

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAURICE BLAMBERT

GEORGES CHEVALIER

**Suites crameriennes et polynômes de
Dirichlet-Tschebyscheff**

Annales de l'institut Fourier, tome 17, n° 2 (1967), p. 335-358

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_2_335_0

© Annales de l'institut Fourier, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUITES CRAMERIENNES ET POLYNÔMES DE DIRICHLET-TSCHEBYSCHEFF

par Maurice BLAMBERT et Georges CHEVALIER

Introduction.

On se propose de définir une extension de la notion classique de polynôme de Tschébycheff. Les résultats énoncés ci-dessous sont tributaires, pour la plupart, de la notion de suite cramerienne sur un compact et contiennent, comme cas particuliers, des résultats classiques bien connus. La notion introduite de « suite cramerienne » semble particulièrement féconde et adaptée à son objet dans la voie choisie ici.

L'exposé qui suit n'a pas la prétention d'être exhaustif. D'autres résultats à paraître viendront compléter ceux obtenus ici.

A. — On considère une suite finie, positive, strictement croissante (que l'on convient d'appeler une D-suite finie), que l'on note (λ_p) , $p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, (le cas $\lambda_0 = 0$ n'étant pas exclu), et le polynôme dirichletien,

$$f[(a_i)] : \sum_{p=0}^n a_{n-p} \exp(-z\lambda_p),$$

à coefficients dans \mathbf{C} . On désigne par $f[(a_i), z]$ la valeur en $z \in \mathbf{C}$ de ce polynôme, et par (a_i) le point $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^n$.

Soit un compact $E \subset \mathbf{C}$, ne se réduisant pas à un ensemble fini de points. Le nombre complexe $a_0 \neq 0$, le compact $E \subset \mathbf{C}$ et la D-suite (λ_p) étant donnés, on désigne par \mathcal{F} la famille des applications de E dans \mathbf{C} ,

$$z \longmapsto f[(a_i), z], \quad z \in E,$$

indexées par (a_i) sur \mathbf{C}^n . Le polynôme dirichletien $f[(a_i)]$ est appelé « *le germe algorithmique dirichletien* » de l'application d'indice (a_i) de la famille \mathcal{F} (plus succinctement, on appellera $f[(a_i)]$ « *l'al-germe dirichletien* » de l'application d'indice (a_i) de \mathcal{F}). On pose,

$$\forall (a_i) \in \mathbf{C}^n : \quad [\omega(a_i)] = \text{Max} |f[(a_i), z]|, \quad z \in E.$$

Il est trivial que,

$$\forall (a_i) \in \mathbf{C}^n : \quad \omega[(a_i)] > 0,$$

puisque E ne se réduit pas à un ensemble fini. On considère l'application de support \mathbf{C}^n à valeurs dans \mathbf{R}_+^* ,

$$(a_i) \longmapsto \omega[(a_i)]$$

et on désigne par $\Omega(E)$ l'ensemble de ses valeurs, par μ l'infimum de cet ensemble, et par $z(a_i)$ un point considéré de l'ensemble

$$\{z \in E \mid \omega[(a_i)] = |f[(a_i), z]|\};$$

cet ensemble n'est pas vide.

On convient de désigner sous le vocable « *support de la famille \mathcal{F}* » la donnée du nombre complexe $a_0 \neq 0$, du compact $E \subset \mathbf{C}$ et de la D-suite finie (λ_p) ; on le note,

$$S : \{a_0; E; (\lambda_p)\}.$$

On appelle « *polynôme de Dirichlet-Tschebyscheff de support S* » l'al-germe dirichletien d'une application de la famille \mathcal{F} de support S , s'il en existe, dont le maximum de l'ensemble des modules des valeurs, sur le compact E , est égal à μ .

On désigne par \mathcal{F}^* l'ensemble des polynômes de Dirichlet-Tschebyscheff de support S , et on se propose d'établir que $\mathcal{F}^* \neq \emptyset$.

PROPOSITION (A.1). — L'application de support \mathbf{C}^n ,

$$(a_i) \text{---}\circ\text{---}\varpi[(a_i)]$$

est uniformément continue sur son support.

L'application de \mathbf{C}^n dans \mathbf{C} ,

$$(a_i) \text{---}\circ\text{---}f[(a_i), z]$$

indexée par z sur \mathbf{E} , est continue sur \mathbf{C}^n ; l'application, associée à la précédente, de \mathbf{C}^n dans l'ensemble des réels positifs,

$$(a_i) \text{---}\circ\text{---}|f[(a_i), z]|$$

indexée par z sur \mathbf{E} , est donc continue sur son support.

Posant

$$\nu = \text{Max} |\exp(-z\lambda_p)|, \quad p \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad \text{et} \quad z \in \mathbf{E},$$

on a, pour (a_i) et (a'_i) quelconques sur \mathbf{C}^n ,

$$|f[(a_i), z]| - |f[(a'_i), z]| \leq |f[(a_i), z] - f[(a'_i), z]| \leq \nu \sum_{i=0}^n |a_i - a'_i|.$$

Il en résulte que, $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $\exists \alpha_\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$:

$$|(a_i) - (a'_i)| < \alpha_\varepsilon \implies \begin{cases} |\varpi[(a_i)] - |f[(a_i), z_{(a_i)}]| < \varepsilon, \\ |\varpi[(a'_i)] - |f[(a'_i), z_{(a'_i)}]| < \varepsilon. \end{cases}$$

Eu égard à la définition de $\varpi[(a_i)]$, on a,

$$\varpi[(a_i)] \geq |f[(a_i), z_{(a_i)}]|$$

et

$$\varpi[(a'_i)] \geq |f[(a'_i), z_{(a'_i)}]|.$$

Les quatre nombres figurant dans ces deux dernières relations vérifient l'une au moins des trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_1) \quad & \varpi[(a_i)] \geq |f[(a_i), z_{(a_i)}]| \geq \varpi[(a'_i)] \geq |f[(a'_i), z_{(a'_i)}]| \\ (\mathbf{R}_2) \quad & \varpi[(a_i)] \geq \varpi[(a'_i)] \geq |f[(a_i), z_{(a_i)}]| \geq |f[(a'_i), z_{(a'_i)}]| \\ (\mathbf{R}_3) \quad & \varpi[(a_i)] \geq \varpi[(a'_i)] \geq |f[(a'_i), z_{(a'_i)}]| \geq |f[(a_i), z_{(a_i)}]| \end{aligned}$$

et les analogues (\mathbf{R}_4) , (\mathbf{R}_5) , (\mathbf{R}_6) , obtenues en substituant dans (\mathbf{R}_1) , (\mathbf{R}_2) , (\mathbf{R}_3) , (a'_i) à (a_i) et (a_i) à (a'_i) . Ainsi, quelle que soit la relation qui est satisfaite, parmi les trois relations ci-dessus, on a :

$$|(a_i) - (a'_i)| < \alpha_\varepsilon \implies |\varpi[(a_i)] - \varpi[(a'_i)]| < \varepsilon.$$

Considérant le compact $E \subset \mathbf{C}$, et la D -suite finie (λ_p) , $p \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, on considère l'application suivante de E^n dans \mathbf{C} ,

$$(z_i) \longmapsto D[(z_i)]$$

où $D[(z_i)]$ est le déterminant de la matrice

$$\|\exp(-z_i \lambda_{n-j})\|, \quad i \text{ et } j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

