Annales de l'institut Fourier

Diederich Hinrichsen

Randintegrale und nukleare Funktionenraüme

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 1 (1967), p. 225-271
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_225_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 1 (1967), 225-271.

RANDINTEGRALE UND NUKLEARE FUNKTIONENRÄUME

par Diederich HINRICHSEN

Einleitung.

Ist G ein relativ-kompaktes Gebiet in der komplexen Ebene mit hinreichend glattem Rand und $\mathfrak{A}$ die Algebra der auf $\overline{G}$ stetigen, in G holomorphen Funktionen, so wird für alle $f \in \mathfrak{A}$ die Abhängigkeit ihrer Werte im Innern von ihren Randwerten durch die Cauchysche Integralformel gegeben. Es erhebt sich die Frage, ob analoge Integralformeln für beliebige relativ-kompakte Gebiete des $\mathbf{C}^n$ und für andere, im topologischen Rand enthaltene Ränder bestehen. Nachdem dieses Problem zunächst für umfassendere, aber noch immer recht spezielle Gebietstypen des $\mathbf{C}^n$ behandelt worden war (A. Weyl, 1935; S. Bergmann, 1935, 1955), ist es in jüngster Zeit für den Silov-Rand generell gelöst worden [22] [18]. Genauer handelt es sich um den folgenden Satz : Ist X ein beliebiges relativkompaktes Gebiet des $\mathbf{C}^n$ oder allgemeiner eines separablen komplexen Raumes [19] und bezeichnet $\mathfrak{A}$ die Algebra aller auf $\overline{X}$ stetigen, in X holomorphen Funktionen, so existiert eine Familie $(\mu_x)_{x \in X}$ komplexer Maße auf dem Silov-Rand $S = S_{\mathfrak{A}}(\overline{X})$ von $\overline{X}$ bezüglich $\mathfrak{A}$ derart, daß $h(x) = \mu_x(h)$ für alle $h \in \mathfrak{A}$, $x \in X$ gilt und für jede stetige komplexe Funktion f auf S die Abbildung $x \to \mu_x(f)$ holomorph ist. Ferner lassen sich die Maße μ_x analog wie im Fall der Cauchyschen Integralformel durch holomorphe Kerne bezüglich eines positiven Maßes auf S darstellen.

Nun enthält der Silov-Rand S noch « überflüssige » Punkte : Der *minimale Rand* X_e von $\mathfrak{A}$ [10], der mit dem *Choquet-Rand* von $\overline{X}$ bezüglich $\mathfrak{A}$ [20] übereinstimmt, ist im allgemeinen eine echte Teilmenge von S. (Für analytische Polyeder liegt eine explizite Bestimmung des minimalen Randes vor [26]). So stellt sich die Frage, ob die komplexen Maße des zitierten Satzes sogar auf X_e konzentriert werden können [6]. Diese Frage steht im Zusammenhang einer allgemeineren Entwicklung. Man hat in jüngster Zeit damit begonnen, Begriffe und Methoden aus der Choquetschen Theorie der Integraldarstellung in der Funktionen theorie, z. B. zur Untersuchung gewisser Algebren holomorpher Funktionen [28], anzuwenden. Freilich steht diese Entwicklung noch in ihren Anfängen.

Dagegen hat man die Bedeutung der Choquetschen Begriffsbildungen für die Potentialtheorie seit längerem erkannt [3]. Hier ergibt sich eine analoge Problemstellung. In den bekannten axiomatischen Potentialtheorien [4] [17] kann man, analog wie im klassischen Fall für die Lösungen der Laplace-Gleichung, nach der Methode von Perron-Wiener harmonische Maße μ_x konstruieren. Die Abbildung $x \to \mu_x$ liefert somit eine skalar harmonische Integraldarstellung des Vektorraums H aller auf dem Abschluß $\overline{X}$ eines relativ-kompakten Gebietes stetigen, in X harmonischen Funktionen durch Maße, die auf dem topologischen Rand X* von X konzentriert sind. Nun läßt sich im Fall der Wärmeleitungsgleichung zeigen, daß die harmonischen Maße nicht immer von der Menge der regulären Punkte getragen werden. Damit stellt sich das Problem, ob eine andere Familie (ν_x) reeller (eventuell nicht positiver) Darstellungsmaße für H existiert, die von der Menge aller regulären Punkte getragen werden, derart, daß die Abbildung $x \to \nu_x$ skalar harmonisch ist.

Die Analogie der Fragestellung läßt es sinnvoll erscheinen, nach einer Rahmentheorie zu suchen, die Probleme dieser und ähnlicher Art einheitlich zu behandeln gestattet. Diese Abhandlung setzt sich das Ziel, einer solchen Theorie vorzuarbeiten. Dabei geht sie von der folgenden allgemeinen Situation aus : Gegeben sei ein lokal-kompakter Raum X und eine Kompaktifizierung T von X, ferner ein Vektorraum H stetiger skalarwertiger Funktionen auf T und ein Vektorraum E skalarwertiger Funktionen auf X, der die Restriktionen aller $h \in H$ auf X enthält. Als Körper **K** der Skalare ist sowohl der Körper **R** der reellen wie der Körper **C** der komplexen Zahlen zugelassen. Angesichts dieser abstrakten Situation fragt es sich, unter welchen Bedingungen zu einem vorgegebenen Rand X_0 von T bezüglich H eine Abbildung $\mu : x \to \mu_x$ von X in $\mathfrak{M}(\overline{X}_0, \mathbf{K})$ mit folgenden Eigenschaften existiert :

1°. Jedes μ_x wird von X_0 getragen.

2°. $h(x) = \mu_x(h)$ für alle $h \in H$, $x \in X$.

3°. μ ist skalar E-förmig, d. h. $x \to \mu_x(f)$ $(x \in X)$
liegt in E für alle $f \in \mathcal{C}(\overline{X}_0, \mathbf{K})$.

Es ist klar, daß diese Formulierung die oben gestellten Probleme für harmonische und holomorphe Funktionen umgreift. Zugleich aber wird deutlich, daß die Frage nach der Konzentration der Darstellungsmaße auf den *Choquet*-Rand in ihr nicht mehr die Rolle eines Hauptproblems spielt. An die Stelle des Choquet-Randes können andere Ränder X_0 treten, für die ein gewisses Faktorisierungsproblem lösbar ist. Sei ψ der natürliche Homomorphismus vom Banach-Raum M aller auf X_0 konzentrierten Maße in den topologischen Dualraum H' des mit der uniformen Norm versehenen Raumes H. Dann ist die gestellte Aufgabe mit der folgenden gleichwertig : Es wird eine skalar E-förmige Abbildung μ gesucht, welche die Abbildung φ von X in H', die jedem $x \in X$ die Linearform $\varphi_x : h \to h(x)$ auf H zuordnet, bezüglich ψ faktorisiert.

Mit diesem Aufriß der Problemstellung ist die Gliederung der vorliegenden Arbeit schon in ihren Hauptzügen vorgezeichnet.

Zunächst (§ 1) sind einige Sätze über die Konzentration von Maßen bereitzustellen, welche für gewisse Ränder die Lösbarkeit des Faktorisierungsproblems garantieren. Wir bedienen uns dazu der Choquetschen Begriffsbildungen und Resultate [20] [15] und übertragen sie in leicht verallgemeinerter Form auf die uns vorliegende Situation, in der i.a. kein *punktetrennender* Funktionenraum gegeben ist.

Der zweite Paragraph referiert dann die funktionalanalytischen Hilfsmittel zur abstrakten Behandlung des genannten Faktorisierungsproblems. Hier hat L. Bungart in [18] durch die Beiziehung der Theorie der nuklearen Räume von A. Grothendieck [23] den entscheidenden Hinweis gegeben. Neben den Sätzen zum Faktorisierungsproblem, die fast alle direkt aus der vorhandenen Literatur übernommen werden konnten [1] [23], liefert § 2 noch eine Charakterisierung nuklearer Funktionenräume, die sowohl für die Konstruktion von Darstellungskernen in § 5 wie zur Anwendung der allgemeinen Theorie auf spezielle Funktionenräume im sechsten Paragraphen grundlegend ist.

Die Theorie der nuklearen Räume legt es nahe, den Begriff einer « E-morphen » Funktion zu definieren. Damit die gesuchte Faktorisation μ E-morph sein könne, muß die faktorisierte Abbildung von X in H' E-morph sein. Dies führt auf den Begriff der *Zulässigkeit* des Paares (H, E). Der dritte Paragraph liefert im Hinblick auf spätere Anwendung einige Zulässigkeitskriterien für solche Paare.

Mit den ersten drei Paragraphen sind die Vorbereitungen abgeschlossen. Der vierte Paragraph gibt dann verschiedene Bedingungen an, welche die Lösung des gestellten Problems ermöglichen. Dabei zeigt es sich, daß es nicht immer nötig ist, E als nuklear vorauszusetzen. Interessanterweise liefert im reellen Fall, wen T ein H-Simplex und die Einheitskugel von H (bezüglich der uniformen Norm) auf X gleichgradig stetig ist, die kanonische Abbildung $x \to \mu_x$, die jedem $x \in X$ das maximale Darstellungsmaß von x bezüglich H zuordnet, eine Abbildung der gesuchten Art.

In den wichtigsten Anwendungsfälien ist es möglich, die Maße μ_x durch Dichten $k_x(y)$ bezüglich eines positiven Maßes $d\sigma(y)$ so auszudrücken, daß die Funktionen $x \to k_x(y)$ für alle y in E liegen. Einer solchen Darstellung durch Kerne ist der fünfte Paragraph gewidmet.

Seine Ergebnisse werden dann im letzten Paragraphen auf die Theorie der holomorphen Funktionen mehrerer Veränderlicher und auf drei axiomatische Potentialtheorien (von H. Bauer, M. Brelot, H. S. Bear und A. M. Gleason) angewendet.

In der Terminologie und Bezeichnungsweise schließe ich mich weitgehend an N. Bourbaki, im zweiten Paragraphen außerdem an A. Grothendieck und A. Pietsch an.

Zum Schluß möchte ich meinem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr. H. Bauer danken für seine Unterstützung und die wertvollen Hinweise, mit denen er diese Arbeit gefördet hat.

INHALT

1. Konzentration Radonscher Maße auf H-Ränder.

Sei T ein kompakter (folglich auch Hausdorffscher) Raum und H ein linearer Unterraum des Vektorraums $\mathcal{C}$ (T, **K**) aller stetigen skalarwertigen Funktionen auf T (**K** = **R** oder **C**). Bezeichne ferner $\mathfrak{M}$ (T, **K**) den Vektorraum aller **K**-wertigen Radonmaße auf T und $\mathfrak{M}^+$ (T) den konvexen Kegel aller positiven $\mu \in \mathfrak{M}$ (T, **K**). Dann ist es die Aufgabe dieses Paragraphen, Maße $\mu \in \mathfrak{M}^+$ (T) derart auf gewisse « H-Ränder » von T zu konzentrieren, daß die Integralwerte $\int h\, d\mu$ ($h \in$ H) dieselben bleiben und die Integralwerte $\int |h| d\mu$ für $h \in$ H sich höchstens vergrößern. Die Choquetschen Methoden sind hier nicht *direkt* anwendbar, weil H nicht punktetrennend zu sein braucht. Wir haben es zunächst vermieden, diese Voraussetzung für H zu übernehmen, um einige Sätze späterhin auch auf jene Potentialtheorien anwenden zu können, für die ein entsprechendes Trennungsaxiom nicht zur Verfügung steht. Daher referieren wir die Choquetschen Ergebnisse zum Teil in leicht verallgemeinerter Form und mit kurzen Beweisen, wo ihre Uebertragung auf die vorliegende Situation zusätzlicher Ueberlegungen bedarf.

DEFINITION 1.1. — *Eine Teilmenge* X *von* T *heißt ein* Rand von T *bezüglich* H (*oder ein* H-Rand von T), *falls für alle* $h \in \mathcal{R}$H [1] *gilt:* $\sup_{z \in T} h(z) = \sup_{x \in X} h(x)$. X $\subset$ T *heißt ein strikter* H-*Rand von T, wenn alle* $h \in \mathcal{R}$ H *ihr Supremum auf* X *als Wert annehmen.*

Ist X ein strikter H-Rand von T, so nehmen alle Funktionen $h \in$ H das Maximum ihres Betrages auf X als Wert an. Sei nämlich $z \in$ T eine

(1) Für jede skalarwertige Funktion f bezeichne $\mathcal{R} f$, bzw. $\mathcal{J} f$ den Real-, bzw. Imaginärteil von f.

Maximalstelle von $|h|$, dann gilt für ein passendes Skalar $\alpha \in \mathbf{K}$ vom Betrag 1

$$\alpha h(z) = \sup_{t \in T} |h(t)| = \sup_{t \in T} \mathcal{R}(\alpha h(t)),$$

folglich existiert ein Punkt $x \in X$ mit

$$\alpha h(x) = \sup_{t \in T} |h(t)|,$$

also

$$|h(x)| = \sup_{t \in T} |h(t)|.$$

Zur Uebertragung der Choquetschen Sätze betrachten wir im folgenden eine « $\mathcal{R}$H-Einbettung » von T [20] und vollziehen damit den Uebergang von T auf den Quotientenraum von T nach der Aquivalenzrelation $z \sim z'$ ($z, z' \in T$), die durch « $h(z) = h(z')$ für alle $h \in H$ » definiert ist.

Sei $H_r = \mathcal{R}H$ — ebenso wie alle anderen Funktionenräume — bis auf Widerruf immer mit der Norm $h \to \|h\|$ der gleichmäßigen Konvergenz auf dem Grundraum versehen, und bezeichne H_r' den mit der schwachen Topologie ausgestatteten topologischen Dualraum von H_r. Dann ist die Abbildung $\varphi : z \to \varphi_z$ von T in H_r', die jedem $z \in T$ die Linearform $h \to h(z)$ auf H_r zuordnet, stetig. Sei $Y = \mathcal{C}(\varphi(T))$ die abgeschlossene konvexe Hülle von $\varphi(T)$ in H_r'. Y ist kompakt. H_r kann mit einem punktetrennenden linearen Unterraum H von $\mathcal{C}(Y, \mathbf{R})$ identifiziert werden, indem man jedem $h \in H_r$ die Restriktion $\tilde{h}$ der stetigen Linearform $h' \to \langle h, h' \rangle$ ($h' \in H_r'$) auf die kompakte, konvexe Menge Y zuordnet.

Bezeichne $\tilde{H} + \mathbf{R}$ (bzw. $H_r + \mathbf{R}$) den durch $\tilde{H}$ (bzw. H_r) und die konstanten reellen Funktionen auf Y (bzw. T) erzeugten linearen Unterraum von $\mathcal{C}(Y, \mathbf{R})$ (bzw. $\mathcal{C}(T, \mathbf{R})$). Dann besteht $\tilde{H} + \mathbf{R}$ genau aus den Restriktionen $\mathrm{Rest}_Y f$ aller affinen Formen f auf H'. Auf $\mathcal{M}^+(Y)$ ist in bekannter Weise [20] [29] durch den Kegel

$$\mathfrak{S}(\tilde{H}) = \{ \sup(g_1, ..., g_n) : g_1, ..., g_n \in \tilde{H} + \mathbf{R} \}$$

eine induktive Ordnung $\prec$ gegeben. Analog dazu definieren wir jetzt auf $\mathcal{M}^+(T)$ durch den konvexen Kegel

$$\mathfrak{S}(H) = \{ \sup(h_1, ..., h_n) : h_1, ..., h_n \in H_r + \mathbf{R} \}$$

eine gleichbezeichnete Quasiordnung $\prec$: Für $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(T)$ sei genau dann $\mu \prec \nu$, wenn $\mu(f) \leqslant \nu(f)$ für alle $f \in \mathfrak{S}(H)$ gilt. Da $\mathcal{M}^+(T)$ durch diese Relation nur *quasi*geordnet wird, ist folgende Definition nötig :

DEFINITION 1.2. — *Zwei Maße* $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(\mathrm{T})$ *heißen* äquivalent, *wenn* $\mu(f) = \nu(f)$ *für alle* $f \in \mathfrak{S}(\mathrm{H})$ *gilt.* $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathrm{T})$ *heißt* maximal, *wenn jedes* $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathrm{T})$ *mit* $\mu \prec \nu$ *zu* μ äquivalent ist.

Für alle $h \in \mathrm{H}_r$ gilt $h = \tilde{h} \circ \varphi$, also :

$$\mathfrak{S}(\mathrm{H}) = \{ \tilde{f} \circ \varphi : \tilde{f} \in \mathfrak{S}(\tilde{\mathrm{H}}) \}. \tag{1.1}$$

φ induziert in kanonischer Weise [15] eine lineare Abbildung $\mu \to \varphi(\mu)$ von $\mathcal{M}(\mathrm{T}, \mathbf{R})$ in $\mathcal{M}(\mathrm{Y}, \mathbf{R})$. Aus (1.1) ergeben sich dabei für $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(\mathrm{T})$ die folgenden Aussagen :

$$\mu \prec \nu \Leftrightarrow \varphi(\mu) \prec \varphi(\nu); \tag{1.2}$$

$$\mu \sim \nu \Leftrightarrow \varphi(\mu) = \varphi(\nu). \tag{1.3}$$

Insbesondere folgt also aus der Maximalität von $\varphi(\mu)$ die Maximalität von μ. Dieser Schluß läßt sich umkehren, wie der Beweisgang des nachstehenden Satzes lehrt, der bereits als Hilfsmittel zur Konzentration der Maße für alle späteren Anwendungen ausreicht :

SATZ 1.3. — *Sei* X *ein kompakter* H-*Rand von* T. *Dann existiert zu jedem Maß* $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathrm{T})$ *ein maximales Maß* ν, *getragen von* X, *mit* $\mu \prec \nu$.

