Annales de l'institut Fourier

Octave Galvani

La réalisation des connexions euclidiennes d'éléments linéaires et des espaces de Finsler

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 123-146

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__123_0>

LA RÉALISATION DES CONNEXIONS EUCLIDIENNES D'ÉLÉMENTS LINÉAIRES ET DES ESPACES DE FINSLER

par **O. GALVANI** (Grenoble).

I. — INTRODUCTION

1. — Les espaces de Finsler sont les espaces métriques définis par une distance élémentaire $ds = \mathcal{L}(x, dx)$, la fonction $\mathcal{L}$ des coordonnées x et de leurs différentielles étant seulement assujettie à être positivement homogène du premier degré par rapport aux différentielles. Les espaces de Riemann en sont un cas bien particulier.

E. Cartan a montré que si $\mathcal{L}$ a des dérivées troisièmes continues et conduit à un problème régulier de calcul des variations, on peut regarder l'espace F correspondant comme un espace d'éléments linéaires (1) à connexion euclidienne : F devient en somme un assemblage de morceaux infiniment petits d'espaces euclidiens, chaque morceau étant constitué par les éléments linéaires infiniment voisins d'un élément linéaire de F.

2. — On sait d'autre part qu'un espace R de Riemann analytique peut être localement considéré comme une variété euclidienne plongée dans un espace à nombre suffisant de dimensions, douée de la connexion induite par l'espace ambiant. Je vais montrer qu'il en est encore ainsi des espaces de Finsler F analytiques, mais alors que pour R l'élément générateur de la variété réalisante était le point, il faut prendre pour les variétés réalisant F un élément générateur plus complexe, à savoir l'ensemble S d'un élément linaire L et d'un multiplan passant par L. L'espace F devient alors l'assemblage de

(1) Un élément linéaire est la figure formée par un point et une direction issue de ce point.

morceaux *finis* de variétés euclidiennes, chaque morceau consistant en un voisinage d'un élément S de la variété.

3. — L'existence des réalisations d'un F donné s'obtiendra comme conséquence d'un théorème plus général relatif aux connexions euclidiennes d'éléments linéaires, et par suite applicable aussi aux espaces variationnels généralisés de Lichnerowicz [2].

4. — Les divers théorèmes d'existence qui font l'objet de cet article s'appuient sur la théorie des systèmes différentiels analytiques : ils supposent par suite l'analyticité des espaces réalisés. Ils sont d'autre part de nature *locale*.

Comme les espaces de Riemann, les réalisations d'une connexion euclidienne d'éléments linéaires dépendent de fonctions arbitraires — et aussi du nombre de dimension de l'espace où se fait la réalisation. On en profitera pour imposer aux réalisations certaines propriétés géométriques, par exemple « respecter » les points des espaces d'éléments linéaires ou les géodésiques des espaces de Finsler.

Les considérations du début de l'article relatives aux connexions d'éléments linéaires données *a priori* ou induites sur des variétés euclidiennes n'exigent que des hypothèses de continuité et de dérivabilité qui seront le plus souvent sous-entendues. Il est aisé d'en rétablir de suffisantes.

5. — **Notations générales.** — 1° Suppression du symbole Σ de sommation devant un indice figurant deux fois.

Utilisation du symbole δ_{ij} défini par :

$$(5;1)\qquad \delta_{ij}=1 \quad \text{si} \quad i=j; \qquad \delta_{ij}=0 \quad \text{si} \quad i\neq j.$$

Représentation par :

$$(5;2)\qquad \mathcal{R}_{ij},\quad (i,j)\leqslant n$$

de l'ensemble des $\mathcal{R}_{ij}$ où i et j prennent les valeurs entières $\leqslant n$.

2° Nous désignerons par SDE l'ouvrage suivant de E. Cartan, auquel nous aurons souvent à nous reporter :

Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris, Hermann, 1945.

(2) Cf. A. Lichnerowicz, Les espaces variationnels généralisés (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 62, 1945, pp. 339-384).

Les notations $d\omega$, $[\omega\varphi]$ désigneront, comme dans SDE, une différentielle et un produit *extérieurs*.

3° *Méthode du repère mobile* (3) : soit $R = (M\vec{e}_i)$, $i \leqslant n$, un repère mobile rectangulaire $(\vec{e}_i . \vec{e}_j = \delta_{ij})$ de l'espace euclidien E_n, supposé différentiable (M et les $\vec{e}_i$ différentiables). Les *composantes relatives* de R sont les ω_i, ω_j définis par

$$(5\,;\,3) \qquad dM = \omega_i \vec{e}_i\,; \qquad d\vec{e}_i = \omega_{ij}\vec{e}_j.$$

Ce sont les composantes, rapportées à R, du *déplacement infinitésimal* qui amène R sur $(M + dM,\ \vec{e}_i + d\vec{e}_i)$. Elles vérifient

$$(5\,;\,4) \qquad \omega_{ij} = -\,\omega_{ji}.$$

On représentera par $\{\omega\}$ un système de ω_i, ω_{ij} vérifiant (5 ; 4) ; et à tout $\{\omega\}$ différentiable on associera $\{\Omega\}$, soit :

$$(5\,:\,5) \qquad \Omega_i = d\omega_i - [\omega_{ij}\omega_j]\,; \qquad \Omega_{ij} = d\omega_{ij} - [\omega_{ih}\omega_{hj}].$$

