ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL MÉTIVIER

Martingales à valeurs vectorielles. Applications à la dérivation des mesures vectorielles

Annales de l'institut Fourier, tome 17, n° 2 (1967), p. 175-208

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_2_175_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 2 (1967), 175-208.

MARTINGALES A VALEURS VECTORIELLES APPLICATIONS A LA DÉRIVATION DES MESURES VECTORIELLES

par **Michel MÉTIVIER**

Introduction.

La première partie de cet article contient un ensemble de résultats sur les martingales à valeurs dans un espace localement convexe, faisant suite à l'étude amorcée dans [18]. Les problèmes que nous traitons sont énoncés avec précision en 1.6 ci-dessous. Certains de ces théorèmes ont été donnés sans démonstration dans [21] ou ont fait l'objet d'exposés de séminaire ([20] par exemple). Pour faciliter la compréhension générale de l'article nous avons rappelé un certain nombre de définitions au § 1, et surtout rappelé rapidement au § 2 l'ensemble des résultats connus, dus essentiellement aux travaux de J. L. Doob, S. D. Chatterji, F. Scalora, A. et C. Ionescu Tulcea et J. Neveu. Le § 3 étudie les martingales faibles et le § 4 montre quelques cas de passage de résultats « faibles » à des résultats « forts ».

La deuxième partie donne des applications des résultats de la première partie, au problème de la dérivation des fonctions d'ensembles à valeurs vectorielles. L'existence de densités (faibles ou fortes) pour des fonctions d'ensembles à valeurs dans un espace localement-convexe, et la relation de ces densités avec diverses dérivées est étudiée dans des cas généraux. Signalons également une caractérisation très simple des mesures à valeurs dans un espace de Banach, à variation bornée, et admettant une densité forte par rapport à une mesure scalaire donnée. Nous signalons en note (cf. notes (3) et (4) les relations pouvant exister avec des résultats récents en voie de publication de M. A. Rieffel (cf. [26] et [27]) et dont nous avons pris connaissance alors que notre manuscrit était achevé.

PREMIÈRE PARTIE — MARTINGALES FAIBLES ET FORTES

1. Préliminaires. Problèmes.

1.1. *Propriétés scalaires. Propriétés faibles.*

Dans toute la suite $\mathbf{V}$ désignera un espace localement convexe en dualité avec $\mathbf{V}'$ (cf. [3] chap. IV).

Une fonction f définie sur un ensemble E, à valeurs dans $\mathbf{V}$, sera dite posséder scalairement une propriété P si pour tout $\varphi' \in \mathbf{V}'$ la fonction $\varphi' \circ f$ (notée aussi $\langle f, \varphi' \rangle$) possède la propriété P.

Les propriétés faibles sont celles qui se définissent relativement à la topologie faible $\sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$ de $\mathbf{V}$. (Cf. [3] chap. IV).

1.2. *Base de Martingale.*

I désignera toujours un ensemble d'indices ordonné par une relation notée $\leqslant$ et filtrant à droite pour cette relation.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ désignera un espace mesuré complet, P étant une mesure positive bornée.

Une base de martingale sera toujours pour nous la donnée, outre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ d'une famille croissante $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}_\infty$ désignera la complétion relativement à P de la tribu engendrée par $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathcal{F}_\alpha$.

1.3. *Martingales faibles à valeurs dans* $\mathbf{V}$.

Nous dirons que le terme $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ est une martingale faible (pour la dualité $\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}' \rangle$) si :

(M_1) Pour tout α, f_α est une fonction définie sur Ω, à valeurs dans $\mathbf{V}$, scalairement $\mathcal{F}_\alpha$-mesurable.

(M_2) Pour tout α et tout $F \in \mathcal{F}_\alpha$ l'intégrale faible $\int_F f_\alpha \, dP$ est un élément de $\mathbf{V}$ (i.e. : la forme linéaire $\varphi' \rightsquigarrow \int_F \langle f_\alpha, \varphi' \rangle \, dP$ s'identifie par la dualité $\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}' \rangle$ à un élément de $\mathbf{V}$ noté $\int_F f_\alpha \, dP$).

(M_3) Pour tout $\alpha \leqslant \beta$ et tout $F \in \mathcal{F}_\alpha$:

$$\int_F f_\alpha \, dP = \int_F f_\beta \, dP.$$

1.4. *Martingales fortes à valeurs dans un Banach.*

Lorsque $\mathbf{V}$ est un espace de Banach nous dirons que

$$(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$$

est une martingale forte si elle vérifie les conditions (M'_1), (M'_2) et (M'_3) obtenues en remplaçant dans (M_1), (M_2) et (M_3) la notion de mesurabilité scalaire par celle de mesurabilité forte (ou mesurabilité au sens de [9] par exemple) et celle d'intégrabilité faible par celle d'intégrabilité forte (intégrabilité au sens de S. Bochner : cf. [1] ou [9]).

Il est évident que toute martingale forte est une martingale faible pour la dualité $\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}' \rangle$.

1.5. *Équi-intégrabilité terminale.*

Nous rappelons la définition suivante :

une famille $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments de $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{V})$, $\mathbf{V}$ étant un Banach, est dite terminalement équi-intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a_\varepsilon > 0$ et $\alpha_\varepsilon \in I$ tels que pour tout $\alpha \geqslant \alpha_\varepsilon$ on ait :

$$\int_{[f_\alpha \geqslant a_\varepsilon]} \|f_\alpha\| \, dP \leqslant \varepsilon.$$

1.6. *Problèmes.*

Soit $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ une martingale faible (resp. forte).

Problème 1. — Lorsque I n'a pas de plus grand élément, soit $\hat{I}$ l'ensemble ordonné obtenu en ajoutant à I un plus grand élément noté ∞, et soit $\mathcal{F}_\infty$ comme définie en 1.2.

Existe-t-il une application f_∞ de Ω dans $\mathbf{V}$ telle que $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in \hat{\mathrm{I}}}$ soit une martingale faible (resp. forte)?

Problème 2. — Si f_∞ existe comme solution du problème 1, la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{I}}$ converge-t-elle suivant l'ensemble filtrant I pour un mode convenable de convergence vers f_∞?

Problème 3. — Indépendamment de l'existence d'une solution du problème 1, la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{I}}$ converge-t-elle en un sens convenable vers une application f de Ω dans $\mathbf{V}$?

2. Rappel des résultats connus pour martingales fortes.

Le cas des martingales au sens fort ci-dessus (réelles ou à valeurs dans un Banach) est le seul qui a donné lieu à des études en dehors de celles que nous avons publiées dans [18] et que généralisent les théorèmes du § 3 ci-dessous.

a) *Cas réel.*

Théorèmes de Doob et Helms. — *Le problème* I *admet une solution si et seulement si* (f_α) *est terminalement équi-intégrable.*

La famille $(f_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{I}}$ *converge alors* (*Problème* 2) *vers* f_∞ *dans* $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Si $\mathrm{I} = \mathbf{N}$, *la convergence a lieu également presque sûrement (en abrégé p.s.).*

Théorèmes de Doob et Krickeberg. — Si

$$\sup_\alpha \int |f_\alpha|\, d\mathrm{P} \leqslant \mathrm{K} < +\infty$$

la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{I}}$ *converge en mesure vers une fonction* f (*problème* 3).

La convergence a même lieu p.s. si $\mathrm{I} = \mathbf{N}$.

b) *Martingales fortes.*

Il est bien connu (voir par exemple [5] et [28], ainsi que l'exemple en 3.3 ci-dessous) qu'une martingale forte $(f_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{I}}$ à valeurs dans un espace de Banach $\mathbf{B}$ peut très bien être équi-intégrable sans qu'il existe pour autant de solution au problème 1 fort.

On a toutefois :

THÉORÈME DE CHATTERJI-SCALORA-IONESCU TULCEA (problème 1). — *Si* **B** *est le dual d'un espace de Banach, et est séparable, le problème* 1 *admet une solution pour la martingale forte* $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *si et seulement si* (f_n) *est équi-intégrable.*

Nous généralisons ce résultat au cas I quelconque plus loin.

Le problème II fort est entièrement résolu par un théorème de A. et C. Tulcea et Neveu que pour une raison de commodité nous donnons plus loin (voir § 4 en 4.1).

Enfin, pour une martingale forte $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à valeurs dans un espace de Banach **B** le problème 3 a reçu la réponse partielle suivante :

THÉORÈME DE CHATTERJI-SCALORA-IONESCU TULCEA (problème 3). — *Si* **B** *est le dual d'un espace de Banach et est séparable, et si* $\sup_n \int |f_n| \, dP < +\infty$, (f_n) *converge* p.s. *vers une fonction* f.

Dans la suite nous donnons quelques résultats relativement aux martingales faibles et également quelques compléments sur les martingales fortes.

3. Martingales faibles.

Dans ce paragraphe nous considérons seulement des martingales $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ au sens faible. Les théorèmes 1, 2 et 3 ci-dessous concernent successivement les trois problèmes posés au début de cet article (cf. 1.2).

3.1. *Problème 1-faible.*

THÉORÈME 1. — *Soient* **V** *et* **V**$'$ *deux espaces vectoriels en dualité, et soit* $\mathfrak{S}$ *un ensemble filtrant (pour* $\subset$ *) de parties convexes équilibrées de* **V**, *compactes pour* σ (**V**, **V**$'$). *Soit* $(f_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ *une martingale faible à valeurs dans* **V**. *L'une quelconque des* 3 *conditions* (A), (B), (C) *ci-dessous est suffisante pour qu'il existe* f_∞ *telle que* $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in \hat{\mathrm{I}}}$ *soit une martingale faible. Pour tout* $v' \in \mathbf{V}'$, *la famille* $(\langle f_\alpha, v' \rangle)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ *converge alors en moyenne vers* $\langle f_\infty, v' \rangle$.

(A) *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{F}_\infty$ $Q_\varepsilon \in \mathfrak{S}$ *et* α_ε *tels que* $P(\Omega \backslash \Omega_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ *et pour tout* $\alpha \geqslant \alpha_\varepsilon$ *on ait:* $l_{\Omega_\varepsilon}.f_\alpha(\omega) \in Q_\varepsilon$ p.s. (1). *La martingale* $(f_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ *est scalairement terminalement équi-intégrable.*

(B) *Il existe une fonction réelle* λ, $\mathcal{F}_\infty$*-mesurable et* P*-intégrable et* $Q \in \mathfrak{S}$ *tels que pour tout* $\alpha \in I$ $f_\alpha(\omega) \in \lambda(\omega).Q$ p.s.

(C) *Il existe une sous-martingale* $(\lambda_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ *réelle terminalement équi-intégrable et* $Q \in \mathfrak{S}$ *tels que :*

$$\textit{pour tout } \alpha \in I \ f_\alpha(\omega) \in \lambda_\alpha(\omega).Q.$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que (B) $\Longrightarrow$ (A). En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver n_ε tel que

$$P\{\omega : |\lambda(\omega)| > n_\varepsilon\} \leqslant \varepsilon.$$

Il suffit donc de poser $\Omega_\varepsilon = \{\omega : |\lambda(\omega)| \leqslant n_\varepsilon\}$ et $Q_\varepsilon = n_\varepsilon.Q$. En outre, si nous posons $M^Q_{v'} = \sup_{v \in Q} |\langle v, v' \rangle|$, la majoration $|\langle f_\alpha(\omega), v' \rangle| \leqslant \lambda(\omega) M^Q_{v'}$ p.s. et l'intégrabilité de λ entraînent l'intégrabilité uniforme de $(\langle f_\alpha, v' \rangle)_{\alpha \in I}$.

