Annales de l'institut Fourier

Khelifa Harzallah

Fonctions opérant sur les fonctions définies négatives

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 1 (1967), p. 443-468

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_443_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 1 (1967). 443-468.

FONCTIONS OPÉRANT SUR LES FONCTIONS DÉFINIES-NÉGATIVES

par Kh. HARZALLAH

1. Introduction.

Nous nous proposons de déterminer, pour un groupe abélien localement compact donné G toutes les fonctions f, à valeurs complexes, définies sur l'ensemble :

$$\{z = (z_k) ; \quad 1 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et} \quad \mathcal{R}\mathrm{e}\, z_k \geqslant 0\}$$

et telles que si les ψ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont des fonctions définies négatives sur G alors $f(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ est aussi définie négative. On apporte une solution complète dans le cas où G possède des éléments d'ordre aussi grand qu'on veut ; on étudie aussi le cas où les n variables sont toutes réelles : le résultat obtenu est alors valable pour tous les groupes infinis.

La démonstration est basée sur le fait que les fonctions f précédentes forment un cône convexe saillant qui, muni de la topologie de la convergence simple, possède une base convexe compacte lorsque G est discret. Le théorème de Kreinet Milman permet alors de donner à f une représentation intégrale qui se trouve être unique.

Dans les paragraphes 2 et 3 nous énoncerons quelques résultats concernant les fonctions définies négatives et nous donnerons des lemmes techniques utiles pour la suite.

Dans les paragraphes 4 et 5 nous étudierons le cas réel puis complexe ; nous donnerons aussi une solution à certains problèmes voisins.

Cette étude développe et généralise deux notes [1] et [2] dans lesquelles seul le cas d'une variable (réelle ou complexe) était envisagé. Une autre démonstration du théorème central de la note [2] a été donnée récemment par A. Konheim et B. Weiss [4].

2. Fonctions définies-négatives.

DÉFINITION. — *Soient* G *un groupe abélien localement compact et* $\mathcal{C}(G)$ *l'ensemble des fonctions continues à valeurs complexes définies sur* G. *La fonction* $\psi \in \mathcal{C}(G)$ *est dite définie négative (Schoenberg, Beurling...) si la forme hermitienne sur* $\mathbf{C}^n$

$$H_\psi(c) = \sum_{i,j=1}^{n} [\psi(x_i) + \overline{\psi(x_j)} - \psi(x_i - x_j)]\, c_i \overline{c_j}$$

est positive, quel que soit n et quel que soit l'ensemble des n points $x_i \in G$, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Si* ψ *est réelle et symétrique il suffit de considérer la forme quadratique* H_ψ *sur* $\mathbf{R}^n$.

Dans toute la suite N (G) désigne l'ensemble des fonctions définies négatives sur G ; on posera aussi

$$N_1(G) = \{\psi\,;\quad \psi \in N(G) \text{ et bornée}\}$$
$$N_2(G) = \{\psi\,;\quad \psi \in N_1(G) \quad\text{et}\quad \psi(0) > 0\}.$$

La proposition suivante résume les propriétés élémentaires des fonctions définies négatives ; l'équivalence des énoncés 4(*a*) et 4(*b*) est connue sous le nom du théorème de Schoenberg.

PROPOSITION 1.

1°) *Si* ψ *est définie négative alors* $\overline{\psi}$, $\mathcal{R}e\,\psi$, *et* $\psi - \psi(0)$ *le sont aussi ; de plus* $\psi(0)$ *est réel,* $\mathcal{R}e\,\psi \geqslant \psi(0) \geqslant 0$, *et* $\psi(x) = \overline{\psi(-x)}$.

2°) N (G) *est un cône convexe fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Ce cône n'est pas saillant en général mais le sous cône des fonctions réelles l'est.

3°) *Si* φ *est de type positif alors* $\psi = \varphi(0) - \varphi$ *est définie négative.*

4°) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\psi \in N(G)$,

b) $\psi(0) \geqslant 0$ et $\forall\, t \geqslant 0$ $e^{-t\psi}$ *est de type positif,*

c) $$\psi(0) \geqslant 0, \quad \psi(x) = \overline{\psi(-x)} \ \textit{et}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \, \psi(x_i - x_j) \leqslant 0$$

pour tout n, pour tout $(c_j) \in \mathbf{C}^n$ *avec* $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$ *et pour tout choix des* $x_i \in \mathrm{G}$; $1 \leqslant i \leqslant n$.

Remarque. — Les propriétés 3 et 4 montrent que toute fonction définie négative est limite uniforme sur tout compact de fonctions de la forme

$$\alpha + \varphi(0) - \varphi$$

où $\alpha \geqslant 0$ et φ est une fonction de type positif sur G.

De plus si $\psi \in \mathrm{N}(\mathrm{G})$, il en est de même de $1 - e^{-t\psi - s\bar{\psi}}$, ($t$ et $s \geqslant 0$) et d'une façon générale de $f \circ \psi$ où

$$f(z) = \alpha + \beta\cdot z + \gamma\cdot\bar{z} + \int [1 - e^{-(tz+s\bar{z})}] \, \mu(dt, ds)$$

avec $\mathcal{R}\mathrm{e}\, z \geqslant 0$; α, β, γ réels $\geqslant 0$ et μ une mesure positive sur $(\mathbf{R}_+)^2 \setminus \{0\}$ telle que

$$\int \frac{t+s}{1+t+s} \, \mu(dt, ds) < \infty .$$

On sait que dans le cas où G est le groupe $\mathbf{R}^n$ les fonctions définies négatives sont déterminées par la formule de Lévy-Khinchine :

PROPOSITION 2. — *Sur* $\mathbf{R}^n$ *toute fonction définie négative* ψ *admet une représentation et une seule de la forme*

$$\psi(x) = \alpha + i\,\mathrm{L}(x) + \mathrm{Q}(x) + \int \left(1 - e^{-i(x,t)} - \frac{i(x,t)}{1+|t|^2} \right) \cdot \frac{1+|t|^2}{|t|^2} \cdot \sigma(dt)$$

où $\alpha \geqslant 0$, L *est une forme linéaire réelle,* Q *une forme quadratique positive et* σ *une mesure positive bornée sur* $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

On a noté (.,.) le produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$ et $|t|^2 = (t, t)$.

Le résultat suivant nous sera très utile :

PROPOSITION 3. — *Si ψ est une fonction définie négative bornée ($\psi \in N_1(G)$), il existe $m > 0$ tel que $m - \psi$ soit de type positif.*

Démonstration. — On peut supposer $\psi(0) = 0$. Posons $M = \sup |\psi|$ et

$$\psi_t = \frac{1}{t}\{1 - \exp(-t\psi)\} \quad \text{pour tout} \quad t > 0.$$

L'inégalité $|\psi_t - \psi| \leqslant \frac{1}{t}(e^{tM} - tM - 1)$ montre que ψ_t converge uniformément sur G tout entier vers ψ quand t tend vers zéro. D'autre part d'après les théorèmes de Schoenberg (voir proposition 1) et de Bochner on a :

$$\psi_t(x) = \int_{\hat{G}} [1 - \chi(x)]\, \mu_t(d\chi), \tag{1}$$

où μ_t est une mesure positive de masse totale finie sur $\hat{G}$, le groupe dual de G. On peut évidemment supposer $\mu_t\{0\} = 0$.

Soit $\{V_\alpha\}$ un système fondamental de voisinages compacts de 0 dans G. A chaque V_α on peut faire correspondre une fonction f_α de type positif, à support dans V_α et telle que

$$0 \leqslant f_\alpha \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f_\alpha(0) = 1.$$

Soit ν_α la mesure associée à f_α par le théorème de Bochuer. La mesure ν_α est positive et symétrique et on a $\int d\nu_\alpha = 1$.