Les relations de structure de E_n [intégrabilité des (5 ; 3)] s'écrivent

$$(5\,;\,6) \qquad \Omega_i = \Omega_{ij} = 0.$$

Soit $\{\omega\}$ un système de formes de Pfaff $\omega_i(u, du)$, $\omega_{ij}(u, du)$ vérifiant (5 ; 4) mais *non assujetti* à (5 ; 6). Et soit $\overline{R}(u) = (M\vec{\bar{e}}_i)$ un repère de E_n déduit d'un repère fixe $(M\vec{e}_i)$ par une rotation $\Theta(u)$ différentiable autour de $\vec{e}_i$:

$$(5\,;\,7) \qquad \vec{\bar{e}}_i = \alpha_{ij}(u)\vec{e}_j.$$

dM et $d\vec{e}_i$ étant encore définis par (5 ; 3), on aura $d\vec{\bar{e}}_i$ par :

$$(5\,;\,8) \qquad d\vec{\bar{e}}_i = d\alpha_{ij}\,.\,\vec{e}_j + \alpha_{ij}d\vec{e}_j\,;$$

on dira que le système $\{\varpi\}$ défini par (5 ; 3, 7, 8) et

$$(5\,;\,9) \qquad dM = \varpi_i\vec{\bar{e}}_i, \qquad d\vec{\bar{e}}_i = \varpi_{ij}\vec{\bar{e}}_j,$$

est le *transformé de* $\{\omega\}$ *par les rotations* $\Theta(u)$ *autour de* $\vec{e}_1$.

(3) Cf. E. Cartan, *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés* (*Exposés de Géométrie*, Paris, 1935).

II. — LES CONNEXIONS EUCLIDIENNES D'ÉLÉMENTS LINÉAIRES $\mathfrak{L}_{2n-1}$

6. — **Connexions $\mathfrak{L}_{2n-1}$.** — D'après la théorie générale de E. Cartan [4], une connexion euclidienne d'éléments linéaires, soit $\mathfrak{L}_{2n-1}$, est définie par un système $\{\omega\}$ de $\frac{n(n+1)}{2}$ formes de Pfaff ω_i, ω_{ij} $(i, j \leqslant n,\ \omega_{ij} = -\omega_{ji})$ à $2n-1$ variables u_λ, telles que les $2n-1$ formes ω_i, ω_{1i} soient indépendantes :

$$(6\,;\,1) \qquad [\omega_1\omega_2 \ldots \omega_n\omega_{12} \ldots \omega_{1n}] \neq 0.$$

A toute « courbe » $u = u(t)$ correspond alors dans l'espace euclidien E_n à n dimensions une famille de repères rectangulaires $R = [M(t), \vec{e}_i(t)]$ admettant $\{\omega[u(t)]\}$ comme composantes relatives. Les éléments $[M(t), \vec{e}_i(t)]$ seront regardés comme constituant la *carte* sur E_n de la courbe $u = u(t)$. Cette carte est définie *à un déplacement près* dans E_n.

La condition (6 ; 1) exprime que, si $[M\vec{e}_i]$ est un repère de E_n, il y a, en tout u, correspondance biunivoque entre du et l'élément linéaire $[M + \omega_i\vec{e}_i,\ \vec{e}_1 + \omega_{1i}\vec{e}_i]$: la carte infinitésimale sur l'espace holonome tangent est biunivoque.

7. — **Systèmes équivalents de composantes relatives.** — Nous dirons que $\{\omega\}$ constitue *un système de composantes relatives* de $\mathfrak{L}_{2n-1}$. Nous ne considérerons que des composantes *rectangulaires* $(\omega_{ij} = -\omega_{ji})$ dans lesquelles l'indice 1 joue le rôle particulier défini au n° 6 dans la construction de la carte : la *connexion de composantes* $\{\omega\}$ est ainsi bien déterminée.

Deux connexions doivent être regardées comme identiques si elles fournissent la même carte. Deux systèmes $\{\omega\}$, $\{\bar{\omega}\}$ définissant la même carte seront dits équivalents. Deux systèmes transformés l'un de l'autre par des rotations autour de $\vec{e}_i$ [cf. (5 ; 7)] sont équivalents, car une telle transformation conserve les cartes. La conservation des cartes infinitésimales entraîne la nécessité de cette condition.

[4] Cf. E. Cartan, *La méthode du repère mobile* (*loc. cit.*, n° 5), p. 59-61.

8. — **Connexions semi-ponctuelles.** — En général, le système

(8 ; 1 $\qquad \omega_i = 0, \qquad i \leqslant n,$

n'est pas complètement intégrable, et l'espace des u ne peut être engendré par des variétés U_{n-1} à $n-1$ dimensions telles que la carte d'une courbe quelconque de U_{n-1} soit formée d'éléments linéaires de même centre.

Les connexions vérifiant (8 ; 1) seront dites *semi-ponctuelles*, l'espace des u doué d'une telle connexion *semi-ponctuel*.

9. — **Courbure et torsion des $\mathcal{L}_{2n-1}$.** — D'après (6 ; 1) les ω_i, ω_{1i} sont résolubles par rapport aux du, et les Ω (du n° 5) sont de la forme :

(9 ; 1) $\quad \Omega_s = P_{shk}[\omega_h \omega_k] + Q_{shk}[\omega_h \omega_{1k}] + R_{shk}[\omega_{1h}\omega_{1k}], \; s = i, \; ij$

Les P, Q, R constituent les composantes de la *torsion* de $\mathcal{L}_{2n-1}$, pour $s = i$, et de sa *courbure* pour $s = ij$.