Remarquons ensuite que dans les trois cas (A), (B) et (C) pour tout $v' \in \mathbf{V}'$ la martingale réelle $(\langle f_\alpha, v' \rangle)_{\alpha \in I}$ est terminalement équi-intégrable. Dans les cas (A) et (B) cela résulte de l'implication (B) $\Longrightarrow$ (A) et de l'hypothèse (A) elle-même. Dans le cas (C) ceci résulte de la majoration

$$|\langle f_\alpha(\omega), v' \rangle| \leqslant \lambda_\alpha(\omega) M^Q_{v'}.\text{P.p.s.}$$

et de l'équi-intégrabilité de $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$. Donc, dans tous les cas d'après le théorème de L. L. Helms il existe pour tout

$$v' \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P),$$

un élément $\tilde{h}_{v'} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ tel que $(\langle f_\alpha, v' \rangle)_{\alpha \in I}$ converge vers $\tilde{h}_{v'}$ dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$. Le problème est de déterminer une application f_∞ de Ω dans $\mathbf{V}$ de telle sorte que pour tout $v' \in \mathbf{V}'$ on ait $\langle f_\infty, v' \rangle \in \tilde{h}_{v'}$.

Nous achèverons maintenant la démonstration en considérant successivement le cas (A) et le cas (C).

1er *cas :* L'hypothèse (A) est vraie.

(1) Dans tout l'article l_F désigne la fonction indicatrice de l'ensemble F.

Nous pouvons considérer une suite $(\Omega'_n)_{n\geqslant 1}$ croissante de parties de Ω, $\Omega'_n \in \mathcal{F}_\infty$, telle que $P\left(\bigcup_{n\geqslant 1}\Omega'_n\right) = P(\Omega)$ et, pour tout $\alpha \geqslant \alpha_n$: $l_{\Omega'_n}.f_\alpha(\omega) \in Q_n \in \mathfrak{S}$.p.s. Nous posons $\Omega_1 = \Omega'_1$ et

$$\Omega_n = \Omega'_n \backslash \Omega_{n-1} \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 2,$$

et nous allons déterminer une application $h_\infty^{\Omega_n}$ de Ω dans $\mathbf{V}$, nulle en dehors de Ω_n, telle que pour tout $\varphi' \in \mathbf{V}$

$$\langle h_\infty^{\Omega_n}, \varphi' \rangle \in l_{\Omega_n}.\tilde{h}_{v'}.$$

Or $l_{\Omega_n}.\tilde{h}_{v'}$ étant limite dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ des fonctions $\langle l_{\Omega_n}.f_\alpha, \varphi' \rangle$ qui sont majorées p.s. par $M_{v'}^{Q_n}$, on a

$$l_{\Omega_n}.\tilde{h}_{v'} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P).$$

L'hypothèse $l_{\Omega_n}.f_\alpha(\omega) \in Q_n$ montre que :

$$|M_{v'}^{Q_n}| \leqslant \eta \Longrightarrow \|l_{\Omega_n}.\tilde{h}_{v'}\|^\infty \leqslant \eta.$$

Donc : l'application linéaire $\varphi' \rightsquigarrow l_{\Omega_n}.\tilde{h}_{v'}$ de $\mathbf{V}'$ dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ est continue pour la $\mathfrak{S}$-topologie considérée sur $\mathbf{V}'$.

Soit alors, d'après un théorème de A. et C. Ionescu Tulcea ([12]), une application linéaire continue ρ de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ dans l'espace de Banach $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ des applications réelles $\mathcal{F}_\infty$-mesurables bornées muni de la norme $\|h\|^0 = \sup_{\omega\in\Omega} |h(\omega)|$, telle que $\forall \tilde{h} \in L^\infty$, $\rho(h) \in \tilde{h}$ et $\|\rho(h)\|^0 \leqslant \|\tilde{h}\|$.

Posons $h_{v'}^{\Omega_n} = \rho(l_{\Omega_n}.\tilde{h}_{v'})$.

L'application $\varphi' \rightsquigarrow h_{v'}^{\Omega_n}(\omega)$ est donc pour tout ω une forme linéaire sur φ', continue pour la $\mathfrak{S}$-topologie sur $\mathbf{V}'$. C'est donc un élément de $\mathbf{V}$ que nous désignerons par $f_\infty^{\Omega_n}(\omega)$.

L'application $\omega \rightsquigarrow f_\infty(\omega)$ définie par :

$$\omega \in \Omega_n \Longrightarrow f_\infty(\omega) = f_\infty^{\Omega_n}(\omega) \qquad \text{et} \qquad \omega \notin \bigcup_{n\geqslant 1} \Omega_n \Longrightarrow f_\infty(\omega) = 0,$$

possède manifestement la propriété :

pour tout $\varphi' \in \mathbf{V}'$ $\qquad \langle f_\infty(\omega), \varphi' \rangle \in \tilde{h}_{v'}$.

D'où le théorème dans le cas où l'hypothèse (A) est vérifiée.

2e *cas :* L'hypothèse (C) est vraie.

Soit $\lambda_\infty \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ telle que $(\lambda_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\hat{I}}$ soit une sous-martingale rélle (un tel λ_∞ existe en raison des hypothèses sur $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in I}$.

Soit (λ'_n) une suite croissante de nombres réels, tendant vers $+\infty$. En raison de l'intégrabilité de λ_∞, il existe une suite (Ω_n) de parties de Ω deux à deux disjointes telle que

$$P\left(\bigcup_n \Omega_n\right) = P(\Omega)$$

et

$$|\lambda_\infty(\omega)| \leqslant \lambda'_n \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega_n.$$

Pour tout n la majoration : $\langle l_{\Omega_n}.f_\alpha, v'\rangle| \leqslant l_{\Omega_n}.M^{Q}_{v'}|\lambda_\alpha|$ prouve que $l_{\Omega_n}.\bar{h}_{v'}$, limite dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ de $(\langle l_{\Omega_n}.f_\alpha, v'\rangle)$ est majoré P-presque partout par

$$(L^1)\text{-}\lim_\alpha l_{\Omega_n}.M^{Q}_{v'}|\lambda_\alpha| = l_{\Omega_n}.M^{Q}_{v'}|\lambda_\infty| \leqslant \lambda'_n.M^{Q}_{v'}l_{\Omega_n}.$$

D'où, en posant $\lambda'_n.Q = Q_n$

$$\|l_{\Omega_n}.\bar{h}_{v'}\|^\infty \leqslant \lambda'_n M^{Q}_{v'} = M^{Q_n}_{v'}.$$

Ceci exprime que l'application $v' \rightsquigarrow l_{\Omega_n}.\bar{h}_{v'}$ est une application continue de $\mathbf{V}'$ munie de la $\mathfrak{S}$-topologie dans

$$L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P).$$

La démonstration s'achève alors comme ci-dessus dans le cas où (A) est vraie, en composant l'application $v' \rightsquigarrow l_{\Omega_n}.\bar{h}_{v'}$ avec un relèvement de L^∞ dans $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$.

3.2. *Problème 2 faible.*

THÉORÈME 2. — *On suppose que* $\mathbf{V}'$, *admet un ensemble dénombrable partout dense pour la $\mathfrak{S}$-topologie, et que* $(f_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in I}$ *est une martingale faible à valeurs dans* $\mathbf{V}$, *vérifiant l'une des hypothèses* (A) *ou* (B) *ou* (C) *du théorème* 1.

Alors :

1° *Il est possible d'extraire de* I *une suite* (α_n) *telle que la suite* $(f_{\alpha_n})_{n\in\mathbf{N}}$ *converge faiblement vers* f_∞ *presque sûrement.*

2° *De même, pour toute suite cofinale* (α_n) *extraite de* I (*s'il en existe*), *la suite* $(f_{\alpha_n})_{n\in\mathbf{N}}$ *converge faiblement vers* f_∞ *presque sûrement.*

Démonstration. — 1° Soit (v'_p) un ensemble dénombrable partout dense dans $\mathbf{V}'$ pour la $\mathfrak{S}$-topologie. On peut extraire une suite (α_k) telle que pour tout p : $(\langle f_{\alpha_k}, v_p\rangle)_{k\in\mathbf{N}}$ converge en moyenne vers $\tilde{h}_{v'_p}$. Mais $(\langle f_{\alpha'_k}, v_p\rangle)_{k\in\mathbf{N}}$ étant une martingale réelle indexée par $\mathbf{N}$ elle converge aussi P-presque partout vers $\langle f_\infty, v'_p\rangle$. Il existe donc un sous-ensemble Ω' de Ω de probabilité nulle, tel que pour tout $\omega \notin \Omega'$:

$$\forall p \quad \lim_k \langle f_{\alpha_k}(\omega), v'_p\rangle = \langle f_\infty(\omega), v'_p\rangle.$$

Si l'une des hypothèses A ou B est vérifiée, considérons les ensembles Ω_n et Q_n tels qu'ils ont été définis dans la démonstration du théorème 1. Pour tout $\omega \in \Omega_n$ on a $\{f_{\alpha_k}(\omega)\} \subset Q_n$, ce qui exprime l'équicontinuité des formes linéaires $f_{\alpha_k}(\omega)$ pour la $\mathfrak{S}$-topologie. La convergence simple de $(f_{\alpha_k}(\omega))_{k\in\mathbf{N}}$ sur l'ensemble partout dense $\{v'_p\}$ implique la convergence simple sur $\mathbf{V}'$.

Si l'hypothèse (C) est vérifiée, la convergence presque partout de la sous-martingale $(\lambda_{\alpha_k})_{k\in\mathbf{N}}$ montre que pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $(\lambda_{\alpha_k})_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée. Ceci montre l'existence d'un compact $\rho(\omega).Q$ tel que $\{f_{\alpha_k}(\omega)\}_{k\in\mathbf{N}} \subset \rho(\omega).Q$. D'où l'équicontinuité encore de la suite $(f_{\alpha_k}(\omega))_{k\in\mathbf{N}}$ et par suite la convergence de la suite $(f_{\alpha_k}(\omega))_{k\in\mathbf{N}}$ vers $f_\infty(\omega)$ pour $\sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$, P-presque partout.

2° Soit (v'_p) comme ci-dessus. Pour tout $p \in \mathbf{N}$ la martingale réelle $(\langle f_{\alpha_n}, v'_p\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers $(\langle f_\infty, v'_p\rangle)$. La démonstration s'achève alors exactement comme en 1° ci-dessus.

