ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-MICHEL BONY

Détermination des axiomatiques de théorie du potentiel dont les fonctions harmoniques sont différentiables

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 1 (1967), p. 353-382

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_353_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 1 (1967). 353-382.

DÉTERMINATION DES AXIOMATIQUES DE THÉORIE DU POTENTIEL DONT LES FONCTIONS HARMONIQUES SONT DIFFÉRENTIABLES

par Jean-Michel BONY

Introduites pour étendre dans un cadre abstrait les propriétés des solutions de l'équation de Laplace, les axiomatiques de théorie du potentiel (1) s'appliquent à bien d'autres situations. Ainsi, étant donné un opérateur différentiel du second ordre

$$\mathcal{A}u\,(x) = \sum_{i,\,j=0}^{n} a_{ij}\,(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\,(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,(x) + a\,(x)\,u\,(x)$$

elliptique, dont les coefficients sont localement höldériens, les solutions de $\mathcal{A}u = 0$ forment une axiomatique de Brelot (R. M. Hervé [6]). La théorie axiomatique de Bauer, plus faible, s'applique en outre aux solutions de $\mathcal{A}u = 0$, où $\mathcal{A}$ est un opérateur parabolique dont les coefficients sont localement höldériens et ne croissent pas trop vite à l'infini (S. G. Guber [5]). L'objet de ce travail est de montrer que, réciproquement, il est possible d'associer un opérateur différentiel à toute axiomatique de théorie du potentiel dans $\mathbf{R}^n$ lorsque les fonctions harmoniques sont assez régulières.

Ω désignant un ouvert de $\mathbf{R}^n$, nous partons d'une axiomatique très générale sur Ω, réduites aux axiomes 1 et 2 : propriété de faisceau et base d'ouverts réguliers (nous supposons en outre, pour simplifier, que les constantes sont harmoniques, le cas général pouvant aisément s'y ramener). Sous l'hypothèse fondamentale que les fonctions harmoniques sont de classe C^2 au moins, le paragraphe 2 montre l'existence d'un opérateur

(1) On trouvera dans [4] une étude de l'axiomatique de Brelot ainsi que quelques indications sur d'autres théories axiomatiques. L'axiomatique de Bauer est étudiée dans [2]. Des axiomatiques plus faibles sont étudiées dans [1] et [3].

différentiel $\mathfrak{A}$ sur Ω, pré-elliptique (elliptique dégénéré), tel que les fonctions harmoniques vérifient l'équation $\mathfrak{A}u = 0$, les coefficients de $\mathfrak{A}$ pouvant être discontinus. Les trois paragraphes suivants démontrent les résultats essentiels : à condition de se restreindre à un ouvert Ω_0 dense dans Ω, les coefficients de $\mathfrak{A}$ sont réguliers, les fonctions harmoniques sont caractérisées par la relation $\mathfrak{A}u = 0$, $\mathfrak{A}$ est unique à un facteur de proportionnalité près.

Le paragraphe 6 introduit les axiomes de convergence et met en évidence une relation, valable dans un cadre très général, entre la régularité des fonctions harmoniques et un axiome de convergence faible. Le paragraphe 7 pose le problème suivant : l'opérateur pré-elliptique $\mathfrak{A}$ associé à une axiomatique de Brelot est-il elliptique ? Ce problème est résolu par l'affirmative en dimension 2 et reste ouvert en dimension supérieure.

Enfin le paragraphe 8 traite des axiomatiques invariantes par translation, en ne supposant plus aucune régularité des fonctions harmoniques. On peut dans ce cas leur associer des opérateurs différentiels pré-elliptiques à coefficients constants. De plus, les divers types d'axiomatiques de théorie du potentiel sont complètement caractérisés, en dimension quelconque, par la nature des opérateurs associés : celles de Brelot correspondent aux opérateurs elliptiques et celles de Bauer aux opérateurs paraboliques.

1. Quelques définitions.

a) Dans toute la suite, Ω désignera un ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$.

Une *axiomatique de théorie du potentiel* $\mathcal{H}$ sur Ω est la donnée, pour tout ouvert $U \subset \Omega$, d'un espace vectoriel $\mathcal{H}(U)$ de fonctions continues dans U (dites fonctions harmoniques dans U) vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) (*Axiome 1*) : $\mathcal{H}$ est un faisceau.

(ii) (*Axiome 2*) : Les ouverts réguliers forment une base de la topologie de Ω.

(iii) Les fonctions constantes sont harmoniques.

Rappelons qu'un ouvert ω relativement compact dans Ω est dit *régulier* si pour toute fonction φ continue sur $\partial\omega$, il existe une et une seule fonction $H^\omega \varphi$, continue sur $\bar{\omega}$, harmonique dans ω et égale à φ sur $\partial\omega$ et si de plus

$$\varphi \geqslant 0 \Rightarrow H^\omega \varphi \geqslant 0.$$

Si ω est régulier, il existe pour chaque $x \in \omega$ une mesure de Radon ρ_x sur $\partial\omega$ positive et de masse 1 (mesure harmonique du point x), telle que

$$H^\omega \varphi(x) = \int_{\partial\omega} \varphi(y)\, \rho_x(dy) \tag{1.1}$$

PROPOSITION 1.1. — *Une limite uniforme sur tout compact de fonctions harmoniques dans un ouvert* U *est harmonique.*

Il suffit de passer à la limite dans l'intégrale (1.1) pour tout ouvert régulier $\omega \subset \bar{\omega} \subset U$.

PROPOSITION 1.2. — *Si une fonction u est harmonique dans un ouvert* U, *elle ne peut y atteindre de maximum local strict.*

En effet, si elle atteignait un maximum local strict en un point x_0, en choisissant un ouvert régulier ω contenant x_0 et assez petit, on aurait

$$\forall\, y \in \partial\omega \qquad u(y) < u(x_0)$$

et

$$u(x_0) > \int u(y)\, \rho_x^\omega(dy)$$

ce qui est absurde.

Remarque 1.1. — Les résultats que nous allons établir étant de caractère local, leur extension au cas où Ω est une variété connexe paracompacte sera immédiate.

Remarque 1.2. — Nous avons supposé que les constantes sont harmoniques pour des raisons de commodité, mais cette restriction n'a rien d'essentiel. Si $\mathcal{H}$ ne vérifie que les axiomes 1 et 2, l'ensemble des points où toutes les fonctions harmoniques s'annulent est un fermé d'intérieur vide. Dans le complémentaire, on se ramène *localement* au cas considéré ici de la façon habituelle : dans un ouvert U où il existe une fonction u_0 harmonique strictement positive, on prend comme nouvelles fonctions harmoniques les fonctions de la forme $\dfrac{u}{u_0}$ où u parcourt $\mathcal{H}$ (cf. remarque 3.1).

b) Nous identifierons une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$

$$\xi \quad \to \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i\, \xi_j$$

à une matrice $A = (a_{ij})$ symétrique. Les formes quadratiques constituent un espace vectoriel Q de dimension $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

Une forme quadratique est dite *positive* si

$$\forall\, \xi \in \mathbf{R}^n \qquad \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i\, \xi_j \geqslant 0.$$

Les formes quadratiques positives constituent un cône convexe Q^+, fermé dans Q.

Une forme quadratique est dite *définie positive* si

$$\forall\, \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{\, 0\,\} \qquad \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i\, \xi_j > 0.$$

Les formes quadratiques définies positives constituent l'intérieur $\mathring{Q}^+$ du cône Q^+.

L'espace vectoriel Q sera muni du produit scalaire

$$\langle\, A, B\,\rangle = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij} = \text{trace } AB.$$

PROPOSITION 1.3. — *Pour que* A *appartienne à* Q^+, *il faut et il suffit que*

$$\forall\, X \in Q^+ \quad \langle\, A, X\,\rangle \geqslant 0.$$

Le résultat est immédiat en diagonalisant la matrice A.

A toute fonction u de classe C^2 au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$, nous associerons sa différentielle première : $du\,(x_0)$, forme linéaire, et sa différentielle seconde notée $d^2\, u\,(x_0)$, forme quadratique dont les coefficients sont $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}\,(x_0)$.

2. Opérateur différentiel pré-elliptique associé à une axiomatique.

DÉFINITION 2.1. — *Un opérateur différentiel du second ordre sans terme d'ordre* 0 :

$$\mathcal{A}u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

est dit pré-elliptique si pour chaque x, la forme quadratique $(a_{ij}(x))$ *est positive et non nulle.*

$\mathcal{A}$ *est dit elliptique si pour chaque x, la forme quadratique* $(a_{ij}(x))$ *est définie positive.*

Aucune hypothèse de régularité des coefficients n'est exigée ici.