Les *connexions semi-ponctuelles sont caractérisées* par

(9 ; 2) $\qquad R_{ijk} = 0, \qquad i, j, k \leqslant n.$

Cela résulte immédiatement de (9 ; 1) et de la complète intégrabilité de (8 ; 1).

Rappelons que $P \equiv Q \equiv R \equiv 0$ caractérise les espaces holonomes : on a alors un espace d'éléments linéaires localement euclidien.

10. — **Espaces d'éléments linéaires L_{2n-1} à connexion euclidienne.** — Soit $x = (x_1, \dots x_n)$ le point courant d'une variété différentielle V_n à n dimensions. En tout $x \in V_n$, les dx forment un espace vectoriel V' ; soit $x' = (x'_1 \dots x'_n)$ une direction de V'. Deux directions sont identiques si leurs x'_i sont proportionnels. Les éléments linéaires (x, x') de V_n forment une variété W_{2n-1} à $2n-1$ dimensions.

On appellera faisceau d'éléments linéaires une variété à une dimension engendrée par des éléments linéaires de même centre.

Un espace d'éléments linéaires à connexion euclidienne est une variété W_{2n-1} douée d'une connexion $\mathcal{L}_{2n-1}$ qui « respecte les points », c'est-à-dire telle que les faisceaux de W_{2n-1} aient pour cartes des faisceaux d'éléments linéaires de E_n. Ce sont donc des espaces « semi-ponctuels ». On les désignera par L_{2n-1}.

11. — **Composantes relatives des L_{2n-1}.** — On peut les exprimer à l'aide des coordonnées (surabondantes) x_i, x'_i. Les ω_i ne dépendent pas des dx'_i. Les $\{\omega\}$ sont de la forme :

$$(11\ ;\ 1)\qquad \begin{cases} \omega_i = \xi_{ij}(x,\, x')dx_j \\ \omega_{ij} = \xi_{ijh}(x,\, x')dx_h + \eta_{ijh}(x,\, x')dx'_h \end{cases}$$

et les ξ, η sont homogènes de degré 0 par rapport aux x', et vérifient

$$(11\ ;\ 2)\qquad x'_h\xi_{ih} = 0 \qquad \text{pour} \qquad 2 \leqslant i \leqslant n$$

$$(11\ ;\ 3)\qquad x'_h\eta_{ijh} = 0 \qquad \text{quels que soient } i,\ j.$$

(11 ; 2) traduit la signification de x' dans V_n et le rôle que nous avons assigné à l'indice 1 : si $dx = x'dt$, $d\mathrm{M}$ est porté par $\vec{e}_1$.

(11 ; 3) exprime l'homogénéité des coordonnées x'_i : les relations $dx = 0$, $dx' = x'dt$ définissent un élément linéaire $(x,\, x')$ donc entraînent $\omega_i = \omega_{ij} = 0$.

12. — **Le ds^2 et la dérivation absolue dans les L_{2n-1}.** — Les vecteurs $\vec{X}$ doués de l'élément d'appui $(x,\, x')$ (5) forment un espace vectoriel euclidien $V'(x,\, x')$ en prenant

$$(12\ ;\ 1)\qquad \vec{X}^2 = g_{ij}X^iX^j$$

les g_{ij} étant définis par

$$ds^2 = \Sigma\omega_i^2 = g_{ij}(x,\, x')dx_idx_j$$

et les X^i par $\vec{X} = X^i\vec{\mu}_i$, $\vec{\mu}_i$ étant le vecteur $dx_h = \delta_{ih}$.

Ce ds^2 est invariant dans les transformations $\Theta(u)$, et $\vec{X}^2$ ne dépend pas du choix des composantes ω_i, ω_{ij}, définissant L_{2n-1}.

Soit $\vec{e}_i$ le vecteur de $V'(x,\, x')$ défini par $\omega_h = \delta_{ih}$: on a

$$\vec{\mu}_i = \lambda_{ij}\vec{e}_j$$

et on en déduit

$$d\vec{\mu}_i = d\lambda_{ij}\vec{e}_j + \lambda_{ih}\omega_{hj}\vec{e}_j = \omega_i^j\vec{\mu}_j,$$

d'où la différentielle absolue de $\vec{X}$:

$$(12\ ;\ 2)\qquad DX^i = dX^i + X^k\omega_k^i.$$

(5) Cf. E. Cartan, Les espaces de Finsler (*Exposés de Géométrie*, Paris, 1934), pp. 4-6.

Soit (ϖ_i, ϖ_{ij}) un système déduit de ω_i, ω_{ij} par des rotations $\Theta(u)$: les repères $\vec{e}_i$ correspondant à $\{\varpi\}$ se déduisent de $\vec{e}_i$ par des rotations, et les $\vec{\mu}_i$ restent fixes : donc les $\omega_i^j(x, x', dx, dx')$ ne dépendent pas des composantes choisies.

Réciproquement les g_{ij} et les ω_i^j caractérisent L_{2n-1}, et à partir d'eux on peut construire les $\{\omega\}$ du n° 11. On prendra dans $V'(x, x')$ n vecteurs unitaires rectangulaires $\vec{e}_i$, $\vec{e}_1$ étant porté par x' (rappelons que $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont rectangulaires si $g_{ij}X^iY^j = 0$). On en déduit les ω_i. Les ω_i^j définissent ensuite les $d\vec{e}_i$, donc les ω_{ij}.