3.3. *Exemple.*

L'exemple suivant (tiré de [25]) montre l'intérêt de la notion de martingale faible. On prend pour $\mathbf{V}$ l'espace de Banach l^∞ des suites bornées réelles (x_n) muni de la norme

$$\|x\|^\infty = \sup_n |x_n|.$$

On pose $e_n = (\delta_{n,p})_{p\in\mathbf{N}}$ avec $\delta_{n,p} = 1$ si $n = p$ et $\delta_{n,p} = 0$ si $n \neq p$. Soit $\Omega = [0, 1[$ et $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée sur Ω par les intervalles $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$, $k = 0, \ldots, 2^{n-1}$. On définit f_n par récurrence en posant $f_1(\omega) = e_1$ pour tout $\omega \in \Omega$ et

$$f_{n+1} = f_n + \alpha_{n+1}(\omega)e_{n+1}$$

en posant $\alpha_{n+1}(\omega) = +1$ ou -1 suivant que le nombre entier $k_{n+1}(\omega)$ vérifiant $\frac{k_{n+1}(\omega)}{2^{n+1}} \leqslant \omega < \frac{k_{n+1}(\omega)+1}{2^n}$ est pair ou impair.

Si P désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 1[$, on voit facilement que $(f_n, \mathcal{F}_n)$ est une martingale forte à valeurs dans la boule unité de l^∞ (donc fortement uniformément intégrable). Comme cela est noté dans [25] il ne peut exister cependant de f_∞ telle que $(\mathcal{F}_n, f_n)_{n\in\hat{N}}$ soit une martingale forte, la suite $(f_n(\omega))_{n\in N}$ n'étant pour aucun ω une suite de Cauchy dans l^∞.

Si nous considérons cependant la dualité entre l^∞ et l'espace l^1 des suites réelles (x_n) sommables, la boule unité B de l^∞ étant compacte pour $\sigma(l^\infty, l_1)$ et l^1 étant séparable pour la $\{B\}$-topologie (i.e. sa topologie d'espace de Banach), nous concluons immédiatement du théorème 1 qu'il existe f_∞ faiblement intégrable (relativement à la dualité $\langle l^\infty, l^1\rangle$) telle que $(\mathcal{F}_n, f_n)_{n\in\hat{N}}$ soit une martingale faible, et telle que la suite $(f_n(\omega))_{n\in N}$ converge P.p.s. vers $f_\infty(\omega)$ pour $\sigma(l^\infty, l^1)$.

3.4. *Problème 3 faible.*

THÉORÈME 3. — *Soient* **V** *et* **V**$'$ *deux espaces vectoriels en dualité, et soit* $\mathfrak{S}$ *un ensemble de parties convexes équilibrées de* **V**, *compactes pour* $\sigma\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}'\rangle$. *Soit* $(f_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in I}$ *une martingale faible à valeurs dans* **V**.

L'une quelconque des conditions (A$'$), (C$'$) *ci-dessous est suffisante pour que* $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ *converge scalairement en mesure vers une application scalairement* $\mathcal{F}_\infty$*-mesurable* f *de* Ω *dans* **V** :

(A$'$) $(f_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in I}$ *est scalairement à variation bornée et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{F}_\infty$ et $Q_\varepsilon \in \mathfrak{S}$ *tels que* $P(\Omega\backslash\Omega_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, *et pour tout* α $l_{\Omega_\varepsilon}.f_\alpha(\omega) \in Q_\varepsilon$ p.s.

(C$'$) *Il existe une sous-martingale* $(\lambda_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in I}$ *réelle telle que* $\sup_\alpha \int |\lambda_\alpha|\, dP = K < +\infty$ *et un* $Q \in \mathfrak{S}$ *tel que :*

$$\textit{pour tout} \quad \alpha \in I \; f_\alpha(\omega) \in \lambda_\alpha(\omega).Q.$$

Démonstration. — Dans les hypothèses (A′) ou (C′), pour tout $v' \in \mathbf{V}'$ on a

$$\sup_{\alpha} \int |\langle f_\alpha, v' \rangle| \, dP < +\infty.$$

Dans le cas (A′) ceci est vrai par hypothèse, et dans le cas (C′) ceci résulte de la majoration $|\langle f_\alpha(\omega), v' \rangle| \leqslant M_{v'}^{Q} . |\lambda_\alpha(\omega)|$ p.s. entraînant $\sup_{\alpha} \int \langle f_\alpha, v' \rangle| \, dP \leqslant KM_{v'}^{Q}$.

D'après le théorème de Krickeberg ([16]), pour tout $v' \in \mathbf{V}'$, la famille $(\langle f_\alpha, v' \rangle)_{\alpha \in I}$ converge en mesure vers les fonctions d'une classe $\bar{h}_{v'}$ de fonctions P-équivalentes. Il s'agit de montrer l'existence d'une application f_∞ de Ω dans $\mathbf{V}$ telle que pour tout v' : $\langle f_\infty, v' \rangle \in \bar{h}_{v'}$.

1° *Cas où* (A′) *est vraie.*

Comme dans la démonstration du théorème 1, on considère une suite (Ω_n) de parties deux à deux disjointes de Ω telles que

$$P\left(\bigcup_n \Omega_n\right) = P(\Omega) \qquad \text{et} \qquad \forall_{\alpha \in I} \; l_{\Omega_n} . f_\alpha(\omega) \in Q_n \in \mathfrak{S} \text{ p.s.}$$

Comme $l_{\Omega_n} . \bar{h}_{v'}$ est limite en mesure des fonctions

$$\langle l_{\Omega_n} . f_\alpha, v' \rangle$$

qui sont majorées P.p.s. par $M_{v'}^{Q_n}$, on a $l_{\Omega_n} . \bar{h}_{v'} \leqslant M_{v'}^{Q_n}$ d'où $l_{\Omega_n} . \bar{h}_{v'} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ avec en outre :

$$\| l_{\Omega_n} . \bar{h}_{v'} \|^\infty \leqslant M_{v'}^{Q_n}.$$

On achève alors la démonstration exactement comme en 3.1 (1er cas).

2° *Cas où* (C′) *est vraie.*

Il résulte de [17] th. 2, p. 490 que la sous-martingale réelle $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge stochastiquement vers λ_∞ avec :

$$\int |\lambda_\infty| \, dP \leqslant K < +\infty.$$

On peut donc, comme dans la démonstration du théorème 1 construire une suite $(\Omega_n)_{n>1}$ d'éléments deux à deux disjoints tels que $P\left(\bigcup_n \Omega_n\right) = \Omega$ et $\lambda_\infty(\omega) < n$ pour tout $\omega \in \Omega_n$.

On en déduit que $l_{\Omega_n}.\tilde{h}_{v'} = \text{stoch.} \lim\limits_{\alpha} \langle l_{\Omega_n}.f_\alpha, v'\rangle$ est majoré P-presque partout par

$$\text{stoch.} \quad \lim_{\alpha} \mathrm{M}_{v'}^{\mathrm{Q}}|\lambda_\alpha| l_{\Omega_n} = \mathrm{M}_{v'}^{\mathrm{Q}}|\lambda| l_{\Omega_n} \leqslant n\mathrm{M}_{v'}^{\mathrm{Q}}.l_{\Omega_n}.$$

D'où $\|l_{\Omega_n}.\tilde{h}_{v'}\|^\infty \leqslant n\mathrm{M}_{v'}^{\mathrm{Q}}$. La démonstration s'achève comme la construction de f_∞ dans le cas du théorème 1.

3.5. *Cas des martingales indexées par* **N**.

Dans le cas des martingales indexées par **N**, la condition (**C**) peut être remplacée par une condition plus faible :

Théorème 1 *bis*. — *Soit* $(\mathcal{F}_n, f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une martingale faible telle que pour tout* $v' \in \mathbf{V}'$ $|\langle f_n, v'\rangle|$ *soit équi-intégrable. On suppose que pour* P*-presque tout* ω, *existe une partie convexe équilibrée faiblement compacte* Q_ω *de* **V** *telle que* $\{f_n(\omega)\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathrm{Q}_\omega$. *Alors :*

1° *Il existe une fonction* f_∞ *telle que* $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\hat{\mathbf{N}}}$ *soit une martingale faible avec* $f_\infty(\omega) \in \mathrm{Q}_\omega$ *presque sûrement.*

2° *Si* $\mathbf{V}'$ *contient un ensemble dénombrable partout dense pour une* $\mathfrak{S}$*-topologie avec* $\mathfrak{S} \supset \{\mathrm{Q}_\omega\}$, *la suite* $(f_n(\omega))_{n\in\mathbf{N}}$ *converge faiblement vers* $f_\infty(\omega)$ *pour* P*-presque tout* ω.

Démonstration. — 1° En vertu du théorème de Doob, pour tout $v' \in \mathbf{V}'$ la martingale réelle $(\langle f_n, v'\rangle \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque partout vers une fonction réelle $f_{v'}$ $\mathcal{F}_\infty$-mesurable telle que pour tout $\mathrm{F}_n \in \mathcal{F}_n$ on ait

$$\int_{\mathrm{F}_n} \langle f_n, v'\rangle \, d\mathrm{P} = \int_{\mathrm{F}_n} f_{v'} \, d\mathrm{P}. \tag{3-2-1}$$

Soit alors $\mathfrak{U}(n)$ un ultra-filtre sur **N** plus fin que le filtre de Fréchet. Pour presque tout $\omega \in \Omega$, $\lim\limits_{(n)} f_n(\omega)$ existe pour $\sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$ et est dans Q_ω. Posons donc alors

$$f_\infty(\omega) = \lim_{\mathfrak{U}(n)} f_n(\omega').$$

Nous avons pour presque tout ω :

$$f_{v'}(\omega) = \lim_{n} \langle f_n(\omega), v'\rangle = \lim_{\mathfrak{U}(n)} \langle f_n(\infty), v'\rangle = \langle f_\infty(\omega), v'\rangle \tag{3-2-2}$$

Les égalités (3-2-1) et (3-2-2) montrent que f_∞ vérifie les conclusions de 1°.

2° Soit (v'_n) un ensemble dénombrable partout dense dans $\mathbf{V}'$ pour la $\mathfrak{S}$-topologie. En vertu de ce qui précède, il existe un ensemble $F \in \mathcal{F}_\infty$ de probabilité nulle tel que :

$$\omega \notin F \Longrightarrow \lim_n \langle f_n(\omega), v'_j \rangle = \langle f_\infty(\omega), v'_j \rangle \quad \text{pour tout } j.$$

L'inclusion $\{f_n(\omega)\}_{n\in\mathbf{N}} \subset Q_\omega$ implique que les $f_n(\omega)$ considérés comme fonctionnelles sur $\mathbf{V}'$ forment un ensemble équicontinu pour la $\mathfrak{S}$-topologie sur $\mathbf{V}'$ et convergeant sur une partie partout dense de $\mathbf{V}'$ pour cette topologie, donc :

$$\omega \notin F \Longrightarrow \lim_n \langle f_n(\omega), v' \rangle = \langle f_\infty(\omega), v' \rangle \quad \text{pour tout } v' \in \mathbf{V}'$$

Posons pour tout n :

$$\Omega_n = \{\omega : \lambda(\omega) \leqslant n\}.$$

On a $P\left(\bigcup_n \Omega_n\right) = \Omega$.