THÉORÈME 2.1. ([2]). — *Soit* $\mathcal{H}$ *une axiomatique de théorie du potentiel sur* Ω *dont les fonctions harmoniques sont de classe* C^2. *Il existe alors un opérateur différentiel pré-elliptique* $\mathcal{A}$ *dans* Ω *tel que pour toute fonction u harmonique dans un ouvert* $\omega \subset \Omega$, *on ait*

$$\mathcal{A}u = 0 \quad \textit{dans} \quad \omega.$$

a) Soit $x_0 \in \Omega$ et désignons par $\mathcal{H}_0$ l'ensemble des fonctions u, harmoniques au voisinage de x_0 et telles que $du(x_0) = 0$.

Soit $F_{x_0} = \{ d^2 u(x_0) \mid u \in \mathcal{H}_0 \}$, c'est un sous-espace vectoriel de Q. De plus $F_{x_0} \cap \mathring{Q}^+ = \emptyset$, en effet, si u vérifiait $du(x_0) = 0$ et $d^2u(x_0) \in \mathring{Q}^+$, u aurait un minimum relatif strict en x_0.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan H de Q, contenant F_{x_0} et tel que $H \cap \mathring{Q}^+ = \emptyset$.

Soit $A = (a_{ij}(x_0))$ un vecteur de Q non nul, orthogonal à H, du même côté de H que Q^+. On a :

$$\forall u \in \mathcal{H}_0 \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}(x_0) = 0$$

et

$$\forall x \in Q^+ \quad \langle A, X \rangle \geqslant 0$$

la forme quadratique $A = (a_{ij}(x_0))$ est donc positive et non nulle.

([2]) Sous une forme voisine, ce théorème est dû à F. John [7].

b) L'ensemble des différentielles $du(x_0)$ des fonctions harmoniques au voisinage de x_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{n*}$, de dimension p. Soient $u_1, ..., u_p$, p fonctions harmoniques au voisinage de x_0 et telles que $du_1(x_0), ..., du_p(x_0)$ soient indépendantes. Toute fonction u, harmonique au voisinage de x_0 peut alors s'écrire :

$$u(x) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_{kl} \frac{\partial u}{\partial x_l}(x_0) \right) u_k(x) + v(x)$$

avec $dv(x_0) = 0$, les coefficients α_{kl} ne dépendant que de $u_1, ..., u_p$. De la relation

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = 0$$

on déduit la relation suivante, valable pour toute fonction u harmonique au voisinage de x_0.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_0) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0$$

les coefficients $a_{ij}(x_0)$ et $a_i(x_0)$ ne dépendent pas de u.

Le choix des $a_{ij}(x)$ et $a_i(x)$ pour chaque $x \in \Omega$ définit l'opérateur différentiel pré-elliptique $\mathcal{A}$.

Remarque 2.1. — Nous n'avons utilisé dans cette démonstration que les deux propriétés suivantes :

— $\mathcal{H}$ est un faisceau de fonctions de classe C^2, contenant les constantes;

— une fonction de $\mathcal{H}$ ne peut avoir de maximum relatif strict.

3. Régularité de l'opérateur différentiel associé à une axiomatique.

En supposant que les fonctions harmoniques sont de classe C^2 ou même plus régulières, on pourrait espérer trouver un opérateur $\mathcal{A}$ à coefficients continus. Il n'en est rien comme le prouve l'exemple suivant.

Prenons $\Omega = \mathbf{R}$ et soit φ une fonction réelle de classe C^∞ strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Les fonctions de la forme

$$u(x) = a\varphi(x) + b$$

où a et b sont des constantes, constituent une axiomatique de Brelot, les fonctions harmoniques étant C^∞. En tout point x où $\varphi'(x) \neq 0$ elles vérifient la relation différentielle du second ordre suivante, unique à un facteur de proportionnalité près :

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) - \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \frac{du}{dx}(x) = 0.$$

En tout point x où $\varphi'(x) = 0$, elles vérifient les relations :

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) + \alpha \frac{du}{dx}(x) = 0$$

pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$. Enfin, si $x \to x_0$ avec $\varphi'(x_0) = 0$, $\dfrac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}$ n'est pas borné. Il est donc impossible d'obtenir en ces points un opérateur $\mathcal{Q}$ à coefficients continus, la condition de pré-ellipticité imposant au coefficient de $\dfrac{d^2u}{dx^2}(x)$ d'être non nul.

Or, pour tout fermé d'intérieur vide de $\mathbf{R}$, il existe une fonction φ, C^∞ et strictement croissante telle que φ' s'annule sur ce fermé. Le théorème suivant est donc en un certain sens le meilleur résultat possible.

THÉORÈME 3.1. — *Soit $\mathcal{H}$ une axiomatique de théorie du potentiel sur Ω, dont les fonctions harmoniques sont de classe C^2. Il existe alors un ouvert Ω_0 dense dans Ω et, sur Ω_0, un opérateur différentiel $\mathcal{Q}$ pré-elliptique, à coefficients continus, tel que pour toute fonction u harmonique dans un sous-ouvert de Ω_0, on ait*

$$\mathcal{Q}u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0$$

De plus, si les fonctions harmoniques sont de classe C^{k+2} (resp. C^∞, *analytiques*) *on peut choisir les coefficients de $\mathcal{Q}$ de classe C^k* (resp. C^∞, *analytiques*).

La démonstration se fera en plusieurs étapes. Supposons donc les fonctions harmoniques de classe C^{k+2} ($k = 0, 1, \ldots, \infty, \omega$). $\mathcal{H}_x$ désignera l'ensemble des fonctions harmoniques au voisinage de x.

a) Pour chaque x, l'ensemble $\{ du(x) \mid u \in \mathcal{H}_x \}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{n*}$ dont la dimension est une fonction semi-continue inférieurement de x. En effet, si les différentielles des fonctions $u_1, ..., u_p$ sont indépendantes en x, elles sont encore indépendantes au voisinage. L'ensemble des points au voisinage desquels cette dimension est constante est donc un ouvert dense.

De même, l'ensemble $\{ d^2u(x) \mid u \in \mathcal{H}_x \}$ est un sous-espace vectoriel de Q dont la dimension est une fonction semi-continue inférieurement de x, donc localement constante sur un ouvert dense. Nous noterons Ω_1 l'ouvert dense intersection des deux précédents.

b) Au voisinage de $x_1 \in \Omega_1$, nous pouvons trouver des fonctions harmoniques $u_1, ..., u_p$ telles que $du_1(x), ..., du_p(x)$ constituent une base de $\{ du(x) \mid u \in \mathcal{H}_x \}$. Nous pouvons faire un changement de coordonnées locales au voisinage de x_1, de classe C^{k+2}, tel que $u_1(x), ... u_p(x)$ soient les p premières coordonnées. (Nous noterons encore $x_1, ..., x_n$ ces nouvelles coordonnées.)

Le sous-espace vectoriel de Q :

$$F_x = \{ d^2 u(x) \mid u \in \mathcal{H}_x \quad \text{et} \ du(x) = 0 \}$$

est alors identique à

$$\{ d^2u(x) \mid u \in \mathcal{H}_x \}.$$

Si $v_1, ..., v_q$ sont harmoniques au voisinage de x_1 et telles que $d^2v_1(x_1), ..., d^2 v_q(x_1)$ soit une base de F_{x_1}, nous pouvons choisir $d^2v_1(x), ..., d^2v_q(x)$ comme base de F_x pour x voisin de x_1, les éléments de la base étant des fonctions de classe C^k de x.

c) Désignant par G_x le sous-espace vectoriel de Q orthogonal de F_x, nous pouvons, dans un voisinage ouvert V de x_1, en trouver une base

$$\{ A^1(x), ..., A^r(x) \} \qquad A^s(x) = (a^s_{ij}(x))$$

dont les éléments sont fonctions de classe C^k de x. Le théorème 2.1 affirme que $G_x \cap Q^+$ n'est pas réduit à $\{ 0 \}$. Nous allons chercher un élément $A(x) \in G_x \cap Q^+$ non nul et fonction de classe C^k de x sur un sous ouvert dense U de V.

