ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL GATESOUPE

Caractérisation locale de la sous-algèbre fermée des fonctions radiales de $FL^1(\mathbf{R}^n)$

Annales de l'institut Fourier, tome 17, n° 1 (1967), p. 93-107
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_93_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 1 (1967), 93-107.

CARACTÉRISATION LOCALE DE LA SOUS ALGÈBRE FERMÉE DES FONCTIONS RADIALES DE $\mathcal{F} L^1 (\mathbf{R}_n)$

par Michel GATESOUPE

I

Notations et Introduction.

a) ω est une application de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ continue, croissante telle

i) $\omega(0) = +1$

ii) $\omega(a + b) \leqslant \omega(a)\,\omega(b)$ pour tous $a, b \in \mathbf{R}^+$

iii) $\omega(\lambda r) = 0(\omega(r))$ λ fixé >0, r tendant vers $+\infty$, enfin ω est à croissance lente à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k > 0$ tel que lorsque x tend vers $+\infty$

$$\omega(x) = 0(x^k).$$

En particulier on pourra prendre $\omega(r) = (1 + r)^k$ $\quad k \in \mathbf{R}^+$.

b) $L^1(\mathbf{R}^n, \omega)$ désigne l'algèbre de Banach des applications $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ intégrables pour la mesure $\omega(|x|)\,dx$ munie de la norme :

$$\|f\| = \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\,\omega(|x|)\,dx$$

$\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}^n, \omega)$ est l'algèbre de Banach des transformées de Fourier avec la même norme; si $\hat{f} = \mathcal{F} f$

$$\|\hat{f}\| = \|f\|.$$

c) Une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{C}$ sera dite « radiale » si elle ne dépend que de la distance $r = |x|$; une telle application sera notée $(F)_n$ où F est la fonction d'une variable définie par

$$F(|x|) = (F)_n(x).$$

On sait que la transformation de Fourier, isomorphisme de $L^1(\mathbf{R}^n, \omega)$ sur $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}^n, \omega)$ se restreint en un isomorphisme des sous algèbres fermées des fonctions radiales qu'on notera

$$L^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^n, \omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{F} L^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^n, \omega).$$

Le résultat qui va être établi dans cet article est le suivant :

Dans le complémentaire de l'origine, les algèbres

$$\mathcal{F} L^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^n, \omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{F} L^1\left(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{\frac{n-1}{2}} \omega\right)$$

sont localement isomorphes.

De façon précise : Soit K un compact d'intérieur non vide contenu dans $]0, +\infty[$, $\theta : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction C^∞ à support compact dans $]0, +\infty[$, égale à 1 sur K et telle que $0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1$ partout.

Alors

$$(\mathrm{F})_n \in \mathcal{F} L^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^n, \omega) \Rightarrow \theta \mathrm{F} \in \mathcal{F} L^1\left(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{\frac{n-1}{2}} \omega\right) \qquad \text{(I)}$$

$$\mathrm{F} \in \mathcal{F} L^1\left(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{\frac{n-1}{2}} \omega\right) \Rightarrow (\theta \mathrm{F})_n \in \mathcal{F} L^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^n, \omega) \qquad \text{(II)}$$

Le théorème du graphe fermé montre immédiatement que ces deux applications sont continues. Cas particulier : $\omega(|x|) = +1$, alors

$$\mathrm{loc}\, \mathcal{F} L^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^n) \approx \mathrm{loc}\, \mathcal{F} L^1\left(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Une application : le contre exemple de L. Schwarz ([2]).

On sait que :

— un point de **R** n'est pas de synthèse spectrale pour

$$\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^k) \text{ avec } k \geqslant 1.$$

On en déduit que

— Une sphère $S_{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ $n \geqslant 3$, n'est pas de synthèse spectrale pour $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}^n)$.

Il suffit de remarquer que si on peut approcher une fonction de $\mathcal{F} L^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^n)$ par une suite de fonctions $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}^n)$, la suite de fonctions radiales obtenues en faisant la moyenne sur les sphères de centre O, approche encore la fonction initiale.