PROPOSITION (A.2). — *Il existe au moins un point $(z_i) \in E^n$ tel que*

$$D[(z_i)] \neq 0.$$

La négation de cette assertion est équivalente à la proposition suivante :

$$\forall (z_i) \in E^n \implies D[(z_i)] = 0.$$

Désignant un point quelconque (z_2, \dots, z_n) sur E^{n-1} par $(z_i)'$, on considère la famille des applications suivantes de E dans \mathbf{C} ,

$$z_1 \longmapsto D[z_1, (z_i)'], \quad \text{ou} \quad D[z_1, (z_i)'] = D[(z_i)],$$

indexées par $(z_i)'$ sur E^{n-1} . Chaque application de cette famille n'est autre, comme il est évident, que la restriction à E de la fonction analytique entière sur \mathbf{C} ,

$$z_1 \longmapsto \sum_{j=1}^n A_j \exp(-z_1 \lambda_{n-j})$$

où le nombre A_j est le cofacteur de $D[(z_i)]$ relatif au terme $\exp(-z_1 \lambda_{n-j})$. Les cofacteurs A_j dépendent de $(z_i)'$ mais sont indépendants de z_1 . Comme on sait, cette fonction entière sur \mathbf{C} ne possède sur E qu'un ensemble fini de zéro (pouvant être vide). On a donc,

$$\forall (z_i) \in E^n \implies D[(z_i)] = 0 \iff \forall (z_i)' \in E^{n-1} \text{ et } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : A_j = 0.$$

Désignant un point quelconque (z_3, \dots, z_n) sur E^{n-2} par $(z_i)''$, on considère la famille des applications suivantes de E dans \mathbf{C} ,

$$\text{ou} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : \quad z_2 \longmapsto A_j[z_2, (z_i)''],$$

$$A_j[z_2, (z_i)''] = A_j,$$

indexées par $(j, (z_i)''$). Itérant sur chacune de ces applications le raisonnement ci-dessus, on obtient,

$$\forall (z_i)' \in E^{n-1} \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : A_j = 0$$

$$\forall (z_i)'' \in E^{n-2}, \quad \forall j \quad \text{et} \quad \forall k (\neq j) \in \{1, 2, \dots, n\} : A_{j,k} = 0$$

où $A_{j,k}$ est le cofacteur de A_j relatif au terme $\exp(-z_2 \lambda_{m-k})$, $k \in \{1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$. L'itération du raisonnement ci-dessus conduirait au résultat trivialement faux suivant :

$$\exp(-z_n \lambda_p) = 0, \quad \forall p \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

La contradiction établit la validité de la proposition (A.2).

PROPOSITION (A.3). — *Étant donnée la famille \mathfrak{F} , de support $S : \{a_0; E; (\lambda_p)\}$, d'applications indexées par (a_i) sur C^n , on a,*

$$\forall M \in \Omega(E), \quad \exists \mathcal{C}_M(\text{compact}) \subset C^n : \{(a_i) | [\mathfrak{W}(a_i)] \leq M\} \subset \mathcal{C}_M.$$

Eu égard à la proposition (A.2), $\exists (z_r^0) \in E^n$ tel que $D[(z_r^0)] \neq 0$. On considère le système suivant des n relations linéaires par rapport aux coefficients $a_j, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\sum_{j=1}^n a_j \exp(-z_r^0 \lambda_{n-j}) = f[(a_i), z_r^0] - a_0 \exp(-z_r^0 \lambda_n),$$

$$r \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

On désigne par $D_j[(z_r^0)], j \in \{1, 2, \dots, n\}$, le déterminant de la matrice $\|\alpha_{rk}\|$, où $\forall r \in \{1, \dots, n\}$,

$$k = j : \alpha_{rk} = f[(a_i), z_r^0] - a_0 \exp(-z_r^0 \lambda_n)$$

$$\forall k (\neq j) \in \{1, 2, \dots, n\} : \alpha_{rk} = \exp(-z_r^0 \lambda_{n-k})$$

et par $D_{j,h}[(z_r^0)]$ le cofacteur de $D_j[(z_r^0)]$ correspondant à l'élément

$$\alpha_{h,j} = f[(a_i), z_h^0] - a_0 \exp(-z_h^0 \lambda_n), \quad h \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

On sait que,

$$a_j = (-1)^{j+1} D_j[(z_r^0)] / D[(z_r^0)]$$

$$= [(-1)^{j+1} / D[(z_r^0)]] \sum_{h=1}^n \{ D_{j,h}[(z_r^0)] (f[(a_i), z_h^0] - a_0 \exp(-z_h^0 \lambda_n)) \}.$$

Soit $M \in \Omega(E)$. Il existe au moins un point de \mathbf{C}^n , que l'on note $(a_i)_M$, et dans \mathcal{F} une application (les projections $a_{i,M}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, de $(a_i)_M$ sont précisément les valeurs des coefficients a_i de l'al-gèrme dirichletien de cette application) dont le maximum de l'ensemble des modules des valeurs sur E , $\varpi[(a_i)_M]$, est égal à M ; on a,

$$|f[(a_i)_M, z_r^0]| \leq M, \quad \forall r \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Posant

$$M'[(z_r^0)] = \text{Max} |a_0 \exp(-z_r^0 \lambda_n)|, \quad r \in \{1, 2, \dots, n\},$$

et

$$D'[(z_r^0)] = \text{Max} |D_{j,h}[(z_r^0)]|, \quad j \text{ et } h \in \{1, 2, \dots, n\},$$

on a,

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : |a_{j,M}| \leq (M + M'[(z_r^0)])nD'[(z_r^0)]/|D[(z_r^0)]|.$$

Désignant par $\mathfrak{M}[(z_r^0), M]$ la valeur du second membre de cette dernière relation, on considère le sous-ensemble suivant de \mathbf{C}^n ,

$$\mathcal{C}_M = \{(a_i) \in \mathbf{C}^n \mid |a_i| \leq \mathfrak{M}[(z_r^0), M], i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Il est trivial que $\mathcal{C}_M \neq \emptyset$. \mathcal{C}_M est borné et fermé dans \mathbf{C}^n ; c'est un compact qui est l'adhérence d'un cube de \mathbf{C}^n . Tout point $(a_i) \in \mathbf{C}^n$ tel que $\varpi[(a_i)] \leq M$, appartient à \mathcal{C}_M (a_0 conservant la valeur fixée dans la donnée du support S de \mathcal{F}).

On se propose maintenant de déduire des propositions antérieures que l'ensemble \mathcal{F}^* des polynômes de Dirichlet-Tschebyscheff, de support S , est non vide. On pose,

$$M_0 = \text{Max} |a_0 \exp(-z \lambda_n)|, \quad z \in E.$$

Il est trivial que $\mu \leq M_0 \in \Omega(E)$. Eu égard à la définition de μ , deux cas sont « à priori » possibles :

$$1) \mu \in \Omega(E),$$

ou bien

2) $\mu \notin \Omega(E)$ mais cependant μ appartient à l'adhérence dans \mathbf{R} de $\Omega(E)$ (que l'on note $\bar{\Omega}(E)$).

Si $\mu \in \Omega(E)$, il est trivial que l'ensemble

$$\mathfrak{K}_\mu = \{(a_i) \in \mathbf{C}^n \mid \varpi[(a_i)] = \mu\}$$

est non vide. Tout polynôme $f[(a_i)]$ avec $(a_i) \in \mathfrak{K}_\mu$ est un polynôme de Dirichlet-Tschebyscheff de support S et réciproquement, tout polynôme de Dirichlet-Tschebyscheff de support S a un indice appartenant à \mathfrak{K}_μ . Ainsi

$$(a_i) \in \mathfrak{K}_\mu \iff [f(a_i)] \in \mathfrak{F}^*;$$

\mathfrak{F}^* est non vide.