On dira que g, continue et bornée sur G, possède une moyenne $m(g)$ relativement à $\{V_\alpha\}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un voisinage V de l'origine dans G tel que

$$(V_\alpha \subset V) \Rightarrow |g * \nu_\alpha(0) - m(g)| < \varepsilon.$$

Montrons que ψ_t et ψ possèdent chacune une moyenne. On a d'après le théorème de Fubini :

$$\psi_t * \nu_\alpha(0) = \int_G \psi_t(-x)\, \nu_\alpha(dx) = \int_{\hat{G}} [1 - f_\alpha(\chi)]\, \mu_t(d\chi).$$

Donc

$$\lim_\alpha \psi_t * \nu_\alpha(0) = \mu_t(\hat{G}\setminus\{0\}) = m(\psi_t) = m_t.$$

Mais ψ_t converge uniformément vers ψ et $\nu_\alpha * \psi(0)$ est un nombre réel donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $t_0 > 0$ tel que l'on ait

$$|\psi_t - \psi| < \varepsilon \quad \text{pour tout } t, \quad 0 < t < t_0.$$

On a donc

$$m_t - \varepsilon \leqslant \liminf_\alpha \psi * \nu_\alpha(0) \leqslant \limsup_\alpha \psi * \nu_\alpha(0) \leqslant m_t + \varepsilon.$$

Ainsi ψ possède une moyenne m, et m_t tend vers m quand t tend vers zéro. Finalement $m - \psi$ apparaît comme limite uniforme de $m_t - \psi_t$ qui est de type opsitif d'après (1), l'expression de m_t et l'hypothèse $\mu_t\{0\} = 0$.

Le nombre m est le plus petit réel a tel que $a - \psi$ soit de type positif ; on a de plus :

$$m \leqslant \sup \mathcal{R}e\, \psi.$$

Voici un premier lemme technique adapté d'un résultat concernant les fonctions de type positif (voir [3]).

LEMME 1. — *Soit $\mathbf{Z}_q$ le groupe des entiers modulo q.*

a) *Soient ψ_1 et $\psi_2 \in \mathcal{C}(G)$ et soit $\varphi \in \mathcal{C}(G \oplus \mathbf{Z}_q)$ définie par :*

$$\varphi(x, 0) = \psi_1(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = \psi_2(x) \quad \text{si} \quad y \neq 0,$$

alors si $\varphi \in N_1(G \oplus \mathbf{Z}_q)$ on a $\psi_1 - \psi_2 + \psi_2(0) - \psi_1(0) \in N_1(G)$.

b) *Soient $\psi \in N_2(G)$, $a \in \mathbf{R}_+$, et φ définie sur $G \oplus \mathbf{Z}_q$ par*

$$\varphi(x, 0) = \psi(x) \text{ et, pour } y \neq 0 \text{ par } \varphi(x, y) = a + \psi(x) ;$$

alors on a : $\varphi \in N_2(G \oplus \mathbf{Z}_q)$.

Démonstration. — a) D'après la proposition 3 il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ sur le dual de $G \oplus \mathbf{Z}_q$ telle que :

$$\varphi(x, y) = \varphi(0, 0) + \int [1 - \chi(x) \cdot \exp(2i\pi ny/q)]\, \mu(d\chi, dn).$$

On en déduit :

$$\psi_1(x) = \varphi(x, 0) = \varphi(0, 0) + \int d\mu - \int \chi(x) \cdot \mu(d\chi, \mathbf{Z}_q)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}[\psi_1(x) + (q-1)\psi_2(x)] &= \frac{1}{q}\sum_y \varphi(x, y) \\ &= \varphi(0, 0) + \int d\mu - \int \chi(x) \cdot \mu(d\chi, \{0\}).\end{aligned}$$

Par suite

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right)[\psi_1(x) - \psi_2(x) + \psi_2(0) - \psi_1(0)] = \int [1 - \chi(x)]\, \nu(d\chi)$$

où ν désigne la mesure positive :

$$\nu(d\chi) = \mu(d\chi, \mathbf{Z}_q) - \mu(d\chi, \{0\}).$$

Le crochet est donc une fonction définie négative bornée.

b) Soit ψ' la fonction définie sur $\mathbf{Z}_q$ par

$$\psi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \psi'(y) = a \quad \text{si} \quad y \neq 0.$$

On a évidemment

$$\psi' \in \mathrm{N}_1(\mathbf{Z}_q) \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = \psi(x) + \psi'(x) ; \quad \text{donc} \quad \varphi \in \mathrm{N}_2(\mathrm{G} \oplus \mathbf{Z}_q).$$

3. Notations et lemmes techniques.

Dans cette partie nous poserons le problème et nous établirons un certain nombre de lemmes techniques indispensables pour son étude. On peut remarquer que les démonstrations de ce paragraphe sont beaucoup moins simples que celles des suivants.

Nous dirons que G est illimité si pour tout entier p, il existe $x \in \mathrm{G}$ tel que $kx \neq 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$.

Soient

$$\mathrm{P}^n = \{\, x\, ; x = (x_k) \quad \text{avec } 1 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et} \quad x_k > 0 \,\}$$

et

$$\mathrm{P}^n + i\mathbf{R}^n = \{\, z\, ; \ z = (z_k) \quad \text{avec } 1 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et} \quad \mathcal{R}e\, z_k > 0 \,\}.$$

Nous noterons $\mathrm{F}(\mathrm{G}) = \mathrm{F}^n(\mathrm{G})$ l'ensemble des fonctions f définies sur l'ouvert $\mathrm{P}^n + i\mathbf{R}^n$ et telles que, si $\psi = (\psi_k)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\psi_k \in \mathrm{N}_2(\mathrm{G})$, on ait

$$f \circ \psi = f(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) \in \mathrm{N}(\mathrm{G}).$$

L'ensemble des fonctions f définies sur l'ouvert P^n et telles que, si $\psi = (\psi_k)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$ et ψ_k réelle et $\in \mathrm{N}_2(\mathrm{G})$, on ait $f \circ \psi \in \mathrm{N}(\mathrm{G})$ sera désigné par $\mathrm{F}_r(\mathrm{G}) = \mathrm{F}_r^{(n)}(\mathrm{G})$.

Dans les deux cas nous dirons que f « opère » sur les fonctions définies négatives.

Nous allons rechercher ces fonctions; leur étude est plus simple que celle des fonctions définies dans l'introduction. Ces dernières seront obtenues dès que l'on connaît F (G) et F_r (G).

La détermination explicite de ces fonctions nécessite la comparaison de F (G) (respectivement F_r (G)) pour des groupes différents et nous avons le lemme clef :

LEMME 2.

1) *Si* G_1 *est un sous-groupe fermé de* G *ou un groupe quotient de* G, *alors* $F(G) \subset F(G_1)$.

2) *Si* G *est illimité alors les éléments de* F (G) *sont continus et on a :* $F(G) \subset F(T_d)$ *où* T_d *désigne le tore muni de sa topologie discrète.*

3) *Si* G *est discret alors* $F(T_d) \subset F(G)$.

4) *Les résultats précédents sont valables dans le cas réel.*

L'idée de cette comparaison se trouve chez C. HERZ [3] lorsqu'il étudie les fonctions qui opèrent sur les fonctions de type positif.

Pour la démonstration du lemme on peut transposer presque mot pour mot celle de C. Herz; seule la continuité mérite une attention particulière. On peut procéder comme suit. Si f est bornée par A et $f \in F(G)$, alors, d'après la proposition 3, $A - f(a - \varphi)$ est de type positif chaque fois que $a_k > \varphi_k(0)$ où $a = (a_k)$, $\varphi = (\varphi_k)$ et φ_k est de type positif. Ceci permet d'étudier la continuité de f dans le polydisque :

$$\{ z \,;\, |a_k - z_k| < 1 \quad \text{avec} \quad z = (z_k) \quad \text{et} \quad a_k > 1 \,;\quad 1 \leqslant k \leqslant n \}.$$

On passe du polydisque à $\mathrm{P}^n + i\mathbf{R}^n$ en remarquant que si $f \in F(G)$ alors il en est de même de la fonction $z \to f(\lambda z)$ (λ réel > 0 fixé). Si f est non bornée, la relation :

$$\frac{\zeta}{1+\zeta} = \int_0^\infty (1 - e^{-t\zeta})\, e^{-t}\, dt, \quad \mathcal{R}e\, \zeta > 0$$

donne $\dfrac{f}{1+f} \in F(G)$ dès que $f \in F(G)$ (d'après la remarque qui suit la proposition 1). Comme $\mathcal{R}e\, f \geqslant 0$ si $f \in F(G)$ on conclut que $\dfrac{f}{1+f}$ est bornée.

