Annales de l'institut Fourier

O. Zariski

Sur la normalité analytique des variétés normales

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 161-164
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__161_0>

SUR LA NORMALITÉ ANALYTIQUE DES VARIÉTÉS NORMALES

par **Oscar ZARISKI** (Harvard-University).

Soit $\mathfrak{o}$ l'anneau local d'un point *normal* P d'une variété algébrique V définie sur un corps k ; l'hypothèse de normalité veut dire que $\mathfrak{o}$ est un anneau intégralement clos. Nous avons montré [5] que l'anneau local complété $\bar{\mathfrak{o}}$ de $\mathfrak{o}$ est un anneau d'intégrité, c'est-à-dire que V est *analytiquement irréductible* en P. Nous allons montrer ici que $\bar{\mathfrak{o}}$ est aussi un anneau *intégralement clos,* c'est-à-dire que V, considérée comme variété algébroïde, est normale en P. Nous apporterons aussi quelques simplifications à notre démonstration d'irréductibilité analytique donnée en [5] ; nous ne supposerons de [5] que les lemmes du § 2. Nous entendrons par *domaine local* un anneau local sans diviseurs de zéro.

Théorème 1. — *Soient $\mathfrak{o}$ un domaine local intégralement clos, $\bar{\mathfrak{o}}$ son complété, et $\bar{\mathfrak{o}}'$, la fermeture entière de $\bar{\mathfrak{o}}$ dans son anneau total de fractions* A. *Supposons qu'il existe un élément $d \neq 0$ de $\mathfrak{o}$ tel que*

1) $d\bar{\mathfrak{o}}' \subset \bar{\mathfrak{o}}$.

2) *les idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ de $\mathfrak{o}d$ sont analytiquement non ramifiés. Alors $\bar{\mathfrak{o}}$ est lui-même un domaine local intégralement clos, et on a $\bar{\mathfrak{o}}' = \bar{\mathfrak{o}}$.*

Puisque $d \in \mathfrak{o}$, tout idéal premier $\bar{\mathfrak{p}}$ de $\bar{\mathfrak{o}}d$ est minimal dans $\bar{\mathfrak{o}}$, et est tel que l'anneau de fractions $\bar{\mathfrak{o}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ est l'anneau d'une valuation discrète v du corps des fractions de $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{v}$ ($\mathfrak{v}$ désignant l'unique idéal premier de (O) de $\bar{\mathfrak{o}}$ contenu dans $\bar{\mathfrak{p}}$; cf. [5] lemmes 3, 4, 5, 6) ; nous noterons w l'application composée de l'homomorphisme canonique de $\bar{\mathfrak{o}}$ sur $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{v}$ et de v. Soit $w(d) = s$, c'est-à-dire que l'on a $d \in \bar{\mathfrak{p}}^{(s)}$ et $d \notin \bar{\mathfrak{p}}^{(s+1)}$. Pour tout élément $z \in \bar{\mathfrak{o}}'$, on a $dz = y \in \bar{\mathfrak{o}}$ d'après 1). Comme z est entier sur $\bar{\mathfrak{o}}$, on a $w(z) \geqslant 0$, d'où $w(y) \geqslant s$. Ceci étant vrai pour tout idéal premier de $\bar{\mathfrak{o}}d$, d divise y dans $\bar{\mathfrak{o}}$, et on a $y = dz'$ avec $z' \in \bar{\mathfrak{o}}$. D'où $d(z - z') = 0$. Comme $\mathfrak{o}$ est un anneau d'intégrité, d n'est pas diviseur de zéro dans $\bar{\mathfrak{o}}$([1], prop. 6), ni donc dans l'anneau total des fractions de $\bar{\mathfrak{o}}$; par conséquent $z = z'$, et on a $\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}'$.