II

Soit $(f)_n \in L^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^n, \omega)$ et $(F_n) = \mathcal{F}(f)_n \in \mathcal{F} L^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^n, \omega)$.

Un calcul classique ([1]) donne :

$$F(\rho) = C \int_0^{+\infty} r^{n-1} f(r) (\rho r)^{\frac{-n+2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\rho r)\, dr$$

avec

$$\| F_n \| = \| f_n \| = \int_0^{+\infty} r^{n-1} | f(r) | \, \omega(r)\, dr < +\infty$$

où $J_\nu(t)$ est la fonction de Bessel ([3])

$$J_\nu(t) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{-it\cos\theta} (\sin\theta)^{2\nu}\, d\theta$$

$z^{-\nu} J_\nu(z)$ est la fonction entière $\sum_{+\infty}^{n=0} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+n+1)} z^{2n}$.

On aura besoin du développement asymptotique, à un ordre N quelconque, de $J_0(z)$, valable pour $|z|$ assez grand, dans la demie bande $|\operatorname{Im} z| \leqslant C^{te}$, $\operatorname{Re}(z) > 0$.

$$J_0(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{a_q}{z^q} \right) \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\sum_{q=1}^{n-1} \frac{b_q}{z^q} \right) \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \right] + R_N(z)$$

où $R_N(z)$ est une fonction, holomorphe dans la demie bande

$$|\operatorname{Im} z| \leqslant C^{te}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

$$|R_N(z)| = 0\left(\frac{1}{|z|^{N+1/2}}\right)$$

alors pour p quelconque on a la même estimation

$$|R_N^{(p)}(z)| = 0\left(\frac{1}{|z|^{N+1/2}}\right)$$

En effet :

$$R_N^{(p)}(z) = \frac{p\,!}{2\pi i}\int_C \frac{R_N(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}}\, d\zeta$$

où C est la circonférence de centre z, de rayon unité, donc

$$| R_N(z) | \leqslant p\,! \sup_{\zeta \in C} | R^N(\zeta) |.$$

PROPOSITION 1.

$$(F)_2 \in \mathcal{F} L^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^2, \omega) \Rightarrow \theta F \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2}\omega).$$

Démonstration. — Par homothétie on peut se ramener au cas où le support de θ est contenu dans $]1, +\infty[$. On a

$$F(\rho) = C\int_0^{+\infty} r\, J_0(\rho r) f(r)\, dr$$

avec

$$|| (F)_2 || = || (f)_2 || = \int_0^{+\infty} r\, | f(r) |\, \omega(r)\, dr < +\infty.$$

Soit

$$G(\rho) = C\int_0^{M} r\, J_0(\rho r) f(r)\, dr$$

c'est une fonction C^∞ dans $]0, +\infty[$, donc

$$\theta G \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2}\omega).$$

Reste

$$H(\rho) = C\int_M^{+\infty} r\, J_0(\rho r) f(r)\, dr.$$

Pour $\rho r \geqslant M$ nous allons utiliser le développement asymptotique de $J_0(\rho r)$ à l'ordre $N = k + 2$. Posons pour $0 \leqslant q \leqslant N - 1$

$$h_q(\rho) = \int_M^{+\infty} r \frac{f(r)}{(\rho r)^{q+1/2}} \cos\left(\rho r - \frac{\pi}{4}\right) dr$$

$$h_q(\rho) = \int_0^{+\infty} \frac{f(s + M)}{(s + M)^{q-1/2}} \frac{1}{\rho^{q+1/2}} \cos\left(\rho s + \rho M - \frac{\pi}{4}\right) ds$$

$$\cos\left(\rho s + \rho M - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[e^{i\rho s} e^{i\left(\rho M - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\rho s} e^{-i\left(\rho M - \frac{\pi}{4}\right)}\right]$$

