

avec
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} \quad ; \quad 0 < \theta < 1 .$$

($[\ \widetilde{]}_\theta$ *désignant le foncteur d'interpolation prolongement de* $[\ ]_\theta$ *par limite projective*).

Il en résulte immédiatement le

COROLLAIRE 3. – *Soient* : $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$; $0 < \theta < 1$.

Tout morphisme de $(\mathcal{D}_{L^{p_0}}, \mathcal{D}_{L^{p_1}})$ *dans* $(\mathcal{D}_{L^{q_0}}, \mathcal{D}_{L^{q_1}})$ *définit par restriction une application linéaire continue de* $\mathcal{D}_{L^p}$ *dans* $\mathcal{D}_{L^q}$ *avec*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

4. Dualité.

Nous utilisons un résultat de [20].

Soient : (A_0, A_1) un couple compatible d'espaces de Banach ; $A_0 \cap A_1$ dense dans A_0 et A_1 ; $1 \leqslant p_0, p_1 < \infty$.

Alors on définit le couple compatible d'espaces de Banach (A'_0, A'_1) par l'injection de A'_0 et A'_1 dans $(A_0 \cap A_1)'$ et le dual fort de $S(p_0, p_1, \theta, A_0, A_1)$ s'identifie à $\mathrm{S}(p'_0, p'_1, \theta, A'_0, A'_1)$ avec

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p'_0} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p_1} = 1 .$$

En appliquant les résultats du chapitre 3. paragraphe 4, on a donc la

PROPOSITION 7. – *Soient* : $1 < q_0, q_1 < \infty$; $0 < \theta < 1$;

$$\stackrel{\approx}{\mathrm{S}}(q_0, q_1, \mathcal{D}'_{L^{q_0}}, \mathcal{D}'_{L^{q_1}}) = \mathcal{D}'_{L^q}$$

avec :

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} .$$

CHAPITRE 6

INTERPOLATION ENTRE DES ESPACES DE FONCTIONS INDEFINIMENT DIFFERENTIABLES. ESPACES DE GEVREY

Nous appliquerons essentiellement les résultats des chapitres 2 et 3 à l'interpolation entre des espaces fonctionnels définis à partir d'opérateurs non bornés. Après avoir décrit une situation générale dans laquelle nous pouvons conclure, nous expliciterons le cas particulier des espaces de Gevrey.

1. Position du problème.

Soient : Λ un opérateur non borné auto-adjoint dans un espace de Hilbert E ; $(M_k)_{k\in N}$ une suite de réels positifs.

On considère l'espace :

$$E_{M_k} = D(\Lambda, M_k) = \left\{ x \in \bigcap_{k\in N} D(\Lambda^k) \,;\, \exists L > 0 \text{ avec } \| \Lambda^k x \|_E \leqslant c\, L^k M_k \right\}$$

E_{M_k} est muni de la topologie limite inductive (suivant $L \longrightarrow \infty$) des espaces normés

$$E^{(L)}_{M_k} = D(\Lambda \,;\, M_k, L) = \left\{ x \in \bigcap_{k\in N} D(\Lambda^k) \,;\, \|x\|_{E^{(L)}_{M_k}} = \sup_{k\in N} \frac{\| \Lambda^k x \|_E}{L^k M_k} < \infty \right\}$$

Etant données deux suites $(M_k)_{k\in N}$ et $(N_k)_{k\in N}$, *on se propose de chercher les espaces d'interpolation entre* E_{M_k} *et* E_{N_k} ; on pourra aussi chercher les espaces d'interpolation entre E_{M_k} et un espace d'un "autre type".

De nombreux espaces fonctionnels utilisés en analyse sont des espaces E_{M_k} pour E , Λ , M_k convenables ; ainsi en prenant : pour E un espace $L^2(\Omega)$, pour Λ un opérateur différentiel "convenable", pour $(M_k)_{k\in N}$ une suite $(\Gamma(ks + 1))_{k\in N}$ avec $1 \leqslant s < \infty$, on trouve en particulier des espaces de Gevrey et l'espace des fonctions analytiques sur Ω , Ω étant par exemple une variété analytique compacte.

Nous pouvons de même considérer n opérateurs non bornés auto-adjoints commutatifs $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ dans un espace de Hilbert E, définir de façon analogue les espaces $D(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n, M_k)$, et interpoler entre ces espaces.

2. Etude générale.

La norme définie sur les espaces $E_{M_k}^{(L)}$ apparaît comme la borne supérieure d'une famille de semi-normes et nous n'avons pas de méthode s'adaptant directement à ce cas. Nous donnons donc d'abord une définition équivalente des espaces E_{M_k} :

PROPOSITION 1. – $E_{M_k} = \lim E_{M_k}^L$ *avec :*

$$E_{M_k}^L = \left\{ x \in \bigcap_{k \in \mathrm{N}} D(\Lambda^k) \; ; \; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\Lambda^k x\|_E^2}{L^{2k} M_k^2} < \infty \right\}$$

avec
$$\|x\|_{E_{M_k}^L} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\Lambda^k x\|_E^2}{L^{2k} M_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration :

1) $\forall x \in E_{M_k}^L \; ; \; \|x\|_{E_{M_k}^L} \geqslant \|x\|_{E_{M_k}^{(L)}}$ pour tout $L > 0$.

2) $$x \in E_{M_k^{(L)}} \Longrightarrow \sup_{k \in \mathrm{N}} \frac{\|\Lambda^k x\|_E}{L^k M_k} = M < +\infty$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\Lambda^k x\|_E^2}{L_1^{2k} M_k^2} \leqslant \frac{M^2 L_1^2}{L_1^2 - L^2} \text{ pour tout } L_1 > L .$$

Donc les deux définitions de E_{M_k} comme limite inductive sont équivalentes ; et nous utiliserons donc par la suite celle de la proposition 1 qui sera plus commode.

On sait (cf. [6]) qu'il existe une résolution de l'identité associée à Λ, soit $\mathscr{E}$, telle que :

Si f est une fonction borélienne complexe définie $\mathcal{L}$-presque partout sur l'axe réel, alors f permet de définir un opérateur fermé de domaine dense dans E, par :

$$D(f(\Lambda)) = \left\{ x \in E \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \, (\mathcal{L}(d\lambda)\, x \,, x) < \infty \right\}$$

$$f(\Lambda)\, x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \;\mathcal{L}(d\lambda)\, x \quad ; \quad \Lambda x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \;\mathcal{L}(d\lambda) x$$

$$\| f(\Lambda)\, x \|_{E}^{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \; (\mathcal{L}(d\lambda)\, x \,, x) \quad ; \quad x \in D(f(\Lambda))\,.$$

Dans le cas où $f(\lambda)$ est un polynome $\sum_{i=0}^{n} a_i\, \lambda^i$, $f(\Lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Lambda^i$ (au sens habituel) ; nous pouvons en particulier prendre $f(\Lambda) = \Lambda^k$, et nous obtenons :

$$\| x \|_{E^{L}_{M_k}}^{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{L^{2k}\, M_k^2} \, (\mathcal{L}(d\lambda)\, x \,, x)$$

Soient donc $E^{L}_{M_k}$ et $E^{L'}_{N_k}$ correspondant respectivement aux suites $(M_k)_{k \in N}$ et $(N_k)_{k \in N}$. Ces espaces sont des espaces de Banach, continuement plongés dans E ; ils définissent donc un couple compatible d'espaces de Banach, que l'on notera $(A_0 \,, A_1)$.