Beweis. — $\varphi(\mathrm{X})$ ist ein kompakter $\tilde{\mathrm{H}}$-Rand von Y (also auch ein kompakter Rand von Y bezüglich $\tilde{\mathrm{H}} + \mathbf{R}$) : Sei

$$y = \sum_1^n \alpha_i \varphi_{z_i} \text{ mit } z_i \in \mathrm{T}, \sum_1^n \alpha_i = 1 \qquad \alpha_i > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ein beliebiges Element aus $c(\varphi(\mathrm{T}))$ und h eine beliebige Funktion aus H_r mit einer Maximalstelle $x \in \mathrm{X}$; dann folgt

$$\tilde{h}(y) = \sum_1^n \alpha_i h(z_i) \leqslant \sum_1^n \alpha_i h(x) = h(x) = \tilde{h}(\varphi(x));$$

da $c(\varphi(\mathrm{T}))$ in Y dicht liegt, ist also $\varphi(x)$ eine Maximalstelle von $\tilde{h} \in \tilde{\mathrm{H}}$. Nach einem bekannten Satz über konservative Abbildungen [2, S. 412] ist die Abbildung $\mu \to \varphi(\mu)$ von $\mathcal{M}^+(\mathrm{X})$ in $\mathcal{M}^+(\varphi(\mathrm{X}))$ surjektiv. Sei nun $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathrm{T})$, und sei ν' ein maximales Maß auf Y mit $\nu' \succ \varphi(\mu)$. Dann wird ν' von $\varphi(\mathrm{X})$ getragen [20]. Also existiert ein positives Maß ν auf X mit $\varphi(\nu) = \nu'$. Daraus folgt die Behauptung; denn nach (1.2) - (1.3) ist ν maximal, und es gilt $\mu \prec \nu$.

Die beiden folgenden Korollare haben für die Ausführungen der §§ 4 und 5 grundlegende Bedeutung:

KOROLLAR 1.4. — *Sei* X *ein kompakter* H-*Rand von* T. *Dann existiert zu jedem Maß* $\mu \in \mathfrak{M}^+(T)$ *ein maximales Maß* ν, *getragen von* X, *mit* $\mu(h) = \nu(h)$ *und* $\mu(|h|) \leqslant \nu(|h|)$ *für alle* $h \in H$.

Beweis. — Es genügt nachzuweisen, daß für $\mu, \nu \in \widetilde{\mathfrak{M}^+(T)}$ aus $\mu \prec \nu$ folgt $\mu(|h|) \leqslant \nu(|h|)$ für alle $h \in H$. Die Funktionen $h_1 = \widetilde{\Re h}$ und $h_2 = \widetilde{\Im h}$ $(h \in H)$ sind Restriktionen von stetigen reellen Linearformen auf H'. Mit Hilfe der Schwartzschen Ungleichung im $\mathbf{R}^2$ rechnet man daher leicht nach, daß $k = |h_1 + i h_2|$ für jede Funktion $h \in H$ eine konvexe Funktion auf Y mit $k \circ \varphi = |h|$ ist. Daraus ergibt sich nach (1.2) die Behauptung: Aus $\mu \prec \nu$ folgt $\varphi(\mu) \prec \varphi(\nu)$, also $\varphi(\mu)(k) \leqslant \varphi(\nu)(k)$ (nach Definition der Ordnung $\prec$ auf $\mathfrak{M}^+(Y)$ [29]) (2) und daher

$$\mu(|h|) \leqslant \nu(|h| \quad \text{für alle } h \in H.$$

KOROLLAR 1.5. — *Sei* X *ein kompakter* H-*Rand von* T. *Dann existiert zu jedem Maß* $\mu \in \mathfrak{M}(T, \mathbf{K})$ *ein Maß* ν *auf* X *mit* $\nu(h) = \mu(h)$ *für alle* $h \in H$ *derart, daß* $|\nu|$ *in* $\mathfrak{M}^+(T)$ *maximal ist.*

Beweis. — Jedes Maß $\mu \in \mathfrak{M}(T, \mathbf{K})$ kann in der Form

$$\mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4) \text{ mit } \mu_1, \ldots, \mu_4 \in \mathfrak{M}^+(T)$$

dargestellt werden. Seien zu den $\mu_1, \ldots, \mu_4$ maximale Maße $\nu_1, \ldots, \nu_4 \in \mathfrak{M}^+(X)$ gemäß Satz 1.3 gewählt. Dann gilt für

$$\nu = \nu_1 - \nu_2 + i(\nu_3 - \nu_4) \in \mathfrak{M}(X, \mathbf{K})$$
$$\nu(h) = \mu(h) \qquad (h \in H).$$

Aus

$$|\nu| \leqslant \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4$$

folgt

$$\varphi(|\nu|) \leqslant \varphi(\nu_1) + \varphi(\nu_2) + \varphi(\nu_3) + \varphi(\nu_4).$$

Da die maximalen Maße auf Y einen linkserblichen, konvexen Unterkegel

(2) Jede stetige konvexe Funktion k auf Y ist die obere Einhüllende der nach oben filtrierend geordneten Menge $\mathfrak{S}_k = \{f \in \mathfrak{S}(H) : f \leqslant k\}$.

von $\mathfrak{M}^+$ (Y) bilden [20] und die Maße $\varphi(\nu_i)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ maximal sind, ist $\varphi(\;\nu\;)$ in $\mathfrak{M}^+$ (Y) maximal. Daraus ergibt sich die Behauptung nach (1.2).

Wir fügen jetzt noch einige Sätze hinzu, welche die Bedeutung der soeben hergeleiteten Ergebnisse durch eine Kennzeichnung der maximalen Maße auf T erläutern. — Sei B_f für $f \in \mathfrak{S}(H)$ die « Bordüre »

$$\{ x \in T : f(x) = \hat{f}(x) \} \text{ mit } \hat{f} = \inf H_f \text{ und } H_f = \{ g \in -\mathfrak{S}(H) : g \geqslant f \}.$$

Dann lassen sich die maximalen Maße wie folgt charakterisieren :

Satz 1.6. — $\mu \in \mathfrak{M}^+(T)$ *ist genau dann maximal, wenn es von jeder Bordüre* B_f $(f \in \mathfrak{S}(H))$ *getragen wird.*

Den Beweis dieser Behauptung, der nach den Ergebnissen von [20] fast zwangsläufig verläuft, verlegen wir in den Anhang dieses Paragraphen.

Zur Vereinfachung setzen wir von nun an H als punktetrennend voraus, so daß die Choquetschen Resultate jetzt direkte Anwendung finden. Zunächst erinnern wir an die Definition des Choquet-Randes.

Definition 1.7. — $z \in T$ *heißt* H-extremal, *wenn die Einheitsmasse* ε_z *im Punkt* z *das einzige positive Maß der Gesamtmasse* 1 *mit* $\mu(h) = h(z)$ *für alle* $h \in H$ *ist. Die Menge* $\mathrm{Ch}_H(T)$ *aller* H-*extremalen Punkte wird Choquet-Rand von* T *bezüglich* H *genannt.*

$\mathrm{Ch}_H(T)$ ist ein (nicht notwendig kompakter) strikter H-Rand von T und liegt dicht im Silov-Rand von T bezüglich H [15]. E. Bishop [10] hat bewiesen, daß der Choquet-Rand den überhaupt kleinsten strikten H-Rand von T darstellt, falls H eine (punktetrennende) komplexe Banach-Algebra mit $1 \in H$ und T metrisierbar ist.

Die Aussage des Satzes 1.6 läßt sich jetzt (für punktetrennendes H) so umschreiben, daß genau jene Maße $\mu \in \mathfrak{M}^+(T)$ maximal sind, die in einem abgeschwächten Sinn « vom Choquet-Rand $\mathrm{Ch}_H(T)$ getragen » werden. Dieser Ausdruck wird durch die folgenden Ergebnisse von Choquet [20] präzisiert :

Satz 1.8. — *Der Choquet-Rand* $\mathrm{Ch}_H(T)$ *ist gleich dem Durchschnitt aller Bordüren* B_f $(f \in \mathfrak{S}(H))$. *Für metrisierbare Kompakta* T *ist* $\mathrm{Ch}_H(T)$ *eine* G_δ-*Menge und selbst eine Bordüre.*

SATZ 1.9. — *Die maximalen Maße* $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathrm{T})$ *werden von allen* $\mathfrak{R}$*-Borelschen Mengen getragen, die den Choquet-Rand* $\mathrm{Ch_H}(\mathrm{T})$ *enthalten. Insbesondere ist für metrisierbare Kompakta* T *ein Maß* $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathrm{T})$ *genau dann maximal, wenn es auf* $\mathrm{Ch_H}(\mathrm{T})$ *konzentriert ist.*

Die Frage, unter welchen Voraussetzungen die maximalen Maße $\mu > \varepsilon_z\ (z \in \mathrm{T})$ eindeutig bestimmt seien, führt auf den Begriff des H-Simplexes [6], [20].

DEFINITION 1.10. — *Sei* H *ein punktetrennender Vektorraum stetiger reeller Funktionen auf einem kompakten Raum* T. *Dann heißt* T *ein* H-Simplex, *wenn der (topologische) Dualraum* H′ *von* H *bezüglich seiner natürlichen Ordnung einen Vektorverband bildet.*

Bezeichnet φ wieder die zu Beginn des Paragraphen angegebene H-Einbettung von T in H′, so ist T genau dann ein H-Simplex, wenn die kompakte konvexe Hülle von $\varphi(\mathrm{T})$ in H′ ein Simplex im geometrischen Sinn, d. h. (topologisch) isomorph zu einer kompakten Basis eines konvexen *Verbandskegels* ist. In [20] findet man verschiedene Charakterisierungen solcher Simplizes. Aus ihnen ergibt insbesondere der folgende

SATZ 1.11. — *Sei* T *ein* H*-Simplex. Dann existiert zu jedem* $z \in \mathrm{T}$ *genau ein maximales Maß* $\mu_z \in \mathfrak{M}^+(\mathrm{T})$ *der Gesamtmasse* 1 *mit* $\mu_z(h) = h(z)$ *für alle* $h \in \mathrm{H}$.

Für jedes H-Simplex T ist damit eine natürliche Abbildung $z \to \mu_z$ von T in den Kegel der maximalen Maße auf T gegeben. Zur Untersuchung dieser Abbildung wird später das folgende abschließende Lemma benötigt, dessen Beweis auf einigen Ergebnissen Choquets aufbaut, die bisher nicht referiert wurden :

LEMMA 1.12. — *Sei* H *ein punktetrennender Vektorraum stetiger reeller Funktionen auf einem Kompaktum* T *mit* $1 \in \mathrm{H}$. *Sei* T *ein* H-*Simplex und* μ *ein maximales Maß auf* T. *Dann existiert zu jeder reellen meßbaren Funktion* f *auf* T, *die durch eine Konstante* $c > 0$ *dem Betrag nach beschränkt ist, und zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Funktion* $h \in \mathrm{H}$ *mit* $\|h\| \leqslant c$ *und* $\int |f - h|\, d\mu < \varepsilon$.

Beweis. — f ist μ-integrierbar, also existiert eine Funktion

$$g \in \mathcal{C}(\mathrm{T}, \mathbf{R})$$

mit $||g|| \leqslant c$ und $\int |f-g|\, d\mu < \varepsilon$. Da μ maximal ist, gilt nach [15, p. 264 f.] $\mu(g) = \sup \mu(f)$ $(f \in \mathfrak{S}(H), f \leqslant g)$. Also existiert eine Funktion $k \in \mathfrak{S}(H)$ mit $-c \leqslant k \leqslant g$ und $\mu(g-k) < \varepsilon$. Nach [20] ist die Menge $H_k = \{h \in H : h \geqslant k\}$ nach unten filtrierend geordnet, weil T ein H-Simplex ist. Folglich gilt $\mu(k) = \inf \mu(h)$ $(h \in H_k)$. Zusammengenommen, existiert also ein $h \in H_k$ mit $||h|| \leqslant c$ und $\int |f-h|\, d\mu < 3\varepsilon$.

Anhang. — Wir übernehmen die bisherigen Bezeichnungen. Sei T ein kompakter Raum und H ein (eventuell nicht punktetrennender) linearer Unterraum von $\mathcal{C}(T, \mathbf{K})$. Dann bietet sich die folgende Verallgemeinerung der Definition des Choquet-Randes an :

DEFINITION 1.13. — *$z \in T$ heißt* H-extremal, *falls jedes Maß $\mu \in \mathfrak{M}_1^+(T)$*(3) *mit $\mu(h) = h(z)$ für alle $h \in H$ von der Aequivalenzklasse $F_z = \{x \in T : x \sim z\}$ getragen wird. Die Menge aller* H*-extremalen Punkte, die in einer kompakten Teilmenge* X *von* T *liegen, wird mit $X_e(H)$ bezeichnet.*

Man weist leicht nach, daß $T_e(H)$ (oder $X_e(H)$ für einen kompakten H-Rand X von T) ein strikter H-Rand von T ist ; denn der Choquet-Rand $Ch_{\tilde{H}}(Y)$ von Y bezüglich $\tilde{H}$ ist ein strikter $\tilde{H}$-Rand von Y, und $T_e(H)$ ist gerade so definiert, daß gilt :

$$\varphi(T_e(H)) = Ch_{\tilde{H}}(Y) \quad \text{und} \quad \varphi^{-1}(Ch_{\tilde{H}}(Y)) = T_e(H). \tag{1.4}$$

Um die Menge der H-extremalen Punkte analog wie in Satz 1.8 zu charakterisieren, bezeichnen wir mit $\tilde{B}_{\tilde{f}}$ für alle $\tilde{f} \in \mathfrak{S}(\tilde{H})$ die zu $\tilde{f}$ gehörige Bordüre in Y bezüglich $\tilde{H}$. Da nach dem Maximum-Prinzip von H. Bauer für $\tilde{f} \in \mathfrak{S}(H)$ und $\tilde{g} \in -\mathfrak{S}(\tilde{H})$ genau dann $\tilde{g} \geqslant \tilde{f}$ gilt, wenn $\tilde{g} \circ \varphi \geqslant \tilde{f} \circ \varphi$ ist, folgt nach (1.1) für $f = \tilde{f} \circ \varphi \in \mathfrak{S}(H)$:

$$\varphi(B_f) = \tilde{B}_{\tilde{f}} \cap \varphi(T) \quad \text{und} \quad \varphi^{-1}(\tilde{B}_{\tilde{f}}) = B_f. \tag{1.5}$$

Daraus ergibt sich die Kennzeichnung :

$$X_e(H) = X \cap \bigcap B_f \; (f \in \mathfrak{S}(H)). \tag{1.6}$$

Satz 1.6 läßt sich jetzt leicht beweisen : $\mu \in \mathfrak{M}^+(T)$ wird genau dann von jeder Bordüre B_f $(f \in \mathfrak{S}(H))$ getragen, wenn $\varphi(\mu)$ auf die Mengen $\varphi(B_f) = \tilde{B}_{\tilde{f}} \cap \varphi(T)$ $(\tilde{f} \in \mathfrak{S}(\tilde{H}))$ konzentriert ist; mit der letzteren Bedingung ist nach [20] die Maximalität von $\varphi(\mu)$, also auch die Maximalität von μ äquivalent.

(3) $\mathfrak{M}_1^+(T)$ bezeichne die Menge aller $\mu \in \mathfrak{M}^+(T)$ der Gesamtmasse 1.

Einige Aussagen des Paragraphen können noch verschärft werden. Die Ränder $T_e(H)$ und $X_e(H)$ (für einen kompakten H-Rand X von T) enthalten i.a. überflüssige Punkte, da sie bezüglich der Aequivalenzrelation $x \sim y$ auf T (bzw. X) gesättigt sind. Es wird daher möglich sein, die maximalen Maße ν auf T bei gleichbleibenden Werten für die Funktionen aus H noch weiter auf eine topologisch hinreichend reguläre Auswahl von Repräsentanten dieser Aequivalenzklassen zu konzentrieren. Die folgende Definition präzisiert die topologischen Forderungen, die an eine solche Auswahlmenge zu stellen sind :

DEFINITION 1.14. — *Eine Teilmenge* X_0 *von* T *heißt ein* kompletter *Rand von* T *bezüglich* H, *falls sie jede Aequivalenzklasse* F_z $(z \in T_e)$ *trifft. Ist* X_0 *obendrein eine* K_σ*-Menge, so heißt* X_0 *ein* kompletter K_σ-Rand *von* T *bezüglich* H.

Offenbar ist $X_0 \subset T$ genau dann ein kompletter H-Rand von T, wenn $\varphi(X_0)$ den Choquet-Rand $Ch_{\widetilde{H}}(Y)$ enthält. Daraus folgt insbesondere, daß jeder komplette Rand von T bezüglich H ein strikter H-Rand von T ist.

Zur Verschärfung der bisherigen Ergebnisse bedienen wir uns des folgenden Lemmas :

LEMMA 1.15. — *Seien* X *und* Y *lokal-kompakte Räume und* φ *eine stetige Abbildung von* X *in* Y. *Sei ferner* X_0 *eine* K_σ*-Menge in* X. *Dann bildet die von* φ *induzierte lineare Abbildung* $\mu \to \varphi(\mu)$ *von* $\mathcal{M}_b(X, \mathbf{K})$ (4) *in* $\mathcal{M}_b(Y, \mathbf{K})$ *den Vektorraum* $M(X_0)$ *der von* X_0 *getragenen Maße* $\mu \in \mathcal{M}_b(X, \mathbf{K})$ *auf den Vektorraum* $M(\varphi(X_0))$ *der von der* K_σ-Menge $\varphi(X_0)$ *getragenen Maße* $\nu \in \mathcal{M}_b(Y, \mathbf{K})$ *ab. Ferner gilt für die Kegel* $M_+(X_0)$, *bzw.* $M_+(\varphi(X_0))$ *der positiven Maße aus* $M(X_0)$, *bzw.* $M(\varphi(X_0))$: $M_+(\varphi(X_0)) = \varphi(M_+(X_0))$.