Une forme quadratique $g_{ij}X^iX^j$ définie positive arbitraire, et des ω_i^j arbitraires définissent donc une L_{2n-1}. Si les g_{ij} et les ω_i^j sont analytiques, on peut choisir les $\vec{e}_i$ de façon que les ω_i et les ω_{ij} soient analytiques.

III. — LA CONNEXION $\mathcal{L}_{2n-1}$ INDUITE SUR LES VARIÉTÉS EUCLIDIENNES V_{2n-1} D'ÉLÉMENTS MULTILINÉAIRES

13. — **Éléments S considérés.** — Dans l'espace euclidien E_n à $N > n$ dimensions, on considérera des éléments, que nous appellerons multilinéaires, formés d'un élément linéaire $L = (M, \Delta)$ et d'un n-plan P contenant L. Un tel élément sera représenté par $S = (L, P) = (M, \Delta, P)$ ou encore $(M\vec{e}_1\vec{e}_i)$, $\vec{e}_1$ étant un vecteur de Δ, et $\vec{e}_1$, $\vec{e}_i$ n vecteurs indépendants de P.

Inversement une notation telle que P(S) désignera le n-plan support de l'élément S.

14. — **Variétés V_{2n-1} à $2n-1$ dimensions d'éléments S de E_N.** — Quand $S = (M, \Delta, P)$ décrit une telle variété, son centre M(S) décrit une variété ponctuelle $V_\mu(M)$ et l'élément linéaire $L(S) = (M, \Delta)$ décrit une variété $V_\lambda(L)$. Les nombres μ et λ de dimensions de ces variétés sont $\leqslant 2n-1$. Nous ne considérerons que des V_{2n-1} telles que $\lambda = 2n-1$.

La variété V_{2n-1} est *différentielle* (resp. p fois, analytique) si l'on peut trouver dans P(S) n vecteurs unitaires rectangulaires $\vec{e}_i$, avec $\vec{e}_1$ sur $\Delta(S)$ tels que les coordonnées de M et les composants des $\vec{e}_i$ par rapport à un repère fixe de E_N soient des fonctions différentielles (resp. p fois, analytiques) de $2n-1$ variables $u=(u_1 \ldots u_{2n-1})$.

15. — **Composantes relatives d'ordre o d'une V_{2n-1} différentielle.** — A tout $S(u) \in V_{2n-1}$ on associera un repère rectangulaire $R_N=(M\vec{e}_i\vec{e}_\alpha)$ de E_n $(n<\alpha\leqslant N)$ tel que $S=(M\vec{e}_1\vec{e}_i)$ et que les $\vec{e}_i$, $\vec{e}_\alpha$ soient différentiables. Ces repères constituent une *famille d'ordre* o de repères de V_{2n-1}, et leurs composantes relatives $\{\varpi\}$ un système de composantes d'ordre o (⁶). Deux systèmes de composantes d'ordre o se déduisent l'un de l'autre par des rotations évidentes.

On appellera $R_n(u)$ le repère $(M\vec{e}_i)$, et $R_n(u+du)$ le repère $(M+dM,\ \vec{e}_i+d\vec{e}_i)$.

16. — **Connexion $\mathcal{L}_{2n-1}$ induite sur V_{2n-1}.** — Considérons la carte suivante de V_{2n-1} sur E_n : la carte infinitésimale $\gamma(S)$ représente tout S' voisin de S par la projection orthogonale sur $P(S)$ de l'*élément linéaire* $L(S')$; pour la V_{2n-1} générique $\gamma(S)$ est biunivoque ; le raccordement [dans la construction de la carte le long d'une $V_1(S)$] se fait en projetant orthogonalement $\gamma(S')$ sur $P(S)$. Cette « carte intrinsèque » de V_{2n-1} sur E_n définit, conformément à un principe général (⁷) de réalisation des espaces de Cartan, la connexion d'éléments linéaires $\mathcal{L}_{2n-1}$ induite sur V_{2n-1} par E_N.

Ces considérations conduisent à la définition analytique suivante :

Définition. — *Soient* $\{\omega\}$ *les composantes, rapportées à* $R_n(u)$, *du déplacement infinitésimal de* E_n *qui amène* $R_n(u)$ *sur* $R_n(u+du)$, *les* R_n *étant les repères définis au n° 15. La connexion* $\mathcal{L}_{2n-1}$ *induite sur* V_{2n-1}, *ou réalisée par* V_{2n-1}, *est la connexion de composantes* $\{\omega\}$ (cf. n° 7).

Cette définition implique que V_{2n-1} ne réalise une $\mathcal{L}_{2n-1}$ que si $\{\omega\}$ vérifie (6 ; 1), et n'est cohérente que si $\mathcal{L}_{2n-1}$ est indépendante de la famille de repères d'ordre o choisie sur V_{2n-1}, ce que nous allons vérifier.

(⁶) Cf. E. Cartan, *La méthode du repère mobile*... (*loc. cit.*, n° 5), pp. 38-40.

(⁷) Cf. O. Galvani, Sur la réalisation des espaces ponctuels à torsion en géométrie euclidienne (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 62, 1945, p. 6).