Calculons $K_2\,(t \,, x \,, A_0 \,, A_1)$ pour $t \in \,]0 \,, \infty[\;$; $x \in A_0 + A_1$. On a la

PROPOSITION 2. – *Soient :* $t \in \,]0 \,, \infty[\;$; $x \in A_0 + A_1$.

$$K_2\,(t \,, x \,, A_0 \,, A_1) \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \min(M(\lambda) \,, t N(\lambda))\, (\mathcal{L}(d\lambda)\, x \,, x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \sqrt{2}\, K_2\,(t \,, x \,, A_0 \,, A_1)$$

avec :

$$M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{L^{2k}\, M_k^2}$$

$$N(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{L'^{2k} N_k^2} .$$

Démonstration. – (analogue à celle du chapitre 2) ; on considère une décomposition : $x = x_0 + x_1$

$$x_0 = \mathcal{E}(\sigma_0)\, x \quad ; \quad x_1 = \mathcal{E}(\sigma_1)\, x$$

avec σ_0 , σ_1 ensembles boréliens de **R** et tels que :

$$M(\lambda) \leqslant t^2 N(\lambda) \quad , \quad \forall \lambda \in \sigma_0$$

$$t^2 N(\lambda) \leqslant M(\lambda) \quad , \quad \text{pour tout } \lambda \in \sigma_1 .$$

Les différentes vérifications se font comme au chapitre 2. Et on trouve de même :

THEOREME 1. – *Soit* γ *une mesure sur* $]0 , \infty[$, *non nulle, positive et vérifiant :*

$$\int_0^{\infty} \min(1 , t^2)\, d\gamma < + \infty$$

Le foncteur $\Phi_{\gamma,2}[\ ]$ *associé à* γ *défini sur* $\mathcal{C}(B)$ (cf. chapitre 1) *vérifie :*

$$\Phi_{\gamma,2}\,[E^{L}_{M_k} , E^{L'}_{N_k}] = E_R$$

$$\|x\|_{\Phi_{\gamma,2}} \leqslant \|x\|_{E_R} \leqslant \sqrt{2}\, \|x\|_{\Phi_{\gamma,2}}$$

et

$$E_R = \left\{ x \in \bigcap_{k \in \mathbf{N}} D(\Lambda^k) \quad ; \quad \|x\|^2_{E_R} = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda)\, (\mathcal{E}(d\lambda)x , x) < + \infty \right\}$$

$$R(\lambda) = \int_0^{\infty} \min(M(\lambda) , t^2 N(\lambda))\, d\gamma$$

$$M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{L^{2k} M_k^2}$$

$$\mathrm{N}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{\mathrm{L}'^{2k}\,\mathrm{N}_k^2}.$$

Nous pouvons passer aux espaces $\mathrm{E}_{\mathrm{M}_k}$ et $\mathrm{E}_{\mathrm{N}_k}$ grâce à la

PROPOSITION 3. – *Le couple compatible* $(\mathrm{E}_{\mathrm{M}_k}, \mathrm{E}_{\mathrm{N}_k})$ *est de type* $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ *et admet pour suite de définition :* $(\mathrm{E}^m_{\mathrm{M}_k}, \mathrm{E}^n_{\mathrm{N}_k})_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$.

Démonstration. – 1) $\mathrm{E}_{\mathrm{M}_k}$ et $\mathrm{E}_{\mathrm{N}_k}$ sont de type $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ et admettent pour suites de définition respectivement $(\mathrm{E}^m_{\mathrm{M}_k})_{m\in\mathrm{N}}$ et $(\mathrm{E}^n_{\mathrm{N}_k})_{n\in\mathrm{N}}$.

2) $\forall (m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, la compatibilité du couple $(\mathrm{E}^m_{\mathrm{M}_k}, \mathrm{E}^n_{\mathrm{N}_k})$ est définie par le plongement de $\mathrm{E}^m_{\mathrm{M}_k}$ et $\mathrm{E}^n_{\mathrm{N}_k}$ dans $\mathrm{E}_{\mathrm{M}_k} + \mathrm{E}_{\mathrm{N}_k}$ considéré lui-même comme plongé dans E.

En utilisant alors le théorème 3.2 et la remarque 3.3 on a le

THEOREME 2. – *Soit* γ *une mesure sur* $]0, \infty[$, *non nulle, positive et vérifiant* $\int_0^\infty \min(1, t^2)\, d\gamma < \infty$. *Le foncteur d'interpolation* $\approx{\Phi}_{\gamma,2}$ [ ] *défini sur* $\approx{\mathfrak{C}}$ (cf. remarque 3.4) *vérifie* :

$$\overset{\approx}{\Phi}_{\gamma,2}\,[\mathrm{E}_{\mathrm{M}_k}, \mathrm{E}_{\mathrm{N}_k}] = \varinjlim_{n\in\mathrm{N}} \mathrm{E}_{\mathrm{R}(n,\lambda)},$$

avec $$\mathrm{R}(n, \lambda) = \int_0^\infty \min\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{n^{2k}\,\mathrm{M}_k^2}, t^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{n^{2k}\,\mathrm{N}_k^2}\right) d\gamma.$$

Application :

Soit : $$\mathrm{M}_k = (k\,!)^s \quad ; \quad 0 < s < \infty.$$

Nous utilisons une définition plus pratique de l'espace $\mathrm{E}_{\mathrm{M}_k}$:

LEMME 1.

$\mathrm{E}_{\mathrm{M}_k} = \varinjlim_{\mathrm{L}\to\infty} \mathrm{E}^{\mathrm{L}}_s$ *avec*

$$\mathrm{E}^{\mathrm{L}}_s = \left\{ x \in \bigcap_{k\in\mathrm{N}} \mathrm{D}(\Lambda^k) \; ; \; \|x\|_{\mathrm{E}^{\mathrm{L}}_s} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left|\frac{\lambda}{\mathrm{L}}\right|^{\frac{1}{s}}} (\mathcal{L}(d\lambda)\, x, x) < \infty \right\}$$

Démonstration :

On montre que pour tout $L > 0$, $\exists L'$, L'' , k' , k'' strictement positifs et tels que :

L , L' , L'' tendent vers $+\infty$ simultanément et

$$k' e^{\left|\frac{\lambda}{L'}\right|^{\alpha}} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^{2k}}{L^{2k}(k\,!)^{2s}} \leqslant k'' e^{\left|\frac{\lambda}{L''}\right|^{\alpha}} \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{s} .$$