LEMME 3. — *Soit* G *un groupe illimité; soit f une fonction qui opère en une variable, c'est-à-dire une fonction définie sur* $\{ z ; \mathcal{R}e\, z > 0 \}$ *et telle que pour toute* $\psi \in \mathrm{N}_2(\mathrm{G})$ *on ait* $f \circ \psi \in \mathrm{N}(\mathrm{G})$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ *et on a :*

$$\alpha)\qquad \left| \frac{\partial}{\partial y} f(x) \right| \leqslant \frac{\partial}{\partial x} f(x) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x) \right| \leqslant \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) \right|$$

β) *Pour tout z on peut faire correspondre un réel $a > 0$ ne dépendant pas de f, tel que*

$$| f(z) | \leqslant 2 f(a).$$

Démonstration. — D'après le lemme 2, f est continue. Soient $r > 1$ et $\mathrm{A} = \sup \{ | f(z) | ; | z - r | \leqslant 1 \}$. La fonction $\mathrm{A} - f(r - \varphi)$ est de type positif pour toute φ de type positif sur G telle que $\varphi(\theta) < 1$ et ce d'après la proposition 3. D'après le résultat de C. Herz [3] concernant les fonctions qui opèrent sur les fonctions définies positives on peut écrire :

$$\mathrm{A} - f(r - \zeta) = \sum_{\substack{m \geqslant 0 \\ n \geqslant 0}} a_{m,n}\, \zeta^m \bar{\zeta}^n$$

où $a_{mn} \geqslant 0$ et $| \zeta | < 1$.

Cette relation permet facilement de prouver (α) pour $r - 1 < x < r$ puis pour tout $x > 0$; il suffit de dériver les deux membres de la relation précédente. En ce qui concerne (β), on a pour $| z - r | < 1$

$$f(r) - f(z) = \sum_{\substack{m, n \geqslant 0 \\ m+n > 0}} a_{mn} (r - z)^m (r - \bar{z})^n$$

donc :

$$|f(r) - f(z)| \leqslant \sum_{\substack{m, n \geqslant 0 \\ m+n > 0}} a_{mn} |r - z|^{m+n} = f(r) - f(r - |r - z|) \leqslant f(r).$$

soit :

$$| f(z) | \leqslant 2 f(r).$$

Pour z quelconque avec $\mathcal{R}e\, z > 0$, on peut trouver deux réels a et b, dépendant de z mais non de f, tels que $0 < b < a$ et $| z - a | < b$; alors l'étude de la fonction g définie par $g(\zeta) = f(b \cdot \zeta)$ permet de conclure que l'on a :

$$| f(z) | = \left| g\left(\frac{1}{b} z\right) \right| \leqslant 2 g\left(\frac{a}{b}\right) = 2 f(a).$$

DÉFINITION. — *Soit* $a \in P^n$; *nous noterons* $\tau_a f$ *la fonction définie* par :

$$\tau_a f(z) = f(a + z) - f(a)$$

où

$$z \in P^n + i\mathbf{R}^n \text{ si } f \in F(G) \text{ et } z \in P^n \text{ si } f \in F_r(G).$$

Remarque. — D'après la proposition 1 on a : $\tau_a f \in F(G)$ dès que $f \in F(G)$ et une inclusion analogue pour le cas réel. En effet comme $\overline{f(a + \psi(x))} = f(a + \psi(-x)$ il vient $f(a) \in \mathbf{R}_+$ pour tout $a \in P^n$; de plus comme $\mathcal{R}e\, f(a + \psi(x) \geqslant f(a + \psi(0))$, on a $f(a + b) \geqslant f(a)$. Donc

$$f(a + \psi) - f(a) = [f(a + \psi) - f(a + \psi(0))] + [f(a + \psi(0)) - f(a)]$$

est définie négative car le premier crochet est une fonction définie négative et le second est une constante positive.

DÉFINITIONS. — 1) *Nous dirons que* G *vérifie la propriété* (A) (*respectivement* (A_r)) *si pour tout* $a \in P^n$ *et pour tout* $f \in F(G)$ (resp. $F_r(G)$) *on a* $f - \tau_a f \in F(G) \cdot$ (resp. $F_r(G)$).

2) *Nous dirons que* G *vérifie la propriété* (B) (resp. (B_r)) *s'il existe un entier* $p \geqslant 2$ *tel que*

$$F(G) \subset F(G \oplus \mathbf{Z}_p) \quad (\text{resp. } F_r(G) \subset F_r(G \oplus \mathbf{Z}_p)).$$

3) *Nous noterons* D_q *le groupe compact produit dénombrable de copies de* $\mathbf{Z}_q$; *son dual* $\hat{D}_q$ *est alors somme directe dénombrable de telles copies.*

LEMME 4. — *Les groupes* T_d, D_q, $\overline{D}_q$ *vérifient* (B) *et* (B_r).

Démonstration. — Pour le tore cela résulte de lemme 2; pour D_q, il suffit de remarquer que D_q et $D_q \oplus \mathbf{Z}_q$ sont isomorphes; pour $\hat{D}_q$, on a un résultat analogue.

LEMME 5. — *Si* G *vérifie* (A) *ou* (A_r) *alors pour tout* $a \in P^n$ *on peut faire correspondre un entier k, ne dépendant que de a, tel que* $f(a) \leqslant k f(\varepsilon)$ *où* $\varepsilon = (1, 1, ..., 1) \in P^n$ *et* $f \in F(G)$; (resp. $F_r(G)$).

Démonstration. — On sait que si f opère alors $\tau_a f$ opère aussi et f est positive sur P^n. Par conséquent on a pour a et $b \in P^n$:

$$f(a+b) - f(a) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f(a) + f(b) - f(a+b) \geqslant 0.$$

Donc si k est un entier tel que $k\varepsilon - a \in P^n$ on aura :

$$f(a) \leqslant f(k\varepsilon) \leqslant k f(\varepsilon) \quad \text{pour toute } f \text{ qui opère.}$$

LEMME 6. — *Si* G *vérifie la propriété* (B) *alors* G *vérifie aussi la propriété* (A). *On a un résultat analogue pour le cas réel.*

Démonstration. — Soit $f \in F(G)$; on veut montrer $f - \tau_a f \in F(G)$ pour tout $a \in P^n$. Supposons d'abord f bornée. Soient $a = (a_k) \in P^n$, $\psi = (\psi_k)$ où $\psi_k \in N_2(G)$ et enfin $\varphi = (\varphi_k)$ où φ_k est définie sur $G \oplus \mathbf{Z}_p$ par $\varphi_k(x, 0) = \psi_k(x)$ et $\varphi_k(x, y) = a_k + \psi_k(x)$ pour $y \neq 0$.

D'après le lemme 1, $\varphi_k \in N_2(G)$. La propriété (B) entraîne alors que $f \circ \varphi \in N_1(G \oplus \mathbf{Z}_p)$ car f est bornée ; il s'ensuit, d'après le lemme 1, que

$$f(\psi(x)) - f(\psi(0)) - f(a+\psi) + f(a+\psi(0)) \in N_1(G)$$

c'est-à-dire

$$(f - \tau_a f)(\psi) - (f - \tau_a f)(\psi(0)) \in N_1(G) \tag{2}$$

Il suffira, pour conclure, de montrer que $f - \tau_a f$ est $\geqslant 0$ sur P^n. En prenant ψ de sorte que $\psi(0) = b$ et $\psi(x) = b + c$ pour un $x \in G$, il vient d'après (2) :

$$f(b+c) + f(b+a) - f(b+c+a) - f(b) \geqslant 0 \text{ pour } a, b, c \in P^n.$$

Si on montre que la restriction de f à P^n est continue, on peut conclure. D'ailleurs comme $(f \in F(G) \Rightarrow (f(a+b) \geqslant f(a)$ pour a et $b \in P^n)$ il suffit, pour montrer que f est continue dans P^n, de prouver la continuité sur les demi-droites $\delta_a = \{a + \lambda\varepsilon\ ;\ a \in P^n$ fixé ; $\varepsilon = (1, 1 \ldots 1)$ et λ variant $\in \mathbf{R}_+\}$. En fait nous allons montrer que la restriction de f à toute δ_a est concave.