Beweis : Seien die Vektorräume $\mathcal{M}_b(X, \mathbf{K})$ und $\mathcal{M}_b(Y, \mathbf{K})$ mit der üblichen Norm versehen. Dann ist die Abbildung $\mu \to \varphi(\mu)$ wegen $\|\varphi(\mu)\| \leqslant \|\mu\|$ stetig. Nach [16, p. 75] gilt $\varphi(M(X_0)) \subset M(\varphi(X_0))$. $M(X_0)$, bzw. $M(\varphi(X_0))$ sind abgeschlossen in $\mathcal{M}_b(X, \mathbf{K})$, bzw. $\mathcal{M}_b(Y, \mathbf{K})$, also Banach-Räume bezüglich der induzierten Normen. In

(4) Für jeden lokal-kompakten Raum X bezeichne $\mathcal{M}_b(X, \mathbf{K})$ den Vektorraum der *beschränkten* skalarwertigen Maße auf X.

$\mathcal{M}_b(X, \mathbf{K})$, bzw. $\mathcal{M}_b(Y, \mathbf{K})$, folgt nämlich aus $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ für alle Borelschen Mengen B in X, bzw. Y, die Relation $\lim_{n\to\infty} |\mu_n|(B) = |\mu|(B)$.

Offenbar ist nur die letzte Behauptung des Lemmas zu beweisen. Sei also ν ein beliebiges Maß aus $M_+(\varphi(X_0))$ und (K_n) eine feste isotone Folge von Kompakta in X mit $\bigcup_{n\subset \mathbf{N}} K_n = X_0$. Setzt man dann $\nu_n = g_n \cdot \nu$ mit $g_n = \chi_{\varphi(K_n)} - \chi_{\varphi(K_{n-1})}$ $(n \in \mathbf{N}, K_0 = \emptyset)$, so konvergiert die Reihe $\sum_1^\infty \nu_j$ im Banach-Raum $M(\varphi(X_0))$ absolut, und zwar gegen ν (Satz von B. Levi). Nach [2, S. 412] existiert zu jedem $\nu_j \in \mathcal{M}^+(\varphi(K_j))$ $(j \in \mathbf{N})$ ein positives Maß μ_j auf K_j mit $\varphi(\mu_j) = \nu_j$. Da

$$\|\mu_j\| = \mu_j(1) = \nu_j(1) = \|\nu_j\|$$

gilt, konvergiert die Reihe $\sum_1^\infty \mu_j$ in $M(X_0)$ absolut. Setzt man nun $\mu = \sum \mu_j$, so folgt aus der Stetigkeit von φ: $\varphi(\mu) = \sum \varphi(\mu_j) = \nu$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Die angekündigten Verschärfungen lassen sich jetzt ohne Schwierigkeiten herleiten:

SATZ. 1.16. — *Ist* X_0 *ein kompletter* K_σ*-Rand von* T *bezüglich* H, *so existiert zu jedem Maß* $\mu \in \mathcal{M}^+(T)$ *ein maximales Maß* ν *mit* $\mu \prec \nu$, *das von* X_0 *getragen wird.*

Beweis. — Das Quartett (T, Y, φ, X_0) erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas 1.15 mit T anstelle von X. Sei $\mu \in \mathcal{M}^+(T)$ und ν' ein maximales Maß auf Y mit $\nu' \succ \varphi(\mu)$. Dann wird ν' nach [20] von der K_σ-Menge $\varphi(X_0) \supset \mathrm{Ch}_{\tilde{H}}(Y)$ getragen. Folglich existiert nach Lemma 1.15 ein Maß $\nu \in \mathcal{M}^+(T)$, das auf X_0 konzentriert ist, mit $\nu' = \varphi(\nu)$. Da ν nach (1.2) maximal ist und $\mu \prec \nu$ gilt, folgt die Behauptung.

Aus dem vorangehenden Satz ergeben sich sofort entsprechende Verschärfungen der Korollare 1.4 und 1.5: Ist X_0 ein kompletter K_σ-Rand von T bezüglich H, so können die Maße ν, deren Existenz in diesen Korollaren behauptet wird, so gewählt werden, daß sie auf X_0 konzentriert sind.

2. Faktorisierungsprobleme und nukleare Räume.

Die Theorie der topologischen Vektorräume stellt verschiedene Hilfsmittel zur Behandlung von Faktorisierungsproblemen zur Verfügung. Als effektivstes Hilfsmittel wird sich für unsere Zwecke die von A. Grothendieck [23] entwickelte Theorie der nuklearen Räume erweisen, aus der die benötigten Resultate hier ohne Beweis referiert werden sollen. — In manchen Anwendungsfällen führt jedoch schon die folgende Spezialisierung eines Satzes von R. G. BARTLE & L. M. GRAVES [1] zum Ziel :

SATZ 2.1. — *Sei* T *ein parakompakter Raum, und seien* M, N *zwei beliebige Banach-Räume. Ist dann* p *eine surjektive stetige, lineare Abbildung von* M *auf* N, *so existiert zu jeder stetigen Funktion* g *von* T *in* N *eine stetige Funktion* f *von* T *in* M *mit* $g = p \circ f$.

In den meisten Fällen reicht die Stetigkeit von f zur Konstruktion der gewünschten Integraldarstellung allerdings nicht aus. Man benötigt Faktorisierungen, die « E-morph » sind. Dieser Begriff wird analog zum Begriff der « skalaren Holomorphie » gebildet.

DEFINITION 2.2. — *Sei* E *ein Vektorraum skalarwertiger Funktionen auf einer Menge* T *und* F *ein lokalkonvexer Raum über* **K**. *Dann heißt eine Abbildung* u *von* T *in* F E-morph, *wenn für jedes* $y' \in$ F′ *die Komposition* $y' \circ u$ *in* E *liegt. Der Vektorraum aller* E-*morphen Abbildungen von* T *in* F *wird mit* E (T, F) *bezeichnet.*

Jede E-morphe Abbildung u definiert eine lineare Abbildung $F_u : y' \rightarrow y' \circ u$ von F′ in E. Sei nun F vollständig, F'_τ der mit der Mackeyschen Topologie τ (F′, F) versehene Dualraum von F und E ein vollständiger reflexiver $\mathcal{LF}$-Raum skalarwertiger Funktionen auf T, dessen Topologie feiner ist als die Topologie der punktweisen Konvergenz. Dann läßt sich zeigen [23, II, p. 78], daß die Abbildung $u \rightarrow F_u$ einen Isomorphismus von E (T, F) auf den Vektorraum $\mathcal{L}$ (F'_τ, E) aller stetigen linearen Abbildungen von F'_τ in E liefert. Wir betrachten auf $\mathcal{L}$ (F'_τ, E) die Topologie ε der gleichmäßigen Konvergenz auf den gleichgradig stetigen Teilmengen von F'_τ und transportieren diese Topologie vermittels der angegebenen Isomorphie auf den Vektorraum E (T, F). Ferner versehen wir das Tensorprodukt E $\otimes$ F mit der projektiven Topologie π, d. h. mit der feinsten lokalkonvexen Topologie, bezüglich der die kanonische bilineare Abbildung $E \times F$ in $E \otimes F$ noch stetig ist, und bezeichnen den so definierten lokalkonvexen Raum mit $E \otimes_\pi F$. Sei ψ die Abbildung von $E \otimes_\pi F$ in $E(T, F)$, die jedem Element $\sum x_i \otimes y_i$ von $E \otimes_\pi F$ die Funktion $t \to \sum x_i(t) \cdot y_i$ aus $E(T, F)$ zuordnet. Dann entspricht ψ kanonisch der bilinearen Abbildung, die das Paar $(x, y) \in E \times F$ auf die Funktion $t \to x(t) \cdot y$ aus $E(T, F)$ abbildet. Man rechnet leicht nach, daß diese Abbildung stetig ist bezüglich der angegebenen Topologien; folglich ist auch ψ stetig. Da $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\tau, E)$, d. i. der mit der Topologie ε versehene Vektorraum $\mathcal{L}(F'_\tau, E)$, unter den gegebenen Voraussetzungen vollständig ist [23, I, p. 9], läßt ψ sich in eindeutiger Weise stetig auf die Vervollständigung $E \hat{\otimes} F$ von $E \otimes_\pi F$ fortsetzen. A. Grothendieck [23, II, p. 80] hat gezeigt, daß die Fortsetzung, welche wieder mit ψ bezeichnet werde, einen (topologischen) Isomorphismus von $E \hat{\otimes} F$ auf $E(T, F)$ liefert, *falls E nuklear ist.* Dieses Ergebnis, welches wir seiner Bedeutung wegen noch einmal als Theorem formulieren, erhellt zusammen mit der ihm nachfolgenden Bemerkung, weshalb die Theorie der nuklearen Räume zur Konstruktion E-morpher Faktorisierungen geeignet ist :

THEOREM 2.3. — *Sei* E *ein vollständiger nuklearer* $\mathcal{L}\mathfrak{F}$*-Raum von skalarwertigen Funktionen auf einer Menge* T, *dessen Topologie feiner ist als die der einfachen Konvergenz. Dann ist für jeden vollständigen lokalkonvexen Raum* F *die Vervollständigung* $E \hat{\otimes} F$ *des projektiven topologischen Tensorprodukts von* E *und* F *kanonisch* (d. h. vermittels ψ) *isomorph zum Vektorraum* $E(T, F)$.

Bemerkung 2.4. — Sei E wie in Theorem 2.3 beschaffen, und bezeichne 1_E die identische Abbildung auf E. Seien ferner F_1, F_2 vollständige lokalkonvexe Räume und p eine stetige lineare Abbildung von F_1 in F_2. Dann ordnet die Abbildung $E(T, F_1) \to E(T, F_2)$, die nach dem Theorem durch die Funktion $1_E \hat{\otimes} p$ (5) auf $E(T, F_1)$ induziert wird, jeder Abbildung $u \in E(T, F_1)$ die Komposition $p \circ u$ zu.

Als Korollar des Theorems 2.3 ergibt sich eine Charakterisierung der E-morphen Funktionen, die hier zur Abrundung des Begriffs noch angefügt sei.

(5) $1_E \hat{\otimes} p$ bezeichne die stetige Fortsetzung des Tensorprodukts der Abbildungen 1_E und p auf die Vervollständigung $E \hat{\otimes} F$.

KOROLLAR 2.5. — *Sei* E *ein vollständiger nuklearer* $\mathfrak{LF}$*-Raum von skalarwertigen Funktionen auf einer Menge* T, *versehen mit einer* $\mathfrak{S}$*-Topologie* (vgl. [12]), *die feiner ist als die Topologie der punktweisen Konvergenz. Dann sind für jede Abbildung u von* T *in einen vollständigen lokalkonvexen Raum* F *die beiden folgenden Aussagen äquivalent :*

(i) *u ist* E-morph.

(ii) *u kann auf den Mengen* $S \in \mathfrak{S}$ *gleichmäßig durch Funktionen der Form* $t \to \sum x_i(t) \cdot y_i$ *mit* $x_i \in E$, $y_i \in F$ $(i = 1, \ldots, n)$ *approximiert werden* (6).

Beweis. — Sei E (T, F) mit der durch das gegebene Mengensystem $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(T)$ definierten $\mathfrak{S}$-Topologie $\mathfrak{T}$ versehen [12]. Dann zeigen wir zunächst, daß diese Topologie mit der von $\mathfrak{L}_\varepsilon(F'_\tau, E)$ auf E (T, F) transportierten Topologie ε identisch ist. — Ein Fundamentalsystem von ε-Nullumgebungen wird durch die Mengen der Form

$$W(V', S) = \{ u \in E(T, F) : \sup_{t \in S} |y' \circ u(t)| \leqslant 1 \text{ für alle } y' \in V' \}$$

gebildet, wobei V′ ein beliebiges Fundamentalsystem $\mathfrak{W}'$ gleichgradig stetiger Teilmengen von F′ und S die Mengenfamilie $\mathfrak{S}$ durchläuft. Für $\mathfrak{W}'$ kann man etwa das System aller Polaren $V^0 \subset F'$ wählen, wobei V eine beliebige kreisförmige, abgeschlossene, konvexe Nullumgebung in F ist [14, p. 64]. Dann gilt $W(V^0, S) = \{u \in E(T, F) : u(t) \in V \text{ für alle } t \in S\}$ für alle diese Mengen, die damit zugleich ein Fundamentalsystem von $\mathfrak{T}$-Nullumgebungen bilden. Es ist also $\mathfrak{T} = \varepsilon$.

Die Behauptung folgt jetzt aus den Bemerkungen, die dem Theorem 2.3 vorangestellt wurden : Der Isomorphismus $\psi : E \hat{\otimes} F \to E(T, F)$ ist hiernach stetig bezüglich der Topologie $\mathfrak{T} = \varepsilon$; ferner besteht $\psi(E \otimes F)$ genau aus allen Funktionen der Form $t \to \sum_1^n x_i(t) \cdot y_i$ auf T mit $x_i \in E$, $y_i \in F$. Nach dem Theorem folgt also

$$E(T, F) = \psi(E \hat{\otimes} F) \subset \overline{\psi(E \otimes F)}.$$

Damit ist der Schluß von (i) auf (ii) bewiesen. Die Umkehrung ergibt sich sofort daraus, daß E (T, F) bezüglich der zu $\mathfrak{T}$ gehörigen uniformen Struktur vollständig ist.

Um Faktorisierungsprobleme mit Hilfe von Theorem 2.3 lösen zu können, muß die Abbildung $1_E \hat{\otimes} p$ der Bemerkung 2.4 surjektiv sein.

(6) Für den Spezialfall harmonischer Funktionen mit $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_k$ vgl. [31].

Zur Verifikation dieser Voraussetzung verwenden wir später das folgende Korollar eines Satzes aus der Theorie der topologischen Gruppen [11, p. 60]:

LEMMA 2.6. — *Seien* $u_i : E_i \to F_i$ *surjektive (topologische) Homomorphismen der metrisierbaren topologischen Vektorräume* E_i *auf die topologischen Vektorräume* F_i $(i = 1,2)$. *Dann ist der Homomorphismus* $u_1 \hat{\otimes} u_2 : E_1 \hat{\otimes} E_2 \to F_1 \hat{\otimes} F_2$ *surjektiv.*

Damit sind alle nötigen Hilfssätze zur Lösung der anfallenden Faktorisierungsprobleme referiert. Wir beweisen jetzt noch eine für die Anwendung wichtige Folgerung aus der Definition der nuklearen Räume [23, II, p. 34], die später dazu dient, E-morphe Integraldarstellungen durch « Kerne » zu repräsentieren. Formuliert für den Spezialfall, daß E ein Frechet-Raum von harmonischen Funktionen im Sinne von [17] ist, findet sie sich schon in einer Note von B. Walsh & P. A. Loeb [31].

LEMMA 2.7. — *Sei* E *ein nuklearer Frechet-Raum* (7) *und* F *ein normierter Raum. Dann existieren zu jeder stetigen linearen Abbildung* u *von* F *in* E *eine summierbare Folge* (λ_i) *von Skalaren, eine Nullfolge* (x_i) *in* E *und eine Nullfolge* (y'_i) *in* F', *so daß*

$$u(y) = \sum \lambda_i \langle y, y'_i \rangle x_i \text{ in } E \text{ für alle } y \in F \text{ gilt.}$$

Beweis. — Nach [23, II, p. 40] ist der starke Dualraum E'_b von E nuklear. Die Transponierte t_u von u bildet E'_b stetig und linear in den Banach-Raum $F' = F'_b$ ab. Folglich ist ${}^t u$ nuklear [23, II, p. 35], d. h. es existieren eine summierbar Folge (λ_i) von Skalaren, eine Nullfolge (x_i) in $(E_b)_b = E$ und eine Nullfolge (y'_i) in F' derart, daß die Funktionen v_n : $x' \to \sum_1^n \lambda_i \langle x_i, x' \rangle y'_i$ $(x' \in E'_b)$ mit $n \to \infty$ gleichmäßig auf den beschränkten Teilmengen von E_b gegen ${}^t u$ streben. Für ein beliebiges $y \in F$ erhält man daher $\langle x', u(y) \rangle = ({}^t u(x'))(y) = \sum_1^\infty \lambda_i \langle x_i, x' \rangle \langle y, y'_i \rangle$, wobei die Reihe gleichmäßig konvergiert, wenn x' eine beliebige beschränkte Teilmenge von E'_b durchläuft. Die Reihe $\sum \lambda_i \langle y, y_i \rangle \cdot x_i$ konvergiert also in $(E'_b)'_b = E$ gegen $u(y)$.

(7) Oder auch ein vollständiger, dualmetrischer, nuklearer Raum (vgl. [30, S. 70]).

Wir beenden den Paragraphen mit einem Nuklearitätskriterium, das eine allgemeinere Kennzeichnung von A. Pietsch [30, S. 64] verschärft und für Anwendungen auf Funktionenräume der Analysis praktikabler macht. Wegen seiner Bedeutung für die weitere Darstellung, vor allem in § 5, sei dieses Kriterium als Theorem formuliert :

THEOREM 2.8. — *Sei* X *ein lokal-kompakter Raum und* E *ein Vektorraum stetiger skalarwertiger Funktionen auf* X. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

(i) E *ist nuklear bezüglich der Topologie* $\mathfrak{T}_k$ *der kompakten Konvergenz auf* X.

(ii) *Zu jedem Punkt* $x \in X$ *existieren eine kompakte Umgebung* K_x *von* x *und ein positives Radonmaß* μ_x *auf* X *mit kompaktem Träger derart, daß* $\sup_{y \in K_x} |f(y)| \leqslant \int |f| \, d\mu_x$ *für alle* $f \in E$ *gilt.*

(iii) *Zu jedem Kompaktum* $K \subset X$ *existiert ein positives Radonmaß* μ *auf* X *mit kompaktem Träger derart, daß* $\sup_{y \in K} |f(y)| \leqslant \int |f| \, d\mu$ *für alle* $f \in E$ *gilt.*

Beweis. — (ii) und (iii) sind offenbar äquivalent.