Soient maintenant : $\qquad 0 < s_0 , s_1 < \infty .$

$$M_k = (k\,!)^{s_0} \quad ; \quad N_k = (k\,!)^{s_1} \quad .$$

L'expression de $R(n , \lambda)$ dans le théorème 2 peut être remplacée par $\int_0^{\infty} \min\left(e^{\left|\frac{\lambda}{n}\right|^{\alpha_0}} , t^2 e^{\left|\frac{\lambda}{n}\right|^{\alpha_1}}\right) d\gamma$ et en utilisant la proposition 2.1, on en déduit le

COROLLAIRE 1. – *Soient* : $M_k = (k\,!)^{s_0}$; $N_k = (k\,!)^{s_1}$;

$$0 < s_0 \leqslant s \leqslant s_1 < \infty ;$$

on peut construire un foncteur d'interpolation $\widetilde{\widetilde{\Phi}}_{g,2}$ [ ] *défini sur* $\widetilde{\widetilde{\mathcal{C}}}$ *et tel que*

$$\widetilde{\widetilde{\Phi}}_{g,2} [E_{M_k} , E_{N_k}] = E_{R_k} \qquad avec \qquad R_k = (k\,!)^{s} .$$

On peut aussi construire un foncteur d'interpolation $\widetilde{\widetilde{\Phi}}$ [ ] défini sur $\widetilde{\widetilde{\mathcal{C}}}$ et tel que

$$\widetilde{\widetilde{\Phi}} [E_{(k!)^{s_0}} , E_{\infty}] = E_{(k)^{s}} \qquad \text{avec :}$$

$$\begin{cases} 0 < s_0 < s < \infty \\ E_{\infty} = \bigcap\limits_{k \in N} D(\Lambda^k) \end{cases}$$
muni de la topologie limite projective de celles des espaces $D(\Lambda^k)$.

Nous nous contenterons de le montrer sur un exemple.

3. Exemple : classes de fonctions C^∞ sur une variété compacte.

Soit Γ une variété analytique compacte ; $E = L^2(\Gamma)$; on prend $\Lambda = \Delta$ (opérateur de Laplace - Beltrami).

Soient :

$\mathcal{E}(\Gamma) = \{$fonctions indéfiniment différentiables sur $\Gamma\}$.

$G_s(\Gamma) = \{$fonctions de Gevrey d'ordre s sur $\Gamma\}$; $1 \leqslant s < \infty$.

On sait que :

$\mathcal{E}(\Gamma) = \bigcap_{k \in \mathrm{N}} D(\Lambda^k)$, muni de la famille de semi-normes

$p_k(x) = \|\Lambda^k x\|_E$.

$$G_s(\Gamma) = \left\{ x \in \bigcap_{k \in \mathrm{N}} D(\Lambda^k) \; ; \; \exists L > 0 \text{ avec } \sup_{k \in \mathrm{N}} \frac{\|\Lambda^k x\|_E}{L^k \, \Gamma(2ks+1)} < \infty \right\}$$

En particulier $G_1(\Gamma)$ est l'espace des fonctions analytiques sur Γ, noté aussi $\mathcal{A}(\Gamma)$. Cette caractérisation des espaces G_s est due à Lions et Magènes (cf. [19]). Avec les notations précédentes, on a :

$$G_s(\Gamma) = \varinjlim_{L \to \infty} E^L_{M^s_k} \quad \text{avec} \quad M^s_k = \Gamma(2k+1)\,.$$

On vérifie qu'il est équivalent dans la définition de $G_s(\Gamma)$ de prendre $M^s_k = \Gamma(2ks+1)$ ou $M^s_k = (k\,!)^{2s}$. Il résulte donc du corollaire 1 la

PROPOSITION 4. – *Soient* : $1 \leqslant s_0 \leqslant s \leqslant s_1 < \infty$; Γ *une variété analytique compacte.*

On peut construire un foncteur d'interpolation $\stackrel{\approx}{\Phi}_{g,2}[\;]$ *défini sur* $\stackrel{\approx}{\mathcal{C}}$ *et tel que*

$$\stackrel{\approx}{\Phi}_{g,2}[G_{s_0}(\Gamma), G_{s_1}(\Gamma)] = G_s(\Gamma)\,.$$

Soit : $$1 \leqslant s_0 < s < \infty\,.$$

Nous nous proposons maintenant de construire un foncteur d'interpolation $\stackrel{\approx}{\Phi}[\;]$ défini sur $\stackrel{\approx}{\mathcal{C}}$ tel que

$$\tilde{\tilde{\Phi}}[G_{s_0}(\Gamma), \mathcal{E}(\Gamma)] = G_s(\Gamma).$$

Pour cela, nous utilisons des définitions plus pratiques des espaces $\mathcal{E}(\Gamma)$ et $G_s(\Gamma)$.

LEMME 2.
$$\mathcal{E}(\Gamma) = \lim \mathcal{E}^n \quad \textit{avec}$$

$$\mathcal{E}^n = \left\{ x \in L^2(\Gamma) \, ; \|x\|^2_{\mathcal{E}^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + a_n |\lambda|)^{2n} (\mathcal{L}(d\lambda)x, x) < \infty \right\}$$

$(a_n)_{n \in \mathrm{N}}$ *étant une suite arbitraire de nombres strictement positifs.*

$$G_s(\Gamma) = \underset{M \to \infty}{\underrightarrow{\mathrm{Lim}}}\, G_s^M \quad \textit{avec}$$

$$G_s^M = \left\{ x \in \bigcap_{k \in \mathrm{N}} D(\Lambda^k) \, ; \|x\|^2_{G_s^M} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left|\frac{\lambda}{M}\right|^{\frac{1}{2s}}} (\mathcal{L}(d\lambda)x, x) < \infty \right\}$$

Cette caractérisation de $\mathcal{E}(\Gamma)$ est évidente et celle de $G_s(\Gamma)$ résulte du lemme 1.

Nous procédons en trois étapes :

1) Interpolation entre $\mathcal{E}^n$ et G_s^M

2) Interpolation entre $\mathcal{E}(\Gamma)$ et G_s^M

3) Interpolation entre $\mathcal{E}(\Gamma)$ et $G_s(\Gamma)$

1) *Interpolation entre* $\mathcal{E}^n$ *et* G_s^M : Nous utilisons la méthode de l'exemple 2 du chapitre 2.

Posons $$M(x) = e^{|x|^\alpha} \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{2s}.$$

Soit $R(x)$ tel qu'il existe un foncteur $\Phi_{f,2}[\ ]$ réalisant

$$\Phi_{f,2}[L^2_M, L^2_1] = L^2_R,$$

avec des normes équivalentes ; et on suppose que l'on peut prendre déterminé par :

$$\int_{\mathrm{M}(x)} f(t)\,dt = \frac{\mathrm{R}'(x)}{\mathrm{M}'(x)} \quad \text{pour} \quad |x| > x_0$$

$f(x) = 0$ pour $|x| < \tau$ avec $\tau = \mathrm{M}(x_0) \geqslant 1$; (cf. chapitre 2).