D'après (2) on a pour a et $b \in P^n$

$$(f - \tau_a f)(b + \psi) - (f \tau_a f)(b) \in N_1(G)$$

(cela résulte d'un raisonnement déjà fait) c'est-à-dire

$$\tau_b(f - \tau_a f) = \tau_b f - \tau_{a+b} f \in F(G).$$

Posons

$$g = \tau_b f \quad \text{et} \quad h = \tau_{\mu\varepsilon}\, g \quad (\mu \text{ réel} > 0).$$

On a g et $h \in F(G)$, puis pour λ et μ réels > 0 et $a \in P^n$:

$$g[a + (\lambda + 2\mu)\varepsilon] + g[a + \lambda\varepsilon] - 2g[a + (\lambda + \mu)\varepsilon]$$
$$= h(a + \lambda\varepsilon) - h[a + (\lambda + \mu)\varepsilon] \leqslant 0$$

d'où la concavité.

Supposons maintenant f non bornée et considérons la fonction $g_t = \dfrac{1}{t}(1 - e^{-tf})$ pour $t > 0$. Nous avons $g_t \in F(G)$ et est bornée ; donc d'après ce qui précède $g_t - \tau_a g_t \in F(G)$ pour tout $a \in P^n$. Soit $\psi = (\psi_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$ avec $\psi_k \in N_2(G)$. On a $f(\psi) \in N(G)$ donc continue. La fonction continue $(f - \tau_a f)(\psi)$ est limite simple, quand t tend vers zéro des fonctions $(g_t - \tau_a g_t)(\psi) \in N(G)$ donc $f - \tau_a f \in F(G)$.

Remarque. — Le lemme 6 est donc démontré ; il en résulte que T_d, D_q et $\hat{D}_q$ vérifient les propriétés (A) et (A_r).

LEMME 7. — *A chaque* $z^0 \in P^n + i\mathbf{R}^n$ *on peut faire correspondre une constante* A *telle que pour toute* $f \in F(T_d)$ *on ait :*

$$|f(z^0)| \leqslant A f(\varepsilon) \qquad \text{où} \qquad \varepsilon = (1, 1, ..., 1).$$

Démonstration. — Posons $\varphi = (\varphi_k)$ $1 \leqslant k \leqslant n$ avec

$$\varphi_k(\zeta) = \alpha_k \zeta + \beta_k \bar{\zeta}$$

où les α et β sont réels $\geqslant 0$ et $\zeta \in \mathbf{C}$. Il est clair que

$$(f \in F^{(n)}(T_d)) \Rightarrow f \circ \varphi \in F^{(1)}(T_d).$$

Posons aussi $z^0 = (z_k^0)$ avec $z_k^0 = x_k^0 + i y_k^0$ et soit $\zeta^0 = \xi^0 + i\eta^0$ tel que

$$\xi^0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{|\eta^0|}{\xi^0} > \frac{|y_k^0|}{x_k^0}.$$

On peut alors trouver α_k et β_k $(\geqslant 0)$ de sorte que $\varphi_k(\zeta^0) = z_k^0$. D'après le lemme 3, il existe un réel $\gamma > 0$ tel que

$$|f(z^0)| = |f(\varphi(\zeta^0))| \leqslant 2 f(\varphi(\gamma)).$$

De plus $\varphi(\gamma) \in P^n$ et ne dépend pas de f.

Soit p un entier tel que $p\varepsilon - \varphi(\gamma) \in P^n$. D'après le lemme 5 et la remarque précédant l'énoncé du lemme 7 on a :

$$f(\varphi(\gamma)) \leqslant p f(\varepsilon)$$

Ainsi

$$|f(z^0)| \leqslant 2p\,f(\varepsilon) = A\,f(\varepsilon) \quad \text{pour toute} \quad f \in F(T_d).$$

LEMME 8. — *Soient p un entier $\geqslant 3$, $a = (a_k) \in P^n$ et $r \in \mathbf{R}^+$ avec $r < a_j$ pour j fixé. Soit ε_j le j-ieme vecteur coordonnées de $\mathbf{R}^n$. Pour f définie dans $P^n + i\mathbf{R}^n$ on écrira :*

$$\mathcal{M}_j(f; r; p, z + a) = g(z) = \frac{1}{p} \sum_{q=1}^{q=p} f(z + a - r\,\varepsilon_j\, e^{2i\pi q/p})$$

Alors si $f \in F(T_d)$ on a g et $f - g + g(0) \in F(T_d)$.

Démonstration. — Comme $f \in F(T_d)$ on a f continue et

$$f - \tau_a f \in F(T_d) \quad \text{pour tout} \quad a \in P^n.$$

Soit $\psi = (\psi_k)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\psi_k \in N_2(T_d)$. D'après le lemme 2 (3°) on a

$$f(\psi(x) + a - r\,\varepsilon_j\, e^{2i\pi q/p}) \in N_1(T_d \oplus \mathbf{Z}_p).$$

Il existe alors, d'après la proposition 3, une mesure $\mu \geqslant 0$ et de masse totale finie sur le dual de $T_d \oplus \mathbf{Z}_p$ telle que

$$\begin{aligned} &f[\psi(x) + a - r\,\varepsilon_j\, e^{2i\pi q/p}] - f(\psi(0) + a - r\varepsilon_j) \\ &\quad = \int [1 - \chi(x)\cdot \exp(2i\pi qm/p)]\, \mu(d\chi, dm) \end{aligned}$$

il vient alors :

$$\begin{aligned} g(\psi(x)) - f(\psi(0) + a - r\varepsilon_j) &= \int d\mu - \int \chi(x)\, \mu(d\chi, \{0\}) \\ f[\psi(x) + a - r\,\varepsilon_j] - f(\psi(0) + a - r\varepsilon_j) &= \int d\mu - \int \chi(x)\, \mu(d\chi, \mathbf{Z}_p) \end{aligned}$$

par suite en désignant par $\nu(d\chi)$ la mesure positive

$$\mu(d\chi, \mathbf{Z}_p) - \mu(d\chi, \{0\})$$

on a :

$$\begin{aligned} &f(\psi(x) + a - r\varepsilon_j) - g(\psi(x)) - f(\psi(0) + a - r\varepsilon_j) + g(\psi(0)) \\ &\quad = \int [1 - \chi(x)]\, \nu(d\chi). \end{aligned}$$

En particulier si $b \in P^n$ on a (en tenant compte de la continuité de f sur P^n)

$$f(b + a - r\varepsilon_j) - g(b) - f(a - r\varepsilon_j) + g(0) \geqslant 0.$$

Il s'ensuit, en posant $c = a - r\varepsilon_j$, $\tau_c f - g + g(0) \in F(G)$. Le lemme précédent permet alors de conclure puisque $f - \tau_c\, f \in F(G)$.

LEMME 9. — *Soit* $f \in F(T_d)$ *alors pour tout* $x \in P^n$, *la fonction* $y \mapsto f(x + iy)$ *est définie négative sur* $\mathbf{R}^n$.

Démonstration. — La fonction f est continue et on a $f(x) \geqslant 0$ et $\overline{f(x+iy)} = f(x - iy)$. Il reste à montrer d'après la proposition 1 que l'on a :

$$\sum_{j,k=1}^{p} c_j \bar{c}_k f[x + i(y^{(j)} - y^{(k)})] \leqslant 0$$

où

$$y^{(k)} \in \mathbf{R}^n, \quad c_k \in \mathbf{C} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{k=p} c_k = 0.$$

Soient alors $\xi_k \in \mathbf{R}$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ tels que $2\pi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ soient linéairement indépendants sur les rationnels.