Le problème se ramène donc à la recherche de r fonctions de classe C^k, non simultanément nulles : $\alpha_1(x), ..., \alpha_r(x)$ telles que

$$A(x) = \alpha_1(x) A^1(x) + ... + \alpha_r(x) A^r(x) \in Q^+.$$

Pour que A appartienne à Q^+, il faut et il suffit que toutes les valeurs propres de A soient positives, c'est-à-dire que toutes les racines de l'équation caractéristique :

$$\textit{déterminant}\ (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}) = 0$$

soient positives. Ces racines étant nécessairement réelles, il faut et il suffit que les coefficients du polynôme en λ : *déterminant* $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})$, soient alternativement positifs et négatifs. La condition

$$\alpha_1 \mathrm{A}^1(x) + \ldots + \alpha_r \mathrm{A}^r(x) \in \mathrm{Q}^+$$

est donc équivalente au système suivant

$$\begin{cases} \mathrm{P}_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_r\,;\, x) \geqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{P}_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_r\,;\, x) \geqslant 0 \end{cases}$$

où les P_i sont des polynômes en $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ dont les coefficients sont des fonctions de classe C^k de x. Le choix de $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_r(x)$ va résulter du lemme suivant dont on trouvera la démonstration en appendice (nous ne faisons que recopier le lemme A6 aux changements de notations près).

LEMME. — *Soit* $\mathrm{P}_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_r\,;\, x) \geqslant 0$ *une famille finie d'inéquations où les* P_i *sont des polynômes en* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *dont les coefficients sont des fonctions réelles de classe* C^k *de* $x \in \mathrm{V}$. *Il existe alors un ouvert* U *dense dans* V *tel que pour tout* $x_0 \in \mathrm{U}$ *et toute solution réelle* $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_r^0$ *du système*

$$\mathrm{P}_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_r\,;\, x_0) \geqslant 0$$

il existe au voisinage de x_0 *des fonctions réelles :* $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_r(x)$, *de classe* C^k *vérifiant*

$$\alpha_1(x_0) = \alpha_1^0, \ldots, \alpha_r(x_0) = \alpha_r^0$$

et

$$\forall i \quad \mathrm{P}_i(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_r(x)\,;\, x) \geqslant 0.$$

Au voisinage de tout point $x_0 \in \mathrm{U}$, nous pouvons poser

$$\mathrm{A}(x) = (a_{ij}(x)) = \left(\sum_{s=1}^{r} \alpha_s(x)\, a_{ij}^s(x)\right)$$

où $\mathrm{A}(x)$ est une forme quadratique positive et non nulle, dont les coefficients sont des fonctions de x de classe C^k.

d) Nous en concluons qu'il existe un ouvert $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega$ dense dans Ω, tel que pour tout point $x_0 \in \Omega_0$, il existe un opérateur différentiel pré-elliptique $\mathcal{A}$ défini au voisinage de x_0 et à coefficients de classe C^k tel que

$$\mathcal{A}u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0$$

pour toute fonction u harmonique au voisinage de x_0. Les termes du premier ordre dans $\mathcal{A}$ proviennent du changement de coordonnées locales inverse de celui fait en b).

Pour $k = 0, 1, ..., \infty$ on en déduit l'existence d'un opérateur différentiel pré-elliptique, de classe C^k sur Ω_0 entier, à l'aide d'une partition de l'unité.

Dans le cas analytique, considérons les couples $(U, \mathcal{A}_U)$ où U est un sous-ouvert de Ω_0 et $\mathcal{A}$ un opérateur pré-elliptique à coefficients analytiques annulant les fonctions harmoniques. Soit $(\Omega_0, \mathcal{A}_{\Omega'_0})$ un élément maximal pour la relation de prolongement. Il résulte de la propriété d'existence locale que $\Omega_0 \setminus \Omega'_0$ est d'intérieur vide. Ω'_0 est dense dans Ω_0 donc dense dans Ω.

Remarque 3.1. — Il résulte de la remarque 1.2 et du théorème précédent que si $\mathcal{H}$ vérifie seulement les axiomes 1 et 2, il existe un ouvert dense Ω_0 dans lequel les fonctions harmoniques u vérifient *localement* une relation du type suivant :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{u}{u_0}\right)(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u}{u_0}\right)(x) = 0$$

où u_0 est harmonique et strictement positive. En développant la relation précédente, on obtient

$$\mathcal{A}' u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a'_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + a'(x) u(x) = 0.$$

On en déduit comme dans la fin du théorème 3.1 l'existence d'un opérateur $\mathcal{A}'$ du type précédent défini sur Ω_0 entier, à coefficients de classe C^k.

4. Caractérisation des fonctions harmoniques et surharmoniques.

THÉORÈME 4.1. — (*Principe du maximum pour les opérateurs pré-elliptiques*). *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur différentiel pré-elliptique à coefficients* *continus, défini sur un ouvert* U. *Soit* $\omega \subset \bar{\omega} \subset U$ *un ouvert assez petit. Soit* $u \in C^2(\omega)$ *continue sur* $\bar{\omega}$ *et telle que* $\mathcal{A}\, u \geqslant 0$ *dans* ω. *Alors*

$$\sup_{\bar{\omega}} (x) = \sup_{\partial\omega} (x).$$

$\mathcal{A}$ étant pré-elliptique, pour tout $x \in U$, il existe un vecteur $\xi \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j > 0.$$

Par continuité, l'inégalité est encore valable au voisinage de x. Un ouvert ω sera dit ici assez petit s'il existe $\xi \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$\forall\, x \in \omega \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j > 0.$$

Supposons que $\sup_{\bar{\omega}} u = m$ ne soit pas atteint au bord et soit

$$K = \{x \in \omega \mid u(x) = m\}.$$

Soit H un hyperplan d'appui de K orthogonal à ξ. Soit $x_0 \in H \cap K$. Soit $B(O, \rho)$ une boule (dont nous prendrons le centre O comme origine) contenue dans ω, tangente en x_0 à H, K et $B(O, \rho)$ n'étant pas du même côté de H.

Soit $v(x) = e^{-k|x|^2} - e^{-k\rho^2}$, k étant choisi assez grand pour que $\mathcal{A}\, v(x_0) > 0$. Ceci est toujours possible car

$$\mathcal{A}\, v(x_0) = e^{-k\rho^2}\left[\, 4\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\, x_0^i\ x_0^j\right) k^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + a_i\, x_0^i\right) k\,\right]$$

et, le vecteur Ox_0 étant parallèle à ξ

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\, x_0^i\ x_0^j > 0$$

Soit $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, x \in B(x_0, \alpha) \quad \mathcal{A}\, v(x) > 0.$$

Posons $w(x) = u(x) + \lambda\, v(x)$ où $\lambda > 0$ sera choisi ultérieurement.

(3) Nous désignerons par $B(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r et par $S(x, r)$ la sphère de même centre et même rayon.

On a

$$\begin{aligned} & w(x_1) = m, \\ & w(y) < m \qquad \forall\, y \in S(x_0, \alpha) \cap \complement B(O, \rho), \\ & w(y) < m \qquad \forall\, y \in S(x_0, \alpha) \cap B(O, \rho) \end{aligned}$$

à condition d'avoir choisi λ assez petit.

Il existe alors un point x_1 intérieur à $B(x_0, \alpha)$ où w atteint un maximum local, et

$$\mathcal{A}\, w(x_1) = \mathcal{A}\, u(x_1) + \lambda\, \mathcal{A}\, v(x_1) > 0.$$

Ceci constitue la contradiction cherchée car en un maximum local de w, $\mathcal{A}$ étant pré-elliptique, on a toujours $\mathcal{A}\, w(x_1) \leqslant 0$.

COROLLAIRE 4.1. — *Si ω est un ouvert assez petit, si u de classe C^2 dans ω vérifie $\mathcal{A}\, u = 0$ et s'annule sur $\partial\omega$, on a $u = 0$.*

THÉORÈME 4.2. — *Soit $\mathcal{H}$ une axiomatique de théorie du potentiel sur Ω dont les fonctions harmoniques sont de classe C^2. Soit $\mathcal{A}$ un opérateur différentiel pré-elliptique à coefficients continus, défini sur un ouvert dense $\Omega_0 \subset \Omega$ et tel que $\mathcal{A}\, u = 0$ pour toute fonction u harmonique.*

a) *Pour qu'une fonction u, définie dans un sous-ouvert de Ω_0 soit harmonique, il faut et il suffit que u soit de classe C^2 et que $\mathcal{A}\, u = 0$.*

b) *Pour qu'une fonction u, de classe C^2 définie dans un sous-ouvert de Ω_0 soit localement surharmonique, il faut et il suffit que $\mathcal{A}\, u \leqslant 0$.*

a) Soit u de classe C^2 dans un ouvert $U \subset \Omega_0$ et vérifiant $\mathcal{A}\, u = 0$. Pour tout ouvert ω régulier et assez petit, posons

$$v = H^{\omega} u.$$

On a alors $\mathcal{A}(u - v) = 0$ et $u - v = 0$ sur $\partial\omega$. D'après le corollaire 4.1, on a $u = v$ dans ω. La fonction u est localement harmonique, donc harmonique dans U.

b) Soit u de classe C^2 dans $U \subset \Omega_0$ et vérifiant $\mathcal{A}\, u \leqslant 0$. Pour tout ouvert ω régulier assez petit posons

$$v = H^{\omega} u.$$

On a $\mathcal{A}(u - v) \leqslant 0$ et $u - v = 0$ sur $\partial\omega$. D'après le théorème 4.1, $u - v$ ne peut avoir de minimum strictement négatif. Donc

$$u(x) \geqslant v(x) = \int_{\partial\omega} u(y)\, \rho_x^\omega(dy).$$

La fonction u est donc surharmonique dans tout ouvert assez petit.