Aus (i) folgt (iii). — Zum Kompaktum K existieren nach dem Kriterium von Pietsch eine Zahl $\varepsilon > 0$, eine kompakte Teilmenge K′ von X und ein positives Maß ν auf der schwach kompakten Polaren $V^0 \subset E'$ von

$$V = \{ f \in E : \sup_{y \in K'} |f(y)| \leqslant \varepsilon \}$$

mit

$$\sup_{y \in K} |f(y)| \leqslant \int |\langle f, u \rangle| \, d\nu(u)$$

für alle $f \in E$. Sei φ die Abbildung von K′ in V^0, die jedem $x \in K'$ die stetige Linearform $\varphi_x : f \to \varepsilon^{-1} f(x)$ auf E zuordnet. φ ist stetig. Sei $\tilde{E}$ der durch E kanonisch definierte Vektorraum stetiger Funktionen

$$\tilde{f} : u \to \langle f, u \rangle \text{ auf } V^0 \ (f \in E).$$

Dann folgt $\varepsilon \cdot \tilde{f} \circ \varphi = f$. Jede Funktion $\tilde{f}$ $(f \in E)$ nimmt das Maximum ihres Betrages auf $\varphi(K')$ an; denn es gilt

$$\sup_{u \in \varphi(K')} |\tilde{f}(u)| = \sup_{y \in K'} |\varepsilon^{-1} f(y)| \geqslant |\langle f, v \rangle| = |\tilde{f}(v)|$$

für alle $\nu \in V^0$.

$$K_0 = \bigcup_{\alpha \in K, |\alpha| = 1} \alpha \cdot \varphi(K') \subset V^0$$

ist also ein kompakter Rand von V^0 bezüglich $\tilde{E}$. Daher existiert nach Korollar 1.4 ein positives Maß ν_0 auf V^0, getragen von K_0, mit

$$\int |\tilde{f}| \, d\nu \leqslant \int |\tilde{f}| \, d\nu_0 \text{ für alle } \tilde{f} \in \tilde{E}.$$

Sei $u \sim v$ die folgende Aequivalenz relation auf K_0 : Es existiert ein Skalar α vom Betrag 1 mit $u = \alpha \cdot \nu$. Bezeichnet dann ψ die kanonische Abbildung von K_0 auf den Quotientenraum von K_0 nach der Aequivalenzrelation $\sim$, so existiert wegen $\psi(K_0) = \psi(\varphi(K'))$ nach [2] ein Maß $\nu' \in \mathfrak{M}^+(V^\circ)$, konzentriert auf $\varphi(K')$, mit $\psi(\nu') = \psi(\nu_0)$, also

$$\int |\tilde{f}| \, d\nu_0 = \int |\tilde{f}| \, d\nu'.$$

Sei μ ein positives Maß auf K' mit $\varepsilon \cdot \varphi(\mu) = \nu'$ [2]. Dann folgt $\int |f| \, d\mu = \int |\tilde{f}| \, d\nu' = \int |\tilde{f}| \, d\nu_0 \geqslant \int |\tilde{f}| \, d\nu$ für alle $f \in E$ und also die Behauptung.

Umgekehrt folgt (i) sofort aus (iii). Sei nämlich K ein Kompaktum in X und μ ein zugehöriges positives Maß mit kompaktem Träger K' gemäß (iii). Dann gilt für die Nullumgebung

$$V = \{ f \in E : \sup_{y \in K'} |f(y)| \leqslant \varepsilon \} \text{ in E } \varphi(K') \subset V^\circ.$$

$\varphi(\mu)$ liegt also in $\mathfrak{M}^+(V^\circ)$, und es ist $\sup_{y \in K} |f(y)| \leqslant \int |\langle f, \nu \rangle| \, d\varphi(\mu)(\nu)$.

Da die Mengen $U = \{ f \in E : \sup_{y \in K} |f(y)| \leqslant \varepsilon \}$ ($\varepsilon > 0$, K kompakt in X) ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen in E bilden, folgt hieraus die Nuklearität von E nach dem Kriterium von Pietsch [30, s. 64].

3. Zulässige Paare und E-morphe H-Darstellungen.

Wir wenden uns jetzt der in der Einleitung umrissenen Problemstellung zu und betrachten zunächst Paare (H, E) von Funktionenräumen, wobei H ein (beliebig) normierter Raum skalarwertiger Funktionen auf einer Menge T und E ein Wektorraum skalarwertiger Funktionen auf einer Teilmenge [8] X von T ist. Mit H′ bezeichnen wir den Banach-Raum aller stetigen Linearformen auf H, versehen mit der dualen Norm, und setzen voraus, daß die Linearformen $\varphi_x : h \to h(x)$ auf H für alle $x \in$ X in H′ liegen. — Gesucht werden gewisse E-morphe Faktorisierungen der Abbildung $\varphi : x \to \varphi_x$. Damit solche Faktorisierungen existieren können, muß φ selbst eine E-morphe Funktion sein.

DEFINITION 3.1. — *Das Paar* (H, E) *heißt* zulässig, *wenn die Abbildung* $\varphi : x \to \varphi_x$ *von* X *in* H′ E-*morph ist.*

Für zulässige Paare (H, E) gilt also insbesondere Rest $_X$H $\subset$ E.

Neben der E-morphie der Abbildung φ ist auch ihre Stetigkeit wichtig, vor allem, wenn man den Faktorisierungssatz von Bartle & Graves auf sie anwenden will. Wir interessieren uns daher im folgenden besonders für solche Zulässigkeitskriterien (Satz 3.4 ff.), die zugleich die Stetigkeit von φ garantieren. φ ist offenbar genau dann stetig, wenn die Einheitskugel H_1 von H gleichgradig stetig ist auf X.

SATZ 3.2. — *Ist* (H, E) *zulässig, so ist für jeden linearen Unterraum* $\widetilde{H}$ *von* H, *versehen mit der induzierten Norm, das Paar* ($\widetilde{H}$, E) *zulässig.*

Beweis. — Sei ψ der kanonische Homomorphismus von H′ auf $\widetilde{H}'$ [14, p. 116]. Dann ist für jede stetige Linearform $\tilde{y}''$ auf $\widetilde{H}'$

$$y'' = \tilde{y}'' \circ \psi$$

eine stetige Linearform auf H′, also liegt die Abbildung

$$x \to \langle \varphi_x, y'' \circ \psi \rangle = \langle \psi(\varphi_x), y'' \rangle$$

in E. Da $\psi \circ \varphi$ mit der Abbildung $\tilde{\varphi}$ von X in $\widetilde{H}'$ identisch ist, welche jedem Punkt $x \in$ X die Bewertung $\tilde{\varphi}_x : h \to h(x)$ auf $\widetilde{H}$ zuordnet, folgt die Behauptung.

SATZ 3.3. — *Sei der Funktionenraum* H *mit zwei Normen* N_1, N_2 *ausgestattet derart, daß* N_1 *schwächer ist als* N_2, *und bezeichne* H_1 (*bzw.* H_2) *den normierten Raum* (H, N_1) (*bzw.* H, N_2)). *Sind dann die Linearformen* $\varphi_x : h \to h(x)$ ($x \in$ X) *auf* H *stetig bezüglich* N_1, *so folgt aus der Zulässigkeit des Paares* (H_1, E) *die Zulässigkeit des Paares* (H_2, E).

[8] Allgemeiner könnte man beliebige Mengen X zulassen, für die eine Abbildung $x \to \varphi_x$ von X in H′ gegeben ist. Analog zur Definition 3.1 würde man dann das Tripel (H, E, φ) *zulässig* nennen, falls φ : X $\to$ H′ E-morph ist. Theorem 3.8 (s.u.) behielte auch in dieser allgemeineren Situation seine Gültigkeit.

Beweis. — $(H_2)'$ umfaßt $(H_1)'$ algebraisch. Die Norm von $(H_2)'$ induziert eine gröbere Topologie auf $(H_1)'$ als die duale Norm zu N_1. Jede stetige Linearform $y'' \in (H_2)''$ definiert also eine stetige Linearform auf $(H_1)'$. Daraus folgt der Satz.

Um die Zulässigkeit eines Paares (H, E) nachzuweisen, genügt es nach dem folgenden Lemma zu zeigen, daß E den punktweisen Abschluß H_1^p von $\{ \mathrm{Rest}_X\, h : h \in H, \; \| h \| \leqslant 1 \}$ in $\mathbf{K}^X$ enthält.

LEMMA 3.4. — *Sei* $H_1 = \{ h \in H : \| h \| \leqslant 1 \}$ *die Einheitskugel von* H, $H_1'' = \{ h'' \in H'' : \| h'' \| \leqslant 1 \}$ *die Einheitskugel des starken Bidualraums* H'' *von* H. *Dann liegt für jede Linearform* $y'' \in H_1''$ *die Funktion* $x \to y''(\varphi_x)$ $(x \in X)$ *im punktweisen Abschluß* H_1^p *von* $\mathrm{Rest}_X\, H_1$ *in* $\mathbf{K}^X$.

Beweis. — H_1 liegt schwach dicht in H_1 . Zu $y'' \in H_1$, $\varepsilon > 0$ und endlich vielen $x_i \in X$ $(i = 1, \ldots, n)$ existiert also ein $h \in H_1$ mit

$$| h(x_i) - y''(\varphi_{x_i}) | = | \tilde{h}(\varphi_{x_i}) - y''(\varphi_{x_i}) | \leqslant \varepsilon,$$

wobei $\tilde{h}$ die durch h auf H' definierte Linearform bezeichnet. Daraus folgt die Behauptung.

Im Hinblick auf spätere Anwendungen setzen wir nun voraus, daß X*lokal-kompakt* und E ein *lokalkonvexer Hausdorff-Raum* sei. $\mathfrak{T}$ bezeichne die Topologie von E und $\mathfrak{T}_k$ (bzw. $\mathfrak{T}_p$) die Topologie der kompakten (bzw. punktweisen) Konvergenz auf X.

SATZ 3.5. — *Sei* E *quasivollständig und* $\mathfrak{T}$ *feiner als* $\mathfrak{T}_p$, *aber gröber als* $\mathfrak{T}_k$. *Sei ferner die Einheitskugel* H_1 *von* H *in* X *gleichgradig stetig. Dann ist das Paar* (H, E) *zulässig, und die Abbildung* $\varphi : x \to \varphi_x$ *von* X *in* H' *ist stetig.*

Beweis. — Für jedes $x \in X$ ist $H_1(x) = \{ h(x) : h \in H_1 \}$ in $\mathbf{K}$ relativ-kompakt. Nach dem Satz von Ascoli ist daher auf dem punktweisen Abschluß H_1^p von $\mathrm{Rest}_X\, H_1$ in $\mathbf{K}^X$ $\mathfrak{T}_p$ mit $\mathfrak{T}_k$ identisch, und es gilt $H_1^p \subset \mathcal{C}(X, \mathbf{K})$. Da E quasivollständig, H_1 in E beschränkt und $\mathfrak{T}$ gröber als $\mathfrak{T}_k$ ist, folgt $H_1^p \subset E$. Mit Hilfe von Lemma 3.4 ergibt sich hieraus die Behauptung.

SATZ 3.6. — *Sei* $\mathfrak{T}$ *feiner als* $\mathfrak{T}_k$, *und sei ferner* $\mathrm{Rest}_X\, H_1$ *in* E *relativ-kompakt. Dann ist das Paar* (H, E) *zulässig, und die Abbildung* φ *ist stetig.*

Beweis. — Auf dem Abschluß $\overline{H}_1$ von $\mathrm{Rest}_X\, H_1$ im lokalkonvexen Raum E stimmen die Topologien $\mathfrak{T}_p$ und $\mathfrak{T}$ überein, da $\mathfrak{T}$ feiner als $\mathfrak{T}_p$ und $\overline{H}_1$ bezüglich $\mathfrak{T}$ kompakt ist. $\overline{H}_1 \subset E$ ist also der Abschluß von H_1 in $\mathbf{K}^X$ bezüglich $\mathfrak{T}_p$ und außerdem gleichgradig stetig. Daraus folgt die Behauptung.

KOROLLAR 3.7. — *Sei* E *ein (quasivollständiger) Montelscher Raum mit einer feinerer Topologie als* $\mathfrak{T}_k$. *Sei ferner die Einheitskugel von* H, *nach Restriktion auf* X, *in* E *beschränkt. Dann ist das Paar* (H, E) *zulässig, und die Abbildung* φ *ist stetig.*

Beweis. — In jedem Montelschen Raum sind die beschränkten Teilmengen relativ-kompakt.

Nach diesen Zulässigkeitskriterien soll nun abschließend ein allgemeines Darstellungstheorem für zulässige Paare bewiesen werden, das allen Darstellungssätzen der folgenden Paragraphen zugrunde liegt. Zu diesem Zweck verallgemeinern wir den Begriff der Integraldarstellung, indem wir anstatt darstellender Maße, die in natürlicher Weise Linearformen auf dem Vektorraum H definieren, einen beliebigen Banach-Raum M ins Auge fassen, dessen Elemente auf H vermittels eines Homomorphismus $p : M \to H'$ als Linearformen operieren.

Sei also wieder die Ausgangssituation des Paragraphen (in der X eine beliebige Teilmenge von T ist) vorausgesetzt und zusätzlich ein Banach-Raum M sowie ein surjektiver topologischer Homomorphismus p von M auf H′ gegeben. Dann bezeichnen wir mit $\langle \mu, h \rangle$ $(\mu \in M,\ h \in H)$ den Wert der Linearform $p(\mu)$ an der Stelle h und geben die

DEFINITION 3.8. — *Eine Abbildung* $x \to \mu_x$ *von* X *in* M *heißt eine* H-Darstellung *von* X *bezüglich* p, *wenn für alle* $x \in X$ *gilt*

$$\langle \mu_x, h \rangle = h(x) \qquad (h \in H).$$

THEOREM 3.9. — *Sei* E *mit einer Topologie versehen, welche feiner ist als die der einfachen Konvergenz auf* X, *derart, daß* E *ein nuklearer Frechet-Raum und das Paar* (H, E) *zulässig ist. Sei ferner* M *ein Banach-Raum und p ein surjektiver topologischer Homomorphismus von* M *auf den Banach-Raum* H′. *Dann existiert eine* E-*morphe* H-*Darstellung von* X *bezüglich p.*

Beweis. — Nach Lemma 2.6 ist der Homomorphismus

$$1_E \hat{\otimes} p : E \hat{\otimes} M \to E \hat{\otimes} H' \text{ surjektiv.}$$

Die Abbildung $\varphi : x \to \varphi_x$ ist nach Voraussetzung E-morph. Also existiert nach Theorem 2.3 und Bemerkung 2.4 eine E-morphe Abbildung $x \to \mu_x$ von X in M mit $h(x) = \varphi_x(h) = p(\mu_x)(h)$ für alle $h \in H$, $x \in X$.

Wir schließen mit einer Bemerkung, die ein Kriterium für die Existenz *stetiger* H-Darstellungen von X bezüglich p angibt.

Bemerkung 3.10. — Sei $X \subset T$ ein im Unendlichen abzählbarer lokal-kompakter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

(i) Es existiert eine stetige H-Darstellung von X bezüglich p.

(ii) Die Einheitskugel H_1 von H ist gleichgradig stetig auf X.

Beweis. — (ii) ist äquivalent mit der Stetigkeit der Abbildung $\varphi : x \to \varphi_x$ von X in H′. Wegen $\varphi = p \circ \mu$ gilt also (i) $\Rightarrow$ (ii). Umgekehrt ergibt sich (ii) $\Rightarrow$ (i) direkt aus dem Satz von Bartle & Graves 2.1, da X parakompakt ist.

4. E-morphe Integraldarstellungen.

In diesem Paragraphen soll das Rahmentheorem 3.9 zunächst auf seinen natürlichen Modellfall, den Banach-Raum M der beschränkten Radonmaße auf einem lokal-kompakten Raum, angewandt werden. Wir interessieren uns dabei für E-morphe H-Darstellungen durch beschränkte Maße, die auf gewissen Rändern von H konzentriert sind. Als Nebenproblem stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen die gesuchten Maße *positiv* gewählt werden können und wann sie in solchem Fall eindeutig bestimmt sind. Wie zu erwarten, gewinnt hier der Begriff des H-Simplexes besondere Bedeutung (Satz 4.4).

Sei T ein beliebiger Hausdorff-Raum und H ein Teilraum des Vektorraums $\mathcal{C}_b(\mathrm{T}, \mathbf{K})$ aller stetigen, beschränkten, skalarwertigen Funktionen auf T. Wir versehen in diesem Paragraphen alle Vektorräume $\mathcal{C}_b(\mathrm{S}, \mathbf{K})$ $(\mathrm{S} \subset \mathrm{T})$ und ihre linearen Unterräume, insbesondere also $\mathrm{H} \subset \mathcal{C}_b(\mathrm{T}, \mathbf{K})$, mit der Norm $f \to \|f\|$ der gleichmäßigen Konvergenz auf dem Grundraum S. Für lokalkompakte Teilmengen $\mathrm{B} \subset \mathrm{T}$ ist dann der normierte Raum $\mathcal{M}_b(\mathrm{B}, \mathbf{K})$ aller beschränkten skalarwertigen Radonmaße auf B der Dualraum des normierten Raums $\mathcal{C}_b(\mathrm{B}, \mathbf{K})$. Sofern H einem Teilraum von $\mathcal{C}_b(\mathrm{B}, \mathbf{K})$ normisomorph ist, gibt es also einen natürlichen Homomorphismus von $\mathcal{M}_b(\mathrm{B}, \mathbf{K})$ (oder gewissen abgeschlossenen linearen Unterräumen von $\mathcal{M}_b(\mathrm{B}, \mathbf{K})$) auf H′ derart, daß die Voraussetzungen für eine Anwendung des Theorems 3.9 erfüllt sind. — Damit ist das Schema für den Beweisgang der beiden folgenden Sätze angedeutet.

Satz 4.1. — *Sei* T *ein Hausdorff-Raum und* H *ein linearer Unterraum von* $\mathcal{C}_b(\mathrm{T}, \mathbf{K})$. *Sei ferner* X *eine Teilmenge von* T *und* E *ein nuklearer Frechet-Raum skalarwertiger Funktionen auf* X, *dessen Topologie feiner ist als die Topologie* $\mathcal{T}_p$ *der einfachen Konvergenz, derart, daß* (H, E) *ein zulässiges Paar bildet. Dann existiert zu jedem lokal-kompakten Rand* B *von* T *bezüglich* H *eine* E*-morphe* H*-Darstellung* $x \to \mu_x$ *von* X *durch beschränkte Maße* μ_x *auf* B. *Ist* g *eine beliebige universell meßbare, beschränkte, skalarwertige Funktion auf* B, *so liegt die Abbildung* $x \to \mu_x(g)$ *für jede solche* H*-Darstellung in* E.