On peut trouver n fonctions additives l_m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ sur $\mathbf{R}$ telles que

$$l_m(2\pi) = 0 \qquad \text{et} \qquad y^{(k)} = (l_1(\xi_k), l_2(\xi_k), \ldots, l_n(\xi_k)).$$

Il est clair que il_m est une fonction définie négative sur la droite réelle discrète ; cette fonction induit une fonction $i\cdot\tilde{l}_m \in N(T_d)$. Posons $\tilde{l} = (\tilde{l}_m)$ et soit $\tilde{\xi}_k$ la classe (modulo 2π) de ξ_k. Les $\tilde{\xi}_k$ sont distincts dans T_d et $\tilde{l}_m(\tilde{\xi}_k) = l_m(\xi_k)$. Finalement $f(x + i\tilde{l}) \in N(T_d)$ pour chaque $x \in P^n$. Donc si

$$\sum_{k=1}^{p} c_k = 0, \quad \text{on a :}$$

$$\sum_{j,k=1}^{p} c_j \bar{c}_k f[x + i(y^{(j)} - y^{(k)})] = \sum_{j,k=1}^{p} c_j \bar{c}_k f[x + i\tilde{l}(\tilde{\xi}_j - \tilde{\xi}_k)] \leqslant 0.$$

LEMME 10. — *Si* G *est un groupe compact vérifiant* (A_r) *alors* $F_r(G) \subset F_r(G_d)$ *où* G_d *est le groupe* G *muni de sa topologie discrète.*

En particulier $F_r(D_q) \subset F_r(\{D_q\}_d)$.

Démonstration. — Comme G vérifie (A_r), les $f \in F_r(G)$ sont continus d'après le lemme 6. De plus comme les caractères de G_d sont limites simples de ceux de G, les $\psi \in N_2(G_d)$ sont limites simples des éléments de $N_2(G)$. Ainsi lorsqu'on a $f \in F_r(G)$ et $\psi_k \in N_2(G_d)$, $f(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ est limite simple d'éléments de $N_2(G)$.

4. Cas de variables réelles.

THÉORÈME 1. — *Soit* G *un groupe abélien localement compact infini. Toute fonction* $f \in \mathrm{F}_r(\mathrm{G})$ *se met d'une façon unique sous la forme :*

$$f(x) = \alpha + \mathrm{L}(x) + \int \frac{1 - e^{-(t,x)}}{1 - e^{-(t,\varepsilon)}} \mu(dt). \tag{3}$$

où $\alpha \in \mathbf{R}_+$, L *est une forme linéaire positive sur* $\mathbf{R}^n$, μ *est une mesure positive bornée sur* $(\mathbf{R}_+)^n \setminus \{0\}$ *et enfin* $\varepsilon = (1, 1, ..., 1) \in \mathrm{P}^n$.

Démonstration. — Appelons $\mathcal{F}_r$ l'ensemble des f définies dans P^n qui se mettent sous la forme (3). D'après la proposition 1 il est clair que

$$\mathcal{F}_r \subset \mathrm{F}_r(\mathrm{G}).$$

Le théorème sera démontré si on montre l'inclusion $\mathrm{F}_r(\mathrm{G}) \subset \mathcal{F}_r$. Or il suffit d'étudier le cas des groupes discrets vérifiant (A_r). En effet supposons le théorème démontré dans ce cas et soit G un groupe infini. Si G est illimité nous aurons, d'après le lemme 2 et la remarque qui suit le lemme 6 :

$$\mathrm{F}_r(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}_r(\mathrm{T}_d) = \mathcal{F}_r.$$

Si G est infini d'ordre borné et discret alors on peut trouver un entier $q \geqslant 2$ tel que $\hat{\mathrm{D}}_q$ soit sous-groupe de G ; on peut conclure comme précédemment pour des remarques analogues.

Enfin si G est infini d'ordre borné et non discret, il contient D_q comme sous-groupe fermé pour un entier $q \geqslant 2$ (voir par exemple (6)). Le lemme (10) et des remarques comme celles qui précèdent montrent que l'on a :

$$\mathrm{F}_r(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}_r(\mathrm{D}_q) \subset \mathrm{F}_r(\{\mathrm{D}_q\}_d) \subset \mathrm{F}_r(\mathrm{D}_q) = \mathcal{F}_r.$$

Supposons donc G *discret vérifiant* (A_r). Munissons $\mathrm{F}_r(\mathrm{G})$ de la topologie de la convergence simple sur P^n et considérons l'ensemble $\mathcal{B}_r$ suivant :

$$\mathcal{B}_r = \{f \,;\, f \in \mathrm{F}_r(\mathrm{G}) \quad \text{avec} \quad f(\varepsilon) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon = (1, 1, ..., 1) \in \mathrm{P}^n\}.$$

Le cône convexe $\mathrm{F}_r(\mathrm{G})$ est saillant (puisque toute $f \in \mathrm{F}_r(\mathrm{G})$ est $\geqslant 0$) et $\mathcal{B}_r$ en est une base convexe compacte. La convexité est évidente ; d'autre part, d'après le lemme (5) pour tout $a \in \mathrm{P}^n$ il existe un entier k ne dépendant que de a tel que $f(a) \leqslant k f(\varepsilon)$ pour toute $f \in F_r(G)$. Donc $\mathcal{B}_r$ rencontre toutes les génératrices de $F_r(G)$ et est compacte pour la topologie induite par celle de $F_r(G)$ car G est discret.

On se propose d'appliquer le théorème de Krein et Milman à $\mathcal{B}_r$; pour cela on va déterminer un fermé de $\mathcal{B}_r$ qui contienne tous les points extrémaux de $\mathcal{B}_r$.

Supposons que f appartienne à une génératrice extrémale de $F_r(G)$. Du fait que $f - \tau_a f \in F_r(G)$ il suit que l'on a :

$$\tau_a f = \lambda_a \cdot f \qquad \text{avec} \qquad \lambda_a \in [0, 1] \tag{4}$$

α) Si f est non bornée alors $\lambda_a \equiv 1$ et $f(a+b) = f(a) + f(b)$, car l'inégalité $f(b) \leqslant f(a+b)$ entraîne $(1 - \lambda_a) f(b) \leqslant f(a)$.

Comme f est additive et positive sur P^n et comme P^n engendre $\mathbf{R}^n$ on peut prolonger f, d'une façon unique, à $\mathbf{R}^n$ en une forme linéaire positive (donc continue) sur l'adhérence de P^n.

En écrivant

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j \varepsilon_j \text{ où } \varepsilon_j \text{ est le } j\text{-ieme vecteur coordonné de } \mathbf{R}^n$$

on obtient

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\varepsilon_j) \qquad \text{avec} \qquad f(\varepsilon_j) \geqslant 0.$$

Mais comme f appartient à une génératrice extrémale et que la fonction $f^j : x \mapsto x_j$ appartient à $F_r(G)$ les $f(\varepsilon_j)$ sont tous nuls à l'exception d'un seul.

β) Supposons f bornée et non constante et posons $m = \sup f$. De la relation (4) il vient $m - f(a) = \lambda_a \cdot m$. Un calcul facile montre alors que la fonction $h = 1 - \dfrac{1}{m} f$ vérifie : $h(a+b) = h(a) \cdot h(b)$, et est en plus bornée et strictement positive.