On a alors :

$$\Phi_{f,2}\,[\mathrm{G}_s^{\mathrm{M}}, \mathcal{E}^n] = \mathrm{F}_{n,\mathrm{M}} = \left\{ x \in \mathrm{L}^2(\Gamma) \,; \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{R}_{n,\mathrm{M}}(\lambda)|^2 (\mathcal{E}(d\lambda)x, x) < \infty \right\}$$

avec : $\mathrm{R}_{n,\mathrm{M}}(\lambda) = \int_0^{\infty} \min\left(e^{\left|\frac{\lambda}{\mathrm{M}}\right|^a}, t(1 + a_n|\lambda|)^n\right) f(t)\,dt$

Posons : $\mathcal{M}(\lambda) = (1 + a_n |\lambda|)^{-n}\, e^{\left|\frac{\lambda}{\mathrm{M}}\right|^a}$;

soit $\lambda_0 \in \mathbf{R}_+$ défini par $\tau = \mathcal{M}(\lambda_0)$; on a :

$$\mathrm{R}_{n,\mathrm{M}}(\lambda) = (1 + a_n|\lambda|)^n \int_0^{\mathcal{M}(\lambda)} tf(t)\,dt + e^{\left|\frac{\lambda}{\mathrm{M}}\right|^a} \int_{\mathcal{M}(\lambda)}^{\infty} f(t)\,dt$$

Pour $|\lambda| \leqslant \lambda_0$, on a :

$$\mathrm{R}_{n,\mathrm{M}}(\lambda) = \int_{\tau}^{\infty} f(t)\,dt \,.\, e^{\left|\frac{\lambda}{\mathrm{M}}\right|^a} = \frac{\mathrm{R}'(x_0)}{\mathrm{M}'(x_0)}\, e^{\left|\frac{\lambda}{\mathrm{M}}\right|^a}$$

Pour $|\lambda| > \lambda_0$, on a :

$$\mathrm{R}_{n,\mathrm{M}}(\lambda) = (1 + a_n|\lambda|)^n \int_{\tau}^{\mathcal{M}(\lambda)} tf(t)\,dt + e^{\left|\frac{\lambda}{\mathrm{M}}\right|^a} \int_{\mathcal{M}(\lambda)}^{\infty} f(t)\,dt$$

On suppose que pour chaque $n \in \mathbf{N}$, a_n est choisi assez petit pour que : $|\lambda| \geqslant \lambda_0 \Longrightarrow \mathcal{M}(\lambda) > \tau$; on peut alors définir μ par

$$\mathcal{M}(\lambda) = \mathrm{M}(\mu) \quad , \quad \mu \in \mathbf{R}_+ \text{ ; et :}$$

$$R_{n,M}(\lambda) = (1 + a_n |\lambda|)^n \int_{M(x_0)}^{M(\mu)} tf(t)\,dt + e^{\left|\frac{\lambda}{M}\right|^a} \int_{M(\mu)}^{\infty} f(t)\,dt$$

$$R_{n,M}(\lambda) = (1 + a_n |\lambda|)^n \int_{x_0}^{\mu} M(u) f(M(u))\,M'(u)\,du + e^{\left|\frac{\lambda}{M}\right|^a} \int_{M(\mu)}^{\infty} f(t)\,dt$$

$$= (1 + a_n |\lambda|)^n \int_{x_0}^{\mu} - M(u) \frac{d}{du}\left[\frac{R'(u)}{M'(u)}\right] du + e^{\left|\frac{\lambda}{M}\right|^a} \frac{R'(\mu)}{M'(\mu)}$$

$$= (1 + a_n |\lambda|)^n \left[- M(u) \frac{R'(u)}{M'(u)} + R(u) \right]_{x_0}^{\mu} + e^{\left|\frac{\lambda}{M}\right|^a} \frac{R'(\mu)}{M'(\mu)}$$

$$= (1 + a_n |\lambda|)^n \left[R(\mu) - R(x_0) + M(x_0) \frac{R'(x_0)}{M'(x_0)} \right]$$

$$R_{n,M}(\lambda) = (1 + a_n |\lambda|)^n \left[C + R\left[\left(\left|\frac{\lambda}{M}\right|^a - n \text{ Log} (1 + a \ |\lambda|) \right)^{\frac{1}{a}} \right] \right]$$

2) *Interpolation entre* $\mathcal{E}(\Gamma)$ et G_s^M .

D'abord, remarquons que le couple compatible $(\mathcal{E}(\Gamma), G_s^M)$ est limite projective stricte de la famille de couples compatibles d'espaces de Banach $(\mathcal{E}^n, G_s^M)_{n \in N}$.

Le foncteur $\Phi_{f,2}$ [ ] que nous avons construit dans le 1) est indépendant de n et M. On peut appliquer le théorème 1 du chapitre 3 et on obtient le foncteur $\widetilde{\Phi}_{f,2}$ [ ] défini sur la catégorie $\mathcal{C}$ des couples compatibles limites projectives strictes de couples compatibles d'espaces de Banach ; on a :

$$\widetilde{\Phi}_{f,2} [\mathcal{E}(\Gamma), G_s^M] = \varprojlim_{n \in N} \Phi_{f,2} [\mathcal{E}^n, G_s^M] = \varprojlim_{n \in N} F_{n,M}$$

Posons
$$F_M = \varprojlim_{n \in N} F_{n,M}$$

3) *Interpolation entre* $\mathcal{E}(\Gamma)$ *et* $G_s(\Gamma)$.

Nous appliquons les résultats du chapitre 3 sur le prolongement par limite inductive ; en "prolongeant" le foncteur $\widetilde{\Phi}_{f,2}$ [ ] nous obtenons le foncteur d'interpolation $\tilde{\tilde{\tilde{\Phi}}}_{f,2}$ [ ] défini sur la catégorie $\tilde{\tilde{\tilde{\mathfrak{C}}}}$ (cf. remarque 3.4).

Le couple compatible $(\mathcal{E}(\Gamma)\,,\,G_s(\Gamma))$ est un objet de la catégorie $\tilde{\tilde{\mathfrak{C}}}$ et admet pour suite de définition $(\mathcal{E}(\Gamma)\,,\,G_s^M)_{M\in N}$.

On a donc :

$$\tilde{\tilde{\tilde{\Phi}}}_{f,2}[\mathcal{E}(\Gamma)\,,\,G_s(\Gamma)] = \varinjlim_{M\to\infty} \tilde{\Phi}_{f,2}[\mathcal{E}(\Gamma)\,;\,G_s^M] = \varinjlim_{M\to\infty} F_M$$

Il ne nous reste plus qu'à caractériser l'espace $\varinjlim_{M\to\infty} F_M$.