Soit

$$k_q(\rho) = \int_0^{+\infty} \frac{f(s+\mathrm{M})}{(s+\mathrm{M})^{q-1/2}} e^{i\rho s}\, ds$$

pour montrer que $k_q \in \mathcal{F} \mathrm{L}^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2}\, \omega)$ il suffit de montrer que l'intégrale suivante est bornée

$$\mathrm{I}_q(\rho) = \int_0^{+\infty} (1 + |s|)^{1/2} \frac{|f(s+M)|}{(s+\mathrm{M})^{q-1/2}}\, \omega(s)\, ds$$

$$\mathrm{I}_q(\rho) \leqslant \frac{1}{\mathrm{M}^q} \int_0^{+\infty} (s+\mathrm{M})^2 (1 + |s|)^{1/2} |f(s+\mathrm{M})|\, \omega(s)\, ds$$

$\mathrm{M} > 1$, donc

$$\mathrm{I}_q(\rho) \leqslant \frac{1}{\mathrm{M}^q} \int_0^{+\infty} (s+\mathrm{M})\, |f(s+\mathrm{M})|\, \omega(s)\, ds$$

or

$$\int_0^{+\infty} (s+\mathrm{M})\, |f(s+\mathrm{M})|\, \omega(s)\, ds \leqslant \int_{\mathrm{M}}^{+\infty} t\, |f(t)|\, \omega(t)\, dt < +\infty$$

puisque $\omega(t - \mathrm{M}) \leqslant \omega(t)$.

Ainsi $k_q \in \mathcal{F} \mathrm{L}^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2}\, \omega)$.

Posons

$$\varphi_q(\rho) = \frac{1}{2} e^{i\left(\rho \mathrm{M} - \frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{\rho^{q+1/2}}$$

$\theta\varphi_q$ appartient à $\mathcal{F} \mathrm{L}^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2}\, \omega)$ de même que $\theta\varphi_q\, k_q$. Pour montrer que $\theta\mathrm{H}$ appartient à $\mathcal{F} \mathrm{L}^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2}\, \omega)$ il suffit de remarquer que

$$\mathrm{S}(\rho) = \mathrm{C} \int_{\mathrm{M}}^{+\infty} r\, \mathrm{R}_{\mathrm{N}}(\rho r)\, f(r)\, dr$$

est une fonction $(k+2)$ fois dérivable, car pour tout p, $0 \leqslant p \leqslant k+2$, l'intégrale

$$\int_{\mathrm{M}}^{+\infty} r^{p+1}\, |\mathrm{R}^{(p)}(\rho r)|\, |f(r)|\, dr$$

est bornée puisque

$$\mathrm{R}^{(p)}(\rho r) = 0\left(\frac{1}{r^{k+2+1/2}}\right).$$

Alors θS fonction $(k+2)$ fois dérivable a une transformée de Fourier qui est $0\left(\frac{1}{|x|^{k+2}}\right)$ à l'infini, donc sommable pour le poids

$$(1+|x|)^{1/2}\,\omega.$$

Ainsi $\theta S \in \mathcal{F}\, L^1(\mathbf{R}, (1+|x|)^{1/2}\,\omega)$.

PROPOSITION 2.

$$(F)_3 \in \mathcal{F}\, L^1_{\text{rad}}(\mathbf{R}^3, \omega) \Rightarrow \theta F \in \mathcal{F}\, L^1(\mathbf{R}, (1+|x|)\,\omega).$$

Démonstration.

$$F(\rho) = \frac{C}{\rho}\int_0^{+\infty} r \sin \rho r\, f(r)\, dr$$

avec

$$\|(F)_3\| = \int_0^{+\infty} r^2 \left|f(r)\right| \omega(r)\, dr < +\infty$$

posons

$$\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad \begin{cases} \tilde{f}(u) = f(u) & u \geqslant 0 \\ \tilde{f}(u) = f(-u) & u < 0 \end{cases}$$

alors

$$F(\rho) = \frac{iC}{2\rho}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho u}\, u\, \tilde{f}(u)\, du$$

et

$$u\,\tilde{f}(u) \in L^1(\mathbf{R}, (1+|x|)\,\omega)$$

donc

$$\theta F \in \mathcal{F}\, L^1(\mathbf{R}, (1+|x|)\,\omega).$$

PROPOSITION 3.