Si $\mu \in \Omega(E)$, on a nécessairement, par définition de μ , comme on l'a déjà dit, $\mu \in \overline{\Omega(E)}$. Il est trivial que $\mu < M_0$. On peut extraire de $\Omega(E)$ une suite infinie strictement positive et strictement décroissante, (μ_n) , telle que : $\mu_n < M_0$ et $\lim \mu_n = \mu, n \uparrow \infty$. A cette suite, on peut associer la suite des ensembles \mathfrak{E}_n suivants :

$$\mathfrak{E}_n = \{(a_i) \in \mathbf{C}^n \mid \varpi[(a_i)] = \mu_n\}.$$

Il est trivial que $\mathfrak{E}^n \neq \emptyset$ (puisque $\mu_n \in \Omega(E)$) et que $\mathfrak{E}_n \cap \mathfrak{E}_{n'} = \emptyset$ si et seulement si $n \neq n'$. On désigne par $(a_i)_n$ un point pris arbitrairement sur \mathfrak{E}_n . On associe ainsi à la suite strictement décroissante (μ_n) une suite ponctuelle $((a_i)_n)$. Chacun des points de cette suite ponctuelle appartient au cube compact \mathfrak{C}_{M_0} . L'adhérence de l'ensemble de ces points appartient aussi à \mathfrak{C}_{M_0} . On désigne par $(a_i)^*$ un point du dérivé de l'ensemble union des $(a_i)_n$. Ce point $(a_i)^*$ appartient à \mathfrak{C}_{M_0} . Puisque l'application $(a_i) \rightarrow \varpi[(a_i)]$ est continue au point $(a_i)^* \in \mathfrak{C}_{M_0}$, on a,

$$\lim \varpi[(a_i)] = \mu, \quad (a_i) \rightarrow (a_i)^*$$

et donc $\mu = \varpi[(a_i)^*]$; ainsi $\mu \in \Omega(E)$. Donc si $\mu \notin \Omega(E)$, on a aussi $\mu \notin \overline{\Omega(E)}$; μ ne peut pas être alors l'infimum de l'ensemble $\Omega(E)$. Le cas (2) est impossible. Ainsi $\mu \in \Omega(E)$ et donc $\mathfrak{F}^* \neq \emptyset$.

B. — On a prouvé, au paragraphe (A), que l'ensemble \mathfrak{F}^* associé à la famille \mathfrak{F} de support S, est non vide. On convient de désigner plus particulièrement par (a_i^*) , au lieu de (a_i) , avec $a_i^* = a_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, l'indice du polynôme $f[(a_i)]$ si et seulement si $f[(a_i)] \in \mathfrak{F}^*$. Au paragraphe (C) de ce chapitre, on se propose d'établir, sous des conditions

convenables, que l'ensemble \mathcal{F}^* se réduit à un seul élément. Dans ce but, on énonce :

LEMME (B.1). — Si la D-suite finie (λ_p) du support S se réduit à la D-suite des entiers successifs, $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, alors pour chaque élément $f[(a_i^*)]$ de l'ensemble \mathcal{F}^* , l'ensemble associé

$$\{z \in E \mid |f[(a_i^*), z]| = \mu, \quad \text{avec} \quad \mu = \text{Inf } \Omega(E)\}$$

contient au moins $n + 1$ points (on suppose E inclus dans une bande du type $\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi \leq \Im(z - z_0) < \pi\}$ ou du type $\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi < \Im(z - z_0) \leq \pi\}$, où z_0 est fixe sur \mathbf{C}). La négation de l'assertion de ce lemme est équivalente à la proposition suivante :

PROPOSITION (A'). — Sous les conditions relatives à (λ_p) et E figurant dans (B.1), on peut trouver dans \mathcal{F}^* un polynôme $f[(a_i^*)]$ vérifiant la condition suivante : il existe un entier $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ et p valeurs $z_k \in E$, pour $k \in \{1, 2, \dots, p\}$, deux à deux distinctes telles que $|f[(a_i^*), z_k]| = \mu$ et

$$\forall z \in E - \bigcup_{k=1}^p z_k : \quad \mu > |f[(a_i^*), z]|.$$

On peut prouver la proposition suivante :

PROPOSITION (B'). — Eu égard à la validité de la proposition (A'), on peut toujours trouver dans la famille \mathcal{F} une application d'indice (a_i) telle que $\varpi[(a_i)] < \mu$.

Ainsi (A') impliquant (B') conduit à une contradiction, à savoir, l'existence dans \mathcal{F} d'au moins une application dont le maximum de l'ensemble des modules des valeurs sur E est strictement inférieur à l'infimum de $\Omega(E)$. On désigne par $\varphi[(\theta_i)]$ le polynôme dirichletien, $\sum_{p=1}^n \theta_p \exp(-z\lambda_{n-p})$, à coefficients indéterminés dans \mathbf{C} et dont la D-suite des exposants (λ_p) se réduit à la suite des entiers successifs $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. On considère l'application $z \rightarrow f[(a_i^*), z]$ d'indice (a_i^*) , vérifiant la condition de (A'). Eu égard aux conditions satisfaites par (λ_p) et E la proposition suivante est évidente :

PROPOSITION (B.2). — *Le système des p équations linéaires*
 $\varphi[(\theta_i), z_k] = f[(a_i^*), z_k], \quad k \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad \text{avec } p \leq n$
à n inconnues $\theta_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, admet au moins une solution.

On considère le polynôme dirichletien

$$F[(\alpha_i)] : \quad \sum_{p=0}^n \alpha_{n-p} \exp(-z\lambda_p),$$

où les coefficients α_{n-p} sont définis de la manière suivante :

$$\alpha_{n-p} = a_{n-p}^* - \alpha\theta_{n-p}, \quad \forall p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{avec } \theta_0 = 0,$$

et l'on a,

$$\forall z \in E : \quad z \rightarrow F[(\alpha_i), z] = f[(a_i^*), z] - \alpha\varphi[(\theta_i), z],$$

où α est une constante appartenant à $]0, 1[$, où $f[(a_i^*)] \in \mathcal{F}^*$ satisfait à (A'), et où $\varphi[(\theta_i)]$ satisfait à (B.2). Il est évident, eu égard à la manière dont $\varphi[(\theta_i)]$ a été défini, que l'application $z \rightarrow F[(\alpha_i), z]$, de support E , appartient à \mathcal{F} . Les applications $z \rightarrow f[(a_i^*), z]$ et $z \rightarrow \varphi[(\theta_i), z]$ de E dans \mathbf{C} , sont uniformément continues sur leur support E ; on a,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0, \quad \forall z \in \{E \mid |z - z_k| \leq \delta_\varepsilon\} : \\ |f[(a_i^*), z] - f[(a_i^*), z_k]| < \varepsilon,$$

et $|\varphi[(\theta_i), z] - \varphi[(\theta_i), z_k]| < \varepsilon$. (δ_ε indépendant de k).

On désigne par $D_{k, \varepsilon}$ l'ensemble compact

$$\{z \in E \mid |z - z_k| \leq \delta_\varepsilon\},$$

et on pose,

$$D_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^p D_{k, \varepsilon} \quad \text{et} \quad E_\varepsilon = E - D_\varepsilon.$$

Si $z \in D_\varepsilon$, on peut trouver un indice $k_z \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $z \in D_{k_z, \varepsilon}$. Par définition de $D_{k_z, \varepsilon}$ on a,

$$\text{et} \quad \begin{aligned} |f[(a_i^*), z] - f[(a_i^*), z_{k_z}]| < \varepsilon, \quad \text{avec } |f[(a_i^*), z]| \leq \mu, \\ |\varphi[(\theta_i), z] - \varphi[(\theta_i), z_{k_z}]| < \varepsilon. \end{aligned}$$

On pose

$$Z = f[(a_i^*), z] \quad \text{et} \quad Z_{k_z} = f[(a_i^*), z_{k_z}],$$

et on désigne par $\mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}$ le disque

$$\{z' \in \mathbf{C} \mid |z' - Z_{k_z}| < \varepsilon\},$$

et par Γ le disque fermé $\{z' \in \mathbf{C} \mid |z'| \leq \mu\}$. On pose,

$$Z_\alpha = \alpha\varphi[(\theta_i), z] \quad \text{et} \quad Z_{k_z, \alpha} = \alpha\varphi[(\theta_i), z_{k_z}]$$

et on désigne par $\mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}^\alpha$ l'ensemble $\{z' \in \mathbf{C} \mid |z' - Z_{k_z, \alpha}| < \alpha\varepsilon\}$.