Réciproquement, soit u de classe C^2 et surharmonique dans un ouvert U. S'il existe $x_0 \in U$ tel que $\mathcal{A} u(x_0) > 0$, on a $\mathcal{A} u(x) > 0$ au voisinage de x_0. D'après le résultat direct, u serait sous-harmonique au voisinage de x_0. u serait donc harmonique au voisinage de x_0 et on aurait $\mathcal{A} u(x_0) = 0$.

Remarque 4.1. — Il suffit de faire une hypothèse supplémentaire très faible (axiome T) sur l'axiomatique $\mathcal{H}$ pour que la surharmonicité soit une propriété locale (voir [1]). C'est le cas en particulier des axiomatiques de Brelot ou de Bauer (voir [4] et [2]). La condition $\mathcal{A} u \leqslant 0$ caractérise alors les fonctions surharmoniques.

Remarque 4.2. — Il est impossible d'obtenir une caractérisation des fonctions harmoniques du type précédent dans Ω entier, comme le prouve l'exemple suivant.

$\mathcal{H}$ est l'axiomatique, définie sur $\mathbf{R}$, des fonctions de la forme $u(x) = a x^3 + b$. L'opérateur $\mathcal{A}$ associé est

$$\mathcal{A} u(x) = \frac{d^2 u}{dx^2}(x) - \frac{2}{x}\frac{du}{dx}(x) \quad \text{pour} \quad x \neq 0$$

La fonction

$$v(x) = \begin{cases} x^3 & \text{pour} \quad x \leqslant 0, \\ 2x^3 & \text{pour} \quad x \geqslant 0, \end{cases}$$

est de classe C^2, vérifie $\mathcal{A} v(x) = 0$ (elle vérifie de plus à l'origine les mêmes relations différentielles que les fonctions harmoniques :

$$\frac{d^2 v}{dx^2}(0) + \alpha \frac{\partial v}{\partial x}(0) = 0).$$

Cependant, v n'est pas harmonique au voisinage de l'origine.

On peut même construire deux axiomatiques différentes auxquelles correspondent le même opérateur différentiel : $\mathcal{H}$ est l'axiomatique précédente, $\mathcal{H}'$ est l'ensemble des fonctions $u(x)$ telles qu'il existe deux constantes a et b telles que

$$u(x) = \begin{cases} ax^3 + b & \text{pour} \quad x \leqslant 0, \\ 2ax^3 + b & \text{pour} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Il est facile de construire des contre-exemples analogues en classe C^∞. Dans le cas analytique, on a le résultat suivant : si $\mathcal{H}$ vérifie

a) Les fonctions harmoniques sont analytiques,

b) Toute fonction analytique dans un ouvert connexe U, harmonique dans un sous-ouvert non vide V, est harmonique dans U.

Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur associé dans Ω_0. Pour qu'une fonction u soit harmonique dans U, il faut et il suffit que u soit analytique et que $\mathcal{A}\, u = 0$ dans $U \cap \Omega_0$.

La démonstration est immédiate. Les hypothèses (très fortes) sont satisfaites pour les solutions d'une équation *elliptique* à coefficients analytiques.

Il serait intéressant de savoir si l'on peut d'une part supprimer l'hypothèse b), d'autre part prouver dans ce cas que $\mathcal{A}$ est elliptique.

5. Unicité de l'opérateur différentiel associé à une axiomatique.

Le théorème 3.1 prouve l'existence d'un opérateur $\mathcal{A}$ à coefficients réguliers sur un ouvert dense, tel que $\mathcal{A}\, u = 0$ pour u harmonique. En multipliant chacun des coefficients de $\mathcal{A}$ par une fonction $\varphi(x)$ régulière et strictement positive, on obtient encore un opérateur $\mathcal{A}'$ tel que $\mathcal{A}'\, u = 0$ pour u harmonique. Le théorème suivant prouve que, à un facteur de proportionnalité près, l'opérateur $\mathcal{A}$ est unique.

THÉORÈME 5.1. — *Soit $\mathcal{H}$ une axiomatique de théorie du potentiel sur Ω dont les fonctions harmoniques sont de classe C^2. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux opérateurs pré-elliptiques, à coefficients continus, définis sur un ouvert dense Ω_0, tels que pour toute fonction u, harmonique dans un sous-ouvert de Ω_0, on ait*

$$\mathcal{A}\, u = 0 \qquad et \qquad \mathcal{B}\, u = 0.$$

Alors il existe une fonction φ continue dans Ω_0 telle que $\mathcal{B} = \varphi\, \mathcal{A}$.

Soit $x_0 \in \Omega_0$. Si u, de classe C^2 au voisinage de x_0 vérifie $\mathcal{A} u(x_0) < 0$, on a $\mathcal{A} u(x) < 0$ au voisinage. D'après le théorème 4.2. b), u est surharmonique au voisinage de x_0 et donc $\mathcal{B} u(x_0) \leqslant 0$. Posons

$$u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x^i - x_0^i)$$

Pour toute valeur des nombres α_{ij} et α_i, nous obtenons que

$$2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij}(x_0) \alpha_{ij} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_0) \alpha_i < 0$$

implique

$$2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} b_{ij}(x_0) \alpha_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_0) \alpha_i \leqslant 0.$$

Il en résulte qu'il existe un nombre $\varphi(x_0) \geqslant 0$ tel que

$$b_{ij}(x_0) = \varphi(x_0) a_{ij}(x_0)$$

et

$$b_i(x_0) = \varphi(x_0) a_i(x_0)$$

La pré-ellipticité de $\mathcal{B}$ impose $\varphi(x_0) > 0$. La fonction $\varphi(x)$ est ainsi définie en tout point de Ω_0 et est évidemment continue.

Remarque 5.1. — Il peut exister des points (contenus dans un fermé d'intérieur vide) où on n'a pas proportionnalité de deux opérateurs différentiels annulant les fonctions harmoniques. Ainsi, si $\mathcal{H}$ est l'axiomatique des fonctions de la forme

$$u(x) = a x^3 + b$$

ces fonctions vérifient toutes les relations

$$u''(0) + \alpha u'(0) = 0.$$

6. Axiomes de convergence et régularité des fonctions harmoniques.

On introduit le plus souvent, en théorie axiomatique du potentiel, des axiomes supplémentaires dits de convergence. Ce sont essentiellement ces axiomes qui distinguent les divers types d'axiomatiques : axiomatiques de Brelot, de Bauer, etc. (voir [1] et [4] pour une étude comparée de ces axiomes). Nous ne considérerons que les trois suivants, de force décroissante.

AXIOME DE BRELOT (*Axiome* 3) :

Pour toute famille (u_i) *filtrante croissante de fonctions harmoniques dans un ouvert connexe* U, *si* $\sup u_i$ *est fini en un point,* $u = \sup u_i$ *est finie et harmonique dans* U.

D'après un théorème de Mokobodzki (voir [8] ou [4]), cet axiome est équivalent à la propriété suivante : toute famille (u_i) de fonctions harmoniques positives dans un ouvert connexe, telle que $\sup u_i$ est fini en un point, est équicontinue.

AXIOME DE DOOB (*Axiome* K_D *de Bauer*) :

Pour toute famille (u_i) *filtrante croissante de fonctions harmoniques dans un ouvert* U, *si* $\sup u_i$ *est fini sur un ensemble dense,* $u = \sup u_i$ *est finie et harmonique dans* U.

AXIOME FAIBLE (*Axiome* K_1 *de Bauer*) :

Pour toute famille u_i *filtrante croissante de fonctions harmoniques dans un ouvert* U, *si les* u_i *sont uniformément majorées,* $u = \sup u_i$ *est finie et harmonique dans* U.

D'après [8], cet axiome est équivalent à la propriété suivante : toute famille de fonctions harmoniques uniformément bornée dans U est équicontinue.

Le théorème suivant prouve que le fait de supposer que toutes les fonctions harmoniques sont régulières (en un sens convenable), entraîne que l'axiomatique vérifie l'axiome faible. En particulier, l'hypothèse que nous avons constamment faite : les fonctions harmoniques sont de classe C^2, impliquait déjà un axiome de convergence.