Comme précédemment on peut prolonger h à $\mathbf{R}^n$ et ce prolongement est continu et vérifie la relation $h(a+b) = h(a) \cdot h(b)$. Il s'ensuit que l'on peut trouver n nombres $t_i \geqslant 0$ tels que

$$h(x) = \exp\left(- \sum_{j=1}^{n} x_j t_j\right) \qquad \text{où} \qquad x = \sum_{1}^{n} x_j \varepsilon_j \in P^n$$

alors

$$f(x) = m(1 - e^{-(t,x)}) \qquad \text{où} \qquad t = (t_j) \neq 0 \qquad \text{car} \qquad f \not\equiv 0.$$

Ainsi d'après l'étude précédente, les éléments extrémaux de $\mathcal{B}_r$ sont parmi les fonctions :

$$f_t(x) = \frac{1 - e^{-(t,x)}}{1 - e^{-(t,\varepsilon)}} \qquad \text{où} \qquad t \in (\mathbf{R}_+)^n \setminus \{0\} ;$$

$$f_\infty(x) \equiv 1 \qquad \text{et} \qquad f^j(x) = x_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

L'ensemble de ces fonctions n'est pas fermé dans $\mathcal{B}_r$. Cependant il est facile de voir que $\{f_t\,;\ t \in (\mathbf{R}_+)^n \setminus \{0\}\}$ est homéomorphe à $(\mathbf{R}_+)^n \setminus \{0\}$, et que son adhérence est constituée par les fonctions :

$$f_\infty\,;\ f_t \ \text{et} \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f^j \quad (\text{où} \quad \alpha_j \geqslant 0 \quad \text{et} \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1).$$

D'après le théorème de Krein et Milman, pour toute $f \in \mathcal{B}_r$ il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+$, $\beta = (\beta_j) \in (\mathbf{R}_+)^n$ et μ mesure positive bornée sur $(\mathbf{R}_+)^n \setminus \{0\}$, tels que

$$\alpha + (\beta, \varepsilon) + \int d\mu = 1$$

et

$$f = \alpha f_\infty + \sum_{i=1}^{n} \beta_j f^j + \int f_t \, d\mu(t).$$

Ceci permet de conclure que f possède la représentation annoncée. En ce qui concerne l'unicité on peut remarquer que si $f \in \mathcal{F}_r$ alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que

$$\alpha = \inf\{f(x)\,;\ x \in P^n\} \quad \text{et} \quad \beta_j = \inf\left\{\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\,;\ x \in \mathrm{P}^n\right\}.$$

D'autre part

$$f(x) + f(\varepsilon) - f(x + \varepsilon) = \alpha + \int (1 - e^{-(t,x)} \, d\mu(t).$$

Donc μ est bien déterminée à partir de sa transformée de Laplace.

Remarques. — 1) Toute fonction en n variables réelles qui opère sur les fonctions définies négatives est analytique.

2) Toute fonction définie sur $\{x\,; x = (x_k)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$ et $x_k \geqslant 0\}$ et telle que $f(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ soit définie négative quel que soit le choix des

n fonctions $\psi_k \in \mathrm{N}(\mathrm{G})$ appartient à $\mathrm{F}_r(\mathrm{G})$ donc à $\mathcal{F}$ chaque fois que le groupe G est infini.

Voici une application du théorème 1.

THÉORÈME 2. — *Soit* G *un groupe abélien localement compact infini. Soit* f *définie sur* P^n. *La fonction* $f \circ \psi$ *est de type positif chaque fois que* $\psi = (\psi_k)$ *avec* $1 \leqslant k \leqslant n$ *et* $\psi_k \in \mathrm{N}_2(\mathrm{G})$ *et réelles si et seulement si* f *possède une représentation intégrale de la forme :*

$$f(x) = \int e^{-(t,x)}\, d\mu(t)$$

où μ *est une mesure positive sur* $(\mathbf{R}_+)^n$ *telle que l'intégrale converge pour* $x \in \mathrm{P}^n$. *De plus cette représentation intégrale est unique.*

Démonstration. — Si f possède la représentation intégrale, alors la propriété résulte du théorème de Schoenberg. Inversement, soit $\psi = (\psi_k)$ avec $\psi_k \in \mathrm{N}_2(\mathrm{G})$. Comme $f(\psi)$ est de type positif on a $f(\psi(0)) \geqslant 0$ donc $f(a) \geqslant 0$ pour tout $a \in \mathrm{P}^n$. De plus, si a et $b \in \mathrm{P}^n$ on a : $f(a+b) \leqslant f(a)$. Cela résulte de ce que si φ est de type positif, alors $|\varphi(x)| \leqslant \varphi(0)$ et du fait que l'on peut construire $\psi = (\psi_k)$, $\psi_k \in \mathrm{N}_2(\mathrm{G})$ telles que $\psi(0) = a$ et $\psi(x) = a + b$ pour un $x \in \mathrm{G}$.

D'après la proposition (1, 3°) la fonction $f(a) - f(a+\psi)$ est définie négative. Ainsi la fonction $x \mapsto f(a) - f(a+x)$ opère sur les fonctions définies négatives et est bornée. D'après le théorème 1, on a :

$$f(a) - f(a+x) = \int [1 - e^{-(t,x)}]\, d\mu_a(t)$$

où μ_a est une mesure positive bornée sur $(\mathbf{R}_+)^n \setminus \{0\}$.

Soit $l = \inf\{f(x)\,;\, x \in \mathrm{P}^n\} = \lim\limits_{x_k \to \infty} f(x)$.

On a évidemment:

$$f(a) - l = \int d\mu_a(t)$$

puis

$$f(a+x) - l = \int e^{-(t,x)}\, d\mu_a(t).$$

Donc

$$f(a+b+x)-l=\int e^{-(t,\,x+b)}\,d\mu_a(t)=\int e^{-(t,\,x+a)}\,d\mu_b(t).$$

Par suite on peut mettre en évidence, par un raisonnement classique, une mesure μ positive (non nécessairement bornée) portée par $(\mathbf{R}_+)^n$ et telle que

$$f(x)=\int e^{-(t,\,x)}\,d\mu(t)\ ; \qquad (x\in \mathrm{P}^n).$$

L'unicité résulte du fait que f est transformée de Laplace de μ.

Remarque. — La fonction f est bornée si et seulement si $\int d\mu<\infty$.

5. Cas des variables complexes.

THÉORÈME 3. — *Soit* G *un groupe abélien localement compact illimité. Toute fonction* $f\in \mathrm{F}(\mathrm{G})$ *se met d'une façon unique sous la forme :*

$$f(z)=\alpha+\mathrm{L}(z)+\mathrm{M}(\bar{z})+\int \frac{1-e^{-(t,\,z)-(s,\,\bar{z})}}{1-e^{-(t+s,\,\varepsilon)}}\,\mu(dt,ds) \qquad (5)$$

où $\alpha\in\mathbf{R}_+$, L *et* M *sont deux formes linéaires sur* $\mathbf{C}^n$ *positive sur* P^n *et* μ *est une mesure positive bornée sur* $(\mathbf{R}_+)^{2n}\setminus\{0\}$; $\varepsilon=(1,1,\ldots,1)\in \mathrm{P}^n$.

Démonstration. — Appelons $\mathcal{F}$ l'ensemble des f définies dans $\mathrm{P}^n+i\mathbf{R}^n$ qui se mettent sous la forme (5). D'après la proposition 1 il est clair que

$$\mathcal{F}\subset \mathrm{F}(\mathrm{G}).$$

Il reste à prouver l'inclusion inverse; d'ailleurs il suffit de montrer que l'on a $\mathrm{F}(\mathrm{T}_d)\subset\mathcal{F}$ et d'utiliser le lemme 2.

Supposons donc $\mathrm{G}=\mathrm{T}_d$, le tore muni de sa topologie discrète. Munissons le cône $\mathrm{F}(\mathrm{G})$ de la topologie de la convergence simple sur $\mathrm{P}^n+i\mathbf{R}^n$ et considérons l'ensemble $\mathcal{B}$ suivant :

$$\mathcal{B}=\{f\,;f\in \mathrm{F}(\mathrm{T}_d)\ \text{ avec }\ f(\varepsilon)=1\quad \text{où}\quad \varepsilon=1,1,\ldots,1)\in \mathrm{P}^n\}.$$

Le lemme 7 montre que pour tout $z\in \mathrm{P}^n+i\mathbf{R}^n$ il existe une constante A telle que $|f(z)|\leqslant \mathrm{A}\cdot f(\varepsilon)$ pour tout $f\in \mathrm{F}(\mathrm{T}_d)$.

Il s'ensuit que le cône convexe F (T_d) est saillant et que l'ensemble convexe $\mathcal{B}$ rencontre toutes les générations de F (T_d); il est de plus compact dans F (T_d) car le groupe est discret. $\mathcal{B}$ est donc une base convexe compacte de F (T_d). Tout point de $\mathcal{B}$ est donc barycentre d'une mesure positive et de masse unité portée par l'adhérence des points extrémaux de $\mathcal{B}$.

Cherchons les points extrémaux de $\mathcal{B}$.