Posons $\Omega_0 = \bigcup_n \Omega_n$.

Pour tout n, la majoration

$$|\langle l_{\Omega_n}.h_\alpha, v' \rangle| \leqslant |\langle l_{\Omega_n}.\lambda_\alpha, v' \rangle| \leqslant n M_{v'}^{Q}$$

implique : $\|l_{\Omega_n}.h_{v'}\|^\infty = \|\text{stoch.} \lim_\alpha \langle l_{\Omega_n}.h_\alpha, v' \rangle\|^\infty \leqslant n M_{v'}^{Q}$. Ceci prouve que l'application $v' \rightsquigarrow l_{\Omega_n}.\tilde{h}_{v'}$ est une application continue de $\mathbf{V}'$ munie de la $\mathfrak{S}$-topologie dans L^∞.

La démonstration s'achève comme la démonstration du théorème 1.

Théorème 3 *bis*. — *Soit* $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une martingale faible telle que pour* P-*presque tout* ω, *existe une partie convexe équilibrée compacte* Q_ω *de* $\mathbf{V}$ *telle que* $\{f_n(\omega)\}_{n\in\mathbf{N}} \subset Q_\omega$. *On suppose en outre que pour tout* $v' \in \mathbf{V}'$, $\sup_n \int |\langle f_n, v' \rangle| \, dP < +\infty$. *On suppose que* $\mathfrak{S}$ *est un ensemble de parties de* $\mathbf{V}$ *convexes équilibrées compactes pour* $\sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$ *tel que* $\mathfrak{S} \supset \{Q_\omega\}$, *et que* $\mathbf{V}'$ *admet un ensemble dénombrable partout dense pour la* $\mathfrak{S}$-*topologie.*

Alors il existe f scalairement $\mathcal{F}_\infty$ intégrable telle que P-*presque sûrement* $(f_n(\omega))_{n\in\mathbf{N}}$ *converge vers* $f(\omega)$ *pour* $\sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$.

Démonstration. — On utilise le théorème de Doob, assurant que $\forall v' \in \mathbf{V}'$ la suite $(\langle f_n, v'\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions réelles converge presque partout vers une fonction réelle $f_{v'}$. On construit f comme on a construit f_∞ dans la démonstration du théorème 2 et on achève de même.

4. Martingales fortes.

Dans ce § 4, $\mathbf{V}$ est un espace de Banach, en dualité avec $\mathbf{V}'$. Lorsque nous utilisons le vocable « faible » pour une topologie sur $\mathbf{V}$, sans préciser pour quelle dualité $\langle\mathbf{V}, \mathbf{V}'\rangle$, nous sous-entendons que $\mathbf{V}'$ est le dual de l'espace de Banach $\mathbf{V}$. Si par contre $\mathbf{V}$ est un dual $\mathbf{B}'$ d'espace de Banach $\mathbf{B}$, la topologie $\sigma(\mathbf{B}', \mathbf{B})$ sera appelée « vague ».

La norme de $\mathbf{V}$ sera notée $\|\,.\,\|$ et si f est une application de Ω dans $\mathbf{V}$ on notera $\|f\|$ l'application $\omega \rightsquigarrow \|f(\omega)\|$ de Ω dans $\mathbf{R}^+$.

4.1. *Passage du cas faible au cas fort.*

Si $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}}$ est une martingale forte, c'est à fortiori une martingale faible, et on peut dans certains cas lui appliquer les théorèmes qui précèdent.

Soit alors f_∞ la solution du problème 1 faible. Si on peut montrer que f_∞ prend ses valeurs dans un sous-espace séparable de $\mathbf{V}$, il résulte d'un théorème de Pettis (cf. [24] et [9]) que f_∞ est fortement mesurable. Si on peut alors prouver que $\int^* \|f_\infty\|\, d\mathrm{P} < +\infty$, on a prouvé que $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in\hat{\mathrm{I}}}$ est une martingale forte.

Notons que la solution du problème II fort est complètement donnée par un théorème très important dû à A. et C. Ionescu Tulcea et J. Neveu :

Théorème (Ionescu-Tulcea-Neveu). — *Si* $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in\hat{\mathrm{I}}}$ *est une martingale forte,* $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}}$ *converge vers* f_∞ *dans* $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{V}, \mathrm{P})$. *Si* $\mathrm{I} = \mathbf{N}$ *on a alors également :*

$$\lim_{n\to\infty} \text{forte } f_n(\omega) = f(\omega) \text{ p.s.}$$

Remarque. — Le théorème précédent n'est démontré dans [23] que dans le cas $I = \mathbf{N}$. Cependant la conclusion ci-dessus dans le cas I ordonné filtrant quelconque résulte d'une transposition immédiate de la partie facile de la démonstration.

4.2. *Martingales à valeurs dans un espace de Banach séparable.*

Théorème 4 (Solution forte des problèmes I et II). — *Soit* $(\mathcal{F}_n, f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (resp. $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}}$) *une martingale forte à valeurs dans un espace de Banach* $\mathbf{V}$ (*resp. un espace de Banach séparable*) *de dual* $\mathbf{V}'$. *On suppose que la martingale possède soit la propriété* (B), *soit la propriété* (C) *du théorème* 1, *soit la propriété* (A_1) *suivante.*

(A_1) *Pour tout* $\varepsilon \geqslant 0$ *il existe* $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{F}_\infty$ $\alpha_\varepsilon \in \mathrm{I}$ *et* Q_ε *convexe équilibré compact pour* $\sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$ *tel que* $\mathrm{P}(\Omega\backslash\Omega_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ *et pour tout* $\alpha \geqslant \alpha_\varepsilon$ $l_{\Omega_\varepsilon}.f_\alpha(\omega) \in \mathrm{Q}_\varepsilon$ p.s. *et* $(\|f_\alpha\|)_\alpha$ *est une famille terminalement équi-intégrable de fonctions réelles.*

Alors il existe une fonction f_∞ *à valeurs dans* $\mathbf{V}$ *telle que* $(\mathcal{F}_n, f_n)_{n\in\hat{\mathbf{N}}}$ (resp. $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in\hat{\mathrm{I}}}$) *soit une martingale forte, et la suite* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge* P-*presque sûrement fortement vers* f_∞, *ainsi que dans* $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{V}, \mathrm{P})$ (resp. la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}}$ *converge vers* f_∞ *dans* $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{V}, \mathrm{P})$).

Démonstration. — On remarque immédiatement que si (A_1) est vraie, l'hypothèse (A) du théorème 1 est vraie. De même (B) implique (A_1).

Remarquons également que si les f_n sont fortement mesurables, il existe une partie Ω_0 de Ω, de mesure P nulle telle que $\bigcup_n f_n(\Omega\backslash\Omega_0)$ soit contenue dans un sous-espace séparable de $\mathbf{V}$. Les hypothèses du théorème permettent donc, sans restreindre la généralité, de supposer que $\mathbf{V}$ est séparable. La fonction f_∞ dont l'existence résulte du théorème 1 est donc fortement mesurable en vertu du théorème de Pettis.

Dans le cas où l'hypothèse (B) est vraie on peut majorer la fonction réelle P-intégrable λ par une fonction P-intégrable λ' ne prenant qu'un ensemble dénombrable $\{\lambda'_n\}$ de valeurs. On peut faire la même remarque, lorsque (C) est vraie, pour la fonction λ_∞ limite de $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}}$ dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathrm{P})$. Posons alors $\Omega_n = \{\omega : \lambda'(\omega) = \lambda'_n\}$, et $\mathrm{Q}_n = \lambda'_n.\mathrm{Q}$. Si nous nous reportons à la démonstration du théorème 1, on voit que $\forall\omega \in \Omega_n$ la forme linéaire $v' \rightsquigarrow h_{v'}(\omega) = \langle f_\infty(\omega), v'\rangle$ vérifie $|h_{v'}(\omega)| \leqslant M_{v'}^{Q_n}$ avec $M_{v'}^{Q_n} = \sup_{v \in Q_n} |\langle v, v'\rangle|$, soit $f_\infty(\omega) \in Q_n^{00}$ en désignant par Q_n^{00} le bipolaire de Q_n. Comme Q_n est borné équilibré convexe et fermé $Q_n = Q_n^{00}$ d'où $f_\infty(\omega) \in Q_n$.

Si K désigne le rayon d'une boule de **V** contenant Q on a alors :

$$\|f_\infty(\omega)\| \leqslant K\lambda'(\omega) \text{ p.s.}$$

d'où l'intégrabilité forte de f_∞. Ceci prouve que $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in \hat{I}}$ est une martingale forte à valeurs dans **V**.

Dans le cas où l'hypothèse (A_1) est vraie, nous avons plus simplement, en reprenant les notations de la démonstration du théorème 1 :

$$\tilde{h}_{v'} = (L^1) \lim_\alpha \langle f_\alpha, v'\rangle.$$

Comme la sous-martingale réelle $(\mathcal{F}_\alpha, \|f_\alpha\|)_{\alpha \in I}$ est terminalement équi-intégrable, $(\|f_\alpha\|)_{\alpha \in I}$ converge dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vers λ_∞ intégrable :

$$|\langle f_\infty(\omega), v'\rangle| \leqslant \|v'\|\lambda_\infty \text{ p.s.}$$

Puisque **V** est supposé séparable, on peut trouver une suite (v'_n) telle que, pour tout $v \in \mathbf{V}$, $\|v\| = \sup_n \frac{1}{\|v'_n\|} |\langle v, v'_n\rangle|$. On en déduit qu'à l'exception d'un ensemble de probabilité nulle :

Pour tout v'_n : $\langle f_\infty(\omega), v'_n\rangle \leqslant \|v'_n\|\lambda_\infty(\omega)$.

D'où

$$\|f_\infty(\omega)\| \leqslant \lambda_\infty(\omega) \text{ p.s.}$$

Ceci implique l'intégrabilité de $\|f_\infty\|$ et achève la démonstration dans le cas où (A_1) est vraie.

Corollaire du théorème 4. — *Soit $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ une martingale à valeurs dans un espace de Banach réflexif séparable. Pour qu'il existe une application f_∞ à valeurs dans* **V** *telle que $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in \hat{I}}$ soit une martingale forte, il faut et il suffit que $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ soit terminalement équi-intégrable.*

Démonstration. — En effet, la condition est nécessaire d'après le théorème rappelé en 4.1, et elle est suffisante car la sous-martingale réelle $(\mathcal{F}_\alpha, \|f_\alpha\|)_{\alpha \in I}$ étant alors équi-intégrable on peut appliquer le théorème précédent en prenant pour Q la boule unité de $\mathbf{V}$, et en posant $\lambda_\alpha = \|f_\alpha\|$.