THÉORÈME 6.1. — *Soit* $\mathcal{H}$ *une axiomatique de théorie du potentiel sur un espace localement compact à base dénombrable* X. *Pour tout ouvert* U, *soit* $\mathcal{C}$ (U) *l'espace des fonctions continues sur* U, *muni de la topologie de la convergence compacte. Soit enfin, pour tout ouvert* U, *un espace de Fréchet* $\mathcal{F}$ (U) $\subset \mathcal{C}$ (U) *tel que tout ensemble borné dans* $\mathcal{F}$ (U) *soit équicontinu.*

Si pour tout ouvert U, *les fonctions harmoniques dans* U *appartiennent à* $\mathcal{F}$ (U), $\mathcal{H}$ *vérifie l'axiome faible.*

En effet, $\mathcal{H}$ (U) est fermé dans $\mathcal{C}$ (U), donc est un espace de Fréchet pour la topologie induite par celle de $\mathcal{C}$ (U). D'autre part, l'injection de $\mathcal{F}$ (U) dans $\mathcal{C}$ (U) est continue. $\mathcal{H}$ (U) est donc fermé dans $\mathcal{F}$ (U) et est également un espace de Fréchet pour la topologie induite par celle de $\mathcal{F}$ (U). D'après le théorème des homomorphismes de Banach, ces deux topologies sont identiques sur $\mathcal{H}$ (U).

Un ensemble de fonctions harmoniques uniformément bornées est borné dans $\mathcal{C}$ (U), donc borné dans $\mathcal{F}$ (U), donc équicontinu. Cette dernière propriété est équivalente à l'axiome faible.

COROLLAIRE 6.1. — *Soit* $\mathcal{H}$ *une axiomatique de théorie du potentiel sur un ouvert* Ω *de* $\mathbf{R}^n$, *dont les fonctions harmoniques sont de classe* C^1 (*ou même localement höldériennes*). $\mathcal{H}$ *vérifie alors l'axiome faible.*

7. Axiomatiques de Brelot et opérateurs elliptiques.

Les solutions d'une équation elliptique vérifient l'axiome de Brelot tandis que les solutions d'une équation parabolique vérifient l'axiome de Doob. Nous abordons ici le problème important des réciproques, qui reste ouvert en dimension supérieure ou égale à 3.

PROPOSITION 7.1. — *Soit* $\mathcal{H}$ *une axiomatique de théorie du potentiel dont les fonctions harmoniques sont de classe* C^2. *Soit* $\mathcal{A}$ *un opérateur pré-elliptique, à coefficients continus, défini sur un ouvert* Ω_0 *dense, et tel que* $\mathcal{A}\, u = 0$ *pour toute fonction* u *harmonique.*

a) *S'il existe un ouvert* $U \subset \Omega_0$ *non vide et des coordonnées locales* $\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x)$ *de classe* C^2 *dans* U *telles que* $\mathcal{A}$ *se mette sous la forme*

$$\mathcal{A}\, u(x) = \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i\, \partial \eta_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \frac{\partial u}{\partial \eta_i}(x) \tag{7.1}$$

$\mathcal{H}$ *ne vérifie pas l'axiome de Brelot.*

b) *Il n'existe pas d'ouvert* U *non vide tel que* $\mathcal{A}$ *se mette sous la forme* (7.1) *avec* $\alpha_n(x) = 0$ *dans* U.

a) Si $\mathfrak{A}$ peut se mettre sous la forme (7.1), on peut supposer, en changeant au besoin $\eta_n(x)$ en $-\eta_n(x)$, que $\alpha_n(x) \leqslant 0$ dans un sous ouvert $V \subset U$ non vide. Soit alors $x_0 \in V$ et posons

$$v(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad \eta_n(x) \leqslant \eta_n(x_0) \\ [\eta_n(x) - \eta_n(x_0)]^3 \quad \text{pour} \quad \eta_n(x) \geqslant \eta_n(x_0) \end{cases}$$

$v(x)$ est une fonction de classe C^2, vérifiant $\mathfrak{A}\, v(x) \leqslant 0$ au voisinage de x_0, donc surharmonique au voisinage de x_0 d'après le théorème 4.2 b). Or ceci est impossible dans une axiomatique de Brelot où une fonction surharmonique positive dans un domaine est soit identiquement nulle, soit strictement positive (voir [4], p. 33).

b) Si $\mathfrak{A}$ pouvait se mettre sous la forme (7.1) avec $\alpha_n(x) = 0$ dans U, pour toute fonction $\varphi(t)$ définie sur $\mathbf{R}$, de classe C^2, la fonction

$$u(x) = \varphi(\eta_n(x))$$

vérifierait $\mathfrak{A}\, u = 0$. En vertu du théorème 4.2 a), u serait harmonique dans U. Lorsque φ varie en restant bornée, les fonctions u correspondantes constituent un ensemble borné de fonctions harmoniques qui n'est pas équicontinu. $\mathcal{H}$ ne vérifierait donc pas l'axiome faible, ce qui contredit le corollaire 6.1.

THÉORÈME 7.1. — *Soient Ω un ouvert du plan $\mathbf{R}^2$ et $\mathcal{H}$ une axiomatique de théorie du potentiel sur Ω dont les fonctions harmoniques sont de classe C^3. Soit $\mathfrak{A}$ un opérateur différentiel elliptique à coefficients de classe C^1, défini sur un ouvert Ω_0 dense dans Ω, tel que $\mathfrak{A}\, u = 0$ pour toute fonction u harmonique.*

Si $\mathcal{H}$ vérifie l'axiome de Brelot, $\mathfrak{A}$ est elliptique sur un ouvert dense.

Si $\mathfrak{A}$ n'est pas elliptique dans un ouvert dense, il existe un ouvert U non vide dans lequel la forme quadratique

$$a_{11}(x)\,\xi_1^2 + 2a_{12}(x)\,\xi_1\,\xi_2 + a_{22}(x)\,\xi_2^2 \tag{7.2}$$

est dégénérée pour tout x. On peut y choisir $\xi_1(x)$ et $\xi_2(x)$ de classe C^1 tels que

$$a_{11}(x)\,\xi_1^2(x) + 2a_{12}(x)\,\xi_1(x)\,\xi_2(x) + a_{22}(x)\,\xi_2^2(x) = 0.$$

On peut alors déterminer localement une fonction $\eta_2(x)$ de classe C^2 telle que

$$\frac{\partial \eta_2(x)}{\partial x_1} = \lambda(x)\,\xi_2(x)$$

$$\frac{\partial \eta_2(x)}{\partial x_2} = \lambda(x)\,\xi_1(x)$$

En choisissant une fonction $\eta_1(x)$ telle que η_1, η_2 soit un système de coordonnées locales dans un ouvert $V \subset U$ non vide, nous obtenons dans V

$$\mathcal{A}\,u(x) = \alpha_{11}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_1^2}(x) + \alpha_1(x)\frac{\partial u}{\partial \eta_1}(x) + \alpha_2(x)\frac{\partial u}{\partial \eta_2}(x) \tag{7.3}$$

Il résulte alors de la proposition 7.1 que $\mathcal{H}$ n'est pas une axiomatique de Brelot.

Remarque 7.1. — Si on ne suppose pas que $\mathcal{H}$ vérifie l'axiome de Brelot, dans tout ouvert U où la forme quadratique (7.2) est dégénérée, $\mathcal{A}$ peut se mettre sous la forme (7.3). D'après la proposition 7.1 b) on a alors $\alpha_2 \neq 0$ sur un ouvert dense. Pour toute axiomatique du plan dont les fonctions harmoniques sont de classe C^3, $\mathcal{A}$ est donc parabolique ou elliptique sur un ouvert dense.

Remarque 7.2. — En dimension 1 le problème est trivial, la condition de pré-ellipticité étant identique à la condition d'ellipticité.

Remarque 7.3. — En dimension supérieure ou égale à 3, il existe des opérateurs pré-elliptiques, dégénérés en tout point et qui ne peuvent se mettre sous la forme (7.1). Il en est ainsi, par exemple, s'il existe en chaque point une seule direction de vecteurs $\xi(x)$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i(x)\,\xi_j(x) = 0$$

le champ de vecteurs $\xi(x)$ n'ayant pas de surfaces orthogonales. On ignore les propriétés des solutions de tels opérateurs : régularité et axiomes de convergence vérifiés.