17. — **Composantes $\{\omega\}$ de la connexion induite.** — Dans E_N :

$$\begin{cases} M + dM = M + \varpi_i \vec{e}_i + \varpi_\alpha \vec{e}_\alpha, & (i, j) \leqslant n, \\ \vec{e}_i + d\vec{e}_i = \vec{e}_i + \varpi_{ij} \vec{e}_j + \varpi_{i\alpha} \vec{e}_\alpha, & n < \alpha \leqslant N. \end{cases}$$

et, les $\vec{e}_\alpha$ étant orthogonaux à $P(u)$:

$$(17\,;\,1) \qquad \omega_i = \varpi_i\,; \qquad \omega_{ij} = \varpi_{ij}.$$

Les $\{\omega\}$ définissent donc une $\mathfrak{L}_{2n-1}$ si les ϖ_i, ϖ_{1i} (des R_N ; $i \leqslant n$) sont indépendantes. Les V_{2n-1} correspondantes seront dites *ordinaires*. Elles sont caractérisées par la propriété suivante : les $V_\lambda(L)$ sont à $2n-1$ dimensions et aucune $V_1(L) \subset V_{2n-1}(L)$ n'est en $L(S)$ orthogonale à $P(S)$ tout le long de $\Delta(S)$.

Deux familles de R_N d'ordre 0 fournissent la même $\mathfrak{L}_{2n-1}$, car les rotations des $\vec{e}_\alpha$ n'altèrent pas les ϖ_i, ϖ_{ij} et les rotations des $\vec{e}_i$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$ les changent en un système équivalent (cf. n° 7). La définition du n° 16 est légitimée.

On appellera composantes *internes* d'ordre 0 de V_{2n-1} les ϖ d'indices $\leqslant n$. Les résultats précédents peuvent s'énoncer comme suit :

Théorèmes. — I. — *Pour qu'une* V_{2n-1} *réalise une* $\mathfrak{L}_{2n-1}$, *il faut et suffit qu'elle soit ordinaire.*

II. — *Les composantes de la* $\mathfrak{L}_{2n-1}$ *induite sont les composantes internes d'ordre* 0 *de* V_{2n-1}.

18. — **Variétés V_{2n-1} réalisant des espaces semi-ponctuels.** — Elles sont telles que le système :

$$(8\,;\,1) \qquad \varpi_i = 0 \qquad i \leqslant n$$

soit complètement intégrable. Par tout $S \in V_{2n-1}$ passe alors une variété W_{n-1} vérifiant (8 ; 1). Les $M(S)$ correspondant à $S \in W_{n-1}$ décrivent une $W_{\mu'}(M)$ à $\mu' \leqslant n-1$ dimensions. $V_\mu(M)$ est engendrée par les $W_{\mu'}(M)$. En tout $M(S)$, $P(S)$ est d'après (8 ; 1) totalement perpendiculaire à $W_{\mu'}(M)$. Le cas $\mu' = 0$ peut être regardé comme un cas particulier de l'orthogonalité. On pourrait ainsi caractériser géométriquement les V_{2n-1} à $\mathfrak{L}_{2n-1}$ semi-ponctuelle.

Les $W_{\mu'}(M)$ sont les images des points (centres de faisceaux) de l'espace réalisé.

Une classe remarquable de V_{2n-1} est celle qu'on obtient à partir d'une V_n ponctuelle de E_N, en associant à tout $M \in V_n$ un n-plan P, et en prenant $S = (M, \Delta, P)$, avec Δ variable dans P. La connexion $\mathcal{L}_{2n-1}$ induite est semi-ponctuelle. Les composantes relatives de ces $V_{2n-1}(S)$ vérifient les $(n+1)(N-n)$ équations (nécessaires et suffisantes) :

$$\begin{aligned} &(18\,;\,1) \qquad [\varpi_\alpha \varpi_1 \cdots \varpi_n] = 0, \\ &(18\,;\,2) \qquad [\varpi_{i\alpha} \varpi_1 \cdots \varpi_n] = 0, \end{aligned} \qquad n < \alpha \leqslant N,\ i \leqslant n.$$

Une classe plus étendue est celle des V_{2n-1} qui vérifient seulement (18 ; 1), et qui seront dites *semi-ponctuelles*. Alors :

$$\mu' = 0, \qquad \mu = n$$

et les images des points de l'espace réalisé sont des *points* d'une variété V_n ponctuelle de E_N. $V_{2n-1}(L)$ est une famille à n paramètres de cônes à $(n-1)$ dimensions, et $V_{2n-1}(S)$ s'obtient en associant à tout $L \in V_{2n-1}(L)$ un n-plan P passant par L.

IV. — RÉALISATION DES $\mathcal{L}_{2n-1}$

19\. — On se propose maintenant de montrer que, étant donnée une $\mathcal{L}_{2n-1}$, il existe des V_{2n-1} qui la réalisent, du moins localement.

La connexion $\mathcal{L}_{2n-1}$ est donnée par ses composantes relatives $\omega_i(u)$, $\omega_{ij}(u)$. D'après (17 ; 1) on est amené à chercher dans E_N une famille de repères R_N fonctions des u dont les composantes relatives soient $\omega_i \omega_{ij}$ [8].

Les repères rectangulaires de E_N dépendent de $\dfrac{N(N+1)}{2}$ paramètres z_λ, analytiquement si le paramétrage est convenablement choisi. Leurs composantes relatives sont des formes de Pfaff analytiques déterminées de z, soient $\varpi_s(z)$, $\varpi_{st}(z)$, $s, t \leqslant N$. Le problème se ramène donc à l'existence de fonctions z des u vérifiant le système différentiel (Σ) :

$$\Sigma \begin{cases} \varpi_i(z) = \omega_i(u) \\ \varpi_{ij}(z) = \omega_{ij}(u) \end{cases} \qquad i, j \leqslant n.$$

Toute solution du système Σ aux fonctions inconnues z des variables indépendantes u définit une réalisation de la $\mathcal{L}_{2n-1}$ donnée.