Ainsi

$$z \in D_\varepsilon \implies Z \in \mathcal{D}_{k_z, \varepsilon} \cap \Gamma \quad \text{et} \quad Z_\alpha \in \mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}^\alpha.$$

Eu égard aux relations

$$\varphi[(\theta_i), z_k] = f[(a_i^*), z_k], \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, p\},$$

il est trivial que les points $z = 0, Z_{k_z}, Z_{k_z, \alpha}$ sont alignés dans \mathbf{C} . Les disques ouverts $\mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}$ et $\mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}^\alpha$ sont homothétiques, avec le point $z = 0$ pour centre d'homothétie.

Il est évident géométriquement que,

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0, \quad \forall \alpha \in]0, (\mu - \varepsilon)/(\mu + \varepsilon)[: \\ \{0\} \subset \mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}^\alpha, \quad \mathcal{D}_{k_z, \varepsilon} \cap \mathcal{D}_{k_z, \varepsilon}^\alpha = \emptyset \\ \text{et} \quad |Z - Z_\alpha| < \mu. \end{aligned}$$

Si, maintenant $z \in E_\varepsilon$ (l'ensemble E_ε n'est pas nécessairement un fermé dans E), on pose,

$$\mu_1 = \text{Sup } |f[(a_i^*), z]|, \quad z \in E_\varepsilon$$

et donc $\mu_1 < \mu$

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \text{Max } |\varphi[(\theta_i), z]|, \quad z \in E \\ \mu' &= \text{Sup } |F[(\alpha_i), z]|, \quad z \in E_\varepsilon. \end{aligned}$$

On a $\mu' \leq \mu_1 + \alpha\mu_0$, et donc $\mu' < \mu$ si α est choisi appartenant à l'intervalle $]0, (\mu - \mu_1)/\mu_0[$. Par suite,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \exists \alpha \in]0, (\mu - \varepsilon)/(\mu + \varepsilon)[\cap]0, (\mu - \mu_1)/\mu_0[: \\ \text{Max } |F[(\alpha_i), z]| < \mu, \quad z \in E.$$

On en déduit que $f[(a_i^*)]$ ne peut pas simultanément appartenir à \mathcal{F}^* et vérifier la condition de (A'). La proposition (A') est donc fautive, et l'égalité $|f[(a_i^*), z]| = \mu$ est satisfaite en au moins $n + 1$ points de E .

Il est intéressant de généraliser le lemme (B.1) en ne se

limitant pas à la considération d'une D-suite (λ_p) qui se réduit à la suite des entiers successifs $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Dans ce but, on convient de dire qu'une D-suite

$$(\lambda_p), p \in \{0, 1, 2, \dots, n\},$$

est *cramérienne* sur un compact E de \mathbf{C} si pour chaque entier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ à tout système de k valeurs distinctes de E on peut associer une sous D-suite de k termes, $\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2}, \dots, \lambda_{r_k}$, avec $r_k \leq n - 1$, extraite de (λ_p) , telle que,

$$\det \|\exp(-z_j \lambda_{r_i})\| \neq 0, \quad i \text{ et } j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

On peut alors énoncer :

LEMME (B.1'). — Si la D-suite (λ_p) du support S est *cramérienne* sur le compact E de \mathbf{C} alors pour chaque élément $f[(a_i^*)]$ de l'ensemble \mathcal{F}^* , l'ensemble

$$\{z \in E \mid |f[(a_i^*), z]| = \mu, \text{ avec } \mu = \text{Inf } \Omega(E)\}$$

contient au moins $n + 1$ points.

La démonstration de ce lemme est la même mot pour mot que celle du lemme (B.1) puisque la proposition (B.2) est vraie dans le cas d'un polynôme dirichletien,

$$\varphi[(\theta_i)] : \sum_{p=1}^n \theta_p \exp(-z \lambda_{n-p})$$

à coefficients à déterminer, lorsque la D-suite (λ_p) est *cramérienne* sur E .

Remarque. — Si la D-suite (λ_p) se réduit à la suite des entiers successifs $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, alors cette D-suite particulière est comme on sait *cramérienne* sur tout sous-ensemble compact E de \mathbf{C} appartenant à une bande de \mathbf{C} du type

$$\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi \leq \Im(z - z_0) < \pi\}$$

ou du type

$$\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi < \Im(z - z_0) \leq \pi\},$$

où z_0 est fixe sur \mathbf{C} .

C. — Dans la famille \mathcal{F} , de support $S: \{a_0; E; (\lambda_p)\}$, des applications $z \rightarrow f[(a_i), z]$ de E dans \mathbf{C} , on considère

la sous-famille — que l'on désigne par $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$ — définie de la manière suivante : l'application f de \mathcal{F} d'indice (a_i) appartient à $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$ si et seulement si $(a_i) \in \mathbf{R}^n$. Désignant par $\Omega_{\mathbf{R}}(\mathbf{E})$ l'ensemble des valeurs de la restriction à \mathbf{R}^n de l'application de \mathbf{C}^n dans \mathbf{R}_+^* ,

$$(a_i) \longmapsto \omega[(a_i)],$$

(restriction que l'on convient de noter : $(a_i) \longmapsto \omega_{\mathbf{R}}[(a_i)]$) et désignant par $\mu_{\mathbf{R}}$ l'infimum de $\Omega_{\mathbf{R}}(\mathbf{E})$, il est alors trivial que $\mu_{\mathbf{R}} \geq \mu$. On désigne par $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$ un sous-ensemble des al-germes dirichletiens des applications de la famille $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$, défini de la manière suivante :

$f[(a_i)] \in \mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites

- 1) $z \rightarrow f[(a_i), z]$ appartient à $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$ de support S
- 2) $\omega_{\mathbf{R}}[(a_i)] = \mu_{\mathbf{R}}$.

On remarquera que toutes les propositions antérieures énoncées en considérant la famille \mathcal{F} de support S peuvent être transposées en se limitant à la considération de la sous-famille $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$ de même support S . Dans ce paragraphe, on se propose de prouver que, dans le cas où \mathbf{E} est un ensemble compact de \mathbf{R} et où (λ_p) est une D-suite cramérienne sur \mathbf{E} , l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$ se réduit à un seul élément. Certaines propositions qui suivent sont valables sans les conditions restrictives qu'on vient d'énoncer sur \mathbf{E} et sur (λ_p) et sans se limiter à la sous-famille $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}$. On rappellera ces conditions et cette limitation dans les cas opportuns.