8. Axiomatiques invariantes par translation.

L'ouvert Ω sera ici $\mathbf{R}^n$ entier. $\mathcal{H}$ désignera dans tout ce paragraphe une axiomatique de théorie du potentiel sur $\mathbf{R}^n$, dont nous ne supposerons plus nécessairement les fonctions harmoniques de classe C^2. Nous supposerons que $\mathcal{H}$ est invariante par translation, c'est-à-dire : si $u(x)$ est harmonique dans un ouvert U, $v(x) = u(x - h)$ est harmonique dans l'ouvert $U + h$.

PROPOSITION 8.1. — *Soit u harmonique* (resp. *surharmonique continue*) *dans un ouvert* U. *Soit φ une fonction continue, positive, à support dans la boule de centre* 0 *et de rayon* ε. *Alors $u \star \varphi$ est harmonique* (resp. *surharmonique continue*) *dans l'ouvert* U_ε, *ensemble des points dont la distance à* $\complement U$ *est supérieure à* ε.

En effet, $u \star \varphi(x) = \int u(x - t)\, \varphi(t)\, dt$ est limite uniforme de combinaisons linéaires à coefficients positifs de fonctions déduites de u par translation. u est donc harmonique (resp. surharmonique).

PROPOSITION 8.2. — *Si u est harmonique* (resp. *surharmonique continue*) *dans un ouvert* U, *elle est limite uniforme sur tout compact de fonctions harmoniques* (resp. *surharmoniques*) *de classe* C^∞.

En effet, soit φ une fonction C^∞, positive, à support dans la boule unité, d'intégrale 1, et posons

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\, \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$
$$u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \star u.$$

Pour tout compact $K \subset U$ et pour ε assez petit, les fonctions $u_\varepsilon(x)$ sont définies au voisinage de K, sont harmoniques (resp. surharmoniques) de classe C^∞ et convergent vers u uniformément sur K.

PROPOSITION 8.3. — *Il existe un opérateur différentiel pré-elliptique* $\mathcal{A}$ *à coefficients constants tel que, pour toute fonction harmonique u de classe* C^2, *on ait* $\mathcal{A} u = 0$.

D'après la remarque 2.1, le résultat du théorème 2.1 peut s'appliquer à l'ensemble des fonctions de $\mathcal{H}$ qui sont de classe C^2. Les fonctions de classe C^2 harmoniques au voisinage de l'origine vérifient donc une relation :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}(0) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(0) = 0.$$

On déduit de l'invariance par translation que pour toute fonction harmonique de classe C^2, on a

$$\mathcal{A}\, u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0.$$

$\mathcal{A}$ étant pré-elliptique à coefficients constants.

PROPOSITION 8.4. — *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur différentiel pré-elliptique à coefficients constants. Soient ω un ouvert relativement compact et u une fonction continue dans $\bar{\omega}$ et vérifiant $\mathcal{A}\, u \geqslant 0$ au sens des distributions dans ω.*

Alors

$$\sup_{\bar{\omega}} u(x) = \sup_{\partial\omega} u(x).$$

Remarquons d'abord que si u est de classe C^2 dans ω, il résulte du théorème 4.1 que $\sup\limits_{\bar{\omega}} u(x) = \sup\limits_{\partial\omega} u(x)$ (pour un opérateur $\mathcal{A}$ à coefficients constants, tout ouvert est « assez petit » au sens du théorème 4.1).

Soit ω_1 un ouvert tel que $\omega_1 \subset \bar{\omega}_1 \subset \omega$. On peut approcher u uniformément sur $\bar{\omega}_1$, par les fonctions $u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \star u$ où $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ avec φ positive, C^∞, à support compact, d'intégrale 1.

De plus

$$\mathcal{A}\, u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \star \mathcal{A}\, u \geqslant 0$$

u_ε étant de classe C^∞ dans ω_1, on a

$$\sup_{\bar{\omega}_1} u_\varepsilon(x) = \sup_{\partial\omega_1} u_\varepsilon(x)$$

et à la limite

$$\sup_{\bar{\omega}_1} u(x) = \sup_{\partial\omega_1} u(x)$$

En faisant croître l'ouvert ω_1 vers ω, nous obtenons

$$\sup_{\bar{\omega}} u(x) = \sup_{\partial\omega} u(x)$$

THÉORÈME 8.1. — *Soit $\mathcal{H}$ une axiomatique de théorie du potentiel invariante par translation. Il existe un opérateur $\mathcal{A}$ pré-elliptique à coefficients constants tel que*

a) *Pour qu'une fonction u soit harmonique, il faut et il suffit qu'elle soit continue et qu'elle vérifie $\mathcal{A}\, u = 0$ au sens des distributions.*

b) *Pour qu'une fonction continue u soit surharmonique, il faut et il suffit que $\mathcal{A}\, u \leqslant 0$ au sens des distributions.*

De plus, l'opérateur $\mathcal{A}$ est unique à un facteur de proportionnalité près.

a) D'après la proposition 8.3, il existe un opérateur $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}\, u = 0$ pour toute fonction harmonique de classe C^2. Si u est harmonique, d'après la proposition 8.2, elle est limite uniforme sur tout compact de fonctions u_ε harmoniques C^∞. On a $\mathcal{A}\, u_\varepsilon = 0$ et à la limite : $\mathcal{A}\, u = 0$ au sens des distributions.

Réciproquement, si u est continue et vérifie $\mathcal{A}\, u = 0$ dans un ouvert U, soit ω un ouvert régulier tel que $\bar{\omega} \subset$ U. Soit

$$v = H^\omega u.$$

On a $\mathcal{A}\,(u - v) = 0$ au sens des distributions dans ω et $u - v = 0$ sur $\partial\omega$. D'après la proposition 8.4, $u = v$ dans ω et u est harmonique.

b) Soit u continue vérifiant $\mathcal{A}\, u \leqslant 0$ au sens des distributions dans un ouvert U. Pour tout ouvert régulier $\omega \subset \bar{\omega} \subset$ U posons $v = H^\omega u$. On a $\mathcal{A}\,(u - v) \leqslant 0$ au sens des distributions et $u - v = 0$ sur $\partial\omega$. D'après la proposition 8.4, on a $u \geqslant v$ et u est surharmonique.

Réciproquement, soit d'abord u de classe C^2 et surharmonique. On ne peut avoir $\mathcal{A}\, u\,(x_0) > 0$, car on aurait $\mathcal{A}\, u > 0$ au voisinage, u serait sous-harmonique au voisinage de x_0, donc harmonique et on aurait

$$\mathcal{A}\, u\,(x_0) = 0.$$

Soit maintenant u surharmonique continue. D'après la proposition 8.2, u est limite uniforme sur tout compact de fonctions u_ε surharmoniques C^∞. On a $\mathcal{A}\, u_\varepsilon \leqslant 0$ et à la limite, $\mathcal{A}\, u \leqslant 0$ au sens des distributions.

Enfin l'unicité de $\mathcal{A}$ résulte de la caractérisation des fonctions surharmoniques en reprenant mot pour mot la démonstration du théorème 5.1.

Nous abordons maintenant, dans le cas invariant par translation, le problème étudié au § 7 dans le cas général : caractériser les divers types d'axiomatiques de théorie du potentiel par la nature des opérateurs différentiels associés. Les opérateurs pré-elliptiques à coefficients constants peuvent être classés en trois catégories :

1) *les opérateurs elliptiques,*

2) *les opérateurs paraboliques :* il existe un changement linéaire de coordonnées tel qu'ils se mettent sous la forme

$$\mathfrak{A}\, u(x) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

la forme quadratique (a_{ij}) étant définie positive en $n - 1$ variables et $a_n \neq 0$.

3) *les opérateurs cylindriques :* il existe un changement linéaire de coordonnées tel qu'ils se mettent sous la forme

$$\mathfrak{A}\, u(x) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \tag{8.1}$$

Le théorème suivant donne une caractérisation complète des axiomatiques de Brelot et de Bauer invariantes par translation.

THÉORÈME 8.2. — *Soient $\mathcal{H}$ une axiomatique de théorie du potentiel invariante par translation et $\mathfrak{A}$ l'opérateur différentiel pré-elliptique à coefficients constants associé.*

a) *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *$\mathcal{H}$ vérifie l'axiome de Brelot,*

ii) *$\mathfrak{A}$ est un opérateur elliptique,*

iii) *Les fonctions harmoniques sont analytiques.*

b) *Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *$\mathcal{H}$ vérifie l'axiome de Doob,*

ii) *$\mathfrak{A}$ est un opérateur parabolique ou elliptique,*

iii) *Les fonctions harmoniques sont de classe* C^∞,

iv) *$\mathcal{H}$ vérifie l'axiome faible,*

v) *Les fonctions harmoniques sont de classe* C^1 (*ou même localement höldériennes*).

Ce théorème est une conséquence immédiate des propriétés suivantes bien connues des solutions des opérateurs elliptiques, paraboliques et cylindriques.