[8] L'indépendance des ω_i, ω_{1i} assure alors celle des ϖ_i, ϖ_{1i} et (17 ; 1) est suffisante ; la V_{2n-1} est ordinaire.

Remarquons que seuls interviennent les z qui fixent l'origine et les n premiers vecteurs $\vec{e}_i$ de R_N (cf. SDE, p. 129). On aura donc

$$\xi = \frac{n(n+1)}{2} + (N-n)(n+1)$$

fonctions inconnues.

20. — Quand la $\mathcal{L}_{2n-1}$ donnée est analytique, Σ est analytique, et la théorie des systèmes en involution conduit au

Théorème. — *Toute $\mathcal{L}_{2n-1}$ analytique est réalisable dans l'espace euclidien à $N = 2n^2 - n$ dimensions, au voisinage de chacun de ses éléments générateurs. La solution générale dépend de $n(n^2-1)$ fonctions arbitraires de $2n-1$ arguments.*

Démonstration. — Compte tenu des équations de structure de E_N, la fermeture de Σ conduit au système :

$$\bar{\Sigma}\left\{\begin{array}{ll} \Sigma\left\{\begin{array}{l} \varpi_i = \omega_i \\ \varpi_{ij} = \omega_{ij} \end{array}\right. & \Big\}\ \rho_1 = \dfrac{n(n+1)}{2} \text{ équations} \\ \Sigma'\left\{\begin{array}{l} [\varpi_\alpha \varpi_{\alpha i}] = \Omega_i \\ [\varpi_{\alpha j} \varpi_{\alpha i}] = \Omega_{ij} \end{array}\right. & \Big\}\ \rho_2 = \dfrac{n(n+1)}{2} \text{ équations.} \end{array}\right.$$

Nous allons montrer que $\bar{\Sigma}$ est en involution en appliquant le critère suffisant (K) suivant :

21. — **Critère (K) d'involution.** — Pour qu'un système différentiel fermé composé de ρ_1 équations linéaires et de ρ_2 équations quadratiques aux fonctions inconnues z de ν variables indépendantes u soit en involution, il suffit qu'il existe, dans un élément intégral I_ν à ν dimensions n'introduisant aucune relation entre les du, une chaîne d'éléments linéaires I_q, $0 \leqslant q \leqslant \nu - 1$, à q dimensions :

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \ldots \subset I_{\nu-1} \subset I_\nu,$$

dont les caractères réduits σ (cf. SDE, p. 90) vérifient

$$\sigma_0 = \rho_1 \qquad \sigma_p = \rho_2 \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant p \leqslant \nu - 1.$$

22. — **Démonstration de (K).** — Soient $\bar{s}'_p$ et $\bar{s}_p$ les rangs des systèmes polaires réduit et non réduit (S'_p) et (S_p) de l'élément intégral générique à p dimensions ; posons :

$$22\,;\,1)\quad \bar{\sigma}_p = \sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_p = \rho_1 + p\rho_2 \qquad \text{pour} \qquad p \leqslant \nu - 1.$$

De par la formation de (S_p) :

(22 ; 2) $$\bar{s}_p \leqslant \rho_1 + p\rho_2.$$

D'autre part

(22 : 3) $$\bar{s}'_p \leqslant \bar{s}_p \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_p \leqslant \bar{s}'_p.$$

Donc d'après (22 ; 1, 2, 3) :

(22 ; 4) $$\bar{s}'_p = \bar{s}_p \quad \text{pour} \quad p \leqslant \nu - 1$$

et (S_p) n'introduit pour $p \leqslant \nu - 1$ aucune relation entre les du, le système donné est en involution (cf. SDE, p. 89).

23. — **Application de (K) au système $\bar{\Sigma}$.** — On va montrer qu'il existe un point intégral I_0 et ν éléments linéaires intégraux ε_p tels que les éléments $I_p = (I_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ soient intégraux pour $p \leqslant \nu$ et vérifient le critère.

Les éléments ε_h et tout élément linéaire inconnu x seront définis par :

$$\varepsilon_h \begin{cases} \omega_i^i(h) = a_i(h), & \omega_{1i}(h) = a_{1i}(h), \quad \varpi_i(h), \quad \varpi_{1i}(h), \\ \vec{a}(h) = \varpi_\alpha(h)\vec{u}_\alpha, & \vec{a}_i(h) = \varpi_{\alpha i}(h)\vec{u}_\alpha = a_{\alpha i}\vec{u}_\alpha, \end{cases}$$

$$x \begin{cases} \omega_i(x), \quad \omega_{1i}(x), & \varpi_i^1(x), \quad \varpi_{1i}(x), \\ \vec{x} = \varpi_\alpha(x)\vec{u}_\alpha, & \vec{x}_i = \varpi_{\alpha i}(x)\vec{u}_\alpha = x_{\alpha i}\vec{u}_\alpha, \end{cases}$$

les $\vec{u}_\alpha$ désignant $N - n$ vecteurs orthogonaux d'un espace euclidien auxiliaire E_α.