Supposons que : R vérifie l'hypothèse de croissance :

$$(H_1)\left\{\begin{array}{l} \forall M>0,\ \exists M''\ \text{(tendant vers } +\infty \text{ avec } M)\\ \qquad\qquad \exists (a_n)_{n\in N}\ ;\ a_n>0\ ,\ \forall n\in N\\ \qquad\qquad \exists k''>0\\ \text{tels que :}\\ \sup\limits_{n\in N}(1+a_n|\lambda|)^n \leqslant k''R\left(\dfrac{\lambda}{M''}\right)R\left(\dfrac{\lambda}{M}\right)^{-1} \end{array}\right.$$

On a alors le

LEMME 3. – $\forall M>0\,,\,\exists M'\,,M''\,,\,k'\,,k''$ *strictement positifs tels que* : $M\,,\,M'\,,\,M''$ *tendent vers* $+\infty$ *simultanément et :*

$$k'R\left(\frac{\lambda}{M'}\right)\leqslant(1+a_n|\lambda|)^n\,R\left\{\left[\left(\frac{\lambda}{M}\right)^a - n\,\mathrm{Log}(1+a_n|\lambda|)\right]^{\frac{1}{a}}\right\}$$

$$\leqslant k''R\left(\frac{\lambda}{M''}\right)$$

Démonstration. – $\exists k_1$ tel que :

$$k_1\left(\frac{\lambda}{2M}\right)^a\leqslant\left(\frac{\lambda}{M}\right)^a - n\,\mathrm{Log}(1+a_n|\lambda|)\leqslant\left(\frac{\lambda}{M}\right)^a$$

à condition de choisir $(a_n)_{n \in \mathrm{N}}$ tel que

$$\sup_{n \in \mathrm{N}} (n \operatorname{Log}(1 + a_n |\lambda|)) \leqslant \left(\frac{\lambda}{2\mathrm{M}}\right)^a .$$

On a alors :

$$k' \mathrm{R}\left(\left(\frac{\lambda}{2\mathrm{M}}\right)\right) \leqslant \mathrm{R}\left(\left[\left(\frac{\lambda}{\mathrm{M}}\right)^a - n \operatorname{Log}(1 + a_n |\lambda|)\right]^{\frac{1}{a}}\right) \leqslant \mathrm{R}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{M}}\right)$$

et alors il résulte de l'hypothèse (H_1) que :

$$k' \mathrm{R}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{M}'}\right) \leqslant (1 + a_n |\lambda|)^n \mathrm{R}\left(\left[\left(\frac{\lambda}{\mathrm{M}}\right)^a - n \operatorname{Log}(1 + a_n |\lambda|)\right]^{\frac{1}{a}}\right) \leqslant k'' \mathrm{R}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{M}''}\right)$$

On en déduit alors :

$$\varinjlim_{\mathrm{M} \to \infty} \mathrm{F}_{\mathrm{M}} = \varinjlim_{\mathrm{L} \to \infty} \mathrm{G\,R}_{\mathrm{L}} \quad \text{avec}$$

$$\mathrm{G\,R}_{\mathrm{L}} = \left\{ x \in \bigcap_{k \in \mathrm{N}} \mathrm{D}(\Lambda^k) \, ; \, \|x\|^2_{\mathrm{GR}_{\mathrm{L}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathrm{R}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{L}}\right)\right|^2 (\mathcal{E}(d\lambda)x, x) < +\infty \right\}.$$

D'où le

THEOREME 3. – *Soit* $\mathrm{R} : x \longrightarrow \mathrm{R}(x)$ *une fonction dérivable de* $]0, \infty[$ *dans* $]0, \infty[$ *vérifiant :*

1) $\mathrm{R}' > 0$

2) $\dfrac{\mathrm{R}'}{\mathrm{M}'}$ *est décroissant.*

3) R *vérifie l'hypothèse* (H_1).

On peut construire un foncteur d'interpolation $\widetilde{\widetilde{\Phi}}_{f,2}[\ ]$ *défini sur* $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{C}}}$ *et tel que :*

$$\widetilde{\widetilde{\Phi}}_{f,2} [\mathcal{E}(\Gamma), \mathrm{G}_s(\Gamma)] = \lim_{\mathrm{L} \to \infty} \mathrm{G\,R}_{\mathrm{L}} \quad \textit{avec}$$

$$\mathrm{GR_L} = \left\{ x \in \bigcap_{k\in\mathbf{N}} \mathrm{D}(\Lambda^k) \; ; \; \|x\|^2_{\mathrm{GR_L}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \mathrm{R}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{L}}\right) \right|^2 (\mathcal{E}(d\lambda)x, x) < \infty \right\}$$

Remarque 2. – Les hypothèses faites sur R ne sont pas nécessaires, on peut en particulier affaiblir les conditions 1) et 2) du théorème ci-dessus (cf. théorème 2.3) et on peut toujours remplacer R par une fonction équivalente (R et T sont équivalentes si $\exists\, k, k' > 0$ tels que $k\,\mathrm{T}(x) \leqslant \mathrm{R}(x) \leqslant k'\,\mathrm{T}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$).

Cas particuliers. – 1) On peut prendre $\mathrm{R}(x) = e^{|x|^{\alpha'}}$, avec $\alpha' < \alpha$, alors

$$\varinjlim_{\mathrm{L}\to\infty} \mathrm{G\,R_L} \text{ est l'espace } \mathrm{G}_{s'} \text{ avec } \alpha' = \frac{1}{2s'} .$$

2) On peut obtenir d'autres espaces que les espaces de Gevrey, par exemple avec $\mathrm{R}(x) = e^{|x|^{\alpha}\,\mathrm{Log}^{\beta}(1+|x|)}$.

Nous trouvons donc en particulier :

PROPOSITION 5. – $\forall s > 1$, *on peut construire un foncteur d'interpolation* $\tilde{\tilde{\Phi}}_{f,2}[\ ]$ *défini sur* $\tilde{\tilde{\mathcal{C}}}$ *et tel que*

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_{f,2}\,[\mathcal{E}(\Gamma), \mathcal{A}(\Gamma)] = \mathrm{G}_s(\Gamma) .$$

(cf. Proposition 2.1 et remarque 2.1 pour le calcul de f).

Remarque 3. – Considérons le foncteur $\tilde{\tilde{\Phi}}_\theta[\ ]$ du théorème 4.3 ; on vérifie que :

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_\theta\,[\mathcal{E}(\Gamma), \mathcal{A}(\Gamma)] = \mathcal{A}(\Gamma) .$$

On en déduit par exemple le

COROLLAIRE 2. – *Soit* $0 < \mathrm{R}_0 < \mathrm{R}_1 < \infty$; *soit u une application linéaire continue de* $\mathcal{H}_{\mathrm{R}_0}$ *dans* $\mathcal{E}(\Gamma)$ *dont la restriction à* $\mathcal{H}_{\mathrm{R}_1}$ *est continue de* $\mathcal{H}_{\mathrm{R}_1}$ *dans* $\mathcal{A}(\Gamma)$ *; alors u est continue de* $\mathcal{H}_{\mathrm{R}}$ *dans* $\mathcal{A}(\Gamma)$ *pour tout* R *vérifiant* $\mathrm{R}_0 < \mathrm{R} \leqslant \mathrm{R}_1$.

On a évidemment un résultat analogue en remplaçant $(\mathcal{H}_{R_0}, \mathcal{H}_{R_1})$ par $(\mathcal{D}_L p_0, \mathcal{D}_L p_1)$ ou $(\mathcal{S}^{\Gamma_0}, \mathcal{S}^{\Gamma_1})$ ...