Si on considère maintenant une martingale forte $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ vérifiant seulement les hypothèses (B′) et (C′) du théorème 3, on voit facilement en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 5 que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ converge scalairement en mesure vers une fonction f_∞ fortement intégrable. En raison du caractère très faible de cette convergence, nous nous contentons d'énoncer un théorème dans le cas où $\mathrm{I} = \mathbf{N}$:

Théorème 5 (solution forte du problème III). — *Soit $(\mathcal{F}_n, f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une martingale forte à valeurs dans un espace de Banach $\mathbf{V}$, de dual $\mathbf{V}'$. Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties équilibrées convexes de $\mathbf{V}$, compactes pour $\sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$. On suppose que l'hypothèse* (C′) *du théorème* 3 *ou l'hypothèse* (A'_1) *suivante est vérifiée :*

(A'_1) *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{F}_\infty$ et $\mathrm{Q}_\varepsilon \in \mathfrak{S}$ tels que $\mathrm{P}(\Omega|\Omega_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et $l_{\Omega_\varepsilon}.f_n(\omega) \in \mathrm{Q}_\varepsilon$.p.s. pour tout n. Et il existe un nombre réel* K *tel que* $\sup\limits_n \int \|f_n\|\, d\mathrm{P} \leqslant \mathrm{K} < +\infty$.

Alors, si $\mathbf{V}'$ est séparable pour la $\mathfrak{S}$-topologie : la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge P-*presque partout pour la topologie forte vers une fonction f, fortement intégrable.*

Démonstration. — Soit f la limite P-presque partout (pour $\sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$) de f_n (cf. théorème 3 *bis*).

Si λ_∞ désigne la fonction introduite dans la démonstration du théorème 3 (cas ou (C′) est vraie), et si λ' désigne une fonction réelle intégrable, majorant λ_∞, et prenant un ensemble dénombrable de valeurs, on voit, comme dans la démonstration du théorème 4, que P-presque partout :

$$\|f(\omega)\| \leqslant \mathrm{K}\lambda'(\omega).$$

D'où l'intégrabilité forte de f (la mesurabilité forte résultant du théorème de Pettis et du fait que les f_n fortement mesurables prennent leurs valeurs dans un sous-espace séparable $\mathbf{V}_1$ de $\mathbf{V}$).

K désignant comme ci-dessus le rayon d'une boule contenant Q, l'inégalité $\|f_n(\omega)\| \leqslant \mathrm{K}\lambda_n(\omega)$ P.S. montre que

$$\sup_n \int^* \|f_n\|\, d\mathrm{P} < +\infty.$$

Dans le cas où (A_1') est vraie, on remarque comme dans la démonstration du théorème 4 que :

$$|\langle f(\omega), \varphi' \rangle| \leqslant |\lim_n \text{stoch.} \langle f_n, \varphi' \rangle| \leqslant \|\varphi'\| \lambda_\infty \text{ P.S.}$$

avec $\lambda_\infty = \lim_n \text{stoch.} \lambda_n$.

Comme $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ prend ses valeurs dans un sous-espace séparable de $\mathbf{V}$ on en déduit encore que $\|h_\infty(\omega)\| \leqslant \lambda_\infty(\omega)$ P.S., d'où

$$\int \|f\| \, dP \leqslant K.$$

Le théorème va alors résulter complètement d'un argument que nous empruntons à F. Scalora (cf. [29]) et que nous résumons sous forme d'un lemme.

Lemme 2. — *Si* $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *est une martingale forte telle que :*

$$\sup_n \int^* \|f_n\| \, dP < +\infty$$

et si f_n *converge faiblement* P-*presque partout vers* f *fortement intégrable, alors* $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *converge fortement* P-*presque partout vers* f.

Démonstration. — L'inégalité :

$$\sup_n \int^* \|f_n\| \, dP < +\infty$$

implique la convergence de la sous-martingale réelle

$$(\|f_n\|, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}.$$

Montrons que $\|f_n\|_{n \in \mathbf{N}}$ converge précisément vers $\|f\|$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi' \in \mathbf{V}'$, $\|\varphi'\| = 1$ tel que :

$$\|f(\omega)\| \leqslant |\langle f(\omega), \varphi' \rangle| + \varepsilon.$$

D'où, en vertu de la convergence faible de $f_n(\omega)$ vers $f(\omega)$:

$$\begin{aligned} \|f(\omega)\| &\leqslant \lim_n |\langle f_n(\omega), \varphi' \rangle| + \varepsilon \\ &\leqslant \lim_n \|f_n(\omega)\| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit, puisque ε est arbitraire

$$\|f(\omega)\| \leqslant \lim_n \|f_n(\omega)\|. \tag{4.1.2}$$

Par ailleurs $(\|f_n\|, \mathcal{F}_n)$ étant une sous-martingale réelle :

$$\lim_n \int \|f_n\| \, dP \leqslant \int \|f\| \, dP$$ [1 bis].

D'où, d'après (4.1.2) et le lemme de Fatou :

$$0 \leqslant \int (\lim_n \|f_n\| - \|f\|) \, dP \leqslant \lim_n \int \|f_n\| \, dP - \int \|f\| \, dP \leqslant 0$$

ce qui implique

$$\|f(\omega)\| = \lim_n \|f_n(\omega)\|.$$

Il suffit de remarquer alors que pour tout $\xi \in \mathbf{V}_1$, la martingale forte $(f_n - \xi, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ possède les mêmes propriétés que la martingale $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et converge faiblement presque sûrement vers $f_\infty - \xi$. A l'exception d'un ensemble de probabilité nulle on a donc

$$\|f(\omega) - \xi\| = \lim_n \|f_n(\omega) - \xi\|. \tag{4.1.3}$$

Puisque $\mathbf{V}_1$ est séparable, l'égalité (4.1.3) a lieu pour tous les points ξ d'un ensemble dense dans $\mathbf{V}_1$, avec une probabilité 1, la convergence forte de $(f_n(\omega))_{n \in \mathbf{N}}$ vers $f(\omega)$ pour P-presque tout ω résulte alors de la propriété connue suivante : si pour un ensemble dense $\{\xi\}$ dans un espace de Banach

$$\lim_n \|x_n - \xi\| = \|x_\infty - \xi\|,$$

la suite (x_n) converge fortement vers x_∞.

Le lemme 3 et le théorème 6 en résulte.

Remarque. — On voit qu'on aura la même conclusion de convergence relative à la suite (f_n) si on remplace l'hypothèse (C′) dans le théorème 5, par les hypothèses du théorème 3 *bis* avec en plus : $\sup_n \int^* \|f_n\| \, dP < +\infty$.

4.3. *Martingales à valeurs dans un dual séparable d'espace de Banach.*

Le lemme suivant permet de déduire des théorèmes « forts » de théorèmes faibles.

[1 bis] L'inégalité provient de :

$$\forall g \in L^\infty(\mathcal{F}_n, P, \mathbf{V}') \int |\langle f_n, g \rangle| dP \leqslant \int |\langle f, g \rangle| dP$$

LEMME 3. — *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de fonctions fortement intégrables définies sur* Ω, *à valeurs dans un espace de Banach* $\mathbf{B}'$ *séparable et dual topologique d'un espace de Banach* $\mathbf{B}$. *On suppose que la suite* $(f_n(\omega))_{n\in\mathbf{N}}$ *converge* P-*presque partout vers* $f(\omega)$ *pour la topologie* $\sigma(\mathbf{B}', \mathbf{B})$, *et que :*

$$\liminf_n \int^* \|f_n\| \, d\mathrm{P} < +\infty.$$

Alors f *est fortement mesurable et fortement intégrable.*

Démonstration. — Soit $\mathbf{B}''$ le dual de $\mathbf{B}'$. En vertu de la séparabilité de $\mathbf{B}'$, il existe une partie dénombrable D de $\mathbf{B}$ qui est partout dense dans $\mathbf{B}$ pour $\sigma(\mathbf{B}, \mathbf{B}')$, et dense également dans $\mathbf{B}''$ pour $\sigma(\mathbf{B}'', \mathbf{B}')$. Comme toute boule fermée de $\mathbf{B}''$ est métrisable pour $\sigma(\mathbf{B}'', \mathbf{B}')$ (cf. [3] chap. IV, § 5) quel que soit $y \in \mathbf{B}''$ il existe une suite (y_p) extraite de $\mathbf{B}$ telle que :

$$y = \lim_p y_p \quad (\text{relativement à } \sigma(\mathbf{B}'', \mathbf{B}')).$$

Pour tout $\omega \in \Omega$ on a alors :

$$\lim_p \langle f(\omega), y_p \rangle = \langle f(\omega), y \rangle.$$

D'où la mesurabilité de $\omega \rightsquigarrow \langle f(\omega), y \rangle$, pour tout $y \in \mathbf{B}''$. Il résulte du théorème de Pettis que f est fortement mesurable.

Montrons maintenant que f est fortement intégrable.

Soit $\omega \in \Omega$ tel que (pour $\sigma(\mathbf{B}', \mathbf{B})$) $\lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ existe $y \in \mathbf{B}$, $\|y\| \leqslant 1$ tel que :

$$\|f(\omega)\| \leqslant |\langle f(\omega), y \rangle| + \varepsilon.$$

Il en résulte que

$$\|f(\omega)\| \leqslant \liminf_n |\langle f_n(\omega), y \rangle| + \varepsilon \leqslant \liminf_n \|f_n(\omega)\| + \varepsilon.$$

Et d'après le lemme de Fatou :

$$\int^* \|f\| \, d\mathrm{P} \leqslant \liminf_n \int^* \|f_n\| \, d\mathrm{P} + \varepsilon.$$

D'où l'intégrabilité forte de f.

Le théorème suivant est une extension au cas d'un ensemble quelconque d'indices d'un théorème dû à A. et C. Ionescu-Tulcea dans le cas $\mathrm{I} = \mathbf{N}$.

THÉORÈME 6 (Solution forte des problèmes I et II). — *Soit* $(f_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ *une martingale forte à valeurs dans un espace de Banach* $\mathbf{B}'$ *séparable et dual topologique d'un espace de Banach* $\mathbf{B}$. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe* f_∞ *telle que* $(f_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in \hat{\mathrm{I}}}$ *soit une martingale forte est que la famille* $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ *soit terminalement équi-intégrable. La famille* (f_α) *converge alors vers* f_∞ *dans* $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathrm{P}, \mathbf{B}')$. *Lorsque* $\mathrm{I} = \mathbf{N}$ *la suite* $(f_n(\omega))_{n \in \mathbf{N}}$ *converge vers* $f_\infty(\omega)$ *fortement* P*-presque partout.*

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire, puisque, si $(\mathcal{F}_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in \hat{\mathrm{I}}}$ est une martingale forte, (f_α) converge vers f_∞ dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathrm{P}, \mathbf{B}')$ d'après le lemme 1, ce qui implique l'équi-intégrabilité terminale.

Réciproquement, la boule unité Q de $\mathbf{B}'$ étant compacte pour la topologie $\sigma(\mathbf{B}', \mathbf{B})$, on peut appliquer le théorème 1, avec $\mathbf{V} = \mathbf{B}'$, $\mathbf{V}' = \mathbf{B}$, en remarquant que la condition C) est vérifiée si on prend $\lambda_\alpha = \|f_\alpha\|$. D'après le théorème 1 il existe donc une fonction f_∞ telle que $(f_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in \hat{\mathrm{I}}}$ soit une martingale faible. Comme en outre $\mathbf{B}$ admet un ensemble dénombrable partout dense pour la topologie forte, il est possible d'après le théorème 2 d'extraire de I une suite α_n telle que $(f_{\alpha_n}(\omega))$ converge P-presque partout vers $f_\infty(\omega)$ pour $\sigma(\mathbf{B}', \mathbf{B})$. L'inégalité du lemme 3 résultant de l'intégrabilité uniforme, on déduit du lemme que $(f_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in \hat{\mathrm{I}}}$ est une martingale forte.