24. — Le système polaire (σ_p) de I_p s'écrit alors :

$$\begin{matrix} (24\,;\,1) \\ (24\,;\,2) \\ (24\,;\,3) \\ (24\,;\,4) \end{matrix} \qquad (\sigma_p) \begin{cases} (1) & \varpi_i(x) = 0 \\ (2) & \varpi_{ij}(x) = 0 \\ (3) & \vec{x}\vec{a}_i(h) - \vec{x}_i\vec{a}(h) = 0 \\ (4) & \vec{x}_j\vec{a}_i(h) - \vec{x}_i\vec{a}_j(h) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{mod. } du. \\ h \leqslant p \\ i \leqslant n \end{cases}$$

Les équations (1), (2) laissent les du arbitraires et déterminent $\varpi_i(x)$, $\varpi_{ij}(x)$.

Les équations (3), (4) donnent les projections de $\vec{x}_i$ sur les $\vec{a}(h)$ et les $\vec{a}_j(h)$ où $j < i$, en fonction des du, de $\vec{x}$ et des produits scalaires $\vec{x}_i\vec{a}_j(h)$ où $j > i$. Pour que (σ_p) soit compatible, il *suffit* que les vecteurs $\vec{a}(h)$, $\vec{a}_j(h)$ où $j \leqslant n - 1$ soient indépendants. On prendra alors arbitrairement les du, le vecteur $\vec{x}$, et les $\vec{x}_i\vec{a}_j(h)$ où $i < j \leqslant n-1$, d'où les $\vec{x}_i\vec{a}(h)$ et les $\vec{x}_j\vec{a}_i(h)$. On a alors les projections des $\vec{x}_i$, où $i \leqslant n-1$, sur les $\vec{a}(h)$, $a_1(h)$, ..., $\vec{a}_{n-1}(h)$.

Soient $\vec{a}_n(h_1)$ les $\vec{a}_n(h)$ qui forment avec les $\vec{a}(h)$, $\vec{a}_j(h)$ où $j \leqslant n-1$, un système $\mathcal{B}$ de vecteurs indépendants, et $\vec{a}_n(h_2)$ les $\vec{a}_n(h)$ qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}$. On prendra arbitrairement les $\vec{x}_i\vec{a}_n(h_1)$ et on en déduira les $\vec{x}_i\vec{a}_n(h_2)$ (par combinaisons linéaires). On a alors les $\vec{x}_i\vec{a}_n(h)$ d'où les $\vec{x}_n\vec{a}_i(h)$, et finalement les $\vec{x}_i$ ont des projections déterminées sur tous les $\vec{a}$ indépendants compatibles avec leurs projections sur les autres $\vec{a}$.

Si le nombre de dimensions q de l'espace auxiliaire E_α est suffisant, on pourra prendre $\vec{x}$ et les $\vec{x}_i$ où $i \leqslant n-1$ indépendants entre eux et indépendants des $\vec{a}(h)$, $\vec{a}_i(h)$ où $i \leqslant n-1$: l'élément intégral (I_p, x) est alors un élément I_{p+1} dont le (σ_{p+1}) est compatible avec des du arbitraires. Pour $p \leqslant 2n-2$, il suffit que le nombre q de dimensions de E_α soit :

$$q = N - n = (2n-2)n.$$

On a alors une chaîne

$$I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_{2n-1}$$

telle que I_{2n-1} n'introduit aucune relation entre les du.

De plus les équations (24 ; 3, 4) réduites sont alors résolubles par rapport à $\vec{x}_i\vec{a}(h)$ et $\vec{x}_i\vec{a}_j(h)$ où $j < i$, et comme ces vecteurs $\vec{a}$ sont indépendants, les équations (24 ; 3, 4) sont indépendantes, et par suite de rang $p\dfrac{n(n+1)}{2}$; d'autre part, elles ne contiennent ni ϖ_i, ni ϖ_{ij} et le système réduit (σ_p) considéré comme système linéaire par rapport aux ϖ est de rang

$$\rho_1 + p\rho_2 = (p+1)\frac{n(n+1)}{2}.$$

Les ϖ étant, en dz, des formes indépendantes, le système (σ_p) est par rapport aux dz de rang $\rho_1 + p\rho_2$. Les conditions (K) sont donc vérifiées $(\sigma_0 = \rho_1,\ \sigma_p = \rho_2)$ et Σ est en involution.

25. — **Degré d'arbitraire de la solution générale.** — D'après (22 ; 4) on a

$$\sigma_p = \overline{s'_p} = \overline{s_p}$$

et l'on sait d'autre part (SDE, p. 74) que la solution générale dépend de

$$H = \xi - \overline{s}_{2n-2}$$

fonctions arbitraires des $2n-1$ arguments u, ξ étant le nombre des fonctions inconnues. Ici :

$$N = 2n^2 - n$$

$$\xi = \frac{n(n+1)}{2} + 2n(n-1)(n+1)$$

$$\overline{s}_{2n-2} = \overline{\sigma}_{2n-2} = (2n-1)\frac{n(n+1)}{2}$$

d'où

$$H = n(n^2-1).$$

V. — RÉALISATIONS DES $\mathcal{L}_{2n-1}$ SEMI-PONCTUELLES PAR DES V_{2n-1} SEMI-PONCTUELLES

26. — **Système différentiel correspondant à ces réalisations.** — C'est le système

$$(\Sigma_1)\begin{cases} (1) & \varpi_i = \omega_i & (26\,;\,1) \\ (2) & \varpi_{ij} = \omega_{ij} & (26\,;\,2) \\ (3) & [\varpi_\alpha \varpi_{\alpha i}] = \Omega_i & (26\,;\,3) \\ (4) & [\varpi_{\alpha j} \varpi_{\alpha i}] = \Omega_{ij} & (26\,;\,4) \\ (5) & [\varpi_\alpha \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n] = 0 & (26\,;\,5) \end{cases}$$

obtenu en adjoignant à Σ la condition (18 ; 1) pour que V_{2n-1} soit semi-ponctuelle, et en y remplaçant les ϖ_i par les ω_i auxquels ils sont égaux d'après $(\overline{\Sigma}, 1)$, d'où (5).