Les solutions d'une équation elliptique à coefficients constants forment une axiomatique de Brelot et sont analytiques.

Les solutions d'une équation parabolique à coefficients constants vérifient l'axiome de Doob mais ne vérifient pas celui de Brelot. Elles sont de classe C^{∞}, mais ne sont pas toutes analytiques.

Parmi les solutions continues d'une équation cylindrique, mise sous la forme (8.1), il y a toute les fonctions continues ne dépendant que de x_n. Les solutions ne sont donc pas toutes de classe C^1. D'autre part, les fonctions continues ne dépendant que de x_n et comprises entre 0 et 1 forment un ensemble uniformément borné de fonctions harmoniques qui n'est pas équicontinu. L'axiome faible n'est donc pas vérifié.

Remarque 8.1. — Dans le cas invariant par translation, les problèmes sont considérablement simplifiés pour deux raisons. La première est que les résultats ponctuels s'étendent immédiatement en des résultats globaux (et non « globaux sur un ouvert dense »). La seconde est que les opérateurs à coefficients constants ne sont jamais du type décrit dans la remarque 7.3.

Remarque 8.2. — Outre la caractérisation par les opérateurs différentiels, le théorème 8.2 fournit une caractérisation des divers types d'axiomatiques par la régularité des fonctions harmoniques. Ce résultat est à rapprocher du corollaire 6.1.

Appendice.

L'objet de cet appendice est de démontrer le lemme A 6 au moyen d'outils algébriques élémentaires. Nous ne prouverons que les résultats strictement nécessaires à sa démonstration.

Nous utiliserons la notation suivante : pour une famille finie de polynomes à r indéterminées $z_1, ..., z_r$, à coefficients réels, de degrés fixés, nous désignerons par a la famille formée par tous les coefficients de ces polynomes. Les polynomes de la famille seront notés $P_i(z_1, z_2, ..., z_r ; a)$.

a varie dans $\mathbf{R}^N$ où N est un entier convenablement choisi. Un polynome en a sera un polynome de N variables.

LEMME A 1. — *Soient* $P_1(z\,;a), \ldots, P_k(z\,;a)$, k *polynomes à une indéterminée* z, *de degrés formels* $d_1, \ldots, d_k$, *à coefficients réels. Il existe un polynome* $R_p(a)$ *tel que* $R_p(a) = 0$ *soit condition nécessaire et suffisante pour que* $P_1, \ldots, P_k$ *aient au moins* p *racines communes* (4).

Dans le cas de deux polynomes

$$P = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$
$$Q = b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m$$

il faut et il suffit que la matrice

$$\begin{bmatrix} a_0 & - - - & a_n & & \\ & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & a_0 & - - - & a_n \\ b_0 & - - - & b_m & & \\ & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & b_0 & - - - & b_m \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ lignes} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ lignes} \end{array}$$

soit de rang inférieur ou égal à $m + n - p$ (voir Van der Waerden [10], chapitre 4, section 27), ce qui s'écrit en annulant un certain nombre de déterminants, ou encore en annulant la somme de leurs carrés.

On passe ensuite au cas d'une famille de polynomes par la méthode de Kronecker, d'une façon tout à fait analogue à celle exposée dans [10] (chapitre 11, section 77) pour le cas $p = 1$.

LEMME A 2. — *Soit* $P(z\,;a)$ *un polynome en* z, *de degré formel* n, *à coefficients réels. Pour tout multientier* $(j_1, \ldots, j_n)$, *il existe un polynome* $\Delta_{(j_1, \ldots j_n)}(a)$ *tel que* $\Delta_{(j_1, \ldots j_n)}(a) = 0$ *soit équivalent aux conditions suivantes :*

— *le nombre de racines infinies de* P *est supérieur ou égal à* j_1 ;

— *pour* $\alpha > 1$, *la somme du nombre de racines finies d'ordre de*

(4) Les racines sont complexes, éventuellement infinies, comptées avec leur ordre de multiplicité.

multiplicité supérieur ou égal à α (5), *et du nombre de racines infinies, est supérieure ou égale à* j_α.

$$\text{Soit} \quad P(z\,;a) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n .$$

Pour $\alpha > 1$, en appliquant le lemme A 1 aux polynomes $P, P', \ldots, P^{(\alpha)}$ nous obtenons un polynome $\delta_{j_\alpha}(a)$ tel que $\delta_{j_\alpha}(a) = 0$ soit condition nécessaire et suffisante pour que $P, P', \ldots P^{(\alpha)}$ aient au moins j_α racines communes. Une racine commune à $P, P', \ldots P^{(\alpha)}$ est soit une racine infinie, soit une racine finie d'ordre au moins α.

On peut alors poser :

$$\Delta_{(j_1, \ldots, j_n)}(a) = \sum_{k=0}^{j_1-1} a_{n-k}^2 + \sum_{\alpha=2}^{n} \delta_{j_\alpha}^2(a).$$

LEMME A 3. — *Soit* $P(z\,;a(t))$ *un polynome de degré formel* n, *dont les coefficients sont des fonctions réelles de classe* C^k ($k = 0, 1, \ldots \infty, \omega$) *d'un paramètre* t *parcourant un ouvert* U *de* $\mathbf{R}^m$. *Supposons que, lorsque* t *parcourt* U, $P(z\,;a(t))$ *ait le même nombre de racines finies, avec les mêmes multiplicités. Soit* z^0 *une racine réelle de* $P(z\,;a(t^0)) = 0$. *Il existe alors une fonction* $Z(t)$, *réelle, de classe* C^k, *définie au voisinage de* t^0, *telle que*

$$P(Z(t)\,;a(t)) = 0$$

et

$$Z(t^0) = z^0.$$

Soit λ la plus petite distance de deux racines distinctes de $P(z\,;a(t^0))$. D'après le théorème de continuité des racines d'une équation algébrique (6), pour t assez voisin de t^0 et pour toute racine ζ de $P(z\,;a(t^0))$ d'ordre α, il existe exactement α racines de $P(z\,;a(t))$ distante de ζ de moins de $\frac{\lambda}{2}$. Les racines de $P(z\,;a(t))$ devant avoir les mêmes multiplicités que celles de $P(z\,;a(t^0))$ on en déduit que pour t assez voisin de t^0, si α^0 est l'ordre de multiplicité de z^0, il existe une racine d'ordre α^0 de $P(z\,;a(t))$ distante de z^0 de moins de $\frac{\lambda}{2}$.

(5) Nous faisons ici la convention habituelle : une racine d'ordre $\beta > \alpha$ est comptée comme $\beta + 1 - \alpha$ racines d'ordre au moins α.

(6) Voir, par exemple [9], ch. 1, § 1, n° 2.

Pour t voisin de t^0, la racine d'ordre α^0 de P voisine de z^0 est racine simple de $P^{(\alpha^0)}(z\,;a(t))$. Cette racine est donc la racine $Z(t)$ de $P^{(\alpha^0)}(z\,;a(t))$ que l'on obtient au moyen du théorème des fonctions implicites. $Z(t)$ est une fonction réelle, de classe C^k, telle que

$$Z(t^0) = z^0 \quad \text{et} \quad P(Z(t)\,;a(t)) = 0.$$

LEMME A 4. — *Soit* $P(z\,;a(t))$ *un polynome de degré formel n, dont les coefficients sont des fonctions réelles de classe* C^k *de t variant dans un ouvert* ω *de* $\mathbf{R}^m$. *Il existe un ouvert* $\omega_0 \subset \omega$, *dense dans* ω, *tel que pour tout point* $t^0 \in \omega_0$, *l'équation* $P(z\,;a(t)) = 0$ *ait le même nombre de racines finies avec les mêmes ordres de multiplicité pour t voisin de* t^0.

ω_0 sera l'ensemble des points t^0 tels qu'il existe un multientier $(j_1, ..., j_n)$ tel que

— $\Delta_{(j_1, \dots j_n)}(a(t)) = 0$ au voisinage de t^0.

— $\Delta_{(i_1, \dots i_n)}(a(t)) \neq 0$ au voisinage de t^0 pour tout multientier $(i_1, \dots i_n) > (j_1, \dots j_n)$ pour l'ordre lexicographique.

Au voisinage d'un tel point t^0, il est évident que $P(z\,;a(t))$ a le même nombre de racines finies avec les mêmes multiplicités. D'autre part ω_0 est ouvert. Montrons qu'il existe un point de ω_0 dans tout ouvert U.

Soit j_1 le plus grand entier tel que $\Delta_{(j_1, 0, \dots 0)}(a(t)) = 0$ dans tout U et soit U_1 le sous ouvert non vide où $\Delta_{(j_1+1, 0, \dots 0)}(a(t)) \neq 0$.