PROPOSITION (C.1). — *L'ensemble \mathcal{F}^* des polynômes de Dirichlet-Tschebyscheff de support $S : \{a_0; \mathbf{E}; (\lambda_p)\}$ contient une infinité d'éléments ou bien se réduit à un seul élément.*

On sait que $\mathcal{F}^* \neq \emptyset$. Si \mathcal{F}^* ne se réduit pas à un seul élément, on considère deux éléments distincts de cet ensemble dont on note $(a_{1,i}^*)$ et $(a_{2,i}^*)$ les indices (deux éléments de \mathcal{F}^* sont distincts si et seulement si leurs indices sont distincts). On considère en outre la suite des polynômes dirichletiens d'indices (a_i^p) suivants, indexés par p sur \mathbf{N}^* :

$$f[(a_i^p)] : \sum_{j=0}^n a_{n-j}^p \exp(-z\lambda_j), \quad \text{où } a_0^p = a_0, \quad \forall p \in \mathbf{N}^*,$$

dont les indices (a_i^p) satisfont aux relations de recurrence suivantes :

$$\forall p \in \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 3\} \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \\ a_i^p = \alpha a_i^{p-1} + \beta a_i^{p-2}$$

avec $a_i^1 = a_{1,i}^*$ et $a_i^2 = a_{2,i}^*$, où α et β sont deux constantes strictement positives vérifiant la condition $\alpha + \beta = 1$. Par construction, les applications de E dans C suivantes, $z \mapsto f[(a_i^p), z]$, indexées par (a_i^p) , appartiennent à la famille \mathcal{F} de support $S : \{a_0; E; (\lambda_p)\}$. On a,

$$\forall p \in \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 3\} :$$

$$\text{Max} |f[(a_i^p), z]| \leq \alpha \text{Max} |f[(a_i^{p-1}), z]| + \beta \text{Max} |f[(a_i^{p-2}), z]|, \quad z \in E.$$

Si les polynômes d'indices (a_i^{p-1}) et (a_i^{p-2}) appartiennent à \mathcal{F}^* (ils appartiennent à \mathcal{F}^* pour $p = 3$, par hypothèse) alors le polynôme d'indice (a_i^p) appartient aussi à \mathcal{F}^* ; en effet, on a alors,

$$\omega[(a_i^p)] \leq \alpha \omega[(a_i^{p-1})] + \beta \omega[(a_i^{p-2})] = \mu;$$

en outre, $\omega[(a_i^p)]$ ne peut pas être strictement inférieur à μ ; donc $\omega[(a_i^p)] = \mu$ et $f[(a_i^p)] \in \mathcal{F}^*$. Eu égard à cette remarque, tous les polynômes d'indices (a_i^p) pour p sur \mathbf{N}^* appartiennent à \mathcal{F}^* .

Remarque. — La technique utilisée dans la démonstration de la proposition (C.1) montre que si l'ensemble des indices des éléments de \mathcal{F}^* ne se réduit pas à un point de C^n alors cet ensemble est nécessairement une partie convexe de C^n . On désigne par \mathcal{L} l'ensemble des indices des éléments de \mathcal{F}^* ; ainsi $(a_i) \in \mathcal{L}$ si et seulement si $f[(a_i)] \in \mathcal{F}^*$ (cet indice (a_i) est alors noté de préférence, comme on l'a déjà précisé antérieurement, (a_i^*) , avec $a_i^* = a_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$). On convient de dire que les deux polynômes d'indices $(a_{1,i}^*)$ et $(a_{2,i}^*)$ sont des « *polynômes générateurs* » de la suite $f[(a_i^p)]$. On dira aussi que la suite ponctuelle $((a_i^p))$ est « *la suite récurrentielle de générateurs $(a_{1,i}^*)$ pondéré par α et $(a_{2,i}^*)$ pondéré par β* »; les deux points $(a_{1,i}^*)$ et $(a_{2,i}^*)$ constituent une « *base* » de la suite (a_i^p) .

PROPOSITION (C.2). — Si la D-suite (λ_p) du support $S : \{a_0; E; (\lambda_p)\}$ est cramerienne sur E et si \mathcal{F}^* de support S

ne se réduit pas à un seul élément alors, les deux points $(a_{1,i}^*)$ et $(a_{2,i}^*)$ appartenant à \mathcal{L} et (a_i^p) étant une suite récurrentielle dont ces deux points sont des générateurs respectivement pondérés par α et β strictement positifs, avec $\alpha + \beta = 1$, il existe n' points sur E , avec $n' \geq n + 1$ (n étant l'indice du terme maximum de la D-suite de la base S de \mathcal{F}), que l'on note

$$z_k, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n' - 1\}, \quad \text{tels que} \quad \forall p \in \mathbf{N}^*$$

et $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n' - 1\}$:

$$f[(a_{1,i}^*), z_k] = f[(a_{2,i}^*), z_k] = f[(a_i^p), z_k]$$

avec

$$|f[(a_i^p), z_k]| = \mu = \text{Inf } \Omega(E).$$

Soit $p_0 (\geq 3) \in \mathbf{N}$. Eu égard à la proposition (B.1'), on sait que l'ensemble

$$\{z \in E \mid |f[(a_i^{p_0}), z]| = \mu = \text{Inf } \Omega(E)\},$$

contient $n + 1$ points au moins. On note

$$z_k, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n' - 1\},$$

n' (avec $n' \geq n + 1$) points pris sur cet ensemble. On a,

$$f[(a_i^{p_0}), z_k] = \alpha f[(a_i^{p_0-1}), z_k] + \beta f[(a_i^{p_0-2}), z_k].$$

Or

$$|f[(a_i^{p_0}), z_k]| = \mu \implies |f[(a_i^{p_0-1}), z_k]| = \mu;$$

en effet, si l'implication était fautive, on aurait nécessairement,

$$|f[(a_i^{p_0-1}), z_k]| = \mu' < \mu$$

puisque, eu égard à $(a_i^{p_0-1}) \in \mathcal{L}$, on ne peut pas avoir

$$\text{Max } |f[(a_i^{p_0-1}), z]| > \mu, \quad z \in E$$

Il en résulterait,

$$\mu \leq \alpha \mu' + \beta \mu'' < \mu, \quad \text{avec } \mu'' = |f[(a_i^{p_0-2}), z_k]| \leq \mu.$$

La contradiction entraîne la validité de l'implication ci-dessus. Le même raisonnement prouve aussi que,

$$|f[(a_i^{p_0}), z_k]| = \mu \implies |f[(a_i^{p_0-2}), z_k]| = \mu.$$

Il en résulte que,

$$|f[(a_i^{p_0}), z_k]| = \mu \implies |f[(a_i^r), z_k]| = \mu, \quad \forall r \in \{1, 2, \dots, p_0-1\}.$$

Enfin, on a,

$$f[(a_i^{p_0-1}), z_k] = f[(a_i^{p_0-2}), z_k],$$

sinon, on aurait nécessairement $|f[(a_i^{p_0}), z_k]| < \mu$; d'où résulte la proposition (C.2).

PROPOSITION (C.3). — *Si dans le support $S : \{a_0; E; (\lambda_p)\}$ les termes de la D-suite (λ_p) sont des entiers et si cette D-suite est cramerienne sur l'ensemble compact E de \mathbf{R} , et si a_0 est réel, alors l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$ des polynômes à coefficients réels de Dirichlet-Tschebyscheff de support S se réduit à un seul élément.*

Puisque les termes de la suite (λ_p) sont des entiers, il est trivial que tout polynôme dirichletien

$$f[(a_i)] : \sum_{p=0}^n a_{n-p} \exp(-z\lambda_p), \quad \text{avec } a_0 \neq 0,$$

est un polynôme taylorien de degré λ_n par rapport à la variable $z^* = \exp(-z)$, ne comportant au plus que les termes de degrés $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$. Supposons fautive la proposition ci-dessus. L'ensemble $\mathcal{F}_{\mathbf{R}}^*$ contient alors une infinité d'éléments. Soient (a_i^{*1}) et (a_i^{*2}) les indices de deux distincts d'entre eux. Eu égard à la proposition (C.2), il existe, sur E , n' points z_k , $k \in \{0, 1, 2, \dots, n' - 1\}$, avec $n' \geq n + 1$, tels que,

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n' - 1\} : \\ f[(a_i^{*1}), z_k] = f[(a_i^{*2}), z_k], \quad \text{avec } |f[(a_i^{*1}), z_k]| = \mu.$$

On considère le polynôme dirichletien

$$\psi_D : \sum_{p=1}^n (a_p^{*1} - a_p^{*2}) \exp(-z\lambda_{n-p}).$$

Ce polynôme admet les n' valeurs $z_k \in E$ pour racines. On a, $\forall z \in E$,

$$\psi_T(z^*) = \sum_{p=1}^n (a_p^{*1} - a_p^{*2}) z^{*\lambda_{n-p}}.$$

Le polynôme taylorien ψ_T est de degré λ_{n-1} au plus par rapport à la variable z^* . Puisque $(a_i^{*1}) \neq (a_i^{*2})$, il existe nécessairement un entier $p_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ satisfaisant à la condition,

$$a_p^{*1} = a_p^{*2}, \quad \forall p \in \{0, 1, 2, \dots, p_0-1\}, \quad \text{et} \quad a_{p_0}^{*1} \neq a_{p_0}^{*2}.$$

Deux cas sont « à priori » possibles; ce sont :

$$n' > \lambda_{n-1} \quad \text{ou bien} \quad n' \leq \lambda_{n-1}.$$

Or le cas $n' > \lambda_{n-1}$ est impossible puisque $(a_i^{*2}) \neq (a_i^{*1})$.