De même, on peut vérifier que le foncteur $\tilde{\tilde{\Phi}}_{f,2}$ [ ] de la proposition 5 est tel que :

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_{f,2}[\mathcal{H}_{R_0}, \mathcal{H}_{R_1}] = \mathcal{H}_{R_0}$$

et il en résulte le

COROLLAIRE 3. – *Avec les hypothèses du corollaire 2, u est aussi continue de* $\mathcal{H}_{R_0}$ *dans* $G_s(\Gamma)$, *quel que soit s vérifiant :* $1 < s < \infty$.

4. Généralisation à un ouvert de $\mathbf{R}^n$ avec de "bonnes" conditions aux bords.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ indéfiniment différentiable ; posons $E = L^2(\Omega)$; on sait (cf. [18]) que l'on peut définir un opérateur non borné Λ dans E par :

$$\begin{cases} D(\Lambda) = \{ f \in L^2(\Omega) : \Delta f \in L^2(\Omega) \,;\, f|_{\partial\Omega} = 0 \} \\ \Lambda : f \in D(\Lambda) \longrightarrow \Delta f \in E . \end{cases}$$

Et on montre (cf. [18]) que cet opérateur Λ est auto-adjoint. Nous pouvons donc appliquer exactement les raisonnements du paragraphe 3.

Notons

$$\dot{\mathcal{E}}(\Omega) = \{ x \in \mathcal{E}(\bar{\Omega}) \quad ; \quad \Delta^k x|_{\partial\Omega} = 0 \,,\, k = 0, 1, \dots \}$$

$$\dot{G}_s(\Omega) = \{ x \in G_s(\bar{\Omega}) \quad ; \quad \Delta^k x|_{\partial\Omega} = 0 \,,\, k = 0, 1, \dots \}$$

$$\dot{\mathcal{Q}}(\Omega) = \{ x \in \mathcal{Q}(\bar{\Omega}) \quad ; \quad \Delta^k x|_{\partial\Omega} = 0 \,,\, k = 0, 1, \dots \}$$

Nous avons en particulier (en utilisant en outre [19]) la

PROPOSITION 6. – *Le foncteur d'interpolation* $\tilde{\tilde{\Phi}}_{f,2}$ [ ] *de la proposition 5 réalise aussi :*

$$\overset{\approx}{\Phi}_{f,2}\,[\dot{\mathcal{E}}(\Omega)\,,\,\dot{\mathcal{A}}(\Omega)] = \dot{G}_s(\bar{\Omega})$$

On peut aussi (cf. [18]) définir un opérateur non borné dans E par :

$$\begin{cases} D(\Lambda) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \;;\; \Delta f \in L^2(\Omega) \;;\; \left.\dfrac{\partial f}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \\ \Lambda : f \in D(\Lambda) \longrightarrow \Delta f \in E \end{cases}$$

Λ est encore un opérateur auto-adjoint ; il en résulte (en utilisant encore [19]) la

PROPOSITION 7. – *Le foncteur d'interpolation* $\overset{\approx}{\Phi}_{f,2}$ [ ] *des propositions 5 et 6 réalise aussi :*

$$\overset{\approx}{\Phi}_{f,2}\,[\ddot{\mathcal{E}}(\Omega)\,,\,\ddot{\mathcal{A}}(\Omega)] = \ddot{G}_s(\Omega)$$

où :

$$\ddot{\mathcal{E}}(\Omega) = \left\{ x \in \mathcal{E}(\bar{\Omega}) \;;\; \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta^k x)\,|_{\partial\Omega} = 0\,,\, k \in \mathbf{N} \right\}$$

$$\ddot{\mathcal{A}}(\Omega) = \{ x \in \mathcal{A}(\bar{\Omega}) \;;\; \text{“} \quad = 0\,, \text{“} \}$$

$$\ddot{G}_s(\Omega) = \{ x \in G_s(\bar{\Omega}) \;;\; \text{“} \quad = 0\,, \text{“} \}$$

$\left(\dfrac{\partial}{\partial \nu}\right.$ désigne la dérivée normale$\left.\right)$

Remarque 4 :

Nous n'avons considéré précédemment les espaces $G_s(\Gamma)$ (ou $\dot{G}_s(\Omega)$ ou $\ddot{G}_s(\Omega)$) que pour $1 \leqslant s < \infty$. Toutes les démonstrations sont en fait valables pour $0 < s < \infty$.

Cas $s = 0$:

Il aurait été intéressant, par exemple, de trouver comme espaces d'interpolation entre $G_0(\Gamma)$ et $G_{s_1}(\Gamma)$ les espaces $G_s(\Gamma)$ avec : $0 < s < s_1$;

$$G_0(\Gamma) = \left\{ x \in \bigcap_{k\in\mathbf{N}} D(\Lambda^k) \; ; \; \exists L > 0 \text{ avec } \sup_{k\in\mathbf{N}} \frac{\|\Lambda^k x\|_E}{L^k} < \infty \right\}$$

Cela n'est pas possible (par nos méthodes : Prolongements de foncteurs définis sur $\mathcal{C}(B)$). Considérons simplement le cas $\Gamma = \underset{\approx}{\mathbf{R}}/\mathbf{Z}$. La transformation de Fourier réalise un isomorphisme dans $\overset{\approx}{\mathcal{C}}$ de $(G_0(\Gamma), G_1(\Gamma))$ sur (E_0, E_1) avec :

$E_0 = \{(a_0, \ldots, a_n, \ldots) \; ; \; a_i \in \mathbf{C}$ et $a_i = 0$ sauf pour $i \in I$ fini$\}$ muni de la topologie limite inductive (suivant $n \longrightarrow \infty$) des espaces $\mathbf{C}^n$.

$$E_1 = \varinjlim_{M \to \infty} l^2_{e^{\frac{n}{M}}} .$$

Et on vérifie que pour tout foncteur $\overset{\approx}{\Phi}[\;]$ associé à une norme fonctionnelle, on trouve :

$$\overset{\approx}{\Phi}[E_0, E_1] = E_0 \quad \text{ou} \quad E_1 .$$

(on peut en déduire que toute application linéaire continue de $\mathcal{A}(\Gamma)$ dans $\mathcal{E}(\Gamma)$ dont la restriction à $G_0(\Gamma)$ est continue de $G_0(\Gamma)$ dans $\mathcal{A}(\Gamma)$ est même continue de $\mathcal{A}(\Gamma)$ dans $\mathcal{A}(\Gamma)$).

5. Remarque sur l'interpolation et le passage aux sous-espaces fermés.

Les calculs précédents nous fournissent un exemple "où l'interpolation ne commute pas au passage aux sous-espaces fermés".

Soit Γ le tore à 1 dimension ($\Gamma = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$).