Les autres conclusions du théorème résultent alors du théorème de J. NEVEU (cf. 4.1).

Remarque. — En utilisant le lemme 3 et le théorème 3 *bis* on obtient immédiatement un résultat de A. et C. Ionescu-Tulcea (cf. [14] th. 4) affirmant : si $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une martingale forte à valeurs dans un dual séparable d'espace de Banach, telle que $\sup_n \int \|f_n\| \, d\mathrm{P} < +\infty$, alors la suite (f_n) converge fortement P-presque partout vers une fonction

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{E}, \mathcal{F}_\infty, \mathrm{P}, \mathbf{B}').$$

Le problème reste ouvert de savoir si, dans le cas d'un système quelconque d'indices I, on peut généraliser la propriété de convergence stochastique des martingales réelles. Nous ne savons pour l'instant rien dire de plus que ce que contient le théorème faible 3.

DEUXIÈME PARTIE — APPLICATION A LA DÉRIVATION

5. Problème de dérivation globale pour mesures vectorielles.

5.1. *Base de dérivation.*

Une base de dérivation $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{L}_\alpha)_{\alpha \in I}, \mu)$ est définie dans ce qui suit par la donnée d'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, la mesure μ étant toujours ici supposée réelle bornée, et d'une famille $(\mathcal{L}_\alpha)_{\alpha \in I}$ de partitions finies de Ω possédant les propriétés suivantes :

($\mathcal{C}_1$) I est un ensemble ordonné par $\leqslant$ et filtrant à droite.
($\mathcal{C}_2$) α, $\beta \in I$ avec $\alpha \leqslant \beta \Longrightarrow \mathcal{L}_\alpha$ plus fine que $\mathcal{L}_\beta$.
($\mathcal{C}_3$) $\mathcal{F}$ est la complétion de la tribu engendrée par $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{L}_\alpha$.

5.2. *Fonctions additives à valeurs vectorielles.*

Nous considérons une fonction φ définie sur un anneau $\mathcal{A} \supset \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{L}_\alpha$ à valeurs dans $\mathbf{V}$, et additive sur $\mathcal{A}$.

Nous rappelons qu'une fonction φ additive sur $\mathcal{A}$ et σ-additive lorsque l'on considère sur $\mathbf{V}$ la topologie $\sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$ est σ-additive pour toute topologie sur $\mathbf{V}$ compatible avec la dualité $\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}' \rangle$, (cf. [9] chap. IV, et [18] chap. V). Nous pouvons donc dire σ-additif sans préciser.

5.3. *Fonction d'ensembles dominée par une mesure μ. Absolue continuité scalaire.*

On dira qu'une fonction d'ensembles φ (réelle ou vectorielle) est *dominée par la mesure* μ si $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \varphi(A) = 0$.

On dira que φ à valeurs vectorielles est *scalairement absolument continue* par rapport à μ si pour tout v' et tout $\varepsilon > 0$.

Il existe η tel que $\mu(A) \leqslant \eta \Longrightarrow |\langle\varphi(A), v'\rangle| \leqslant \varepsilon$.

Il est évident que si φ est σ-additive les 2 notions précédentes coïncident.

On sait également (voir [6] et [24]) qu'il n'existe pas de « bonne condition d'absolue continuité » permettant d'énoncer un théorème de Radon Nikodym pour mesures vectorielles, relativement à une mesure réelle donnée, analogue au théorème connu pour les mesures réelles.

5.4. *Dérivants et dérivées d'une fonction* φ *définie sur* $\mathcal{A}$.

On pose

$$\text{(5-4-1)} \qquad D_\alpha^\varphi(\omega) = \sum_{F \in \mathcal{L}_\alpha} l_F(\omega) \frac{\varphi(F)}{\mu(F)}$$

avec la convention $\dfrac{\varphi(F)}{\mu(F)} = 0$ si $\mu(F) = 0$.

D_α^φ est appelé le dérivant de φ relativement à $\mathcal{L}_\alpha$.

Si $\mathcal{F}_\alpha$ désigne la tribu finie engendrée par $\mathcal{L}_\alpha$, on voit que si φ est dominée par μ, $(D_\alpha^\varphi, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une martingale. C'est même une martingale forte si **V** est un espace de Banach.

On a d'ailleurs $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$.

Si $(D_\alpha^\varphi)_{\alpha \in I}$ converge pour un mode « T » de convergence vers f, on dit que f est T-dérivée de φ relativement à la base $(\mathcal{L}_\alpha)$.

Si $(D_\alpha^\varphi(\omega))_{\alpha \in I}$ converge faiblement (resp. fortement) vers $f(\omega)$ on dit que $f(\omega)$ est la dérivée faible (resp. forte) de φ au point ω.

Si f est solution du problème I faible (resp. fort) on voit que f est une densité faible (resp. forte) de φ [2].

Le problème I est donc celui de l'existence d'une densité.

Le problème III est donc celui de l'existence d'une T-dérivée.

Le problème II est donc celui de la relation entre densité et T-dérivée.

[2] On dit que f est une densité faible (resp. forte) de φ par rapport à μ si pour tout $F \in \mathcal{F}$ $\varphi(F) = \int_F f\, d\mu$ au sens de l'intégrale faible (resp. forte).

6. Dérivation faible.

Dans toute cette partie 2 du paragraphe 2, nous considérons un espace localement convexe $\mathbf{V}$, en dualité avec $\mathbf{V}'$ et $\mathfrak{S}$ désignera comme précédemment un ensemble filtrant de parties convexes équilibrées de $\mathbf{V}$, compactes pour $\sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}'.)$

6.1. *Existence d'une densité faible et dérivés correspondants.*

THÉORÈME 7. — *Soit* φ *une fonction additive d'ensembles définie sur* $\mathcal{A}$, *à valeurs dans* $\mathbf{V}$, *dominée par* μ *et possédant l'une des propriétés* (A″) *ou* (C″) *suivantes :*

(A″) φ *est* σ*-additive et il existe une suite* (Ω_n) *croissante extraite de* $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{I}} \mathcal{L}_\alpha$ *et une suite* (Q_n) *extraite de* $\mathfrak{S}$ *telles que*

$$\mu\left(\bigcup_n \Omega_n\right) = \mu(\Omega)$$

et :

$$\forall \mathrm{F} \in \mathcal{F}, \qquad \varphi(\mathrm{F} \cap \Omega_n) \in \mu(\mathrm{F} \cap \Omega_n) . Q_n.$$

(C″) *Il existe une mesure réelle bornée* ν, *absolument continue par rapport à* μ, *et un* $Q \in \mathfrak{S}$ *tels que :*

$$\forall \mathrm{F} \in \mathcal{F}, \qquad \varphi(\mathrm{F}) \in \nu(\mathrm{F}) . Q.$$

Alors :

1° φ *admet une densité faible* f *relativement à* μ ;

2° *les dérivants* $(\mathrm{D}^\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ (cf. 5-4-1) *convergent suivant* I *scalairement en moyenne vers* f ;

3° *si* $\mathbf{V}'$ *admet un sous-ensemble dénombrable partout dense pour la* $\mathfrak{S}$*-topologie, il existe une suite* $(\mathrm{D}^\varphi_{\alpha_n})_{n \in \mathbf{N}}$ *extraite de la famille des dérivants, telle que* $\lim\limits_{n \to \infty}$ *faible* $\mathrm{D}^\varphi_{\alpha_n}(\omega) = f(\omega)$ μ.p.p. ;

4° *si* I *est dénombrable* φ *admet pour dérivée faible* f, *en* μ*-presque tout* $\omega \in \Omega$, *relativement à la base* $(\mathcal{L}_n)$ *de dérivation.*

Démonstration. — Remarquons que si ν est une mesure réelle bornée absolument continue par rapport à μ, la martingale $(\mathrm{D}^\nu_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$ réelle est équi-intégrable (et converge d'ailleurs en moyenne vers la densité de ν relativement à μ). Si l'hypothèse (C″) est vraie, on a :

$$D_\alpha^\varphi(\omega) \in D_\alpha^\nu(\omega) . Q \quad \mu\text{.p.p.}$$

et le théorème résulte immédiatement de l'application du théorème 1 lorsque l'hypothèse (C) est vraie.

Lorsque (A″) est vraie, φ étant σ-additive, pour tout $\varphi' \in \mathbf{V}'$ la martingale réelle $(\langle D_\alpha^\varphi, \varphi' \rangle, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in I}$ est constituée par la famille des dérivants de la mesure réelle bornée $\langle \varphi, \varphi' \rangle$. On sait (cf. [17] p. 485, prop. 2.1.2) qu'une telle martingale est de variation bornée et absolument continue donc (*ibid.* prop. 2.3.2) qu'elle est terminalement équiintégrable. Le théorème résulte donc encore dans ce cas immédiatement du théorème 1.

Cas particuliers :

1° Si $\mathbf{V}$ est un dual $\mathbf{B}'$ d'espace de Banach $\mathbf{B}$, en prenant pour éléments de $\mathfrak{S}$ les boules de $\mathbf{B}'$ qui sont compactes pour $\sigma(\mathbf{B}', \mathbf{B})$ on obtient un théorème généralisant celui de J. Dieudonné (cf. [6]) où $\mathbf{B}$ est supposé séparable.

2° Si $\mathbf{V}$ est un dual $\mathbf{B}'$ d'espace de Banach $\mathbf{B}$, l'hypothèse (C″) est vraie si φ est à variation bornée (au sens de [9] chap. III), car on a $\varphi(F) \in \mathrm{var}_\varphi(F) . Q$ Q désignant la boule unité de $\mathbf{B}'$.

6.2. *Un théorème de décomposition.*

THÉORÈME 8. — *Soit φ une fonction additive d'ensembles définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbf{V}$, dominée par μ et possédant l'une des propriétés (A‴) ou (B‴) suivantes :*

(A‴) *φ est scalairement à variation bornée et il existe une suite (Ω_n) croissante extraite de $\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{L}_\alpha$ et une suite (Q_n) extraite de $\mathfrak{S}$ telles que $\mu\left(\bigcup_n \Omega_n\right) = \mu(\Omega)$ et :*

$$\forall F \in \mathcal{F}, \qquad \varphi(F \cap \Omega_n) \in \mu(F \cap \Omega_n) . Q_n$$

(C‴) *il existe une fonction simplement additive, à variation bornée ν sur $\mathcal{A}$, dominée par μ, et un $Q \in \mathfrak{S}$ tel que :*

$$\forall F \in \mathcal{F}, \qquad \varphi(F) \in \nu(F) . Q.$$

Alors :

1° φ *est décomposable de façon unique en la somme de deux fonctions additives* φ_1 *et* φ_2 *possédant les propriétés suivantes :*

— φ_1 *admet une densité* f_1 *par rapport à* μ;

— φ_2 *est scalairement purement simplement additive* (i.e. $\forall v' \in \mathbf{V}'$ *quelle que soit la mesure* σ*-additive* μ' :

$$|\mu'| \leqslant |\langle \varphi_2, v' \rangle| \Longrightarrow \mu' = 0).$$

2° *Les dérivées* $(\mathrm{D}_\alpha^\varphi)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ *convergent suivant* I *scalairement en mesure vers* f_1.