Soit donc $n' \leq \lambda_{n-1}$; ce qui implique $\lambda_{n-1} \geq n + 1$. On a, $\forall z \in E$, avec $z^* = \exp(-z)$

$$\psi_T(z^*) = (a_{p_0}^{*1} - a_{p_0}^{*2}) \prod_{k=0}^{n'-1} (z^* - z_k^*) \psi_{T,1}(z^*),$$

où le polynôme taylorien ψ_T admet pour racines les n' valeurs strictement positives z_k^* , et où $\psi_{T,1}$ est un polynôme taylorien de la variable z^* , de degré $\lambda_{n-1} - n'$ au plus. Or le nombre des variations présentées par la suite des coefficients de ψ_T est au plus égal à $n - 1$; ce polynôme ψ_T , eu égard au théorème bien connu de Descartes, admet donc au plus $n - 1$ racines réelles positives. Ce résultat est en contradiction avec celui obtenu antérieurement où on a mis en évidence l'existence de $n' \geq n + 1$ racines distinctes strictement positives pour ψ_T . De cette contradiction résulte, puisque les coefficients de ψ_T ne sont pas tous égaux à 0, qu'on ne peut pas extraire de \mathcal{F}_R^* deux éléments distincts. \mathcal{F}_R^* se réduit donc à un seul élément.

Remarque. — La proposition (C.3) reste vraie si, un peu plus généralement, les termes de la D-suite finie (λ_p) sont des éléments de Q , et non pas seulement de N , et si cette D-suite est cramerienne sur le compact E de R . En effet, si $\lambda_p \in Q$, $\forall p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, alors il existe $n_0 \in N^*$ tel que $\lambda_p = \lambda'_p/n_0$, $\forall p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, où la suite (λ'_p) est une D-suite finie extraite de N . Soit $(a_i^*) \in \mathcal{L}_R$ (\mathcal{L}_R désignant l'ensemble des indices des éléments de \mathcal{F}_R^*); on a,

$$f[(a_i^*), z] = \sum_{p=0}^n a_p^* \exp(-z \lambda'_{n-p}/n_0).$$

Supposons fausse l'assertion de (C.3) sous la nouvelle condition relative à (λ_p) . L'ensemble \mathcal{L}_R est un ensemble convexe (donc un intervalle) qui alors ne se réduit pas à un seul point. Soient (a_i^{*1}) et (a_i^{*2}) deux points de \mathcal{L}_R . On considère le polynôme dirichletien,

$$\psi_D : \sum_{p=1}^n (a_p^{*1} - a_p^{*2}) \exp(-z\lambda'_{n-p}/n_0).$$

Posant $z_1 = z/n_0$, le raisonnement fait ci-dessus dans la démonstration de (C.3), utilisant le polynôme ψ_D de la variable z , est valable ici mot pour mot avec le nouveau polynôme ψ_D , de la variable z_1 .

Plus généralement, on énonce :

PROPOSITION (C.4). — *Si la D-suite (λ_p) du support $S : \{a_0; E; (\lambda_p)\}$ de \mathcal{F} est cramérienne sur le compact $E \subset \mathbb{R}$, et si a_0 est réel, alors l'ensemble \mathcal{F}_R^* des polynômes à coefficients réels de Dirichlet-Tschebyscheff de support S , se réduit à un seul élément.*

La démonstration de cette proposition est presque mot pour mot la même que celle de (C.3), aux précautions suivantes près : puisque le polynôme

$$\psi_T : \sum_{p=1}^n (a_p^{*1} - a_p^{*2}) z^{*\lambda_{n-p}}$$

n'est plus ici un polynôme à exposants entiers, il suffit pour la validité de la conclusion, de substituer, dans la démonstration antérieure, à l'utilisation du théorème de Descartes celle d'un théorème bien connu et plus général dû à Laguerre.

D. — On considère la famille des polynômes dirichletiens \mathcal{F} de support $S : \{a_0; E; (\lambda_p)\}$, où E est un compact de \mathbf{C} et où (λ_p) est une D-suite vérifiant la condition suivante,

$$\forall p \in \{1, 2, \dots, n\} : \lambda_p = (p + 1)\lambda_0, \text{ avec } \lambda_0 \in \mathbf{R}_+^*.$$

On remarquera qu'une telle D-suite est nécessairement cramérienne sur tout compact de \mathbf{C} appartenant à une bande de \mathbf{C} — que l'on désigne par $\mathcal{B}\{z_0; 2\pi/\lambda_0\}$ — du type

$$\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi/\lambda_0 \leq \Im(z - z_0) < \pi/\lambda_0\}$$

ou du type

$$\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi/\lambda_0 < \Im(z - z_0) \leq \pi/\lambda_0\},$$

où z_0 est une constante de \mathbf{C} . On convient de dire que $\mathfrak{B}\{z_0; 2\pi/\lambda_0\}$ est une « bande horizontale semi-ouverte de \mathbf{C} , centrée sur le point z_0 , et d'épaisseur égale à $2\pi/\lambda_0$ ». La proposition suivante est élémentaire.

PROPOSITION (D.1). — *Si (λ_p) est une D-suite satisfaisant à la condition ci-dessus et si E est un compact appartenant à une bande $\mathfrak{B}\{z_0; 2\pi/\lambda_0\}$ alors l'ensemble \mathfrak{F}^* associé à la famille \mathfrak{F} de support $S: \{a_0; E; (\lambda_p)\}$ se réduit à un seul élément.*

Dire que la proposition (D.1) est fausse, sous les conditions relatives à (λ_p) et E , c'est affirmer que \mathfrak{L} (qui n'est pas vide) ne se réduit pas à un seul point. Dans le cas de la validité de cette négation, soient donc (a_i^{*1}) et (a_i^{*2}) deux points de \mathfrak{L} . On considère les deux polynômes de Dirichlet-Tschebyscheff de support S , $f[(a_i^{*1})]$ et $f[(a_i^{*2})]$, et le polynôme d'indice (a_i^p) de la suite récurrentielle de générateurs (a_i^{*1}) pondéré par α et (a_i^{*2}) pondéré par β (α et β étant deux constantes strictement positives satisfaisant à la condition $\alpha + \beta = 1$). Puisque (λ_p) est cramérienne sur E alors, eu égard à la proposition (B.1'), l'ensemble

$$\{z \in E \mid |f[(a_i^p), z]| = \mu; \quad \mu = \text{Inf } \Omega(E)\}$$

contient au moins $n + 1$ points.