De cette dernière égalité nous allons déduire que $\bar{\mathfrak{o}}$ est un domaine local, ce qui démontrera le th. 1. Or, en vertu de la condition 2) et du lemme 9 de [5], $\mathfrak{o}$ est analytiquement non ramifié. La conclusion résultera alors du lemme suivant :

Lemme. — *Si un anneau local* R *est intégralement fermé dans son anneau total des fractions* S *et n'a pas d'élément nilpotent, alors* R *est un anneau d'intégrité.*

Il est clair que S est composé direct d'un nombre fini h de corps. Soit $1 = e_1 + \cdots + e_h$ la décomposition correspondante de 1 en idempotents orthogonaux. On a $e_1(1 - e_1) = 0$; donc, si $h \neq 1$, on a $e_1 \notin$ R, sinon $1 - e_1$ serait inversible dans R contrairement au fait que c'est un diviseur de zéro. Mais, comme $e_1^2 - e_1 = 0$, ceci est contraire au fait que R est intégralement fermé dans S.

Nous allons maintenant déduire du th. 1 *à la fois* l'irréductibilité et la normalité analytique des variétés localement normales :

Théorème 2. — *Si* $\mathfrak{o}$ *est l'anneau local d'un point* P *normal sur une variété algébrique* V, *le complété* $\bar{\mathfrak{o}}$ *de* $\mathfrak{o}$ *est un domaine local intégralement clos.*

Il suffit de montrer que les conditions du th. 1 sont satisfaites. Tout élément non nul d de $\mathfrak{o}$ satisfaisant à 2) ([2], lemme 9, p. 9), il s'agit de vérifier 1). Si $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}$ contient un corps k, sur lequel $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ est de degré fini, et sur lequel le corps des fractions F de $\mathfrak{o}$ est séparable (un « basic field » de [1]). Soit $(x_1, \ldots, x_r)$ un système de paramètres de $\mathfrak{o}$ qui soit aussi une base de transcendance séparante de F sur k. Alors l'anneau des fractions de l'idéal premier $(x_1, \ldots, x_r)$ de $k[x_1, \ldots, x_r]$ est un anneau local régulier $\mathfrak{r}$ sur lequel $\mathfrak{o}$ est un module de type fini ([1], prop. 5, p. 702). Le complété $\bar{\mathfrak{r}}$ de $\mathfrak{r}$ est l'anneau de séries formelles $k[[x_1, \ldots, x_r]]$; il s'identifie canoniquement à un sous-anneau de $\bar{\mathfrak{o}}$ sur lequel $\bar{\mathfrak{o}}$ est un module de type fini.

Soit a un élément primitif de F sur $k(x_1, \ldots, x_r)$, que nous pouvons supposer entier sur $k[x_1, \ldots, x_r]$. Si n désigne le degré de F sur $k(x_1, \ldots, x_r)$, il existe un élément non nul c de $\mathfrak{r}$ tel que

$$c\mathfrak{o} \subset \mathfrak{r} + \mathfrak{r}a + \cdots + \mathfrak{r}a^{n-1}.$$

On a alors $c\bar{\mathfrak{o}} \subset \bar{\mathfrak{r}} + \bar{\mathfrak{r}}a + \cdots + \bar{\mathfrak{r}}a^{n-1}$. Comme c n'est pas diviseur de zéro dans $\bar{\mathfrak{o}}$ ([1], prop. 6), il s'ensuit que, K désignant le corps des fractions de $\bar{\mathfrak{r}}$, l'anneau total des fractions A de $\bar{\mathfrak{o}}$ est de la forme $K[a]$.

Comme $\bar{\mathfrak{r}}$ est intégralement clos, l'équation unitaire de plus petit degré satisfaite par a sur K est à coefficients dans $\bar{\mathfrak{r}}$; soit $f_1(a) = 0$. Le polynome f_1 divise le polynome minimal f de a sur $k(x_1, \ldots, x_r)$, dont les coefficients sont dans $\mathfrak{r}$. Donc le discriminant d de f (qui n'est pas nul en vertu de l'hypothèse de séparabilité) est un multiple (dans $\bar{\mathfrak{r}}$) du discriminant d_1 de f_1. Il va donc nous suffire de montrer que l'on a $d_1\bar{\mathfrak{o}}' \subset \bar{\mathfrak{r}}[a]$. Or, comme $\bar{\mathfrak{o}}'$ est un anneau entier sur $\bar{\mathfrak{r}}$, on peut appliquer le raisonnement classique (cf. [6], § 101, p. 81), en opérant dans le produit des corps des racines des divers facteurs irréductibles de f_1 (au lieu du corps des racines de f_1 dans le cas où f_1 est irréductible), et en tenant compte du fait que $\bar{\mathfrak{r}}$ est intégralement clos et ne contient aucun diviseur de zéro de A.