3° *Si* $\mathbf{V}'$ *admet un ensemble dénombrable partout dense pour la* $\mathfrak{S}$*-topologie et si* $\mathrm{I} = \mathbf{N}$, φ *admet* $f_1(\omega)$ *pour dérivée faible en* μ*-presque tout point* $\omega \in \Omega$, *relativement à la base de dérivation* $(\mathfrak{L}_n)$.

Démonstration. — Si φ admet une décomposition du type indiqué, $\forall v' \in \mathbf{V}'$ $\langle \varphi, v' \rangle = \langle \varphi_1, v' \rangle + \langle \varphi_2, v' \rangle$ est la décomposition unique de la fonction réelle simplement additive à variation bornée $\langle \varphi, v' \rangle$ en sa partie σ-additive (ici absolument continue par rapport à μ) et en sa partie purement simplement additive. Si une autre décomposition $\varphi = \varphi_1' + \varphi_2'$ existait, on aurait donc $\langle \varphi_2', v' \rangle = \langle \varphi_2, v' \rangle$ pour tout v' d'où $\varphi_2 = \varphi_2'$. D'où l'unicité.

En appliquant le théorème 3 à la martingale $(\mathrm{D}_\alpha^\varphi)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ on voit que cette martingale converge scalairement en mesure vers une fonction f_1. Pour tout $v' \in \mathbf{V}'$ la martingale réelle $(\langle \mathrm{D}_\alpha^\varphi, v' \rangle)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ converge stochastiquement vers la densité de la partie absolument continue de $\langle \varphi, v' \rangle$ ($\langle f_1, v' \rangle$ est donc cette densité) : on dit que $\mathrm{F} \rightsquigarrow (\langle \varphi(\mathrm{F}), v' \rangle - \int_{\mathrm{F}} \langle f_1, v' \rangle \, d\mu)$ est la partie purement simplement additive de $\langle \varphi, v' \rangle$ (cf. [17], th. 3, p. 491). On voit donc qu'en posant $\varphi_1(\mathrm{A}) = \varphi(\mathrm{A}) - \int_{\mathrm{A}} f_1 \, d\mu$ on obtient la décomposition voulue, ainsi d'ailleurs que la deuxième partie du théorème.

La 3e partie résulte alors immédiatement du théorème 2, 4°.

7. Dérivation forte.

7.1. *Un cas d'existence d'une densité forte et dérivés correspondants.*

Théorème 9. — *Soit φ σ-additive à valeurs dans un dual séparable* $\mathbf{B}'$ *d'espace de Banach* $\mathbf{B}$. *On suppose que φ est à variation forte bornée et dominée par la mesure μ.*

Alors il existe une densité forte f de φ relativement à la mesure μ. La famille des dérivants $(D_\alpha^\varphi)_{\alpha\in I}$ converge vers f dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbf{B}')$.

Si I *est dénombrable φ admet $f(\omega)$ pour dérivée forte en μ-presque tout point ω.*

Démonstration. — L'hypothèse de variation forte bornée s'écrit en effet :

$$+\infty > \sup_\alpha \sum_{F\in\mathcal{L}_\alpha} \|\varphi(F)\| = \sup_\alpha \int \|D_\alpha^\varphi\|\, d\mu.$$

La variation ν de φ est une mesure réelle bornée dominée par μ, donc absolument continue par rapport à μ. La suite des dérivants (D_α^ν) est donc une martingale uniformément intégrable (cf. [15]) qui majore terme à terme $(\|D_\alpha^\varphi\|)$.

Le théorème 9 est donc conséquence du théorème 6.

7.2. *Un théorème de décomposition.* — Soit S un ensemble portant la partie absolument continue de Var_φ par rapport à μ et tel que S^c porte la partie de Var_φ étrangère à μ.

On appellera $F \rightsquigarrow \varphi(S \cap F)$ la partie absolument continue de φ relativement à μ et $F \rightsquigarrow \varphi(S^c \cap F)$ la partie étrangère à φ.

On a la proposition évidente.

Proposition. — *Une mesure φ à variation forte bornée est dominée par μ si et seulement si la partie de φ étrangère à μ est nulle.*

Théorème 10. — *Soit φ à valeurs dans un dual séparable* $\mathbf{B}'$ *d'espace de Banach* $\mathbf{B}$. *On suppose que φ est de variation forte* Var_φ *bornée.*

On suppose également que I *est dénombrable.*

Alors la suite des dérivants (D_n^φ) converge μ-presque partout pour la topologie forte dans $\mathbf{B}'$ *vers une densité forte de la partie absolument continue de φ relativement à μ.*

Démonstration. — On a en effet

$$D_n^\varphi = \sum_{F\in\mathcal{L}_n} l_F \cdot \frac{\varphi(F)}{\mathrm{Var}_\varphi(F)} \cdot \frac{\mathrm{Var}_\varphi(F)}{\mu(F)}.$$

Posons

$$g_n = \sum_{F \in \mathcal{L}_n} l_F \cdot \frac{\varphi(F)}{\mathrm{Var}_\varphi(F)}$$
$$\lambda_n = \sum_{F \in \mathcal{L}_n} l_F \cdot \frac{\mathrm{Var}_\varphi(F)}{\mu(F)}$$

$(g_n, \mathcal{F}_n)$ est une martingale vectorielle forte à valeurs dans la boule unité de $\mathbf{B}'$. Elle converge fortement μ-presque partout vers une densité forte g de φ par rapport à Var_φ.

La sous-martingale réelle $(\lambda_n, \mathcal{F}_n)$ converge μ-presque partout vers une densité λ de la partie absolument continue μ de Var_φ relativement à μ.

La suite (D_n^φ) des dérivants converge donc μ-presque partout vers $\lambda . g$ pour la topologie forte de $\mathbf{B}'$.

Pour tout $F \in \mathcal{F}$ on a, en désignant par S un ensemble portant la partie absolument continue de φ tandis que S^c porte la partie étrangère à μ :

$$\int_{F \cap S} \varphi \, d\mu = \int_{F \cap S} g(\omega) \, \mathrm{Var}_\varphi \, (d\omega) = \int_{F \cap S} g(\omega) . \lambda(\omega) \mu \, (d\omega)$$
$$= \int_F g(\omega) . \lambda(\omega) \mu \, (d\omega).$$

D'où le théorème.

7.3. *Mesures à valeurs dans un espace de Banach quelconque.*

Nous sommes en mesure de donner une caractérisation des mesures à variation bornée, admettant une densité forte relativement à la mesure de base $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\mathcal{F}$ étant supposée comme toujours complète relativement à μ.

THÉORÈME 11 [3]. — *Soit φ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$, à valeurs dans un espace de Banach quelconque* $\mathbf{B}$, *de variation forte bornée.*

1° *Pour que φ admette une densité forte relativement à μ, il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée :*

(i) *il existe une mesure positive bornée ν, équivalente à μ, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{F}$ et un* K_ε *convexe faiblement*

[3] Dans [27] M. A. Rieffel donne une caractérisation des mesures à variation bornée, admettant une densité forte, obtenue en remplaçant le mot faiblement compact dans notre énoncé, par « Dentable subsets ». Comme il n'est pas connu si faiblement compact implique « Dentable », notre résultat garde son originalité. Il permet d'ailleurs de déduire immédiatement le théorème classique de Phillips (cf. [25] th. 5-1) ce que ne donne pas le théorème de Rieffel.

compact dans **B** *tels que* $\mu(\Omega \backslash \Omega_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ *et pour tout* $F \subset \mathcal{F}$, $F \subset \Omega_\varepsilon$ *on ait:*

$$\varphi(F) \in \nu(F) K_\varepsilon.$$

2° *Si* φ *admet une densité forte* f, *la famille des dérivants* $(D_\alpha^\varphi)_{\alpha \in I}$ *converge vers* f *dans* $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbf{B})$ *et si* I *est dénombrable,* φ *admet* $f(\omega)$ *pour dérivée forte relativement à* μ *en* μ*-presque tout* $\omega \in \Omega$.

Démonstration. — La condition est nécessaire.

Supposons en effet que f soit une densité forte de φ : f prend μ-presque partout ses valeurs dans un sous-espace fermé séparable $\mathbf{B}_0$ de $\mathbf{B}$. Considérons donc la mesure ν' définie sur la tribu des boréliens forts de $\mathbf{B}_0$ image de μ par f. Puisque $\mathbf{B}_0$ est séparable, la mesure ν' est régulière relativement à la famille des compacts forts de $\mathbf{B}_0$ au sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$ existe un compact fort K'_ε, tel que $\nu'(B_0 \backslash K'_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. On remarque alors que l'enveloppe convexe K_ε de K'_ε est compacte donc faiblement compacte et on pose $\Omega_\varepsilon = f^{-1}(K_\varepsilon)$. On voit que $\mu(\Omega \backslash \Omega_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, et par ailleurs pour tout $F \in \Omega_\varepsilon$ on a (voir [4] ou [18] chap. v) $\int_F f \, d\mu \in \mu(F) . K_\varepsilon \in \mathbf{B}$.

La condition est suffisante.

La densité de φ par rapport à μ existe, si et seulement si la densité par rapport à ν existe. En outre si cette densité existe les convergences énoncées dans le 2° du théorème sont automatiques d'après le théorème de J. Neveu. Nous supposons donc $\mu = \nu$. Dérivons φ suivant un système $I = \{\alpha\}$ de partitions finies engendrant une tribu dont la μ-complétion est $\mathcal{F}$, et telle que $\forall n$ il existe une $\alpha \in I$ pour laquelle $\Omega_{1/n} \in \mathcal{F}_\alpha$. La martingale $(D_\alpha^\varphi, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ vérifie alors visiblement la première des conditions de l'hypothèse (A_1), du théorème 4. En outre si ν' est la variation forte de φ, ν' est une mesure positive absolument continue par rapport à μ. Donc la martingale réelle $(D_\alpha^{\nu'})_{\alpha \in I}$ est terminalement équi-intégrable, et l'hypothèse (A_1) du théorème 4, résulte alors complètement de $\| D_\alpha^\varphi(\omega) \| \leqslant D_\alpha^{\nu'}(\omega)$ pour tout ω. Pour appliquer le théorème 4 nous avons donc seulement maintenant à prouver que l'hypothèse (i) entraîne la propriété suivante : φ (et par suite les dérivants D_α^φ) prend ses valeurs dans un sous-espace séparable de $\mathbf{B}$. Pour cela nous prouvons que les enveloppes fermées convexes $c(Q_\varepsilon)$ des ensembles $Q_\varepsilon = \{\varphi(F) : F \in \mathcal{F},\ F \subset \Omega_\varepsilon\}$ sont fortement compactes. Comme la topologie induite par **B** sur $c(Q_\varepsilon)$ est celle de la convergence uniforme sur la boule unité $\mathbf{B}'_1$ de $\mathbf{B}'$ il nous suffit de démontrer que $\mathbf{B}'_1$ est précompact pour la structure $\mathcal{T}$ de la convergence uniforme sur $c(Q_\varepsilon)$: en effet s'il en est ainsi $c(Q_\varepsilon)$ étant uniformément continu pour $\mathcal{T}$, la convergence faible sur $\mathbf{B}'_1$ et la convergence uniforme sur $\mathbf{B}'_1$ coïncident alors sur les $c(Q_\varepsilon)$, qui sont faiblement compacts par hypothèse, puisque $c(Q_\varepsilon) \subset \nu(\Omega_\varepsilon).K_\varepsilon$.