Soit f une fonction non nulle appartenant à une génératrice extrémale de F (T_d). Comme T_d vérifie la propriété A (lemmes 4 et 6), on peut écrire :

$$\tau_a f = \lambda_a f, \ \lambda_a \in [0, 1] \text{ pour tout } a \in P^n. \tag{6}$$

Considérons la restriction de f à P^n et tenons compte de la discussion du cas réel (voir la démonstration du théorème 1); il vient :

1) si f n'est pas bornée sur P^n alors

$$\lambda_a \equiv 1 \quad \text{et} \quad f(a) = (\alpha, a) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_k a_k$$

où

$$a = (a_k) \text{ et } \alpha = (\alpha_k) \text{ avec } \alpha_k \geqslant 0.$$

Les égalités

$$f(a + x + iy) = (\alpha, a) + f(x + iy) = (\alpha, x) + f(a + iy)$$

montrent que $f(x + iy) - f(x)$ ne dépend pas de x ; soit $g(y)$ cette fonction.

2) Si f est bornée sur P^n et non constante, alors $\lambda_a = e^{-(t,a)}$ et $f(a) = m(1 - e^{-(t,a)})$
où

$$m = \sup_{x \subset P^n} f(x) \quad \text{et} \quad t = (t_k)$$

avec

$$t_k \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} t_k > 0.$$

La relation (6) montre que

$$f(a+x+iy) = m - e^{-(t,a)}[m - f(x+iy)] = m - e^{-(t,x)}[m - f(a+iy)]$$

il s'ensuit que $e^{(t,x)} \cdot [m - f(x + iy)]$ ne dépend pas de x; soit $h(y)$ cette fonction.

3) Si f est constante sur P^n alors $\lambda_a = 0$ et $f(x+iy) = f(a) = \mathrm{Cte}$. Il reste à déterminer explicitement les fonctions g et h précédentes.

a) *Etude de g.*

D'après le lemme 9 la fonction :

$$y \mapsto f(x+iy) = f(x) + g(y)$$

est définie négative sur $\mathbf{R}^n$ donc g aussi (car $g(0) = 0$).

D'après le théorème de Lévy-Khinchine on peut écrire :

$$g(y) = i\mathrm{L}(y) + \mathrm{Q}(y) + \int \left[1 - e^{-i(t,y)} - \frac{i(t,y)}{1+|t|^2}\right] \frac{1+|t|^2}{|t|^2}\, \sigma(dt).$$

où L est une forme linéaire réelle, Q est une forme quadratique positive et σ est une mesure positive bornée sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

On posera

$$\mathrm{L}(y) = (\beta, y) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}(y) = \sum_{k,j=1}^{n} \gamma_{kj} y_k y_j.$$

Nous allons utiliser le lemme 3. Soit $z = (z_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$ avec

$$z_j = x_j + iy_j \quad \text{et pour } k \neq j \;\; z_k = a_k > 0.$$

La fonction $z_j \mapsto f(z)$ devient une fonction qui opère en une seule variable et on a :

$$f(z) = \sum_{k \neq j} \alpha_k a_k + \alpha_j x_j + i\beta_j y_j + \gamma_{jj} y_j^2 +$$
$$+ \int \left[1 - e^{-it_j y_j} - \frac{it_j y_j}{1+|t|^2}\right] \frac{1+|t|^2}{|t|^2}\, \sigma(dt).$$

D'après le lemme 3 cette fonction de x_j et y_j est de classe $\mathcal{C}^2$ et de plus on peut dériver sous le signe $\int$ au point $y_j = 0$ (en utilisant le lemme de Fatou).

On obtient alors :

$$\alpha_j \geqslant \left|\beta_j + \int t_j\, \sigma(dt)\right|, \quad \gamma_{jj} = 0 \quad \text{et} \quad \int |t_j|^2 \cdot \frac{1+|t|^2}{|t|^2}\, \sigma(dt) = 0.$$

Ainsi $\sigma = 0$, $\mathrm{Q} = 0$ et $\alpha_j \geqslant |\beta_j|$ pour tout j

Par suite pour $z \in P^n + i\mathbf{R}^n$ on a :

$$f(z) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta, z) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta, \bar{z}) \quad \text{avec} \quad \alpha \pm \beta \in \overline{P}^n.$$

Comme f est extrémale et que

$$z \mapsto (\alpha_k + \beta_k)\, z_k \quad \text{et} \quad z \mapsto (\alpha_k - \beta_k)\, \bar{z}_k$$

opèrent tous les nombres $\alpha_k + \beta_k$ et $\alpha_k - \beta_k$ sont nuls à l'exception d'un seul.

b) *Etude de h :*

D'après le lemme 9, la fonction

$$y \mapsto f(x + iy) = m - e^{-(t,x)}\, h(y)$$

est définie négative sur $\mathbf{R}^n$; de plus $|f| \leqslant m$ donc $h(y)$ est de type positif d'après la proposition 3. D'après le théorème de Bochner il existe une mesure positive σ sur $\mathbf{R}^n$ telle que

$$h(y) = \int e^{-i(u,y)}\, \sigma(du) \qquad (\text{et } h(0) = m = \textstyle\int \sigma).$$

Nous allons utiliser les lemmes 3 et 8.

Posons $z = (z_k)$ avec $z_j = x_j + iy_j$ et pour $k \neq j$ $z_k = a_k > 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

La fonction $z_j \mapsto f(z)$ opère en la variable z_j. D'après le lemme 3 la fonction

$$y_j \mapsto \int e^{-iu_j y_j}\, \sigma(du)$$

est de classe $\mathcal{C}^2$; le lemme de Fatou entraîne que l'on a :

$\int |u_j|^2\, \sigma(du) < \infty$.

Cela étant vrai pour $1 \leqslant j \leqslant n$ on a aussi

$$\int |u|^2\, \sigma(du) < \infty.$$

Par suite, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^n$ tout entier puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $P^n + i\mathbf{R}^n$ tout entier.

Posons $\Delta_j = \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y_j^2}$. D'après le lemme 8, comme f est extrémale, il existe $K(a, r) \in [0, 1]$ tel que

$$\mathfrak{M}_j(f, r, p, z + a) - \mathfrak{M}_j(f, r, p, a) = K(a, r) \cdot f(z)$$

où

$$a = (a_k) \in P^n, \qquad z \in P^n + i\mathbf{R}^n \qquad \text{et} \qquad 0 < r < a_j.$$

Mais nous avons aussi

$$f(z + a) - f(a) = \lambda_a \cdot f(z).$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, $\Delta_j f$ est continue dans $P^n + i\mathbf{R}^n$ et on a :

$$\Delta_j f(z + a) = \lim_{r \to 0} \frac{4}{r^2} [\mathfrak{M}_j(f, r, p, z + a) - f(z + a)] ;$$

donc $\dfrac{4}{r^2} [K(a, r) - \lambda_a]$ possède une limite C (a) (qui dépend de j).

On peut écrire par conséquent :

$$\Delta_j f(z + a) - \Delta_j f(a) = C(a) \cdot f(z).$$

Tenant compte de ce que

$$f(z) = m - e^{-(t, x)} \cdot h(y)$$

il vient aisément :

$$[- t_j^2 + C(a) \cdot e^{(t, a)}] \cdot h - \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} h = 0.$$

Posons $-\beta_j^2 = -t_j^2 + C(a) \cdot e^{(t, a)}$. La mesure σ doit vérifier :

$$\int (u_j^2 - \beta_j^2) \, e^{-i(u, y)} \, \sigma(du) = 0.$$

Comme σ est non nulle, β_j est réel et le support de σ est contenu dans

$$\{u \, ; \quad u \in \mathbf{R}^n \quad \text{avec} \quad u_j^2 = \beta_j^2 \, , \quad 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

Le lemme 3 appliqué à une restriction convenable de f montre d'ailleurs que l'on a :

$$m \, t_j^2 \geqslant \left| \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} h(0) \right| \qquad \text{soit} \qquad \beta_j^2 \leqslant t_j^2 \, .$$

Ainsi on peut écrire

$$f(z) = \sum A\,[1 - \exp\{-(B, z) - (C, \bar{z})\}]$$

où B et $C \in \overline{P}^n$, $A \geqslant 0$ et où la somme contient 2^n termes au plus. Comme f est extrémale et comme chaque terme est une fonction qui opère, on a nécessairement tous les A nuls sauf un qui vaut m.