Beweis. — Die Abbildung $h \to \mathrm{Rest}_{\mathrm{B}}\, h$ ist ein normtreuer Isomorphismus von H auf $\mathrm{Rest}_{\mathrm{B}}\, \mathrm{H}$. Daher ist der starke Dualraum H′ von H normisomorph zum Quotientenraum $\mathcal{M}_b(\mathrm{B}, \mathbf{K})/\mathrm{H}_0$ mit

$$\mathrm{H}_0 = \{ \mu \in \mathcal{M}_b(\mathrm{B}, \mathbf{K}) : \mu(\mathrm{Rest}_{\mathrm{B}}\, h) = 0 \ \text{ für alle } \ h \in \mathrm{H} \} :$$

Die Abbildung p, die jedem $\mu \in \mathcal{M}_b(\mathrm{B}, \mathbf{K})$ die Linearform $h \to \mu(\mathrm{Rest}_{\mathrm{B}}\, h)$ auf H zuordnet, ist ein surjektiver topologischer Homomorphismus von $\mathcal{M}_b(\mathrm{B}, \mathbf{K})$ auf den Banach-Raum H′. Setzt man nun $\mathrm{M} = \mathcal{M}_b(\mathrm{B}, \mathbf{K})$, so folgt die Existenz der E-morphen H-Darstellung $x \to \mu_x$ aus Theorem 3.9. Da ferner jede universell meßbare, beschränkte, skalarwertige Funktion g auf B eine stetige Linearform $\mu \to \mu(g)$ auf M definiert, ergibt sich der Rest der Behauptung aus der E-morphie der Abbildung $x \to \mu_x$.

SATZ 4.2. — *Sei* T *ein kompakter Raum und* H *ein linearer Unterraum von* $\mathcal{C}$ (T, **K**). *Sei ferner* X *eine Teilmenge von* T *und* E *ein nuklearer Frechet-Raum skalarwertiger Funktionen auf* X, *dessen Topologie feiner ist als* $\mathfrak{T}_p$, *derart, daß das Paar* (H, E) *zulässig ist. Dann existiert zu jedem kompakten* H-Rand (9) B *von* T *eine* E-*morphe* H-*Darstellung* $x \to \mu_x$ *von* X *durch Maße* $\mu_x \in \mathfrak{M}$ (T, **K**), *die von jeder Bordüre* B_f $(f \in \mathfrak{S}$ (H)) *und von* B *getragen werden.*

Beweis. — Sei M der Vektorraum aller Maße $\mu \in \mathfrak{M}$ (T, **K**), die von jeder Bordüre B_f $(f \in \mathfrak{S}$ (H)) und von B getragen werden. Dann ist M abgeschlossen in $\mathfrak{M}$ (T, **K**), weil aus $\lim \mu_n = \mu$ im normierten Raum $\mathfrak{M}$ (T, **K**) $\lim |\mu_n|(S) = |\mu|(S)$ für alle Borelschen Teilmengen S von T folgt. M ist daher bezüglich der induzierten Norm ein Banach-Raum. Sei ι die natürliche Injektion von M in $\mathfrak{M}$ (T, **K**) und ψ der kanonische Homomorphismus von $\mathfrak{M}$ (T, **K**) auf H'. Dann ist $p = \psi \circ \iota$ eine stetige lineare Abbildung von M in H'. Nach Korollar 1.5 ist p surjektiv, folglich nach dem Satz von Banach [13, p. 34] ein topologischer Homomorphismus der Banach-Raum. Damit sind die Voraussetzungen des Theorems 3.9 gegeben, und es folgt die Behauptung.

KOROLLAR 4.3. — *Sei* T *ein metrisierbarer kompakter Raum und* H *ein punktetrennender linearer Unterraum von* $\mathcal{C}$ (T, **K**). *Sei ferner* X *eine Teilmenge von* T *und* E *ein nuklearer Frechet-Raum skalarwertiger Funktionen auf* X, *dessen Topologie feiner ist als* $\mathfrak{T}_p$, *derart, daß das Paar* (H, E) *zulässig ist. Dann existiert eine Familie* $(\mu_x)_{x \in X}$ *von Maßen auf* T, *die vom Choquet-Rand* Ch_H (T) *getragen werden, so daß gilt :*

(i) $\mu_x(h) = h(x)$ *für alle* $h \in H$, $x \in X$.

(ii) $x \to \mu_x(g)$ *liegt in* E *für alle universell meßbaren, beschränkten, skalarwertigen Funktionen g auf* $\overline{\mathrm{Ch}_H (T)}$.

Wenn T ein H-Simplex ist, läßt sich die Behauptung des vorangehenden Korollars in wesentlich verschärfter Form unter schwächeren Voraussetzungen beweisen. Dann liefert nämlich die natürliche Abbildung von X in $\mathfrak{M}$ (T, **K**), die jedem $x \in X$ das entsprechende maximale Darstellungsmaß zuordnet, eine Familie *positiver* Maße mit den Eigenschaften (i) und

(9) Dasselbe gilt nach Satz 1.16 sogar für jeden kompletten K_σ-Rand von T bezüglich H.

(ii). Beim Beweis dieser Aussage kann man auf alle Hilfsmittel aus der Theorie der nuklearen Räume verzichten.

SATZ 4.4. — *Sei* T *ein kompakter Raum,* X *eine lokal-kompakte Teilmenge von* T *und* H *ein punktetrennender linearer Unterraum von* $\mathcal{C}(\mathrm{T}, \mathbf{R})$ *mit* $1 = \mathrm{H}$ *derart, daß* T *ein* H-*Simplex und die Einheitskugel* H_1 *von* H *(bezüglich der uniformen Norm) gleichgradig stetig ist auf* X. *Dann ist die Abbildung* $x \to \mu_x$ *von* X *in* $\mathfrak{M}(\mathrm{T}, \mathbf{R})$, *die jedem* $x \in \mathrm{X}$ *das zugehörige maximale Darstellungsmaß zuordnet, stetig bezüglich der Normtopologie auf* $\mathfrak{M}(\mathrm{T}, \mathbf{R})$ *und* E-*morph, wenn* E *den Abschluß des Vektorraums* $\mathrm{Rest}_{\mathrm{X}}\, \mathrm{H}$ *in* $\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathbf{R})$, *versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, bezeichnet.* $x \to \mu_x$ *ist die einzige* H-*Darstellung von* X *durch reelle Maße auf* T, *die von jeder Bordüre* B_f $(f \in \mathfrak{S}(\mathrm{H}))$ *getragen werden.*

Beweis. — Nach Lemma 1.12 gilt im Banach-Raum $\mathfrak{M}(\mathrm{T}, \mathbf{R}) = \mathrm{M}$

$$\| \mu_x - \mu_y \| = \sup_{f \in \mathcal{C}(\mathrm{T}, \mathbf{R}),\, \|f\| \leqslant 1} | \mu_x(f) - \mu_y(f) | = \sup_{h \in \mathrm{H}_1} | \mu_x(h) - \mu_y(h) |$$
$$= \sup_{h \in \mathrm{H}_1} | h(x) - h(y) |$$

für alle $x, y \in \mathrm{X}$, denn $\mu_x + \mu_y$ ist maximal, und daher existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder stetigen Funktion f auf T mit $\|f\| \leqslant 1$ eine Funktion $h \in \mathrm{H}_1$ mit

$$\int | f - h | \, d(\mu_x + \mu_y) \leqslant \varepsilon,$$

also mit

$$\left| \int f \, d\mu_x - \int h \, d\mu_x \right| \leqslant \varepsilon$$

und

$$\left| \int f \, d\mu_y - \int h \, d\mu_y \right| \leqslant \varepsilon.$$

Die Stetigkeit der Abbildung $x \to \mu_x$ (bezüglich der Normtopologie) folgt also aus der gleichgradigen Stetigkeit von H_1 auf X. Die E-morphie dieser Abbildung ergibt sich aus derselben Voraussetzung. Da die Einheitskugel von $\mathcal{C}(\mathrm{T}, \mathbf{R})$ dicht liegt in der Einheitskugel von $\mathrm{M}' = \mathcal{C}(\mathrm{T}, \mathbf{R})''$ gehört für jede stetige Linearform y'' auf M mit $\| y'' \| \leqslant 1$ die Abbildung $x \to y''(\mu_x)$ zum punktweisen Abschluß der Menge aller Funktionen $h_f : x \to \mu_x(f)$ mit $f \in \mathcal{C}(\mathrm{T}, \mathbf{R})$, $\| f \| \leqslant 1$ (vgl. den Beweis von Lemma 3.3). Andrerseits existiert zu $\varepsilon > 0$ und zu endlich vielen $x_i \in \mathrm{X}$ $(i = 1, \ldots, n)$ nach Lemma 1.12, angewendet auf das maximale Maß $\mu_{x_1} + \cdots + \mu_{x_n}$, eine Funktion $h \in \mathrm{H}$ mit $\| h \| \leqslant 1$ und

$$\int | f - h | \, d\mu_{x_i} \leqslant \varepsilon,$$

also

$$| \mu_{x_i} (f) - h (x_i) | \leqslant \varepsilon \qquad (i = 1, ..., n).$$

Für jede Funktion $f \in \mathcal{C}(T, \mathbf{R})$ mit $||f|| \leqslant 1$ liegt also h_f im punktweisen Abschluß H_1^p von $\mathrm{Rest}_X H_1$ in $\mathbf{R}^X$. Weil nun H_1 auf X gleichgradig stetig ist, stimmen auf H_1^p die Topologien der kompakten und der punktweisen Konvergenz überein. Daraus ergibt sich $H_1^p \subset E$ und somit der erste Teil der Behauptung.

Angenommen, $x \to \nu_x$ sei eine zweite H-Darstellung von X durch reelle Maße auf T, die von jeder Bordüre B_f $(f \in \mathfrak{S}(H))$ getragen werden. Dann annullieren die reellen Maße $\sigma_x = \mu_x - \nu_x$ alle Funktionen aus H. Ihre Positiv- und Negativteile, σ_x^+ und σ_x^-, die von jeder Bordüre B_f $(f \in \mathfrak{S}(H))$ getragen werden, nehmen also auf H dieselben Werte an. Daraus folgt $\sigma_x^+ = \sigma_x^-$ $(x \in X)$ nach Satz 1.11, weil $1 \in H$, und also mit $\mu_x = \nu_x$ der Rest der Behauptung.

5. E-morphe Dichten und Kerne.

Unter zusätzlichen Annahmen versuchen wir nun, die Darstellungsmaße μ_x des vorangehenden Paragraphen durch Dichten bezüglich eines positiven (beschränkten) Maßes θ auf dem Grundraum T zu ersetzen. Explizit geht es dabei zunächst um die Herleitung der folgenden Aussage $B^p(\theta, H, E)$ (10) $(1 < p \leqslant \infty)$:

Es existiert eine E*-morphe Abbildung* $x \to k_x$ *von* X *in den Vektorraum* $L^p(\theta) = L^p_{\mathbf{K}}(\theta)$ *aller Klassen p-fach* θ*-integrierbarer skalarwertiger Funktionen auf* T *mit* $h(x) = \int h\, k_x\, d\theta$ *für alle* $h \in H$, $x \in X$.

Aus ihr ergibt sich dann insbesondere, daß sämtliche skalarwertigen Funktionen

$$x \to \int f\, k_x\, d\theta \quad \text{mit } f \in L^q(\theta)$$

(q konjugiert zu p, d. h. $1 = p^{-1} + q^{-1}$) in E liegen. Für $p < \infty$ ist diese Folgerung äquivalent zur E-morphie der Abbildung $x \to k_x$.

Um dieses Problem zu behandeln, ist es nötig, auf H eine andere Norm als die der gleichmäßigen Konvergenz zu betrachten. Wir beweisen

(10) Diese Bezeichnung soll an Bungart's Theorem B^p für holomorphe Funktionen erinnern [19].

zunächst — parallel zu Satz 4.1 — die Gültigkeit der Aussage $B^p(\theta, H, E)$ unter möglichst schwachen Voraussetzungen über T und H und gehen danach zu spezielleren Situationen über.

SATZ 5.1 ([11]). — *Sei* T *ein topologischer Raum,* X *eine Teilmenge von* T, θ *ein positives Maß auf einer lokal-kompakten Teilmenge* B *von* T *und* H *ein Vektorraum von q-fach* θ*-integrierbaren skalarwertigen Funktionen auf* T $(1 \leqslant q < \infty)$ *mit der Eigenschaft, daß*

$$N_q(h, \theta) = (\int \mathrm{Rest}_B |h|^q \, d\theta)^{1/q} \; (h \in H)$$

eine Norm N_q *auf* H *definiert, bezüglich der jede Linearform* $\varphi_x : h \to h(x)$ $(x \in X)$ *auf* H *stetig ist. Sei ferner* E *ein nuklearer Frechet-Raum skalarwertiger Funktionen auf* X, *dessen Topologie feiner ist als die Topologie der punktweisen Konvergenz, derart, daß das Paar* (H, E) *bezüglich der* N_q*-Norm auf* H *ein zulässiges Paar ist. Dann gilt die Aussage* $B^p(\theta, H, E)$ *für den zu q konjugierten Exponenten p.*

Beweis. — H, versehen mit der Norm N_q, kann als linearer Unterraum von $L^q(\theta)$ aufgefaßt werden, da für alle $h \in H$ aus $N_q(h) = 0$ nach Voraussetzung $h = 0$ folgt. Sei p der kanonische Homomorphismus von $M = L^p(\theta)$ auf den Banach-Raum H′, identifiziert mit einem Quotientenraum von $L^p = (L^q)'$. Dann sind die Voraussetzungen des Theorems 3.9 erfüllt, und es folgt die Behauptung.

Enthält E nur stetige Funktionen, so ist eine notwendige Vorbedingung für die Gültigkeit von $B^p(\theta, H, E)$ das Bestehen der folgenden " Apriori-Abschätzung " $A^q(\theta, H)$ (q konjugiert zu p) ([12]) : *Zu jedem Kompaktum* $K \subset X$ *existiert eine reelle Konstante* $\alpha_K > 0$ *mit*

$$\sup_{y \in K} |h(y)| \leqslant \alpha_K \, N_q(h, \theta)$$

für alle $h \in H$.

Nach $B^p(\theta, H, E)$ gilt nämlich für jede kompakte Teilmenge K von X und alle

([11]) Satz 3.3 zeigt, daß die Voraussetzungen von Satz 5.1 stärker sind als die Voraussetzungen von Satz 4.1 : Aus der Zulässigkeit des Paars (H, E) bezüglich der N_q-Norm auf H folgt die Zulässigkeit desselben Paars bezüglich der uniformen Norm auf H, weil diese stärker ist als N_q.

([12]) Diese Bedingung entspricht der Bungartschen Abschätzung (3.2) für holomorphe Funktionen in [19].

$h \in \mathrm{H}$:

$$\sup_{y \in \mathrm{K}} |h(y)| = \sup_{y \in \mathrm{K}} \left| \int h(w) \cdot k_y(w)\, d\theta(w) \right| \leqslant \alpha_{\mathrm{K}} \cdot \mathrm{N}_q(h, \theta)$$

mit $\alpha_{\mathrm{K}} = \sup\limits_{y \in \mathrm{K}} \mathrm{N}_p(k_y, \theta)$. Dabei ist $\alpha_{\mathrm{K}} < \infty$, wie sich aus dem folgenden Lemma ergibt :

LEMMA 5.2. — *Sei* E *ein Vektorraum stetiger skalarwertiger Funktionen auf dem topologischen Raum* X, *und sei* ψ *eine* E-*morphe Abbildung von* X *in einen lokalkonvexen Raum* M. *Dann ist das* ψ-*Bild jeder kompakten Menge* $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$ *beschränkt in* M.

Beweis. — Für jede Linearform $y' \in \mathrm{M}'$ ist die Menge $y' \circ \psi(\mathrm{K})$ kompakt, also ist $\psi(\mathrm{K})$ schwach beschränkt in M. Damit folgt die Behauptung nach dem Satz von Mackey [14, p. 70].

$\mathrm{A}^q(\theta, \mathrm{H})$ formuliert offenbar die Aussage, daß die Einheitskugel von H bezüglich der Norm $\mathrm{N}_q(,. \theta)$, restringiert auf X, in $\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathbf{K})$ beschränkt ist bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_k$ der kompakten Konvergenz auf X.

Das Ziel der weiteren Betrachtungen ist es nun, Bedingungen anzugeben, unter denen umgekehrt aus der Voraussetzung von $\mathrm{A}^q(\theta, \mathrm{H})$ auf das Bestehen von $\mathrm{B}^p(\theta, \mathrm{H}, \mathrm{E})$ geschlossen werden kann. Wir gehen dazu von den folgenden spezielleren Voraussetzungen aus, die allen weiteren Ausführungen dieses Paragraphen zugrunde liegen : T sei ein *kompakter* Raum, X eine *dichte lokal-kompakte* Teilmenge von T und H ein linearer Unterraum von $\mathcal{C}(\mathrm{T}, \mathbf{K})$; der Vektorraum E *stetiger* skalarwertiger Funktionen auf X enthalte $\mathrm{H}_{\mathrm{X}} = \mathrm{Rest}_{\mathrm{X}}\, \mathrm{H}$ und sei immer mit der *Topologie* $\mathfrak{T}_k$ *der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X* versehen ; ferner sei E *vollständig* bezüglich der durch $\mathfrak{T}_k$ definierten uniformen Struktur.

Die einschneidendste Voraussetzung gegenüber dem vorangehenden Paragraphen : die Fixierung der Topologie von E, haben wir getroffen, um über das Kriterium 2.8 für die Nuklearität von E verfügen zu können.