Soit $T : f \in \mathcal{E}(\Gamma) \longrightarrow (f^{(k)})_{k\in\mathbf{N}} \in (L^2(\Gamma))^{\mathbf{N}}$

$$f \in G_s^M(\Gamma) \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|f^{(k)}\|_{L^2(\Gamma)}}{M^{2k}(sk\,!)^2} < \infty \quad ; \quad 1 \leqslant s < \infty \quad ;$$

donc T est un isomorphisme de

$$G_s^1(\Gamma) \quad \text{dans} \quad l^2_{(sk\,!)^{-2}}(L^2(\Gamma)) = E_s$$

$$\mathrm{T}(\mathrm{G}_s^1(\Gamma)) = \left\{ (f_k) \in \mathrm{E}_s \ ; \ f_{k+1} = \frac{d}{dx} f_k \ , \quad \forall k \in \mathrm{N} \right\} = \mathrm{F}_s \, .$$

Vérifions que F_s est un sous-espace fermé de E_s :

Soit $((f_k^n)_{k \in \mathrm{N}})_{n \in \mathrm{N}}$ telle que $\frac{d}{dx} f_k^n = f_{k+1}^n \quad , \quad \forall k \in \mathrm{N}$.

et $(f_k^n) - (f_k) \longrightarrow 0$ dans $l^2_{(sk\,!)^{-2}}(\mathrm{L}^2(\Gamma))$ quand $n \longrightarrow \infty$.

$$\forall k \in \mathrm{N} : \begin{cases} f_k^n \longrightarrow f_k & \text{dans } \mathrm{L}^2(\Gamma) \\ f_{k+1}^n \longrightarrow f_{k+1} & \text{dans } \mathrm{L}^2(\Gamma) \end{cases}$$

Il en résulte que : $\frac{d}{dx} f_k = f_{k+1}$.

T est un isomorphisme dans $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ du couple compatible $(\mathrm{G}_1^1 , \mathrm{G}_2^1)$ sur le couple compatible $(\mathrm{F}_1 , \mathrm{F}_2)$ de sous-espaces fermés de $l^2_{(k!)^{-2}}(\mathrm{L}^2(\Gamma))$ et $l^2_{(2k!)^{-2}}(\mathrm{L}^2(\Gamma))$.

Donc, pour tout foncteur d'interpolation $\Phi[\ ]$ défini sur $\mathcal{C}(\mathrm{B})$ on a

$$\mathrm{T}\,\Phi[\mathrm{G}_1^1 , \mathrm{G}_2^1] = \Phi[\mathrm{F}_1 , \mathrm{F}_2] \, .$$

On sait aussi que $(\mathrm{G}_1^1 , \mathrm{G}_2^1)$ est isomorphe dans $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ à $(l^2_{p(n)} , l^2_{q(n)})$ avec :

$$\begin{cases} e^{\frac{n}{\mathrm{M}}} \leqslant p(n) \leqslant e^{\frac{n}{\mathrm{M}'}} \\ e^{\frac{\sqrt{n}}{\mathrm{M}}} \leqslant q(n) \leqslant e^{\frac{\sqrt{n}}{\mathrm{M}'}} \end{cases} \qquad \mathrm{M} , \mathrm{M}' > 0$$

Soit $\Phi_{f,2}[\ ]$ le foncteur d'interpolation associé à $f(t) = t^{2\alpha - 3}$; $0 < \alpha < 1$.

On a (cf. chapitre 2) :

$$\Phi_{f,2}\,[l^2_{p(n)} , l^2_{q(n)}] = l^2_{r(n)} \qquad \text{avec} \qquad r(n) = p^{1-\alpha}(n)\, q^{\alpha}(n)$$

donc : $e^{\frac{n}{\mathrm{M}''}} \leqslant r(n) \leqslant e^{\frac{n}{\mathrm{M}'}}$ avec M' et $\mathrm{M}'' > 0$;

donc : $$G_1^{M'} \hookrightarrow \Phi_{f,2}[G_1^1, G_2^1] \hookrightarrow G_1^{M''}$$

Or $$\Phi_{f,2}[l^2_{(k!)^{-2}}, l^2_{(2k!)^{-2}}] = l^2_{(k!)^{2a-2}(2k!)^{-2a}}$$

et $$(k!)^{2a-2}(2k!)^{-2a} = (k!)^{-2-2a}\, 2^{-4ak}\, (\pi k)^a \left(1 + 0\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

donc la norme sur $\Phi_{f,2}[F_1, F_2]$ *n'est pas induite par celle de* $\Phi_{f,2}[E_1, E_2]$.

6. Cas de plusieurs opérateurs commutatifs.

Soient : E un espace de Hilbert ; $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ des opérateurs non bornés dans E, auto-adjoints et commutatifs (au sens suivant : quels que soient $1 \leqslant k, l \leqslant n$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, on a :

$$(\Lambda_k - \alpha I)^{-1}(\Lambda_l - \beta I)^{-1} = (\Lambda_l - \beta I)^{-1}(\Lambda_k - \alpha I)^{-1}).$$

Posons $\quad T_k = (iI - \Lambda_k)^{-1} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$

Notons T_k^* l'opérateur adjoint de T_k.

On sait que l'algèbre $\mathcal{G}$, engendrée par les opérateurs

$$I, T_1, \ldots, T_n, T_1^*, \ldots, T_n^*$$

est une B* - algèbre commutative d'opérateurs dans E. A partir de la représentation de cette algèbre, on montre qu'il existe une mesure spectrale $\mathfrak{M}$ auto-adjointe définie sur les boréliens de $\mathbf{C}^n$ et telle que, pour $k = 1, 2, \ldots, n$, on ait :

$$D(\Lambda_k) = \left\{ x \in E \quad ; \quad \int_{\mathbf{C}^n} |\lambda_k|^2 (\mathfrak{M}(d\lambda)x, x) < \infty \right\}$$

$$\Lambda_k x = \lim_{L \to \infty} \int_{\Sigma|\lambda_i| \leqslant L} \lambda_k \, \mathfrak{M}(d\lambda)x \quad , \quad \forall x \in D(\Lambda_k).$$

Etant donnée une fonction f borélienne définie $\mathcal{M}$ - presque partout sur $\mathbf{R}^n$, on peut définir l'opérateur $f(\Lambda) = f(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} D(f(\Lambda)) = \left\{x \in E \; ; \; \lim\limits_{p \to \infty} f_p(\Lambda)x \text{ existe}\right\} \\ \text{avec } f_p(\lambda) = f_p(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \left\{\begin{array}{l} f(\lambda) \text{ si } |f(\lambda)| \leqslant p \\ 0 \text{ si } |f(\lambda)| > p \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$f(\Lambda)x = \lim_{p \to \infty} f_p(\Lambda)x \quad \text{pour} \quad x \in D(f(\Lambda)) .$$

Nous utilisons seulement le cas suivant :

$$f(\lambda) = \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_n^{\alpha_n} \quad ; \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{N} ;$$

alors $f(\Lambda) = \Lambda_1^{\alpha_1} \ldots \Lambda_n^{\alpha_n}$ au sens habituel et

$$\| \Lambda_1^{\alpha_1} \ldots \Lambda_n^{\alpha_n} x \|_E^2 = \int_{\mathbf{R}^n} \lambda_1^{2\alpha_1} \ldots \lambda_n^{2\alpha_n} (\mathcal{M}(d\lambda)x, x)$$

pour $\qquad x \in D(f(\Lambda))$.