On note z_k , $k \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$, $n + 1$ points de cet ensemble. On sait que,

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n + 1\} : \quad f[(a_i^{*1}), z_k] = f[(a_i^{*2}), z_k].$$

Il est trivial que

$$\det \|\exp(-z_k \lambda_p)\|, \quad \text{avec} \quad k \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$$

et

$$p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

est égal à

$$\exp\left(-\lambda_0 \sum_{k=1}^{n+1} z_k\right) \cdot \det \|\exp[-z_k(\lambda_p - \lambda_0)]\|$$

et on sait que $\det \|\exp [-z_k(\lambda_p - \lambda_0)]\| \neq 0$ est équivalent à

$$\forall k \text{ et } \forall k' \text{ (avec } k \neq k') \in \{1, 2, \dots, n+1\} : \\ z_{k'} \neq z_k + 2\pi t i / \lambda_0, \quad \forall t \in \mathbf{Z}^*.$$

Or il est trivial que $|\Im(z_k - z_{k'})| < 2\pi/\lambda_0$ puisque E appartient à une bande $\mathcal{B}\{z_0; 2\pi/\lambda_0\}$. Donc le système des $n+1$ relations

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\} : f[(a_i^{*1}), z_k] = f[(a_i^{*2}), z_k]$$

implique

$$a_i^{*2} = a_i^{*1}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(on a par définition $a_0^{*1} = a_0^{*2} = a_0$). Donc \mathcal{L} se réduit à un point et \mathcal{F}^* se réduit à un élément.

On peut généraliser très facilement la proposition antérieure — comme il est évident — en énonçant :

PROPOSITION (D.2). — *Si (λ_p) est une D-suite cramérienne sur le compact E de \mathbf{C} , alors l'ensemble \mathcal{F}^* de support $S : \{a_0; E; (\lambda_p)\}$ se réduit à un élément.*

On convient de dire qu'une D-suite finie (λ_p) est cramérienne « au sens strict » sur un compact E de \mathbf{C} si :

- 1) elle est cramérienne sur E ;
- 2) pour tout système de $n+1$ valeurs (distinctes) extraites de E — que l'on note $z_k, k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ — on a $\det \|\exp (-z_k \lambda_p)\| \neq 0, k \text{ et } p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

On montre facilement que (2) implique (1)

Il est à remarquer que la D-suite (λ_p) considérée antérieurement, vérifiant la condition, $\lambda_p = (p+1)\lambda_0, \forall p \in \{1, 2, \dots, n\}; \lambda_0 \in \mathbf{R}_+^*$, est cramérienne au sens strict sur tout compact E de \mathbf{C} appartenant à une bande $\mathcal{B}\{z_0; 2\pi/\lambda_0\}$.

PROPOSITION (D.3). — *$f[(a_i^*)]$ étant un élément de l'ensemble \mathcal{F}^* de support $S, ((\lambda_p)$ satisfaisant à la condition précisée dans (D.1) et, en outre, étant cramérienne sur E), alors il existe dans l'ensemble $\{z \in E \mid |f[(a_i^*), z]| = \mu; \mu = \text{Inf } \Omega(E)\}$ au moins un sous-ensemble de $n+1$ points — que l'on note $z_k, k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ — satisfaisant à la condition*

$$\forall k \text{ et } \forall k' \text{ (avec } k \neq k') \in \{1, 2, \dots, n+1\} : \\ z_{k'} - z_k \neq 2\pi t i / \lambda_0, \quad \forall t \in \mathbf{Z}^*.$$

Eu égard au lemme (B.1'), l'ensemble

$$E_\mu = \{z \in E \mid |f[(a_i^*), z]| = \mu; \quad \mu = \text{Inf } \Omega(E)\}$$

contient au moins $n + 1$ points. On désigne par E_{n+1} tout sous-ensemble de E_μ formé de $n + 1$ points. La négation de l'assertion de (D.3) est équivalente à la proposition suivante :

dans tout E_{n+1} il existe au moins deux points (dépendant bien entendu du sous-ensemble E_{n+1} considéré dans E_μ) z_1 et z_2 , auxquels on peut associer $t_{1,2} \in \mathbf{Z}^*$, tels que $z_2 - z_1 = 2\pi i t_{1,2} / \lambda_0$. On se place dans le cas de la négation de (D.3). On considère alors un quelconque sous-ensemble E_{n+1} de E_μ que l'on note E_{n+1}^0 et on a pour cet E_{n+1}^0 considéré,

$$\exists z_\alpha \quad \text{et} \quad z_\beta \in E_{n+1}^0, \quad \exists t_{\alpha, \beta} \in \mathbf{Z}^* : \quad z_\beta - z_\alpha = 2\pi i t_{\alpha, \beta} / \lambda_0.$$

On se propose de prouver que cette relation entre z_β et z_α est incompatible avec l'appartenance, $f[(a_i^*)] \in \mathcal{F}^*$, ou, ce qui est équivalent, $(a_i^*) \in \mathcal{L}$. Pour cela, on considère le polynôme dirichletien,

$$\varphi[(\theta_i)] : \quad \sum_{i=1}^n \theta_i \exp [-(n - i + 1)\lambda_0 z],$$

à coefficients θ_i indéterminés dans \mathbf{C} . Puisque la suite (λ_p) , avec $\lambda_p = (p + 1)\lambda_0$, est cramérienne sur E , le système des n équations linéaires à n inconnues θ_i

$$\varphi[(\theta_i), z_k] = f[(a_i^*), z_k], \quad k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

(où E_{n+1}^0 a été ordonné en une suite $\{z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}\}$, avec $z_n = z_\alpha$ et $z_{n+1} = z_\beta$) admet une solution (et une seule) que l'on désigne par $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_n^*$. Puisqu'il existe $t_{\alpha, \beta} \in \mathbf{Z}^*$ tel que $z_{n+1} - z_n = 2\pi i t_{\alpha, \beta} / \lambda_0$, le système des $n + 1$ équations linéaires à n inconnues θ_i

$$\varphi[(\theta_i), z_k] = f[(a_i^*), z_k], \quad k \in \{1, 2, \dots, n + 1\},$$

est aussi satisfait par le système des n valeurs θ_i^* ; en effet,

$$\varphi[(\theta_i), z_{n+1}] = \varphi[(\theta_i), z_n] \quad \text{et} \quad f[(a_i^*), z_{n+1}] = f[(a_i^*), z_n].$$

On désigne par $E_{\mu, n+1}^0$ le complémentaire de E_{n+1}^0 par rapport à E_μ . On remarquera que deux points quelconques, z' et z'' ,

de la suite (z_p) , $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ ne peuvent pas satisfaire à la condition,

$$\exists t \in \mathbf{Z} : \quad z'' - z' = 2\pi t i / \lambda_0,$$

puisque la D-suite (λ_p) étant cramérienne sur E est à fortiori cramérienne sur tout sous-ensemble de E_μ contenant au moins n points.

Soit $z' \in E_{\mu, n+1}^0$. On désigne par $E_{n+1}^{z'}$ l'ensemble des $n+1$ points formés par les n points de la suite (z_p) et le point z' . Eu égard à la validité de la négation de (II.D.3), on peut trouver un terme de la suite (z_p) — soit z_{p_0} un tel terme — tel que,

$$\exists t_{p_0} \in \mathbf{Z}^* : \quad z' - z_{p_0} = 2\pi t_{p_0} i / \lambda_0.$$

Donc, l'ensemble des points z' de $E_{\mu, n+1}^0$ peut être réparti en n classes au plus de points de la forme,

$$\forall p \in \{1, 2, \dots, n\} : \\ \mathcal{C}_p = \{z' \in E_{\mu, n+1}^0 \mid \exists t' \in \mathbf{Z}^* : \quad z' - z_p = 2\pi t' i / \lambda_0\}$$

(il n'est pas exclu que $\mathcal{C}_p = \emptyset$ pour des valeurs de l'indice $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, et peut être pour toutes si $E_{\mu, n+1}^0 = \emptyset$; cas dont l'impossibilité — conditionnellement ou non — n'a été établi par aucun raisonnement dans tout ce qui précède).