Soit j_2 le plus grand entier tel que $\Delta_{(j_1, j_2, 0, \dots 0)}(a(t)) = 0$ dans tout U_1 et soit $U_2 \subset U_1$ le sous ouvert non vide où $\Delta_{(j_1, j_2+1, 0, \dots 0)}(a(t)) \neq 0$.

On définit ainsi, de proche en proche, un multientier $(j_1, \dots j_n)$ et un ouvert U_n non vide contenu dans $U \cap \omega_0$.

LEMME A 5. — *Soit* $P(z_1, ..., z_r\,;\ a(t))$ *un polynome de degré formel n, à r indéterminées, dont les coefficients sont des fonctions réelles de classe* C^k *d'un paramètre t parcourant un ouvert* ω *de* $\mathbf{R}^m$. *Il existe un ouvert* ω_0 *dense dans* ω *tel que, pour tout* $t^0 \in \omega_0$ *et toute racine* $z_1^0, \dots z_r^0$ *réelle de* $P(z_1, \dots z_r\,;a(t^0))$, *il existe des fonctions* $Z_1(t), \dots Z_r(t)$ *réelles, de classe* C^k, *définies au voisinage de* t^0, *telles que*

$$P(Z_1(t), ..., Z_r(t)\,;a(t)) = 0$$

et

$$Z_1(t^0) = z_1^0, ..., Z_r(t^0) = z_r^0.$$

Pour $r = 1$, le théorème est une conséquence immédiate des lemmes A 3 et A 4. Démontrons-le par récurrence sur r en le supposant vrai pour tout polynome à $r - 1$ indéterminées.

Pour chaque système de valeurs réelles attribuées à $z_2, ..., z_r$, nous pouvons appliquer le lemme A 2 à P considéré comme polynome en z_1 et former les $\Delta_{(j_1, ..., j_n)}$ $(z_2, ..., z_r ; a(t))$, polynomes en $z_2, ..., z_r$ dont les coefficients sont des fonctions réelles de classe C^k de t. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un ouvert $\omega_{(j_1, ..., j_n)}$ dense dans ω, dans lequel on peut prolonger localement toute racine réelle de $\Delta_{(j_1, ..., j_n)}$ $(z_2, ..., z_r ; a(t))$. Nous appellerons ω_0 l'ouvert dense intersection des $\omega_{(j_1, ..., j_n)}$ lorsque $(j_1, ..., j_n)$ prend toutes les valeurs possibles (en nombre fini).

Soit alors $t^0 \in \omega_0$ et $z_1^0, ..., z_r^0$ une racine réelle de

$$P(z_1, ..., z_r ; a(t^0)) = 0.$$

Considérons le polynome en $z_1 : P(z_1, z_2^0, ..., z_r^0 ; a(t^0))$, soit j_1 le nombre de racines infinies et, pour $\alpha > 1$, j_α la somme du nombre de racines infinies et du nombre de racines finies d'ordre au moins α.

On a

$$\Delta_{(j_1, ..., j_n)} (z_2^0, ..., z_r^0 ; a(t^0)) = 0$$

et

$$\Delta_{(i_1, ..., i_n)} (z_2^0, ..., z_r^0 ; a(t^0)) \neq 0$$

pour tout multientier $(i_1, ..., i_n) > (j_1, ..., j_n)$ pour l'ordre lexicographique. t^0 appartenant à $\omega_0 \subset \omega_{(j_1, ..., j_n)}$, on peut trouver des fonctions $Z_2(t), ..., Z_r(t)$ réelles, de classe C^k, définies au voisinage de t^0, telles que

$$Z_2(t^0) = z_2^0, ..., Z_r(t^0) = z_r^0$$

et

$$\Delta_{(j_1, ..., j_n)} (Z_2(t), ... Z_r(t) ; a(t)) = 0$$

de plus

$$\Delta_{(i_1, ..., i_n)} (Z_2(t), ... Z_r(t) ; a(t)) \neq 0$$

au voisinage de t^0 pour $(i_1, ..., i_n) > (j_1, ..., j_n)$, par raison de continuité.

Le polynome en $z_1 : P(z_1, Z_2(t), ..., Z_r(t) ; a(t))$ a au voisinage de t^0 le même nombre de racines finies avec les mêmes multiplicités. Nous pouvons lui appliquer le lemme A 3 et trouver une fonction $Z_1(t)$, réelle, de classe C^k, telle que

$$P(Z_1(t), Z_2(t), ... Z_r(t) ; a(t)) = 0$$

$$Z_1(t^0) = z_1^0 .$$

LEMME A 6. — *Soit* $P_i(z_1, ..., z_r ; a(t)) \geqslant 0$, $i \in I$, *une famille finie d'inéquations où les* P_i *sont des polynomes en* $z_1, ..., z_r$, *de degrés formels* d_i, *dont les coefficients sont des fonctions réelles de classe* C^k ($k = 0, 1, ..., \infty, \omega$) *d'un paramètre t parcourant un ouvert* ω *de* $\mathbf{R}^m$. *Il existe un ouvert dense* $\omega_0 \subset \omega$ *tel que pour tout* $t^0 \in \omega_0$ *et toute famille de nombres réels* $z_1^0, ..., z_r^0$ *tels que*

$$\forall i \quad P_i(z_1^0, ..., z_r^0 ; a(t^0)) \geqslant 0$$

il existe des fonctions $Z_1(t), ... Z_r(t)$ *réelles, de classe* C^k, *définies au voisinage de* t^0, *telles que*

$$\forall i \quad P_i(Z_1(t), ..., Z_r(t) ; a(t)) \geqslant 0$$

et

$$Z_1(t^0) = z_1^0, ..., Z_r(t^0) = z_r^0.$$

Pour tout $J \subset I$ soit

$$Q_J = \sum_{i \in J} P_i^2.$$

Nous pouvons appliquer le lemme A 5 à Q_J, soit ω_J l'ouvert dense correspondant. Nous poserons :

$$\omega_0 = \bigcap_{J \subset I} \omega_J$$

Soit alors $t^0 \in \omega_0$ et $z_1^0, ..., z_r^0$ réels tels que

$$\forall i \quad P_i(z_1^0, ..., z_r^0 ; a(t^0)) \geqslant 0.$$

Posons :

$$J = \{ i \in I \mid P_i(z_1^0, ..., z_r^0 ; a(t^0)) = 0 \}.$$

On a $Q_J(z_1^0, ..., z_r^0 ; a(t^0)) = 0$. D'après le lemme A 5, on peut trouver des fonctions $Z_1(t), ..., Z_r(t)$, réelles, de classe C^k, définies au voisinage de t^0, telles que

$$Q_J(Z_1(t), ..., Z_r(t) ; a(t)) = 0$$

et

$$Z_1(t^0) = Z_1^0, ..., Z_r(t^0) = z_r^0.$$

On a donc, pour $i \in J$, $P_i(Z_1(t), ..., Z_r(t) ; a(t)) = 0$.

D'autre part, par continuité, pour $i \notin J$, on a :

$$P_i(Z_1(t), ... Z_r(t) ; a(t)) > 0$$

pour t assez voisin de t^0.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Bauer, Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, *Math. Annalen* 146 (1962), 1-59.

[2] H. Bauer, Harmonische Raüme und ihre Potentialtheorie, Lecture notes in Mathematics — Springer Verlag (1966).

[3] N. Boboc, C. Constantinescu, A. Cornea, Axiomatic theorie of harmonic functions. Non negative superharmonic functions, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble,* 15 1 (1965), 283, 312.

[4] M. Brelot, Axiomatique des fonctions harmoniques, les Presses de l'Université de Montréal (1966).

[5] S. Guber, On the potential theory of linear homogeneous parabolic partial differential equations of second order, Symposium on Probability Methods in Analysis, Lecture notes in Mathematics 31, Springer-Verlag (1967).

[6] R. M. Hervé, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier,* 12 (1962) 415.571.

[7] F. John, A note on the maximum principle for elliptic differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 44 (1938), 268.271.

[8] G. Mokobodzki, Espaces de Riesz complètement réticulés et ensembles équicontinus de fonctions harmoniques, Séminaire Choquet (Initiation à l'analyse), 5e année 1965/66, n° 6.

[9] G. Valiron, Cours d'analyse mathématique II — Equations fonctionnelles, applications, 2e édition 1950 — Masson et Cie.

[10] Van der Waerden, Modern Algebra, translated from the 2nd revised German edition, New York, Frederick Ungar (1950).

Manuscrit reçu le 15 février 1967.

Jean-Michel Bony,
Institut Henri-Poincaré
11, rue Pierre-Curie
Paris-5e