Nous remarquons alors que l'hypothèse (i) du théorème 11 implique (voir le début de la démonstration du théorème 4), l'existence de D^φ_∞ telle que $(D^\varphi_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\hat{I}}$ soit une martingale faible avec $D^\varphi_\infty(\Omega_\varepsilon) \subset K_\varepsilon$. Soit (x'_n) une suite quelconque extraite de $\mathbf{B}'_1$. En vertu de la compacité de $\mathbf{B}'_1$ pour $\sigma(\mathbf{B}', \mathbf{B})$, il existe $x'_0 \in \mathbf{B}'_1$ et une sous-suite (x'_{n_k}) extraite telle que pour tout $\omega \in \Omega$ (4) :

$$\lim_k \langle D^\varphi_\infty(\omega), x'_{n_k}\rangle = \langle D^\varphi_\infty(\omega), x'_0\rangle.$$

Comme en outre $D^\varphi_\infty(\Omega_\varepsilon) \subset K_\varepsilon$, la suite $(\langle D^\varphi_\infty, x'_{n_k}\rangle)_{k\in\mathbf{N}}$ est uniformément bornée sur Ω_ε. D'où pour tout $F \in \mathcal{F}$, $F \subset \Omega_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}|\langle\varphi(F), x'_{n_k}\rangle - \langle\varphi(F), x'_0\rangle| &\leqslant \int_F |\langle D^\varphi_\infty, x'_{n_k}\rangle - \langle D^\varphi_\infty, x'_0\rangle|\, d\mu \\ &\leqslant \int_{\Omega_\varepsilon} |\langle D^\varphi_\infty, x'_{n_k}\rangle - \langle D^\varphi_\infty, x'_0\rangle|\, d\mu\end{aligned}$$

avec :

$$\lim_k \int_{\Omega_\varepsilon} |\langle D^\varphi_\infty, x'_{n_k}\rangle - \langle D^\varphi_\infty, x'_0\rangle|\, d\mu = 0.$$

Ceci exprime que la sous-suite (x'_{n_k}) converge uniformément sur Q_ε et par suite sur $c(Q_\varepsilon)$, vers x'_0. D'où la quasi-compacité de $\mathbf{B}'_1$ pour $\mathcal{T}$. Ceci achève la démonstration du théorème car nous pouvons appliquer maintenant le théorème 4.

La première partie de cette démonstration fait apparaître le corollaire suivant, donnant une condition nécessaire en apparence plus forte que celle livrée par le théorème 11.

Corollaire du théorème 11 (5). — *Pour qu'une mesure φ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans un espace de Banach quelconque* **B**

(4) Il suffit en effet d'appliquer le théorème de Smûlian à l'espace de Banach $\hat{B}'_{K^0_\varepsilon}$ obtenu en munissant E′ de la jauge de K^0_ε en séparant et complétant.

(5) Ce corollaire a également été obtenu par voie directe par M. A. Rieffel dans [26]. Rieffel met d'ailleurs la condition [ii] sous des formes équivalentes intéressantes.

à variation forte bornée admette une densité forte relativement à μ, *il est nécessaire que :*

(ii) *pour tout* $\varepsilon > 0$ *existe* $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{F}$ *et un compact fort* K_ε *tels que* $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ *et pour tout* $F \in \mathcal{F}$, $F \subset \Omega_\varepsilon$ *on ait* $m(F) \in \mu(F) . K_\varepsilon$.

7.4. *Exemple d'application des théorèmes de dérivation.*

Soit Ω un espace polonais, $\mathcal{F}$ la tribu de ses Boréliens complétée par rapport à une mesure μ bornée. On prend pour **V** un espace $L^1(E, \mathcal{B}, m)$ quelconque et on considère une fonction de transition $\varphi(x, F)$ de $(E, \mathcal{B})$ dans $(\Omega, \mathcal{F})$ possédant la propriété :

$$(7.3.1) \quad \forall \varepsilon > 0, \qquad \exists A > 0, \qquad \forall F \in \mathcal{F} \int_{[\varphi(.,F) \geqslant A . \mu(F)]} \varphi(x, F) m\,(dx) \leqslant \mu(F) . \varepsilon.$$

Cette propriété exprime en effet que l'ensemble $\left\{\frac{\varphi(.,F)}{\mu(F)}\right\}_{F \in \mathcal{F}}$ de fonctions définies sur E $\left(\text{avec la convention } \frac{\varphi(.,F)}{\mu(F)} = 0\right.$ si $\mu(F) = 0)$ est un ensemble équi-intégrable relativement à m. Si nous désignons par $\tilde{\varphi}(F)$ l'application $F \rightsquigarrow$ classe d'équivalence de $\varphi(.,F)$ dans $\mathcal{L}_1(E, \mathcal{B}, m)$ cette application vérifie les hypothèses du théorème 9. Il existe donc f telle que :

$$(7.3.2) \qquad \tilde{\varphi}(F) = \int_F \tilde{f}\, d\mu \quad \text{(intégrale forte).}$$

La mesurabilité forte de $\tilde{f}$ implique facilement l'existence d'une fonction $(x, \omega) \rightsquigarrow f(x, \omega)$ $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$-mesurable telle que, pour μ-presque tout ω, $f(.,\omega) \in \tilde{f}(\omega)$.

La formule (7.3.2) implique alors pour tout F ;

$$(7.3.4) \quad \forall h \in \mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{B}, m) \quad \int h(x)\varphi(x, F) m\,(dx) = \int_F \mu\,(d\omega) \int h(x) f(x, \omega) m\,(dx).$$

Soit, en vertu de la mesurabilité de f :

$$(7.3.5) \quad \forall h \in \mathcal{L}^\infty(E, \mathcal{B}, m) \int h(x)\varphi(x, F) m\,(dx) = \int h(x) m\,(dx) \int_F f(x, \omega)\, \mu(d\omega).$$

Ce qui implique pour tout F :

$$(7.3.6) \qquad \varphi(x, \mathrm{F}) = \int_{\mathrm{F}} f(x, \omega)\mu\,(d\omega) \quad \text{m.p.p.}$$

Nous pouvons alors énoncer :

Toute fonction de transition $\varphi(x, \mathrm{F})$, *vérifiant* (7.3.1) *s'exprime suivant la formule* (7.3.6) *au moyen d'un noyau fonction* $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$-*mesurable* $f(x, \omega)$.

Nous remarquons pour terminer que la condition (7.3.1) est trivialement satisfaite lorsque pour tout $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$:

$$\varphi(x, \mathrm{F}) \leqslant \mu(\mathrm{F}) \quad \text{m.p.p.}$$

BIBLIOGRAPHY

[1] S. Bochner, Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente einer Vektorraümer sind, *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 20 (1933), 262-276.

[2] S. Bochner, Partial Ordering in the theory of Martingales, *Annals of Math.*, Vol. 62, n° 1, July 1955, 162-169.

[3] Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Paris, Hermann, (1955).

[4] Bourbaki, Intégration, Chap. vi, Paris, Hermann, (1959).

[5] S. D. Chatterji, Martingales of Banach-valued random variables. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66 (1960), 395-398.

[6] J. Dieudonné, Sur le théorème de Lebesgue Nikodym (V), *Can. J. of Math.*, vol. III, *n* 2 (1951), 129-139.

[7] M. Driml and O. Hans, Conditional expectations for generalized random variables, *Trans. Second. Prague Conf. ou Info. Theory. Prague* (1960).

[8] J. L. Doob, Stochastic processes, New York, (1950).

[9] Dunford and Schwartz, Linear operators, Part. I, New York (1958).

[10] M. R. Foret et E. Mourier, Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique, *An. École Norm. Sup.* (1953), 267-285.

[11] L. L. Helms, Mean convergence of martingales. *Trans. Am. Math. Soc.*, Vol. 87 (1958) 439-445.

[12] A. et C. Ionescu-Tulcea, On the lifting Property, I, *J. of Math. An. and Appl.*, 3 (1961), 537-546.

[13] A. et C. Ionescu-Tulcea, On the lifting Property II, *J. Math. Mech.* (1962), 773-795.

[14] A. et C. Ionescu-Tulcea, Abstract ergodic theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 107 (1963), 107-125.

[15] K. Krickeberg, Convergence of Martingales with a directed index Set *Trans. of the Am. Math. Soc.* Vol. 83, n° 2, 313-317.

[16] K. Krickeberg, Stochastische Konvergenz von Semimartingalen, *Math. Zeitschr.*, 66 (1957), 470-486.

[17] K. Krickeberg et Chr. Pauc, Martingales et dérivation. *Bull. Soc. Math. de France* (1963), 455-543.

[18] M. Métivier, Limites projectives de mesures, Martingales, Applications, *Annali di Mat. Pura ed Appli.* (IV), Vol. LXI (1963).

[19] M. Métivier, Martingales à Valeurs Vectorielles, *Bulletin Soc. Math. Grèce* (1964), p. 54-74.

[20] M. Métivier, Martingalen mit Werten in einem Lokal-konvexen Raum : exposés dactylographiés au Séminaire de Probabilités de l'Université de Hambourg (mai-juin 56).

[21] M. Métivier, Martingales faibles et Martingales fortes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 261, 3723-3726.

[22] E. Mourier, Éléments aléatoires dans un espace de Banach (Thèse de Doctorat Paris, 1952).

[23] J. Neveu, Relation entre la théorie des martingales et la théorie ergodique, Colloque International de Théorie du Potentiel, Paris, Juin 1964.

[24] B. J. Pettis, On integration in vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 44 (1938) 277-304.

[25] R. S. Phillips, On weakly compact subsets of a Banach Space, *Amer J. Math.* 65 (1943), 108-136.

[26] M. A. Rieffel, The Radon-Nikodym Theorem for the Bochner Integral, à paraître.

[27] M. A. Rieffel, Dentable Subsets of Banach Spaces, with application to A Radon-Nikodyn Theorem, à paraître.

[28] Ulf. Rønnov, Martingales à valeurs vectorielles et dérivation, Sém. de Théorie des Probabilités, Institut Henri Poincaré Année 1964-1965.

[29] F. Scalora, Abstract martingale convergence theorems, *Pac. J. of Math.* Vol. II (1961), n° 1, 347-374.

Manuscrit reçu le 3 février 1967.

Michel Métivier
Département de mathématiques
Faculté des Sciences
35-Rennes.