Voici enfin une application du th. 2 aux variétés non nécessairement normales :

Théorème 3. — *Soient* $\mathfrak{o}$ *l'anneau local d'un point* P *d'une variété algébrique* V, *et* $\mathfrak{o}'$ *la clôture intégrale de* $\mathfrak{o}$. *Si* $\bar{\mathfrak{o}}$ *désigne le complété de* $\mathfrak{o}$, *alors la fermeture intégrale* $\overline{\mathfrak{o}}'$ *de* $\bar{\mathfrak{o}}$ *dans son anneau total de fractions* A *est identique au complété* $(\overline{\mathfrak{o}'})$ *de l'anneau semi-local* $\mathfrak{o}'$ (autrement dit les opérations « fermeture intégrale » et « complétion » commuttent).

Comme il existe c non nul dans $\mathfrak{o}$ tel que $c\mathfrak{o}' \subset \mathfrak{o}$ et donc $c(\overline{\mathfrak{o}'}) \subset \bar{\mathfrak{o}}$, $(\overline{\mathfrak{o}'})$ est un sous-anneau de A, et c'est un module de type fini sur $\bar{\mathfrak{o}}$ puisqu'il en est ainsi de $\mathfrak{o}'$ sur $\mathfrak{o}$. Il ne nous reste alors plus qu'à montrer que $(\overline{\mathfrak{o}'})$ est intégralement fermé dans A ; or ceci est clair puisque les anneaux *locaux* complets dont $(\overline{\mathfrak{o}'})$ est composé direct sont des domaines locaux intégralement clos d'après le cas des variétés normales (th. 2).

Remarque. — Ce qui précède reste valable pour une variété analytique complexe V : la normalité au sens des séries convergentes implique la normalité au sens des séries formelles.

Remarques sur le mémoire « Sur les variétés algébroïdes » de M. P. Samuel.

1) Le th. 1 de ce mémoire [4] peut aussi se déduire du lemme qui le précède par application du théorème de Bertini au système linéaire irréductible découpé par les hyperplans passant par l'origine sur la variété algébrique dont la variété algébroïde étudiée est une nappe.

2) La démonstration du th. 3 (§ 3) de [4] peut se simplifier en utilisant notre th. 3. Reprenons le raisonnement au point où il s'agit de montrer l'existence d'un idéal principal $\mathfrak{o}a$ ayant mêmes composantes isolées que $\mathfrak{r}$ (lignes avant la remarque traitant du cas d'une variété normale). Soit $\mathfrak{o}'$ la clôture intégrale de $\mathfrak{o}$, et $\bar{\mathfrak{o}}'$ la fermeture intégrale de $\bar{\mathfrak{o}}$ dans son anneau total de fractions. Alors $\bar{\mathfrak{o}}'\mathfrak{r}$ et $\bar{\mathfrak{o}}'x$ ne diffèrent que par des composantes immergées. Mais, d'après notre th. 3, $\bar{\mathfrak{o}}'$ est le complété de l'anneau semi-local $\mathring{\mathfrak{o}}'$. On montre alors, comme dans la remarque susdite, que, si $(a_1, .., a_s)$ est une base de $\mathfrak{r}$, on a, par exemple, $\mathfrak{o}'\mathfrak{r} = \mathfrak{o}'a_1$. Ceci montre que $\mathfrak{o}a_1$ et $\mathfrak{r}$ ne diffèrent que par des composantes immergées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Chevalley, « On the theory of local rings », *Ann. of Math.*, vol. 44 (1943), pp. 690-708.

[2] C. Chevalley, « Intersections of algebraic and algebroid varieties », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 57 (1945), pp. 1-85.

[3] C. Chevalley, « On the notion of the ring of quotients of a prime ideal », *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 50 (1944).

[4] P. Samuel, « Sur les variétés algébroïdes », *Ann. Institut Fourier*, vol. 2 (1950), pp. 147-160.

[5] O. Zariski, « Analytical irreducibility of normal varieties », *Ann. of Math.*, vol. 49 (1948), pp. 352-361.

[6] Van der Waerden, « Moderne Algebra », Springer (Berlin), 1940.

(Parvenu aux Annales en novembre 1950.)