$$(F)_n \in \mathcal{F}\, L_{\text{rad}}(\mathbf{R}^n, \omega) \Rightarrow \theta F \in \mathcal{F}\, L^1\left(\mathbf{R}, (1+|x|)^{\frac{n-1}{2}}\,\omega\right).$$

Démonstration. — On l'a vu pour $n = 2$ et $n = 3$. Supposons la proposition établie à l'ordre $n - 2$. Soit $(F)_n \in \mathcal{F}\, L^1_{\text{rad}}(\mathbf{R}^n, \omega)$. On a

$$\rho^{n-2}\, F(\rho) = C\int_0^{+\infty} (\rho r)^{\frac{n-2}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(\rho r)\, r f(r)\, dr$$

or

$$\frac{d}{dt}[t^{\lambda} J_{\lambda}(t)] = t^{\lambda} J_{\lambda-1}(t)$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left[(\rho r)^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\rho r)\right] = (\rho r)^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-4}{2}}(\rho r)\, r.$$

Considérons

$$C\int_0^{+\infty} (\rho r)^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-4}{2}}(\rho r)\, r^2 f(r)\, dr$$
$$= C\frac{\rho^{n+1}}{\rho^{\frac{n-4}{2}}}\int_0^{+\infty} r^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-4}{2}}(\rho r)\, r^2 f(r)\, dr$$

le second membre est le produit par ρ^{n+1} d'une fonction $G(\rho)$ telle que

$$(G)_{n-2} \in \mathcal{F} L^1_{\text{rad}}(\mathbf{R}^{n-2}, \omega)$$

car

$$\int_0^{+\infty} r^{n-3} \left| r^2 f(r) \right| \omega(r)\, dr < +\infty.$$

Ceci prouve que $\rho^{n-2} F(\rho)$ est dérivable et que sa dérivée est $\rho^{n+1} G(\rho)$ qui d'après l'hypothèse de récurrence coïncide sur K avec un élément de $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1+|x|)^{\frac{n-3}{2}}\omega)$. Alors la primitive $\rho^{n-2} F(\rho)$ coïncide sur K avec un élément de $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1+|x|)^{\frac{n-1}{2}}\omega)$, donc $F(\rho)$ aussi d'après le lemme suivant :

LEMME. — *Si Φ est un élément à support compact* K *de* $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, \omega)$, *toute primitive de Φ coïncide sur* K *avec un élément de*

$$\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1+|x|)\omega).$$

Preuve. — Soit

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt$$

φ fonction entière appartenant à $L^1(\mathbf{R}, \omega)$. Soit ψ fonction C^∞ à support compact dans $\mathbf{R}$, telle que $\psi(0) = \varphi(0)$, alors $\varphi(t) - \psi(t) = t\lambda(t)$ où λ est une fonction C^∞ appartenant à $L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)\omega)$ et

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\psi(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\,t\lambda(t)\,dt.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\,t\lambda(t)\,dt$$

a pour primitive

$$C^{te} + i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\lambda(t)\,dt.$$

Une primitive de Φ est donc la somme d'une fonction C^∞ et d'une fonction de $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)\omega)$ ce qui prouve le lemme.

Le résultat (I) est ainsi établi.

III

PROPOSITION 4. — *Soit* F *à support compact* K

$$(F)_n \in \mathcal{F} L^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^n, (1 + |x|)\omega) \Rightarrow (F)_{n+2} \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}^{n+2}, \omega).$$

Démonstration. — Soit $(F)_n = \mathcal{F}(f)_n$

avec

$$\int_0^{+\infty} r^{n-1}|f(r)|(1 + |r|)\omega(r)\,dr < +\infty.$$

Posons

$$G(\rho) = C\int_0^{+\infty} r^{n+1}(\rho r)^{-n/2} J_{n/2}(\rho r)\frac{f(r)}{r^2}\,dr$$

$$(G)_{n+2} \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}^{n+2}, (1 + |x|)\omega)$$

car

$$\int_0^{+\infty} r^{n+1}\frac{|f(r)|}{r^2}(1 + |r|)\omega(r)\,dr < +\infty.$$

On a

$$\rho^n G(\rho) = C\int_0^{+\infty} (\rho r)^{n/2} J_{n/2}(\rho r)\frac{f(r)}{r}\,dr$$