Als erstes beweisen wir unter den neuen Bedingungen als Korollar zu Satz 5.1, daß für *nukleare* Räume E die oben erwähnte Umkehrung gültig ist :

KOROLLAR 5.3. — *Sei* X *abzählbar im Unendlichen und* E *nuklear. Dann gilt für jedes positive Maß* θ *auf* T *mit der Eigenschaft* $A^q(\theta, H)$ $(1 \leqslant q < \infty)$ *die Aussage* $B^p(\theta, H, E)$ *(p konjugiert zu q).*

Beweis. — Da X abzählbar im Unendlichen ist, ist E ein nuklearer Frechet-Raum. Aus $A^q(\theta, H)$ folgt, daß die Linearformen $\varphi_x : h \to h(x)$ $(x \in X)$ auf H stetig sind bezüglich der Norm [13] $N_q(., \theta)$. Nach derselben Voraussetzung ist die Einheitskugel von H bezüglich dieser Norm, restringiert auf X, in E beschränkt. Damit ergibt sich die Zulässigkeit des Paares (H, E) aus Korollar 3.7 und also die Behauptung nach Satz 5.1.

Es fragt sich nun, für welche Funktionenräume H positive Maße θ mit der Eigenschaft $A^q(\theta, H)$ existieren. Hierzu betrachten wir die folgende lokale Form von $A^q(\theta, H)$ $(1 \leqslant q < \infty)$:

$A^q(H_X)$. — *Zu jedem Punkt* $x \in X$ *existieren eine kompakte Umgebung* K_x *von* x *in* X *und ein echt positives Radonmaß* θ_x *auf* X *mit kompaktem Träger, so daß* $\sup_{y \in K_x} |h(y)| \leqslant N_q(h, \theta_x)$ *für alle* $h \in H$ *gilt.*

Nach Theorem 2.8 ist die Restriktion $H_X \subset E$ von H auf X genau dann nuklear, wenn $A^1(H_X)$ gilt. Da aus $A^q(H_X)$ offenbar $A^{q'}(H_X)$ für alle reellen $q' \geqslant q$ folgt, erfüllen die Vektorräume H mit nuklearer Restriktion auf X sämtliche Axiome $A^q(H_X)$ $(1 \leqslant q < \infty)$. Man kann also diese Axiome als verschiedengradige Abschwächungen der Nukleäritäseigenschaft deuten.

Ist X im Unendlichen abzählbar, so folgt aus $A^q(H_X)$, wie angestrebt, die Existenz von Maßen θ mit der Eigenschaft $A^q(\theta, H)$. Dies lehrt das folgende Lemma, dessen Herleitung so zwangsläufig ist, daß sie hier unterbleiben kann :

LEMMA 5.4. — *Unter Voraussetzung von* $A^q(H_X)$ *gilt :*

(i) *Zu jedem Kompaktum* $K \subset X$ *existiert ein positives Maß* θ_K *der Gesamtmasse* 1 *mit kompaktem Träger in* X *und eine reelle Zahl* $\alpha_K > 0$ *mit* $\sup_{y \in K} |h(y)| \leqslant \alpha_K N_q(h, \theta_K)$ *für alle* $h \in H$.

(ii) *Sei* X *abzählbar im Unendlichen und* (K_n) *eine aufsteigende Folge kompakter Mengen in* X *mit* $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ $(n \in N)$ *und* $\cup K_n = X$. *Sei ferner*

[13] Aus $N_q(h, \theta) = 0$ folgt $h(x) = 0$ auf X, also $h = 0$, da X in T dicht liegt.

(γ_n) *eine summierbare Folge reeller Zahlen* > 0. *Dann gilt für das beschränkte, positive Maß* $\theta = \sum_1^\infty \gamma_n \theta_{K_n}$ *auf* X *die Aussage* $A^q(\theta, H)$.

Die Aussage (i) liefert die folgende Kennzeichnung der Funktionenräume G auf X, die dem Axiom $A^q(G)$ $(1 \leqslant q < \infty)$ genügen:

SATZ 5.5. — *Ein Vektorraum* G *stetiger skalarwertiger Funktionen auf dem lokal-kompakten Raum* X *erfüllt genau dann das Axiom* $A^q(G)$ $(1 \leqslant q < \infty)$, *wenn die Topologie* $\mathcal{T}_k$ *der kompakten Konvergenz auf* G *durch Halbnormen der Form* $N_q(., \theta)$ *definiert wird, wobei* θ *ein beliebiges positives Maß auf* X *mit kompaktem Träger ist.*

Beweis. — Die Topologie $\mathcal{T}_k$ wird durch Halbnormen der Form $p_K : g \to p_K(g) = \sup_{y \in K} |g(y)|$ definiert, wobei K alle kompakten Teilmengen von X durchläuft. Setzt man $A^q(G)$ voraus, so existiert nach Lemma 5.4 zu jedem Kompaktum $K \subset X$ ein positives Maß θ auf X mit kompaktem Träger derart, daß $p_K(g) \leqslant N_q(g, \theta)$ für alle $g \in G$ gilt; andrerseits ist für jedes positive Maß θ mit kompaktem Träger $S \subset X$

$$S \subset X \; N_q(g, \theta) \leqslant p_S(g) \, \| \theta \|^{1/q}$$

für alle $g \in G$. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit der Bedingung. Sei nun umgekehrt diese Bedingung erfüllt. Dann existieren zu jedem Punkt $x \in X$ und zu jeder kompaktem Umgebung K_x von x ein positives Maß θ_x auf X mit kompaktem Träger und eine reelle Zahl $\alpha_x > 0$ derart, daß $p_{K_x} \leqslant \alpha_x N_q(., \theta_x)$ auf G gilt. Daraus folgt $A^q(G)$.

Wir kehren jetzt wieder zu den vorgegebenen Funktionenräumen H und E zurück. Aus der Existenz von Maßen mit $A^q(\theta, H)$ läßt sich die Existenz weiterer Maße mit dieser Eigenschaft herleiten, die auf Rändern von bezüglich H konzentriert sind.

LEMMA 5.6. — *Gilt* $A^q(\theta, H)$ *für ein positives Maß* θ *auf* T, *so folgt* $A^q(\sigma, H)$ *für alle positiven Maße* $\sigma \succ \theta$ *auf* T.

Beweis. — Wir haben gesehen (Beweis von Korollar 1.4), daß jede Funktion $|h|$ $(h \in H)$ bei der in § 1 angegebenen $\mathcal{R}$H-Einbettung von T einer konvexen Funktion entspricht. Dasselbe gilt also für

$$|h|^q \quad (1 \leqslant q < \infty),$$

da die Abbildung $x \to |x|^q$ auf $\mathbf{R}^+$ isoton und konvex ist. Daher folgt

$$(\int |h|^q \, d\theta)^{1/q} \leqslant (\int |h|^q \, d\sigma)^{1/q}$$

fü alle $h \in \mathrm{H}$.

Aus diesem Lemma ergibt sich für nukleare Räume E eine Lösung der einleitend formulierten Aufgabe :

SATZ 5.7. — *Sei* X *abzählbar im Unendlichen und* E *nuklear. Dann existiert zu jedem kompakten* H-*Rand* (14) S *von* T *ein maximales Maß* $\sigma \in \mathcal{M}^+(\mathrm{T})$, *konzentriert auf* S, *mit* $\mathrm{B}^\infty(\sigma, \mathrm{H}, \mathrm{E})$.

Beweis. — Nach Lemma 5.4 existiert ein positives beschränktes Maß θ auf X mit der Eigenschaft $\mathrm{A}^1(\theta, \mathrm{H})$. θ kann als Maß auf T aufgefaßt werden. Daher gibt es nach dem vorangehenden Lemma und nach Korollar 1.4 ein maximales Maß $\sigma \in \mathcal{M}^+(\mathrm{T})$, konzentriert auf S, mit derselben Eigenschaft. Daraus ergibt sich nach Korollar 5.3 die Behauptung.

Die E-morphe H-Darstellung von X, deren Existenz soeben nachgewiesen wurde, ist zugleich stetig ; denn es gilt der allgemeine

SATZ 5.8. — *Sei* X *ein im Unendlichen abzählbarer lokalkompakter Raum und* E *ein linearer Unterraum von* $\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathbf{K})$, *der bezüglich der Topologie* $\mathcal{T}_k$ *der kompakten Konvergenz nuklear ist. Dann ist jede* E-*morphe Abbildung von* X *in einen vollständigen lokalkonvexen Raum* F *stetig.*

Beweis. — Die Vervollständigung $\hat{\mathrm{E}}$ von E, versehen mit der Topologie $\mathcal{T}_k$, ist ein nuklearer Frechet-Raum. Daher kann jede Funktion $f \in \mathrm{E}(\mathrm{X}, \mathrm{F}) \subset \hat{\mathrm{E}}(\mathrm{X}, \mathrm{F})$ lokal gleichmäßig durch Abbildungen der Form $\sum_1^n f_i \cdot y_i$ mit $f_i \in \mathrm{E}$, $y_i \in \mathrm{F}$ approximiert werden (Korollar 2.5). Da diese Abbildungen stetig sind, folgt die Behauptung.

Im folgenden geht es darum, zugleich *stetige und* E-*morphe* H-Darstellungen von X durch p-fach integrierbare Dichten für eine umfassendere Klasse als die der Funktionenräume H mit *nuklearer* Restriktion $\mathrm{H_X}$ auf X zu erhalten, für welche bereits der Satz 5.7 (mit $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{H}}_\mathrm{X} \subset \mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathbf{K})$)

(14) Dasselbe gilt nach Satz 1.16 sogar für jeden kompletten K_σ-Rand von T bezüglich H.

das Gewünschte liefert. Zunächst ergibt Bemerkung 3.10 das folgende allgemeine Kriterium für die Existenz *stetiger* H-Darstellungen von X durch p-fach integrierbare Dichten $(1 < p \leqslant \infty)$:

SATZ 5.9. — *Sei* X *abzählbar im Unendlichen, und sei* θ *ein positives Maß auf* T *derart, daß für alle* $x \in X$ *die Linearformen* $\varphi_x : h \to h(x)$ *auf* H *stetig sind bezüglich der Norm* $N_q(., \theta)$ $(1 \leqslant q < \infty)$. *Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

(i) *Die Einheitskugel* H_1 *von* H *bezüglich der Norm* $N_q(., \theta)$ *ist gleichgradig stetig auf* X.

(ii) *Es existiert eine stetige Abbildung* $x \to k_x$ *von* X *in* $L^p(\theta)$ (p *konjugiert zu* q) *mit* $h(x) = \int h(w)\, k_x(w)\, d\theta(w)$ *für alle* $x \in X$, $h \in H$.

Falls eine zugleich stetige und E-morphe H-Darstellung von X durch p-fach θ-integrierbare Dichten existiert, muß nach dem Kriterium 5.9 nicht allein die Bedingung $A^q(\theta, H)$ (d. i. die Beschränktheit von $\mathrm{Rest}_X\, H_1$ in E) gelten, sondern darüberhinaus $\mathrm{Rest}_X\, H_1$ in E sogar relativ-kompakt sein (Satz von Ascoli). Für $q = 2$ kann man zeigen, daß diese Voraussetzung umgekehrt auch hinreicht, um die Existenz solcher H-Darstellungen von X zu garantieren:

SATZ 5.10. — *Sei* θ *ein positives Maß auf* T *derart, daß die Einheitskugel* H_1 *von* H *bezüglich der Norm* $N_2(., \theta)$ *gleichgradig stetig und punktweise beschränkt ist auf* X. *Bezeichnet dann* $H^2(\theta)$ *den Abschluß von* H *in* $L^2(\theta)$ (*bei isomorpher Einbettung von* H) *und* $\overline{H}^2(\theta)$ *den Vektorraum aller zu* $f \in H^2(\theta)$ *konjugiert komplexen Funktionenklassen* $\bar{f}$, *so existiert genau eine Abbildung* $x \to k_x$ *von* X *in* $\overline{H}^2(\theta)$ *mit* $h(x) = \int h\, k_x\, d\theta$ *für alle* $h \in H$, $x \in X$. *Diese Abbildung ist* E-*morph und stetig.*

Beweis. — Aus der punktweisen Beschränktheit von $\mathrm{Rest}_X\, H_1$ folgt die Stetigkeit der Linearformen $\varphi_x : h \to h(x)$ auf H $(x \in X)$. Wegen $\overline{X} = T$ ist daher $N_2(., \theta)$ tatsächlich eine *Norm* auf H, so daß sich H als linearer Unterraum von $L^2(\theta)$ auffassen läßt. Der Abschluß $H^2(\theta)$ ist dann ein (reeller oder komplexer) Hilbert-Raum mit dem inneren Produkt $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g}\, d\theta$ $(f, g \in H^2(\theta))$. Die Abbildung p, die jeder Klasse $g \in \overline{H}^2(\theta)$ die Linearform $f \to \int f g\, d\theta$ auf H zuordnet, liefert also einen Isomorphismus des Banach-Raums $\overline{H}^2(\theta)$ auf den Banach-Raum H'. Nun ist die Abbildung $\varphi : x \to \varphi_x$ von X in H' nach Satz 3.5 E-morph und stetig. Folglich existiert genau eine Abbildung $x \to k_x$ von X in $\overline{H}^2(\theta)$ mit

$h(x) = \int h\, k_x\, d\theta$ für alle $h \in \mathrm{H}$, $x \in \mathrm{X}$, nämlich $p^{-1} \circ \varphi$, und diese ist E-morph und stetig.

KOROLLAR 5.11. — *Sei* E *ein Montelscher Raum, und sei* θ *ein positives Maß auf* T *mit der Eigenschaft* $\mathrm{A}^2(\theta, \mathrm{H})$. *Dann existiert genau eine Abbildung* $x \to k_x$ *von* X *in* $\overline{\mathrm{H}}^2(\theta)$ *mit* $h(x) = \int h\, k_x\, d\theta$ *für alle* $h \in \mathrm{H}$, $x \in \mathrm{X}$, *und diese Abbildung ist* E-*morph und stetig.*

Beweis. — Die Einheitskugel von H bezüglich der *Norm* $\mathrm{N}_2(.,\theta)$ ist nach $\mathrm{A}^2(\theta, \mathrm{H})$ beschränkt in E, also relativ-kompakt. Damit folgt die Behauptung aus dem vorangehenden Satz nach dem Theorem von Ascoli.

Wenn E ein Montelscher Raum ist, läßt sich unter Voraussetzung von $\mathrm{A}^q(\mathrm{H_X})$ die Existenz stetiger, E-morpher H-Darstellungen von X durch p-fach integrierbare Dichten auch für $p > 2$ beweisen :

SATZ 5.12. — *Sei* X *abzählbar im Unendlichen und* E *ein Montelscher Raum. Sei ferner das Axiom* $\mathrm{A}^2(\mathrm{H_X})$ *vorausgesetzt. Dann existiert zu jedem Maß* $\sigma \in \mathfrak{M}^+(\mathrm{T})$ *mit der Eigenschaft* $\mathrm{A}^q(\sigma, \mathrm{H})$ $(1 \leqslant q < \infty)$ *eine stetige,* E-*morphe Abbildung* $x \to k_x$ *von* X *in* $\mathrm{L}^p(\sigma)$ (p *konjugiert zu* q) *mit* $h(x) = \int h\, k_x\, d\sigma$ *für alle* $x \in \mathrm{X}$, $h \in \mathrm{H}$.

Beweis. — Sei H versehen mit der Norm $\mathrm{N}_q(.,\sigma)$. Dann ist die Restriktion der Einheitskugel von H auf X relativ-kompakt in E. Nach Satz 5.8 existiert daher eine stetige Abbildung $g : x \to g_x$ von X in $\mathrm{F} = \mathrm{L}^p(\sigma)$ mit $\int h\, g_x\, d\sigma = h(x)$ für alle $x \in \mathrm{X}$, $h \in \mathrm{H}$. Sei nun (K_n) eine isotone Folge kompakter Teilmengen von X mit $\mathrm{K}_n \subset \mathring{\mathrm{K}}_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ und $\bigcup \mathrm{K}_n = \mathrm{X}$. Setzt man $\lambda_n = \sup\limits_{x \in \mathrm{K}_n} \mathrm{N}_p(g_x, \sigma)^2$, $\gamma_n = (2^n \lambda_n)^{-1}$ und wendet Lemma 5.4 auf den Fall $q = 2$ an, so erhält man ein positives, beschränktes Maß $\theta = \sum\limits_1^\infty \gamma_n\, \theta_{\mathrm{K}_n}$ auf X mit der Eigenschaft $\mathrm{A}^2(\theta, \mathrm{H})$. Nach Satz 5.8 gibt es eine stetige, E-morphe Abbildung $x \to q_x$ von X in $\mathrm{L}^2(\theta)$ mit $\int h\, q_x\, d\theta = h(x)$ für alle $x \in \mathrm{X}$, $h \in \mathrm{H}$. Für die stetige Funktion $\mathrm{N} : y \to \mathrm{N}_p(g_y, \sigma)$ von X in $\mathbf{R}^+$ gilt nach Konstruktion von θ :

$$\begin{aligned}\int^* \mathrm{N}(y)^2\, d\theta(y) &= \sup_n \int_{\mathrm{K}_n} \mathrm{N}^2\, d\theta \\ &= \sup_n \sum_{i=1}^\infty \gamma_i \int_{\mathrm{K}_n} \mathrm{N}^2\, d\theta_{\mathrm{K}_i} \leqslant \sum_{i=1}^\infty \gamma_i \int \mathrm{N}^2\, d\theta_{\mathrm{K}_i} \leqslant 1.\end{aligned}$$

Daraus folgt $g \in \mathcal{L}^2_F(\theta)$ [15, p. 184]. Da q_x für alle $x \in X$ in $\mathcal{L}^2(\theta)$ liegt, ist die Abbildung $g \cdot q_x : y \to g_y\, q_x(y)$ von X in F für alle $x \in X$ θ-integrierbar [15, p. 209]. Also existiert das Integral

$$k_x = \int g_y\, q_x(y)\, d\theta(y) \in F = L^p(\sigma).$$

Nach Definition dieses Integrals gilt für alle $l \in F'$:

$$\langle k_x, l\rangle = \int \langle g_y \cdot q_x(y), l\rangle\, d\theta(y) = \int \langle g_y, l\rangle\, q_x(y)\, d\theta(y),$$

wenn $\langle\ ,\ \rangle$ die kanonische Bilinearform auf $F \times F'$ bezeichnet. Daraus folgt einerseits $\int h(y)\, k_x(y)\, d\sigma(y) = h(x)$ für alle $h \in H$, $x \in X$ und andrerseits die E-morphie der Abbildung $x \to k_x$, da $x \to q_x$ E-morph ist und $y \to \langle g_y, l\rangle$ in $L^2(\theta)$ liegt für alle $l \in F'$ wegen

$$\int |\langle g_y, l\rangle|^2\, d\theta \leqslant \int N_p(g_y, \sigma)^2\, ||l||^2\, d\theta(y) \leqslant ||l||^2$$

($||l||$ bezeichne die Norm von $l \in F'$). Aehnlich ergibt sich die Stetigkeit der Abbildung $x \to k_x$ aus der Stetigkeit von $x \to q_x$; denn es gilt

$$N_p(k_x - k_{x'}, \sigma) = \sup |\langle k_x - k_{x'}, f\rangle| \quad (f \in \mathcal{L}^q(\sigma), N(f, \sigma) \leqslant 1)$$

für alle $x, x' \in X$ und

$$|\langle k_x - k_{x'}, f\rangle| = |\int \langle g_y, f\rangle\, (q_x(y) - q_{x'}(y))\, d\theta(y)| \leqslant$$
$$\leqslant N_2(q_x - q_{x'}, \theta)\, (\int N_p(g_y, \sigma)^2\, d\theta(y))^{1/2} \leqslant N_2(q_x - q_{x'}, \theta)$$

für alle $f \in \mathcal{L}^q(\sigma)$ mit $N_q(f, \sigma) \leqslant 1$.