c) Il vient de l'étude précédente que tous les points extrémaux de $\mathcal{B}$ sont nécessairement parmi les fonctions :

$$f_\infty(z) = 1, \qquad f^j(z) = z_j, \qquad f^{n+j}(z) = \bar{z}_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

et

$$f_{t,s}(z) = \frac{1 - e^{-(t,z)-(s,\bar{z})}}{1 - e^{-(t+s,\varepsilon)}} \qquad \text{où} \qquad (t, s) \in (\mathbf{R}_+)^{2n}\setminus\{0\}.$$

L'ensemble de ces fonctions n'est pas fermé dans $\mathcal{B}$. Cependant il est facile de voir que

$$\{f_{t,s}\ ; \quad (t, s) \in (\mathbf{R}_+)^{2n}\setminus\{0\}\ \}$$

est homéomorphe à $(\mathbf{R}_+)^{2n}\setminus\{0\}$ et que son adhérence est constituée des fonctions :

$$f_\infty\ ; \quad f_{t\,s} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k f^k \quad (\text{où} \quad \alpha_k \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k = 1).$$

Le théorème est alors conséquence de celui de Krein-Milman. Pour l'unicité il suffit de considérer le cas où f est bornée alors

$$f(z) = \int [1 - e^{-(t,z)-(s,\bar{z})}]\,\mu(dt, ds)$$

où μ est bornée et l'intégrale est étendue sur $(\mathbf{R}_+)^{2n}\setminus\{0\}$. Par conséquent :

$$\left(\frac{-\partial}{\partial z_1}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{-\partial}{\partial z_n}\right)^{p_n} \cdot \left(\frac{-\partial}{\partial \bar{z}_1}\right)^{q_1} \cdots \left(\frac{-\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)^{q_n} f(\varepsilon)$$
$$= -\int t_1^{p_1} \dots t_n^{p_n} \cdot s_1^{q_1} \dots s_n^{q_n} \cdot e^{-(t+s,\varepsilon)}\,\mu(dt, ds).$$

Ceci détermine évidemment la transformée de Laplace de μ. Voici une application du théorème 3.

THÉORÈME 4. — *Soit* G *un groupe abélien localement compact illimité. Soit f définie sur* $P^n + i\mathbf{R}^n$. *La fonction $f \circ \psi$ est de type positif* *chaque fois que* $\psi = (\psi_k)$ *avec* $1 \leqslant k \leqslant n$ *et* $\psi_k \in N_2(G)$ *si et seulement si* f *possède une représentation intégrale de la forme :*

$$f(z) = \int \exp \{-(t, z) - (s, \bar{z})\} \, \mu(dt, ds)$$

où μ *est une mesure positive sur* $(\mathbf{R}_+)^{2n}$ *telle que l'intégrale converge pour* $z \in P^n + i\mathbf{R}^n$. *Cette représentation intégrale est de plus unique.*

Démonstration. — Elle est identique à celle du théorème 2.

6. Fonctions de type positif indéfiniment divisibles.

Soit G un groupe abélien localement compact connexe.

DÉFINITION. — *Une fonction* φ *de type positif est dite indéfiniment divisible* ($\varphi \in \mathcal{I}$) *si pour tout* n *il existe une fonction* φ_n *de type positif telle que* $\varphi = (\varphi_n)^n$.

Il est facile de voir [5] que si $\varphi \in \mathcal{I}$ et φ est réelle alors, parce que G est connexe, on a $\varphi > 0$, et, si $\varphi(0) \leqslant 1$ alors $(-\operatorname{Log} \varphi)$ est définie négative.

Comme applications des théorèmes 1 et 2 nous allons déterminer les fonctions f du type suivant :

i) f définie sur $\mathbf{R}^+$ et telle que $f \circ \psi \in \mathcal{I}$ pour toute $\psi \in N_2(G)$.

ii) f définie sur $]0, 1[$ et telle que $f \circ \varphi \in \mathcal{I}$ pour toute $\varphi \in \mathcal{I}$.

iii) f définie sur $]0, 1[$ et telle que $f \circ \varphi$ soit de type positif pour toute $\varphi \in \mathcal{I}$.

iv) f définie sur $]0, 1[$ et telle que $f \circ \varphi \in N(G)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{I}$.

Le problème est le même en plusieurs variables. Les résultats sont les suivants :

i)

$$f = e^{-g} \quad \text{où} \quad g(x) = \alpha + \beta x + \int_0^\infty (1 - e^{-tx}) \, \mu(dt)$$

avec μ mesure positive telle que

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t} \mu(dt) < \infty \text{ et } \alpha \text{ et } \beta \geqslant 0$$

ii)

$$f(\xi) = e^{-\alpha} \cdot \xi^{\beta} \cdot \exp \left\{ \int_0^{\infty} (1 - \xi^t) \, \mu(dt) \right\}; \qquad 0 < \xi < 1$$

(α, β, μ comme dans le cas i))

iii)

$$f(\xi) = \int_0^{\infty} \xi^t \, \mu(dt); \qquad 0 < \xi < 1$$

μ positive telle que l'intégrale soit convergente.

iv)

$$f(\xi) = \alpha - \beta \operatorname{Log} \xi + \int_0^{\infty} (1 - \xi^t) \, \mu(dt)$$

(α, β, μ comme dans le cas i)).

Démonstration.

i) La fonction $-\operatorname{Log} f$ est bien définie et opère sur les fonctions définies négatives et inversement ; d'où la conclusion d'après le théorème (1).

ii) Soit $\psi \in N_2(G)$ réelle alors $f(e^{-\psi}) \in \mathcal{J}$, puis

$$-\operatorname{Log} f(e^{-\psi}) \in N_2(G).$$

Donc il existe $\alpha, \beta \geqslant 0$ et μ mesure positive sur $\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$ vérifiant $\int_0^{\infty} \frac{t}{1+t} \mu(dt) < \infty$ telles que (théorème 1) :

$$-\operatorname{Log} f(e^{-x}) = \alpha + \beta x + \int_0^{\infty} (1 - e^{-tx}) \, \mu(dt)$$

d'où

$$f(\xi) = e^{-\alpha} \cdot \xi^{\beta} \exp \left\{ \int_0^{\infty} (1 - \xi^t) \, \mu(dt) \right\}; \qquad 0 < \xi < 1.$$

Inversement une telle fonction répond à la question

iii) Soit $\psi \in N_2(G)$ réelle ; $f(e^{-\psi})$ est de type positif. D'après le théorème 2 on a :

$$f(e^{-x}) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \, \mu(dt) \qquad \text{puis} \qquad f(\xi) = \int_0^{\infty} \xi^t \, \mu(dt)$$

où μ est $\geqslant 0$ et l'intégrale convergente pour $x > 0$. Inversement la fonction f précédente vérifie la propriété voulue.

iv) L'hypothèse entraîne que la fonction :

$$x \mapsto f(e^{-x})$$

opère sur les fonctions définies négatives.

Il vient aisément

$$f(\xi) = \alpha - \beta \operatorname{Log} \xi + \int_0^\infty (1 - \xi^t)\, \mu(dt).$$

où $\alpha, \beta \geqslant 0$, μ mesure $\geqslant 0$ vérifiant $\int_0^\infty \frac{t}{1+t}\, \mu(dt) < \infty$. Inversement la fonction précédente répond à la question.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Harzallah, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 260 (1965), p. 6790.

[2] K. Harzallah, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 262 (1966), p. 824.

[3] C. Herz, *Ann. Inst. Fourier*, 13 (1963), 161-180.

[4] A. Konheim, B. Weiss, A note on functions which operate. *International Business Machines Corporation*, Yorktown Heights, New-York.

[5] M. Rogalski, Le théorème de Lévy-Khinchine, *Séminaire Choquet*, 3e année (1963-64), n° 2.

[6] W. Rudin, Fourier Analysis on groups, New-York. *Interscience Publishers* (1962).

Manuscrit reçu le 23 février 1967.

K. Harzallah,
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
91 - Orsay