mais

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\,[(\rho r)^{n/2}\,J_{n/2}(\rho r)] = (\rho r)^{n/2}\,J_{\frac{n-2}{2}}(\rho r)\,r$$

donc $\rho^n\,G(\rho)$ est dérivable et admet pour dérivée

$$C\int_0^{+\infty} (\rho r)^{n/2}\,J_{\frac{n-2}{2}}(\rho r)\,f(r)\,dr = \rho^{n-1}\,F(\rho)$$

alors $(\rho^{n-1}\,F(\rho))_{n+2} \in \mathcal{F}\,L^1_{\text{rad}}(\mathbf{R}^{n+2}, \omega)$ en vertu du lemme :

Lemme. — *Soit* $(G)_N$ *une fonction radiale qui sur un compact* $(K)_N \subset \mathbf{R}^N - \{0\}$ *coïncide avec un élément de* $\mathcal{F}\,L^1_{\text{rad}}(\mathbf{R}^N, (1 + |x|)\,\omega)$ *alors* G *est dérivable et* $\left(\dfrac{dG}{d\rho}\right)_N$ *coïncide sur* $(K)_N$ *avec un élément de* $\mathcal{F}\,L_{\text{rad}}(\mathbf{R}^N, \omega)$.

Preuve. — $(G)_N$ est de classe C^1 sur $(K)_N$, et $\dfrac{\partial (G)_N}{\partial \xi_i}$ dérivée partielle selon une coordonnée quelconque ξ_i, coïncide sur $(K)_N$ avec un élément de $\mathcal{F}\,L^1(\mathbf{R}^N, \omega)$. Or

$$\frac{\partial (G)_N}{\partial \xi_i} = \left(\frac{dG}{d\rho}\right)(|\xi|)\,\frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \text{ est } C^\infty$$

et différent de zéro dans $\mathbf{R}^N - \{0\}$ donc $\left(\dfrac{d\rho}{dG}\right)_N$ coïncide sur $(K)_N$ avec un élément de $\mathcal{F}\,L_{\text{rad}}(\mathbf{R}, \omega)$.

Proposition 5.

$$F \in \mathcal{F}\,L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^n\,\omega) \Rightarrow (\theta F)_{2n+1} \in \mathcal{F}\,L^1_{\text{rad}}(\mathbf{R}^{2n+1}, \omega).$$

Démonstration évidente à l'aide de la proposition 4. Ceci établit la caractérisation annoncée pour la dimension impaire. Pour le cas de la dimension paire il suffit d'établir le résultat suivant :

Proposition 6. — *Soit* F *à support compact* $K \subset]0, +\infty[$

$$F \in \mathcal{F}\,L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2}\,\omega) \Rightarrow (F)_2 \in \mathcal{F}\,L^1_{\text{rad}}(\mathbf{R}^2, \omega).$$

Démonstration. — Soit

$$F(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\rho} f(x)\, dx$$

$f(x)$ est une fonction entière telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|)^{1/2} |f(x)|\, \omega(|x|)\, dx < +\infty.$$

Considérons les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \cos x\rho\, f(x)\, dx, \qquad \int_0^{+\infty} \sin x\rho\, f(x)\, dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \cos x\rho\, f(-x)\, dx, \qquad \int_0^{+\infty} \sin x\rho\, f(-x)\, dx.$$

On va montrer que chacune coïncide sur la couronne compacte $(K)_2$ engendrée par K, avec une fonction de $\mathcal{F}\, L^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^2, \omega)$. Pour cela utilisons les développements asymptotiques de $J_0(z)$ et $J_0\left(z + \frac{\pi}{4}\right)$ à l'ordre $N = k + 3$.

$$C\, z^{1/2} J_0(z) = \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{\alpha_q}{z^q}\right) \cos z + \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{\beta_q}{z^q}\right) \sin z + R_1(z)$$

$$C\left(z + \frac{\pi}{4}\right)^{1/2} J_0\left(z + \frac{4}{\pi}\right) = \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{\gamma_q}{z^q}\right) \cos z + \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\delta_q}{z^q}\right) \sin z + R_2(z)$$

$(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \neq 0)$, $R_1(z)$ et $R_2(z)$ sont holomorphes et $0\left(\frac{1}{z^N}\right)$ dans le domaine $|z| \geqslant M$, $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant C^{te}$, $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$.