KOROLLAR 5.13. — *Sei* X *abzählbar im Unendlichen und* E *ein Montelscher Raum. Sei ferner das Axiom* $A^q(H_X)$ $(1 \leqslant q \leqslant 2)$ *vorausgesetzt. Dann existieren zu jedem kompakten* H-*Rand* S *von* T *ein maximales Maß* $\sigma \in \mathfrak{M}^+(T)$, *konzentriert auf* S, *und eine stetige,* E-*morphe Abbildung* $x \to k_x$ *von* X *in* $L^p(\sigma)$ *(p konjugiert zu q) mit*

$$h(x) = \int h\, k_x\, d\sigma$$

für alle $x \in X$, $h \in H$.

Beweis. — Nach den Lemmata 5.4 und 5.6 existiert ein maximales Maß $\sigma \in \mathfrak{M}^+(T)$ konzentriert auf S, mit der Eigenschaft $A^q(\sigma, H)$. Da nach Voraussetzung das Axiom $A^q(H_X)$, also auch das Axiom $A^2(H_X)$, gilt, folgt die Behauptung aus dem vorangehenden Satz.

Für nukleare Räume E ließen sich aus Satz 5.7 mit einer ähnlichen Methode, wie sie im Beweis von Satz 5.12 verwandt wurde, stetige H-Darstellungen von X durch E-morphe *Kerne* herleiten. Man erreicht dieses

Ziel jedoch einfacher, wenn man die Eigenschaft 2.7 der nuklearen Räume benützt (vgl. [31]).

THEOREM 5.14. — *Sei* X *im Unendlichen abzählbar und* E *nuklear. Dann existiert zu jedem positiven Maß* σ *auf einer kompakten Teilmenge* S *von* T *mit der Eigenschaft* $A^1(\sigma, H)$ *ein Kern* $Q(x, y)$ *auf* $X \times S$ *derart, daß gilt :*

(i) $x \to Q(x, y)$ *liegt in* E *für alle* $y \in S$.

(ii) $y \to Q(x, y)$ *liegt in* $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$ *für alle* $x \in X$.

(iii) $h(x) = \int h(y) Q(x, y) d\sigma(y)$ *für alle* $x \in X$, $h \in H$.

(iv) *Die Abbildung* $Q: x \to Q_x$, *die jedem* $x \in X$ *die durch* $Q(x,.)$ *bestimmte Klasse* $Q_x \in L^\infty(\sigma)$ *zuordnet, ist* E-*morph und stetig. Insbesondere liegt die Funktion* $H_f: x \to \int f(y) Q(x, y) d\sigma(y)$ *für jedes* $f \in L^1(\sigma)$ *in* E.

Beweis. — Nach den Sätzen 5.6 und 5.8 existiert eine stetige, E-morphe Abbildung $x \to k_x$ von X in $L^\infty(\sigma)$ mit

$$h(x) = \int h\, k_x\, d\sigma \;(x \in X, h \in H).$$

Für jede σ-integrierbare Funktion f auf S sei H_f die Funktion $x \to \int f\, k_x\, d\sigma$ aus E. Dann ist die Abbildung $f \to H_f$ von $F = L^1(\sigma)$ in E linear und stetig ; denn für jede kompakte Teilmenge K von X und für alle $f \in L^1(\sigma)$ gilt :

$$\sup_{x \in K} |H_f(x)| \leqslant \sup_{x \in K} \int |f|\,|k_x|\, d\sigma \leqslant \alpha_K N_1(f, \sigma)$$

mit $\alpha_K = \sup_{x \in K} N_\infty(k_x, \sigma) < \infty$. Geht man nun von den Banach-Räumen $L^p(\sigma)$ der Funktionsklassen zu den halbnormierten Räumen $\mathcal{L}^p(\sigma)$ der Repräsentanten über, so existiert nach Lemma 2.7 eine summierbare Folge (λ_n) von Skalaren, eine Nullfolge von Funktionen g_n in $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$, die durch ihre wesentliche Norm beschränkt sind, und eine Nullfolge (h_n) in E, so daß die Reihe $\sum \lambda_n h_n \int f(y) g_n(y) d\sigma(y)$ für jedes $f \in \mathcal{L}^1(\sigma)$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von X gegen H_f strebt. Nun gilt für jedes $x \in X$:

$$\int^* \left(\sum_1^\infty |\lambda_n|\, |h_n(x) f(y) g_n(y)|\right) d\sigma(y) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_1^\infty |\lambda_n|\, |h_n(x)|\, N_\infty(g_n, \sigma) N_1(f, \sigma) < \infty.$$

Also folgt nach dem Satz von Lebesgue

$$H_f(x) = \int f(y)\, Q(x, y)\, d\sigma(y) \; (x \in X, f \in \mathcal{L}^1(\sigma))$$

mit

$$Q(x, y) = \sum \lambda_n h_n(x) g_n(y).$$

Die partiellen Abbildungen $x \to Q(x, y)$ liegen für alle $y \in S$ in E, da die Reihen $\sum \lambda_n h_n g_n(y)$ auf kompakten Teilmengen von X gleichmäßig konvergieren. Nach Satz 5.8 bleibt nur noch die E-morphie der Abbildung $Q : x \to Q_x$ von X in $L^\infty(\sigma)$ zu beweisen. Diese ergibt sich jedoch sofort aus der E-morphie der Abbildung $x \to k_x$; denn die Funktionen $y \to Q(x, y)$ sind wegen

$$H_f(x) = \int f\, Q(x, y)\, d\sigma(y) \; (f \in \mathcal{L}^1(\theta), x \in X)$$

nach [15, p. 210]. Repräsentanten der Klassen k_x $(x \in X)$. Es gilt also $Q_x = k_x$ für alle $x \in X$.

Korollar 5.15. — *Sei* X *abzählbar im Unendlichen und* E *nuklear. Dann existieren zu jedem kompakten* H-*Rand* S *von* T *ein maximales Maß* $\sigma \in \mathfrak{M}^+(T)$, *konzentriert auf* S, *und ein Kern* $Q(x, y)$ *auf* $X \times S$ *mit den Eigenschaften* (i) - (iv) *des Theorems* 5.14.

Anhang. — In den meisten Anwendungsfällen sind die Funktionenräume E und H des Paragraphen durch ein Garbendatum gegeben. Für sie wird der *wechsel*seitige Zusammenhang von Voraussetzung und Behauptung in den bewiesenen Darstellungssätzen besonders deutlich sichtbar. Wir führen dies für den Fall $q = 1$ näher aus, vermuten aber, daß sich ähnliche Zusammenhänge auch für $q > 1$ herleiten lassen.

Sei Y ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis und $E : U \to E(U)$ ein Garbendatum stetiger skalarwertiger Funktionen auf Y derart, daß die Vektorräume E (U) in $\mathcal{C}(U, \mathbf{K})$ bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz $\mathfrak{T}_k$ jeweils abgeschlossen sind. Dann bezeichnen wir für jede offene Teilmenge U von Y mit H (U) den Vektorraum

$$\{ h \in \mathcal{C}(\bar{U}, \mathbf{K}) : \mathrm{Rest}_U\, h \in E(U) \}.$$

Definition 5.16. — *Das Garbendatum* E *heißt* nuklear, *wenn alle Vektorräume* E (U) *bezüglich der Topologie* $\mathfrak{T}_k$ *nuklear sind.*

Nach Theorem 2.8 genügte es offenbar, in der Definition 5.16 die

Nuklearität nur für alle Funktionenräume $E(X)$ über den offenen Mengen X einer Basis von Y zu fordern.

Die erwähnten Zusammenhänge lassen sich jetzt in der folgenden Liste von Nuklearitätskriterien für E darstellen.

SATZ 5.17. — *Das Garbendatum* E *ist genau dann nuklear, wenn eine der nachstehenden Bedingungen für alle offenen, relativ-kompakten Teilmengen* X *einer Basis* $\mathfrak{A}$ *von* Y *erfüllt ist :*

(i) *Die Restriktion* H_X *von* $H(X)$ *auf* X *ist (bezüglich der Topologie* $\mathfrak{T}_k$*) nuklear.*

(ii) *Es existiert ein positives Maß* σ *auf* $\overline{X}$, *so daß die Aussage* $B^\infty(\sigma, H(X), E(X))$ *gilt.*

(iii) *Es existiert ein positives Maß* σ *auf* $\overline{X}$ *mit der Eigenschaft* $A^1(\sigma, H(X))$.

(iv) *Es gilt das Axiom* $A^1(H_X)$ (*bzw.* $A^1(E(X))$).

(v) *Die Topologie der kompakten Konvergenz* H_X (*bzw.* $E(X)$) *wird durch Halbnormen der Form* $N_1(., \theta)$ *definiert, wobei* θ *ein (beliebiges) positives Maß auf* X *mit kompaktem Träger ist.*

(vi) *Zu jedem Punkt* $x \in X$ *existieren ein positives Maß* θ *auf* X *mit kompaktem Träger und eine Umgebung* $U \subset X$ *von* x *derart, daß die Einheitskugel von* $H(X)$ (*bzw.* $E(X)$)) *bezüglich der Halbnorm* $N_1(., \theta)$ *auf* U *gleichgradig stetig ist.*

(vii) *Zu jedem Punkt* $x \in X$ *existieren ein positives Maß* θ *auf* X *mit kompaktem Träger, eine Umgebung* $U \subset X$ *von* x *und eine stetige Abbildung* $k : y \to k_y$ *von* U *in* $L^\infty(\theta)$ *mit*

$$\int h\, k_y\, d\theta = h(y) \quad \textit{für alle } y \in U,\ h \in H_X \ (\textit{bzw. } h \in E(X)).$$

Beweis. — Ist E nuklear, dann auch das « Garbendatum » $X \to H_X \subset E(X)$. Die Umkehrung dieses Schlusses erhäalt man mit Hilfe des Kriteriums 2.8 daraus, daß $\mathrm{Rest}_{X'} E(X) \subset H_{X'}$ für alle offenen relativ-kompakten Teilmengen X′ von X gilt. Aehnlich ergibt sich die jeweilige Gleichwertigkeit der Aussagen (iv) - (vii) (generell für alle offenen relativ-kompakten Teilmengen X aus $\mathfrak{A}$ gefordert) mit ihren angegebenen Varianten.

Aus der Nuklearität von E folgt (ii) (für alle offenen, relativ-kompakten Teilmengen X) nach Satz 5.7.

Aus (ii) folgt (iii) nach Lemma 5.2, wie zu Beginn des Paragraphen ausgeführt.

Gilt (iii) für alle offenen, relativ-kompakten Teilmengen $X \in \mathfrak{A}$ so folgt die Gültigkeit des Axioms $A^1(H_X)$, da dieses die Aussage (iii) nur lokal formuliert.

(iv) und (v) sind nach den Sätzen 5.5 und 2.8 mit der Nuklearität (iv) besagt, daß zu jedem Punkt $x \in X$ ein positives Maß θ auf X mit kompaktem Träger und eine offene, relativ-kompakte Umgebung $U \subset X$ von x existieren mit der Eigenschaft, daß die Einheitskugel H_1 von H_X bezüglich der Halbnorm $N_1(., \theta)$ gleichmäßig auf U beschränkt ist. Gilt nun $A^1(H_X)$ für alle offenen, relativ-kompakten Teilmengen X aus $\mathfrak{A}$, so ist nach dem Kriterium (iv) insbesondere H_U nuklear, also ist die beschränkte Teilmenge $\text{Rest}_U H_1 \subset H_U$ präkompakt bezüglich $\mathfrak{T}_k$ und folglich gleichgradig stetig. Damit folgt aus der generellen Gültigkeit von (iv) die generelle Gültigkeit von (vi). Die Umkehrung dieses Schlusses ist evident.

Die Gleichwertigkeit der Bedingungen (vi) und (vii) ergibt sich aus der Bemerkung 2.10.

Damit ist der Satz bewiesen.

Für jedes Garbendatum E, welches eine der Bedingungen (i) - (vii) für alle relativ-kompakten Mengen einer Basis von Y erfüllt, steht damit die sehr viel reichere Aussage des Theorems 5.14 und seines Korollars zur Verfügung.

6. Anwendungen.

6.1. — Wir gehen zunächst auf das Beispiel ein, welches den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen bildete. Sei $(Y, \mathcal{O})$ ein komplexer Raum. Für Grundräume Y mit abzählbarer Basis hat L. Bungart in [18] nachgewiesen, daß $\mathcal{O}(Y)$, versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, nuklear ist. Hier sei ein anderer Beweis dieser Tatsache gegeben, der sich nach unseren Nuklearitätskriterien anbietet und außerdem den Vorteil hat, auch für komplexe Räume gültig zu sein, die keine abzählbare Basis besitzen.

Da aus der lokalen Gültigkeit des Nuklearitätskriteriums 2.8 seine globale Gültigkeit folgt (Satz 5.17), kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit Y als abgeschlossene analytische Teilmenge eines holomorph vollständigen Gebietes $G \subset \mathbf{C}^n$ angenommen werden. Nun sind die Real- und die Imaginärteile holomorpher Funktionen auf G harmonisch. Im dritten Beispiel werden wir beweisen, daß die harmonischen Funktionen auf dem Gebiet G bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz einen nuklearen Raum bilden. Nach dem Kriterium 2.8 ist folglich der Vektorraum E aller holomorphen Funktionen auf G bezüglich derselben Topologie ebenfalls ein nuklearer (Frechet-) Raum. Die Abbildung ψ, die jeder Funktion $f \in E$ die Restriktion von f auf Y zuordnet, ist bezüglich der Topologien der kompakten Konvergenz eine stetige, lineare Abbildung von E in den Frechet-Raum $\mathcal{O}(Y)$. Nach dem Theorem B von H. Cartan ist ψ surjektiv [24, p. 245], also (nach dem Satz von Banach) ein Homomorphismus von E auf $\mathcal{O}(Y)$. $\mathcal{O}(Y)$ ist daher topologisch isomorph zu einem Quotientenraum des nuklearen Raumes E und folglich selbst nuklear. Damit ergibt sich aus Korollar 5.15 die folgende Verschärfung des Theorems B^{∞} von Bungart [19] :

SATZ 6.1. — *Sei* X *eine im Unendlichen abzählbare relativ-kompakte, offene Teilmenge des komplexen Raumes* $(Y, \mathcal{O})$ *und* H *ein Vektorraum von stetigen komplexwertigen Funktionen auf* $\overline{X}$, *die in* X *holomorph sind. Dann existiert zu jedem kompakten Rand* S *von* $\overline{X}$ *bezüglich* H *ein maximales Maß* $\sigma \in \mathfrak{M}^+(\overline{X})$, *konzentriert auf* S, *und ein Kern* $Q(x, y)$ *auf* $X \times S$ *derart, daß gilt :*

(i) $x \to Q(x, y)$ *ist holomorph für alle* $y \in S$.

(ii) $y \to Q(x, y)$ *liegt in* $\mathcal{L}^{\infty}(\sigma)$ *für alle* $x \in X$.

(iii) $h(x) = \int h(y)\, Q(x, y)\, d\sigma(y)$ *für alle* $x \in X$, $h \in H$.

(iv) *Die Abbildung* $x \to Q_x$ *von* X *in* $L^{\infty}(\sigma)$ *ist stetig und schwach holomorph,* d. h. *für jede stetige Linearform* y' *auf* $L^{\infty}(\sigma)$ *liegt die Funktion* $x \to y'(Q_x)$ $(x \in X)$ *in* $\mathcal{O}(X)$.

Ist $\overline{X}$ *metrisierbar und* H *punktetrennend, so wird* σ *vom Choquet-Rand* $\mathrm{Ch}_H(\overline{X})$ *getragen.*

L. Bungart [18] hat — mit Hilfe einer stetigen H-Darstellung von $\overline{X}$ — nachgewiesen, daß jede schwach holomorphe Abbildung von X in einen vollständigen lokalkonvexen Raum stetig, ja sogar holomorph, d. h. lokal in eine konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten aus F entwickelbar ist. Die erstere Aussage ist ein Spezialfall unseres Satzes 5.8. Die zweite folgt direkt aus dem Korollar 2.5 : Jede schwach holomorphe Abbildung von X in F kann lokal gleichmäßig durch (holomorphe) Funktionen der Form $\sum_{1}^{n} f_i y_i$ mit $f_i \in \mathcal{O}(X)$, $y_i \in F$ approximiert werden. — Damit ist insbesondere gezeigt, daß die durch den Kern $Q(x, y)$ des Satzes 6.1 definierte Abbildung $x \to Q_x$ von X in $L^\infty(\sigma)$ sogar holomorph ist.