Il est à remarquer que,

$$\forall p_1 \quad \text{et} \quad \forall p_2 \quad (\text{avec } p_1 \neq p_2) \in \{1, 2, \dots, n\} : \\ \mathcal{C}_{p_1} \cap \mathcal{C}_{p_2} = \emptyset.$$

En effet, \mathcal{C}_{p_1} et \mathcal{C}_{p_2} étant respectivement supposés non vides, on considère un point quelconque $z'_1 \in \mathcal{C}_{p_1}$ et un point quelconque $z'_2 \in \mathcal{C}_{p_2}$, et on a,

$$\exists t'_1 \in \mathbf{Z}^* : \quad z'_1 - z_{p_1} = 2\pi t'_1 i / \lambda_0, \\ \exists t'_2 \in \mathbf{Z}^* : \quad z'_2 - z_{p_2} = 2\pi t'_2 i / \lambda_0,$$

et donc $z_{p_1} - z_{p_2} = 2\pi i(t'_1 - t'_2) / \lambda_0$; ce qui est impossible puisque (λ_p) est cramérienne sur $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$.

Considérant une quelconque classe non vide \mathcal{C}_p et un quelconque point $z' \in \mathcal{C}_p$, on a,

$$\exists t'_p \in \mathbf{Z}^* : \quad z' - z_p = 2\pi t'_p i / \lambda_0,$$

et donc

$$f[(a_i^*), z'] = f[(a_i'), z_p], \quad \varphi[(\theta_i^*), z'] = \varphi[(\theta_i'), z_p].$$

On considère le polynôme dirichletien,

$$F[(\alpha_i)] : \quad \sum_{p=0}^n \alpha_{n-p} \exp(-z\lambda_p)$$

où les coefficients α_{n-p} sont déterminés comme dans la démonstration de la proposition (B.2), à savoir :

$$\alpha_{n-p} = a_{n-p}^* - \alpha \theta_{n-p}^*, \quad \forall p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{avec } \theta_0^* = 0,$$

et l'on a,

$$\forall z \in E : \quad z \rightarrow F[(\alpha_i), z] = f[(a_i^*), z] - \alpha \varphi[(\theta_i^*), z]$$

où α est une constante appartenant à $]0, 1[$. La suite de la démonstration ne diffère qu'à des détails près de celle de (B.2).

Eu égard à la continuité uniforme de $z \rightarrow f[(a_i^*), z]$ et $z \rightarrow \varphi[(\theta_i^*), z]$ sur leur support, on a,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall z' \in E_\mu, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0, \quad \forall z \in \{E \mid |z - z'| \leq \delta_\varepsilon\} : \\ |f[(a_i^*), z] - f[(a_i^*), z']| < \varepsilon \\ |\varphi[(\theta_i^*), z] - \varphi[(\theta_i^*), z']| < \varepsilon.$$

(δ_ε étant indépendant de z' sur E_μ).

On désigne par $D_{z', \varepsilon}$ l'ensemble $\{z \in E \mid |z - z'| \leq \delta_\varepsilon\}$ et par D_ε l'union des ensembles $D_{z', \varepsilon}$ indexés par z' sur E_μ ; on a,

$$D_\varepsilon = \bigcup_{z'} D_{z', \varepsilon}, \quad z' \in E_\mu,$$

et on pose $E_\varepsilon = E - D_\varepsilon$.

Soit un point quelconque $z_0 \in D_\varepsilon$. On peut toujours trouver un point $z'_{z_0} \in E_\mu$ tel que $z_0 \in D_{z'_{z_0}, \varepsilon}$. Par définition de $D_{z'_{z_0}, \varepsilon}$, on a,

$$\begin{aligned} & |f[(a_i^*), z_0] - f[(a_i^*), z'_{z_0}]| < \varepsilon, \quad \text{avec } |f[(a_i^*), z_0]| \leq \mu \\ \text{et} \quad & |\varphi[(\theta_i^*), z_0] - \varphi[(\theta_i^*), z'_{z_0}]| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Or, ou bien

$$z'_{z_0} \in \{z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}\},$$

et alors

$$f[(a_i^*), z'_{z_0}] = \varphi[(\theta_i^*), z'_{z_0}]$$

ou bien $z'_{z_0} \in E_{\mu, n+1}^0$ et alors

$$\exists z_{p_0} \in \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \quad \text{et} \quad \exists t_{p_0} \in \mathbf{Z}^* : \\ z'_{z_0} - z_{p_0} = 2\pi i t_{p_0} / \lambda_0,$$

et donc

$$f[(a_i^*), z'_{z_0}] = f[(a_i^*), z_{p_0}] \quad \text{et} \quad \varphi[(\theta_i^*), z'_{z_0}] = \varphi[(\theta_i^*), z_{p_0}]$$

Or

$$f[(a_i^*), z_{p_0}] = \varphi[(\theta_i), z_{p_0}]$$

et ainsi,

$$f[(a_i^*), z'_{z_0}] = \varphi[(\theta_i^*), z'_{z_0}].$$

On poursuit alors le raisonnement comme dans la démonstration des propositions (B.1) et (B.1').

Remarque (1). — Eu égard à la définition d'une suite cramerienne sur un compact, la proposition suivante est triviale :

$f[(a_i^*)]$ étant un élément de \mathcal{F}^* de support $S((\lambda_p))$ satisfaisant à la condition précisée dans (D.1) et, en outre, étant cramerienne sur E) alors pour tout sous-ensemble E_n de n points de

$$\{z \in E \mid |f[(a_i^*), z]| = \mu\}$$

on a,

$$\forall z \quad \text{et} \quad \forall z' \quad (\text{avec } z \neq z') \in E_n : \\ z - z' \neq 2\pi i t / \lambda_0, \quad \forall t \in \mathbf{Z}^*.$$

Remarque (2). — Si la D-suite (λ_p) satisfait à la condition précisée dans (D.1) et, en outre, est « strictement cramerienne » sur le compact $E \subset \mathbf{C}$, alors la proposition (D.3) est triviale. Plus généralement, on énonce :

PROPOSITION (D.3'). — Si la D-suite (λ_p) vérifie la condition, il existe un nombre $\nu > 0$ et une suite d'entiers $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ telle que

$$\forall p \in \{0, 1, 2, \dots, n\} : \quad \nu = t_p / \lambda_p,$$

et si, en outre, (λ_p) est strictement cramerienne sur le compact $E \subset \mathbf{C}$, alors il existe au moins un sous-ensemble E_{n+1} de

$n + 1$ points de

$$\{z \in E \mid |f[(a_i^*), z]| = \mu, \\ \text{où } f[(a_i^*)] \in \mathcal{F}^* \text{ de support } S, \text{ et } \mu = \text{Inf } \Omega(E)\}$$

on a, $\forall z$ et $\forall z'$ (avec $z \neq z'$) $\in E_{n+1}$:

$$z - z' \neq 2\pi it\nu, \quad \forall t \in \mathbf{Z}^*.$$

PROPOSITION (D.4). — *Sous les conditions relatives à (λ_p) et E précisées dans (D.3), l'ensemble \mathcal{F}^* se réduit à un seul élément.*

La démonstration de cette proposition est analogue à celle de (D.1).

PROPOSITION (D.4'). — *Sous les conditions relatives à (λ_p) et E précisées dans (D.3'), \mathcal{F}^* se réduit à un seul élément.*

(D.4) et (D.4') sont comme (D.1) contenues dans (D.2).

Manuscrit reçu le 11 juillet 1967

Maurice BLAMBERT
et Georges CHEVALIER,
Faculté des Sciences de Grenoble
Institut Fourier
Place du Doyen Gosse
38-Grenoble.