Alors il existe des polynomes en $\frac{1}{z}$ de degré $N - 1$, $T_1, T_2, S_1, S_2, S_3, S_4$ tels que

$$T_1 \cos z = S_1 z^{1/2} J_0(z) + S_2 \left(z + \frac{\pi}{4}\right)^{1/2} J_0\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + R_3(z)$$

$$T_2 \sin z = S_3 z^{1/2} J_0(z) + S_4 \left(z + \frac{\pi}{4}\right)^{1/2} J_0\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + R_4(z)$$

$R_3(z)$ et $R_4(z)$ étant holomorphes et $0\left(\frac{1}{z^N}\right)$ dans le même domaine.

T_1 et T_2 ont le même terme constant $\beta_0 \gamma_0 \neq 0$, donc il existe des polynomes en $\frac{1}{z}$ de degré $N - 1$ tels que

$$\begin{cases} \cos z = \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{a_q}{z^q} \right) z^{1/2} J_0(z) + \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{b_q}{z^q} \right) \left(z + \frac{\pi}{4} \right)^{1/2} J_0 \left(z + \frac{\pi}{4} \right) (z) \, \Lambda + \\ \sin z = \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{c_q}{z^q} \right) z^{1/2} J_0(z) + \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{d_q}{z^q} \right) \left(z + \frac{\pi}{4} \right)^{1/2} J_0 \left(z + \frac{\pi}{4} \right) + W(z) \end{cases} \tag{1}$$

où $V(z)$ et $W(z)$ sont holomorphes et $0\left(\frac{1}{z^N}\right)$ dans le même domaine. Etudions l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos x\rho \, f(x) \, dx$ (la démonstration serait analogue pour les autres). On peut l'écrire

$$\int_0^M \cos x\rho \, f(x) \, dx + \int_M^{+\infty} \cos x\rho \, f(x) \, dx.$$

La première intégrale est une fonction C^∞, donc coïncide sur $(K)_2$ avec une fonction de $\mathcal{F} L_{rad} (\mathbf{R}^2, \omega)$.

Pour la deuxième intégrale utilisons le développement de $\cos x\rho$ donné par (1) valable, si on suppose $K \subset]1, +\infty[$, pour $x \geqslant M$.

a) Posons pour $0 \leqslant q \leqslant N - 1$

$$g_q(\rho) = \int_M^{+\infty} r \, J_0(\rho r) \frac{f(r)}{r^{q+1/2}} \, dr$$

et soit

$$\tilde{f}(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant r < M \\ \dfrac{f(r)}{r^{q+1/2}} & \text{pour} \quad r \geqslant M \end{cases}$$

On a

$$g_q(\rho) = \int_0^{+\infty} r \, J_0(\rho r) \, \tilde{f}(r) \, dr$$

et

$$(g_q)_2 \in \mathcal{F} L^1_{rad} (\mathbf{R}^2, \omega).$$

Car

$$\int_0^{+\infty} r\left|\tilde{f}(r)\right|\omega(r)\,dr = \int_M^{+\infty} \frac{r^{1/2}}{r^q}\left|f(r)\right|\omega(r)\,dr$$
$$\leqslant \frac{C}{M^q}\int_0^{+\infty}(1+|r|)^{1/2}\left|f(r)\right|\omega(r)\,dr < +\infty.$$

Soit maintenant

$$(\theta\,\varphi_q)(\rho) = \frac{\theta(\rho)}{\rho^{q-1/2}}.$$

$(\theta\,\varphi_q)_2$ appartient à $\mathcal{F}\,L^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^2, \omega)$ ainsi que $(\theta\,\varphi_q\,g_q)_2$.