Application :

Comme dans le cas d'un seul opérateur auto-adjoint, nous pouvons en utilisant les résultats ci-dessus mettre sous une forme plus commode (de notre point de vue) la norme de $f(\Lambda)x$ pour $x \in D(f(\Lambda))$, et par exemple obtenir des théorèmes d'interpolation pour des espaces construits d'une manière analogue à celle du paragraphe 2.

Nous le montrons sur un exemple simple :

Exemple. – Soient : $\Omega = \{(x_1, x_2) \in]0, 1[\times]0, 1[\}$; $E = L^2(\Omega)$.

Nous pouvons définir des opérateurs Λ_1 et Λ_2 non bornés dans E par :

$$\left\{\begin{array}{l} D(\Lambda_1) = \left\{f \in E \; ; \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \in E \; ; f(0, x_2) = f(1, x_2) = 0\right\} \\ \Lambda_1 f = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \quad , \quad \forall f \in D(\Lambda_1) . \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} D(\Lambda_2) = \left\{ f \in E \, ; \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \in E \, ; f(x_1, 0) = f(x_1, 1) = 0 \right\} \\ \Lambda_2 f \quad = - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \quad , \quad \forall f \in D(\Lambda_2) \, . \end{cases}$$

On montre que les opérateurs Λ_1 et Λ_2 sont auto-adjoints et commutatifs. Il en résulte que :

$$D(\Lambda_1^{k_1} \Lambda_2^{k_2}) = \left\{ f \in E \, ; \| \Lambda_1^{k_1} \Lambda_2^{k_2} f \|_E^2 = \int_{\mathbf{R}^2} \lambda_1^{2k_1} \lambda_2^{2k_2} (\mathfrak{M}(d\lambda) f, f) < \infty \right\}$$

Posons $$\Lambda_1^{k_1} \Lambda_2^{k_2} = \Lambda^{(k)} \, .$$

On peut encore définir :

$$\check{\mathcal{E}}(\Omega) = \{ f \in E \, ; \Lambda^{(k)} f \in E \text{ et } \Lambda^{(k)} f|_{\partial\Omega} = 0 \, , \ \forall (k) \in \mathbf{N}^2 \}$$

$$\check{G}_s(\Omega) = \left\{ f \in \check{\mathcal{E}}(\Omega) \, ; \exists L > 0 \, , \sup_{(k) \in \mathbf{N}^2} \frac{\| \Lambda^{(k)} f \|_E}{L^{|k|} \, \Gamma(2 \, |k| s + 1)} < \infty \right\} ; 1 \leqslant s < \infty .$$

(Ce sont : l'espace des fonctions C^∞ et l'espace des fonctions de Gevrey d'ordre s, avec des conditions au bord).

Posons $$\check{\mathfrak{A}}(\Omega) = \check{G}_1(\Omega) \, .$$

Et, de la même manière qu'au paragraphe 3, on démontre la

PROPOSITION 8. – *Soit* $1 \leqslant s < \infty$.

On peut construire un foncteur d'interpolation $\approx\!\!\!\Phi_{g,2}\,[\ ]$ *défini sur* $\approx\!\!\!\mathfrak{C}$ *tel que :*

$$\overset{\approx}{\Phi}_{g,2} \, [\check{\mathcal{E}}(\Omega) \, , \, \check{\mathfrak{A}} \, \Omega)] = \check{\mathcal{G}}_s(\Omega) \, .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. ARONSZAJN et E. GAGLIARDO, Interpolation spaces and interpolation methods, University of Kansas (1964) *Technical Report* 3.

[2] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques tomes 1 et 2 Hermann Paris.

[3] A.P. CALDERON, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Math* 24 (1964) p. 113-190.

[4] N. DEUTSCH, *C.R. Acad. Sc., Paris,* t 257, p. 3796 et p. 4114-4116.

[5] N. DEUTSCH, *C.R. Acad. Sc. Paris,* t 258 p. 1686-1688 et p. 1981-1983.

[6] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ, Linear operators Part 11 : Spectral Theory, Interscience 1963.

[7] C. FOIAS et J.L. LIONS, sur certains théorèmes d'interpolation, *Acta Scientiarum mathematicarum,* tome XXII. (Szeged 1961).

[8] C. GOULAOUIC *C.R. Acad. Sc. Paris,* t 260 p. 6797-6799 (1965).

[9] C. GOULAOUIC, *C.R. Acad. Sc. Paris,* t 262 p. 333-336 (1966).

[10] P. GRIVARD, Thèse - Paris 1965.

[11] A. GROTHENDIECK, Espaces vectoriels topologiques, Publicaçao da Sociedade de Matematica de Sao Paulo.

[12] L. HORMANDER, Linear partial differential operators, *Springer-Verlag.*

[13] G. KOTHE, Topologische lineare Räume, Vol. 1. *Springer-Verlag.*

[14] P. KREE, Thèse - Paris 1965.

[15] J.L. LIONS, Théorèmes de trace et d'interpolation (1). *Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa* t 13, (1959), p. 389-403.

[16] J.L. LIONS, Théorèmes de trace et d'interpolation (11) *Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa* t 14, (1960), p. 317-331.

[17] J.L. LIONS, Sur les espaces d'interpolation ; dualité, *Math. Scand.* 9 (1961) p. 147-177.

[18] J.L. LIONS et E. MAGENES. Problèmes aux limites non homogènes (VII), *Annali di matematica pura ed applicata* IV Vol. LXIII p. 201-224 (1963).

[19] J.L. LIONS et E. MAGENES, Espaces de fonctions et distributions du type de Gevrey et problèmes aux limites paraboliques, *Annali di matematica pura ed applicata* IV Vol. LXVIII p. 341-418 (1965).

[20] L.L. LIONS et J. PEETRE, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Publications mathématiques de l'IHES* n° 19 (1964).

[21] J. PEETRE, On a interpolation theorem of Foias and Lions, *Acta Szeged* 25 (1964) p. 255-261.

[22] J. PEETRE, *C.R. Acad. Sc. Paris* t 256 (1963), p. 1424-1426.

[23] J. PEETRE, On interpolation functions (à paraître).

[24] J. PEETRE, A theory of interpolation of normed spaces, cours. Brasilia (1963).

[25] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Hermann Paris.

[26] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions à valeurs vectorielles, *Ann. Institut Fourier* 7 (1957) et 8 (1958).

[27] L. SCHWARTZ, Séminaire 1960-1961. Paris.

[28] E.M. STEIN et G. WEISS, Interpolation of operators with change of measures, *Trans. Amer. Math. Soc.* 87 (1958) p. 159-172.

[29] G.O. THORIN, Convexity theorems - Thèse - (*Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.* 9 (1948) p. 1-57).

[30] K. YOSIDA, Functional Analysis, Springer-Verlag.

(*Thèse, Fac. Sciences,* Paris 1967)

Charles GOULAOUIC
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
35 - Rennes