6.2. — Als zweites Anwendungsbeispiel wählen wir die axiomatische Potentialtheorie für elliptische und parabolische Differentialgleichungen von H. Bauer [4] [5].

Sei $(Y, \mathcal{H})$ ein harmonischer Raum im Sinne dieser Theorie [5] (also insbesondere Y ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis). Dann ist das Garbendatum $\mathcal{H}$ nuklear. Ein einfacher Beweis dieser Tatsache findet sich in [5]. Sei X eine offene, relativ-kompakte Teilmenge von Y. Dann ist also $\mathcal{H}(X)$, versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, ein nuklearer Frechet-Raum. Bezeichnet H (X) den Vektorraum $\{h \in \mathcal{C}(\overline{X}, \mathbf{R}) : \mathrm{Rest}_X\, h \in \mathcal{H}(X)\}$ so erhält man aus Korollar 5.15 den folgenden

Satz 6.2. — *Sei* X *eine offene, relativ-kompakte Teilmenge von* Y, H *ein punktetrennender linearer Unterraum von* H (X) *und* X_e *die Menge der* H*-extremalen Punkte von* $\overline{X}$. *Dann existiert ein auf* X_e *konzentriertes positives Maß* σ *auf dem topologischen Rand* X^* *von* X *und ein Kern* $Q(x, y)$ *auf* $X \times X^*$ *derart, daß gilt :*

(i) $x \to Q(x, y)$ *ist harmonisch für alle* $y \in X^*$.

(ii) $y \to Q(x, y)$ *liegt in* $\mathcal{L}^\infty(\sigma)$ *für alle* $x \in X$.

(iii) $h(x) = \int h(y)\, Q(x, y)\, d\sigma(y)$ *für alle* $x \in X$, $h \in H$.

(iv) *Die Abbildung* $x \to Q_x$ *von* X *in* $L^\infty(\sigma)$ *ist stetig und schwach harmonisch, d. h. für jede stetige Linearform* y' *auf* $L^\infty(\sigma)$ *liegt die Funktion* $x \to y'(Q_x)$ $(x \in X)$ *in* $\mathcal{H}(X)$.

Dieses Ergebnis ist insofern bemerkenswert, als die nach der Methode von Perron-Wiener konstruierten harmonischen Maße, wie schon in der Einleitung erwähnt, für punktetrennende H (X) (z. B. im Fall der Wärmeleitungsgleichung) nicht immer auf dem Choquet-Rand $Ch_{H(X)}(\overline{X})$ konzentriert sind. Man stößt hier auf die interessante Frage, wie die Familie der harmonischen Maße unter den anderen schwach harmonischen Familien von H (X)-Darstellungsmaßen durch allgemeine Eigenschaften zu charakterisieren seien.

Um wie im ersten Beispiel die Eigenschaft (iv) des Kerns $Q(x, y)$ durch eine Kennzeichnung der schwach harmonischen Abbildungen zu präzisieren, geben wir die folgende.

DEFINITION 6.3. — *Sei* U *eine offene Teilmenge von* Y *und* F *ein Banach-Raum. Dann heißt eine Abbildung* f *von* U *in* F harmonisch, *falls für jede in* U *reguläre Menge* V *und alle zugehörigen harmonischen Maße* μ_x^V $(x \in V)$ f μ_x^V *- integrierbar ist und* $f(x) = \int f \, d\mu_x$ *gilt.*

SATZ 6.4. — *Sei* U *eine offene Teilmenge von* Y *und* F *ein Banach-Raum. Dann ist jede harmonische Abbildung von* U *in* F *stetig. Eine Abbildung* f *von* U *in* F *ist genau dann harmonisch, wenn sie schwach harmonisch ist.*

Beweis. — O. B. d. A. kann U als relativ-kompakt vorausgesetzt werden. Sei $E = \mathcal{H}(U)$. Dann fallen die schwach harmonischen Abbildungen von U in F per definitionem mit den E-morphen Abbildungen von U in F zusammen und sind also stetig (Satz 5.8). — Ist nun f eine harmonische Abbildung von U in F, so folgt für alle harmonischen Maße μ_x^V, die zu regulären Teilmengen V von U gehören, und für alle $y' \in F'$

$$\int y' \circ f \, d\mu_x^V = y'(f(x))$$

nach Definition 6.3 und nach Definition des Integrals in Banach-Räumen. Da die Funktionen $x \to \mu_x^V(g)$ $(x \in V)$ für alle μ_x^V - integrierbaren reellen Funktionen g auf V^* in V harmonisch sind [4, S. 36], ist also jede harmonische Abbildung schwach harmonisch.

Sei umgekehrt $f: U \to F$ E-morph. Dann läßt sich f gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von U durch (harmonische) Funktionen der Form $\sum f_i \cdot y_i$ mit $f_i \in E$, $y_i \in F$ $(i = 1, ..., n)$ approximieren. Daraus folgt die Harmonizität von f, weil der Vektorraum aller harmonischen Abbildungen von U in F nach Definition 6.3 in $\mathcal{C}(U, F)$ bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz abgeschlossen ist.

Insbesondere ist damit gezeigt, daß die durch den Kern $Q(x, y)$ definierte Abbildung $x \to Q_x$ von X in $L^\infty(\sigma)$ (Eigenschaft (iv)) harmonisch ist.

6.3. — Die stärkeren Axiome der Brelotschen Potentialtheorie [17] gestatten es, für sie dasgleiche Resultat wie in 6.2 herzuleiten, ohne daß der Grundraum eine abzählbare Basis besitzen oder — was als Voraussetzung in 6.2 auch genügen würde — separabel sein muß. Man gelangt so zu Ergebnissen, die kürzlich von B. Walsh und P. A. Loeb [31] veröffentlicht wurden. Nur ein Teil der Brelotschen Voraussetzungen wird dabei in voller Schärfe benötigt.

Sei X ein lokal-kompakter, nicht kompakter Raum, der im Unendlichen abzählbar ist, und $\mathcal{H} : U \to \mathcal{H}(U)$ ein Garbendatum stetiger, reeller Funktionen auf X. Dann geben wir nach [31] die folgende

DEFINITION 6.5. — *Eine offene, relativ-kompakte Teilmenge* V *von* X *heißt* $\mathcal{H}$-regulär, *wenn für eine passende Teilmenge* V_0 *von* V *die Abbildung* $h \to \mathrm{Rest}_{V_0} h$ *von*

$$H(V) = \{ h \in \mathcal{C}(\overline{V}, \mathbf{R}) : \mathrm{Rest}_V h \in \mathcal{H}(V) \}$$

in $\mathcal{C}(V_0, \mathbf{R})$ *ein surjektiver ordnungstreuer Isomorphismus ist.*

Wir nehmen an, daß das Garbendatum $\mathcal{H}$ die beiden nachstehenden Axiome erfüllt:

(i) Die zusammenhängenden $\mathcal{H}$-regulären Teilmengen von X bilden eine Basis der Topologie von X.

(ii) Für jedes Gebiet W in X und jede punktweise nach oben filtrierend geordnete Familie $\mathcal{J}$ in $\mathcal{H}(W)$ ist die obere Einhüllende $\sup \mathcal{J}$ entweder identisch $+\infty$ oder harmonisch auf W.

Sei V eine zusammenhängende $\mathcal{H}$-reguläre Teilmenge von X. Dann existiert zu jeder stetigen reellen Funktion f auf $\overline{V}$ genau eine Funktion $H_f \in H(V)$, die auf V_0 mit f übereinstimmt. Die Abbildung $f \to H_f$ ist isoton und linear. Also definiert für jeden Punkt $x \in V$ die Linearform $f \to H_f(x)$ auf $\mathcal{C}(\overline{V}, \mathbf{R})$ ein positives Radonmaß μ_x^V auf $\overline{V}$. Diese regulären Maße μ_x^V besitzen die Eigenschaft $A^1(\mu_x^V, H(V))$: Nach der Harnackschen Ungleichung, die unter unseren Voraussetzungen auf V mit dem Axiom (ii) gleichwertig ist [29], existiert bei festem $x \in V$ zu jedem Kompaktum $K \subset V$ eine Konstante $\alpha_K > 0$ derart, daß für alle positiven Funktionen $h \in \mathcal{H}(V)$ gilt $\sup\limits_{y \in K} h(y) \leqslant \alpha_K h(x)$; hieraus folgt

$$\sup_{y \in K} |f(y)| \leqslant \sup_{y \in K} \int |f| \, d\mu_y^V \leqslant \alpha_K \int |f| \, d\mu_x^V$$

für alle $f \in H(V)$, also die Aussage $A^1(\mu_x^V, H(V))$. Nach Axiom (i) ist daher das Garbendatum $\mathcal{H}$ nuklear (Kriterium (iii) 5.17). Ferner ergibt sich aus dem Axiom (i), daß jeder Vektorraum $\mathcal{H}(U)$ (U offen in X) bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz in $\mathcal{C}(U, \mathbf{R})$ abgeschlossen, also vollständig ist. Damit stehen für jede Kompaktifizierung T von X (oder einer offenen, im Unendlichen abzählbaren, relativ-kompakten Teilmenge von X) das Theorem 5.14 und sein Korollar zur Verfügung.

Walsh und Loeb [31] betrachten dagegen in ihrem allgemeinen Darstellungssatz nur *resolutive* Kompaktifizierungen $\hat{X}$ von X (d. h. solche, für die sich nach der Methode von Perron-Wiener harmonische Maße μ_x $(x \in X)$ konstruieren lassen) und setzen alle Brelotschen Axiome voraus. In diesem Fall braucht die Existenz von Maßen σ, die auf dem kompakten H (X)-Rand $\hat{X} \setminus X$ von $\hat{X}$ konzentriert sind und die Eigenschaft $A^1(\sigma, H(X))$ besitzen, nicht erst hergeleitet zu werden (Korollar 5.15). Dieselben Ueberlegungen, die wir soeben auf die regulären Maße angewendet haben, gelten dann nämlich auf für die harmonischen Maße μ_x $(x \in X)$ und zeigen, daß diese die Eigenschaft $A^1(\mu_x, H(X))$ besitzen. Damit folgt der Satz 2 von Walsh und Loeb aus unserem Theorem 5.14.

6.4. — H.S. Bear und A.M. Gleason haben in [7] eine axiomatische Theorie der Integraldarstellung abstrakt harmonischer oder parabolischer Funktionen entworfen, ohne die lokale Lösbarkeit des Dirichletschen Problems vorauszusetzen. Angesichts der Ergebnisse von § 5 erweist sich ein nicht unerheblicher Teil ihrer Voraussetzungen als überflüssig, um ihr Schluß-theorem 13 herzuleiten. Wir zeigen im folgenden, wie ihre reduzierten Axiome die Anwendung unseres Theorems 5.14 gestatten.

Sei auf einem im Unendlichen abzählbaren lokal-kompakten Raum X eine Familie von Tripeln (U, θ, k) gegeben, derart, daß zu jeder Umgebung W eines Punktes $x \in X$ ein Tripel (U, θ, k) existiert mit folgenden Eigenschaften :

(i) U ist eine offene, relativ-kompakte Umgebung von x in W.

(ii) θ ist ein positives Maß auf W mit kompaktem Träger.

(iii) $k : x \to k_x$ ist eine stetige Abbildung von U in $L^\infty(\theta)$.
Jedes solche Tripel möge ein *lokales System für x in* W heißen.

Bear und Gleason setzen in ihrer Darstellung $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ und X separabel voraus. Sie fordern zusätzlich, daß die « Dichten » k_x der lokalen Systeme *positiv* sowie jeweils durch ein borelmeßbaren Kern $K(x, y)$ auf $U \times W$ repräsentiert seien.

Mit Hilfe der lokalen Systeme läßt sich nun auf X ein Garbendatum E skalarwertiger Funktionen wie folgt definieren : Jeder offenen Teilmenge

W von X sei der Vektorraum E (W) aller borelmeßbaren skalarwertigen Funktionen f auf W mit der Eigenschaft zugeordnet, daß für jedes lokale System (U, θ, k) in W f θ-integrierbar ist und für alle $x \in U$

$$\int f(y)\, k_x(y)\, d\theta(y) = f(x) \text{ gilt.}$$

(Eventuell ist $E(W) = \emptyset$ für gewisse offenen Teilmengen W von X).

Aus der Stetigkeit von $x \to k_x$ folgt dann sofort, daß jeder Vektorraum E (W) bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz einen abgeschlossenen linearen Unterraum von $\mathcal{C}(W, \mathbf{K})$ bildet. Satz 5.17 ergibt, daß mit der Vorgabe der lokalen Systeme genau eines der Nuklearitätskriterien für das Garbendatum E erfüllt ist. Die Aussagen des Theorems 5.14 und seines Korollars stehen also für jede Kompaktifizierung T von X zur Verfügung. Sie liefern eine nicht unerhebliche Verschärfung des Endresultats von Bear und Gleason.

Aehnlich wie in 6.2 lassen sich unter den Voraussetzungen dieses Beispiels die Begriffe der harmonischen und der schwach harmonischen Abbildung mit Werten in beliebigen Banach-Räumen einführen. Ganz analoge Ueberlegungen zeigen dann, daß die schwach harmonischen Abbildungen mit den harmonischen zusammenfallen und stetig sind. Diese Folgerung aus den Sätzen 2.5 und 5.8 präzisiert das Theorem 7 aus [7], nach welchem die harmonischen mit den *stetigen* schwach harmonischen Abbildungen identisch sind.

LITERATUR

[1] R. G. Bartle and L. M. Graves, Mappings between function spaces, *Trans. Amer. Math. Soc. 72* (1952), 400-413.

[2] H. Bauer, Konservative Abbildungen lokal-kompakter Räume, *Math. Annalen 138* (1959), 398-427.

[3] H. Bauer, Silovscher Rand und Dirichletsches Problem, *Ann. Inst. Fourier 11* (1961), 89-136.

[4] H. Bauer, Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, *Math. Annalen 146* (1962), 1-59.

[5] H. Bauer, Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, *Lecture Notes in Math. 22* (1966), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[6] H. BAUER, Aspects of linearity in the theory of function algebras, Proceedings of a Symposium on Function Algebras, New Orleans (1964), 122-137.

[7] H. S. BEAR and A. M. GLEASON, An integral formula for abstract harmonic or parabolic functions. *Notices Amer. Math. Soc.,* 13 (1966), 348 ff.

[8] S. BERGMAN, Ueber eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler, *Math. Z. 39* (1935), 76-94, 605-608.

[9] S. BERGMAN, Bounds for analytic functions in domains with a distinguished boundary surface, Math. Z. *63* (1955), 173-194.

[10] E. BISHOP, A minimal boundary for function algebras, *Pacific J. Math. 9* (1959), 629-642.

[11] N. BOURBAKI, Topologie générale, Chap. IX, *Actual sci. et industr. 1045,* Paris (1958).

[12] N. BOURBAKI, Topologie générale, Chap. X, *Actual sci. et industr. 1084,* Paris (1949).

[13] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, Chap. I-II, *Actual sci. et industr. 1189,* Paris (1953).

[14] N. BOUBAKI, Espaces vectoriels topologiques, Chap. III-V, *Actual. sci. et industr.* 1229, Paris (1955).

[15] N. BOURBAKI, Intégration, Chap. I-IV, *Actual. sci. et industr.* 1175, Paris (1965).

[16] N. BOURBAKI, Intégration, Chap. V, *Actual sci. et industr.* 1244, Paris (1956).

[17] M. BRELOT, Lectures on potential theory, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay (1960).

[18] L. BUNGART, Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas, *Trans. Amer. Math. Soc.* (2) 111 (1964), 317-344.

[19] L. BUNGART, Cauchy integral formulas and boundary kernel functions in several complex variables, Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Minneapolis (1964), 7-18.

[20] G. CHOQUET et P. A. MEYER, Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, *Ann. Inst. Fourier* 13 (1963), 139-154.

[21] O. FORSTER, Funktionswerte als Randintegrale in komplexen Räumen, *Math. Annalen* 150 (1963), 317-324.

[22] A. M. GLEASON, The abstract theorem of Cauchy-Weil, *Pacific J. Math.* 12 (1962), 511-525.

[23] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mem. Am. Math. Soc.* 16 (1955), 191 + 140 pp.

[24] R. C. GUNNING and H. ROSSI, Analytic functions of several variables, Englewood Cliffs, N. J., (1965).

[25] D. HINRICHSEN, Adapted integral representations by measures on Choquet boundaries, *Bull. Amer. Math Soc.* 72 (1966), 888-891.

[26] K. HOFFMAN and H. ROSSI, The minimal boundary for an analytic polyhedron, *Pacific J. Mat.* 12 (1962), 1347-53.

[27] P. A. LOEB and B. WALSH, The equivalence of Harnack's principle and Harnack's inequality in the axiomatic system of Brelot, *Ann. Inst. Fourier* 15 (1965), 597-600.

[28] G. LUMER, Analytic functions and Dirichlet problem, *Bull. Amer. Math. Soc.* 70 (1964), 98-104.

[29] P. A. MEYER, Probabilités et potentiel, Publications Inst. math. Université de Strasbourg XIV, *Actual sci. et industr.* 1318, Paris (1966).

[30] A. PIETSCH, Nukleare lokalkonvexe Räume, Schriftenreihe Institute f. Math. bei der dt. Akad. d. Wiss. zu Berlin, Reihe A, H. 1, Berlin (1965).

[31] B. WALSH and P. A. LOEB, Nuclearity in axiomatic potential theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 685-689.

[32] A. WEIL, L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, *Math. Annalen* 111 (1935), 178-182.

Manuscrit reçu le 16 janvier 1967.

Diederich HINRICHSEN
Mathematisches Institut de Universität
Erlangen, Bismarkstrasse (Bayern)