b) Considérons

$$h_q(\rho) = \int_M^{+\infty} \frac{1}{(\rho\,r)^q}\left(\rho\,r + \frac{\pi}{4}\right)^{1/2} J_0\left(\rho\,r + \frac{\pi}{4}\right) f(r)\,dr$$

$$h_q(\rho) = \int_{M+\frac{\pi}{4\rho}}^{+\infty} \frac{(\rho\,t)^{1/2}}{\left(\rho\,t - \frac{\pi}{4}\right)^q} J_0(\rho\,t)\,f\left(t - \frac{\pi}{4\rho}\right)dt$$

$$h_q(\rho) = \int_M^{+\infty} - \int_M^{M+\frac{\pi}{4\rho}} = k_q(\rho) - l_q(\rho)$$

$l_q(\rho)$ est une fonction C^∞ donc $(\theta\,l_q)_2$ appartient à $\mathcal{F}\,L_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}_2, \omega)$. Examinons

$$k_q(\rho) = \frac{1}{\rho^{q-1/2}}\int_M^{+\infty} t^{1/2} J_0(\rho\,t)\,\frac{f\left(t - \frac{\pi}{4\rho}\right)}{\left(t - \frac{\pi}{4\rho}\right)^q}\,dt.$$

Posons $f_q(z) = \dfrac{f(z)}{z^q}$ holomorphe dans le complémentaire de 0. On a pour $t \geqslant M$

$$f_q\left(t - \frac{\pi}{4\rho}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{4\rho}\right)^n \frac{f_q^{(n)}(t)}{n\,!}.$$

Considérons

$$k_{n,q}(\rho) = \int_M^{+\infty} t^{1/2} J_0(\rho\,t)\,\frac{f_q^{(n)}(t)}{n!}\,dt = \int_0^{+\infty} s\,J_0(\rho\,s)\,\varphi(s)\,ds$$

avec

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant \mathrm{M} \\ \dfrac{f_q^{(n)}(s)}{n\,!\, s^{1/2}} \quad \text{si} \quad s > \mathrm{M} \end{cases}$$

Pour montrer que $(k_{n,q})_2$ appartient à $\mathcal{F}\, \mathrm{L}_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^2, \omega)$ il suffit de montrer que l'intégrale suivante est finie

$$\mathrm{A}_{n,q} = \int_{\mathrm{M}}^{+\infty} |\, s \,| \frac{|\, f_q^{(n)}(s) \,|}{n\,!\, |\, s \,|^{1/2}} \, \omega(s)\, ds$$

On a

$$\frac{f_q^{(n)}(s)}{n\,!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_q(s + e^{i\alpha})\, e^{-in\alpha}\, d\alpha$$

donc

$$\mathrm{A}_{n,q} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \left[\int_{\mathrm{M}}^{+\infty} |\, t \,|^{1/2}\, |\, f_q(t + e^{i\alpha}) \,|\, \omega(t)\, dt \right]$$

mais

$$|\, f_q(t + e^{i\alpha}) \,| \leqslant \frac{1}{(\mathrm{M} - 1)^q} \, |\, f(t + e^{i\alpha}) \,|$$

Montrons que

$$\int_{\mathrm{M}}^{+\infty} |\, t \,|^{1/2}\, |\, f(t + e^{i\alpha}) \,|\, \omega(t)\, dt$$

est majoré par une constante indépendante de α. F étant à support compact on a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\, \mathrm{F}(u)\, du.$$

Posons $\theta_\alpha(u) = e^{iue^{i\alpha}}$, alors

$$f(t + e^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\, \theta_\alpha(u)\, \mathrm{F}(u)\, du$$

$f(t + e^{i\alpha})$ est transformée de Fourier de $\theta_\alpha(u)\, \mathrm{F}(u)$. Soit $\varphi(u)$ une fonction C^∞ à support compact, égale à 1 sur le support de $\mathrm{F}(u)$, $\theta_\alpha(u)\, \varphi(u)$ fonction C^∞ à support compact appartient à $\mathcal{F}\, \mathrm{L}^1(\mathbf{R}, (1 + |\, x \,|)^{1/2}\, \omega)$, ainsi que $\theta_\alpha(u)\, \mathrm{F}(u)$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{1/2} \, |f(t + e^{i\alpha})| \, \omega(t) \, dt = \| \theta_\alpha(u) \, \varphi(u) \, F(u) \|$$
$$\leqslant \| F(u) \| \, \| \theta_\alpha(u) \, \varphi(u) \|.$$

L'application $\alpha \to \theta_\alpha(u) \, \varphi(u)$ de $[0, 2\pi]$ dans $\mathcal{F} L^1 (\mathbf{R}, (1 + |x|^{1/2} \omega)$ est continue. En effet $[\theta_\alpha(u) \, \varphi(u) - \theta_{\alpha_0}(u) \, \varphi(u)]$ tend vers zéro uniformément en u, lorsque α tend vers α_0, ainsi que toutes ses dérivées. L'ensemble des $\theta_\alpha(u) \, \varphi(u)$ est compact, donc $\| \theta_\alpha(u) \, \varphi(u) \|$ est borné par une constante. Il suit que

$$A_{n,q} = \frac{C}{(M-1)^q}.$$

On a :

$$k_q(\rho) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \frac{1}{\rho^{n+q-1/2}} \, k_{n,q}(\rho)$$

(il est facile de le voir à l'aide de la majoration

$$\left| \frac{f_q^{(n)}(t)}{n\,!} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(t + e^{i\alpha})|}{(M-1)^q} \, d\alpha).$$

Alors

$$\theta(\rho) \, k_q(\rho) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \frac{\theta(\rho)}{\rho^{n+q-1/2}} \, k_{n,q}(\rho)$$

est tel que $(\theta \, k_q)_2$ appartient à $\mathcal{F} L^1 (\mathbf{R}^2, \omega)$ car la série des normes dans $\mathcal{F} L^1 (\mathbf{R}^2, \omega)$

$$\sum_{+\infty}^{n=0} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \frac{C}{(M-1)^q} \left\| \left(\frac{\theta(\rho)}{\rho^{n+q-1/2}} \right)_2 \right\|$$

converge. (La suite de fonctions $\dfrac{\theta(\rho)}{\rho^{n+q-1/2}}$ tend uniformément vers zéro ainsi que toutes ses dérivées ce qui assure la convergence vers zéro dans $\mathcal{F} L^1 (\mathbf{R}^2, \omega)$).

c) Pour achever de montrer que $\displaystyle\int_M^{+\infty} \cos x \rho \, f(x) \, dx$ coïncide sur (K_2) avec une fonction de $\mathcal{F} L^1_{\text{rad}} (\mathbf{R}^2, \omega)$, il suffit de remarquer que

$$\tilde{V}(\rho) = \int_M^{+\infty} V(\rho x) \, f(x) \, dx$$

est une fonction $(k+3)$ fois dérivable puisque $V^{(p)}(z) = 0\left(\dfrac{1}{z^{k+3}}\right)$ pour tout $p \geqslant 0$ assure la convergence des intégrales

$$\int_{M}^{+\infty} x^p \, | V^{(p)}(\rho x) | \; | f(x) | \, dx$$

pour $0 \leqslant p \leqslant k+3$.

Alors $(\theta \tilde{V})_2$ a une transformée de Fourier qui à l'infini est $0\left(\dfrac{1}{r^{k+3}}\right)$ avec $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, donc sommable pour le poids $\omega((x^2 + y^2)^{1/2})$. Ainsi $(\theta \tilde{V})_2$ appartient à $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}^2, \omega)$. Ceci achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOCHNER, Vorlesungen über Fouriersche Integral, Leipzig, (1932), p. 187.

[2] L. SCHWARTZ, « Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts », *C. R. Acad. Sc.*, Paris, (1948), t. 227, 424-426.

[3] WHITTAKER et WATSON, A course of Modern Analysis, Cambridge, (1927), chap. 17.

Manuscrit reçu le 25 juillet 1966.

Michel GATESOUPE,
13, rue de la Ferronnerie
91 - Igny