Ce système Σ_1 *est fermé.* En effet, la connexion de composantes $\{\omega\}$ étant semi-ponctuelle

$$(26\,;\,6) \quad d\omega_i = [\omega_{ij}\omega_j] + P_{ijk}[\omega_j\omega_k] + Q_{ijk}[\omega_j\omega_{1k}] \qquad [R_{ijk} = 0, \text{ cf. } (9\,;\,2)].$$

Soit

$$\Phi = [\omega_1\omega_2 \ldots \omega_n]\,;$$

les relations (26 ; 6) donnent :

$$d\Phi = -[\Psi\Phi] \qquad \text{avec} \qquad \Psi = Q_{iik}\omega_{1k}.$$

Les (26 ; 5) s'écrivent :

$$(26\,;\,7) \qquad [\varpi_\alpha\Phi] = 0 \qquad n < \alpha \leqslant N.$$

et leurs équations de fermeture sont

$$[d\varpi_\alpha\Phi] - [\Psi\varpi_\alpha\Phi] \equiv [\varpi_{\alpha i}\varpi_i\Phi] + [\varpi_{\alpha\beta}\varpi_\beta\Phi] - [\Psi\varpi_\alpha\Phi] = 0 \qquad n < \beta \leqslant N$$

et sont conséquences de (26 ; 1 et 7) et de $[\omega_i\Phi] = 0$, qui est évidente.

27. — Nous allons montrer que, pour N assez grand, Σ_1 est en involution, si du moins il est analytique, ce qui établira le théorème suivant :

Théorème. — *Toute $\mathfrak{L}_{2n-1}$ semi-ponctuelle analytique est réalisable localement dans l'espace euclidien à* $N = 2(n^2 - n + 1)$ *dimensions, par des variétés V_{2n-1} semi-ponctuelles. La solution générale dépend de $n(n-1)^2$ fonctions arbitraires de $2n - 1$ arguments.*

28. — **Démonstration de l'involution de Σ_1.** — Nous chercherons une chaîne

$$(C) \qquad I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_{2n-1}$$

d'éléments intégraux I_q de Σ_1 à q dimensions telle que I_{2n-1} n'introduise aucune relation entre les du. Soit

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_p$$

le rang du système polaire réduit de I_p ; posons

$$P = (2n-1)\sigma_0 + (2n-2)\sigma_1 + \cdots + \sigma_{2n-2}.$$

Le système Σ_1 définit d'autre part un système d'équations entre les paramètres $t_{\lambda s}$ des équations

$$\varpi_\lambda = t_{\lambda s}\omega_s \qquad (\lambda = i,\ ij\,;\ s = i,\ 1i)$$

des éléments intégraux à $2n-1$ dimensions qui n'introduisent pas de relations entre les du. Soit X le nombre des équations indépendantes de ce système aux $t_{\lambda s}$. Pour que Σ_1 soit en involution, *il suffit qu'on ait démontré pour une chaîne particulière* (C) *la relation*

$$X \leqslant P.$$

C'est en effet la condition suffisante (SDE, p. 96), compte tenu de l'indépendance des ω et des ϖ.

29. — **Recherche de la chaîne** (C). — On cherchera les $I_p = (I_0\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p)$ contenant des ε_h de la forme :

$$\varepsilon_h \begin{cases} \varpi_i = \delta_{ih}, & \varpi_{1i} = \delta_{hi'}, \quad i' = n + i - 1 \\ \vec{a}(h) = \omega_\alpha(h)\vec{u}_\alpha, & \vec{a}_i(h) = \omega_{\alpha i}(h)\vec{u}_\alpha \end{cases}$$

les $\vec{u}_\alpha$ étant $q = N - n$ vecteurs rectangulaires d'un E_α auxiliaire.

Il est clair qu'alors I_{2n-1} n'introduit aucune relation entre les du.

Les Ω sont des formes quadratiques des ω_i, ω_{1j} ; la forme bilinéaire associée à Ω est connue pour deux ε_h, ε_k quelconques, et sera désignée par $\Omega(h, k)$.

En particulier, d'après (9 ; 2)

$$(29\,;\,1) \quad \Omega_i(h, k) = 0 \quad \text{pour} \quad h > n \quad \text{et} \quad k > n.$$

30. — **Détermination de** (C). — Les ε_p se détermineront par récurrence. Pour plus de clarté, on remplacera $\vec{a}(p+1)$ par $\vec{x}$ dans la *recherche* de ε_{p+1}.

1° Les calculs du n° 24 donnent les ε_p jusqu'à $p = n$, si toutefois q est assez grand pour que les $\vec{a}(h)$ et les $\vec{a}_i(h)$ où h et i sont $\leqslant n - 1$ soient indépendants.

2° Pour $p > n$, soit $p' = p - n$; (26 ; 5) donne :

$$(30\,;\,1) \quad \vec{x} = 0 \quad \text{donc} \quad (30\,;\,2) \quad \vec{a}(n + p') = 0.$$

3° Les (26 ; 3) donnent :

$$(30\,;\,3) \quad \vec{x}_i\vec{a}(h) = \Omega_i(h, p+1) \quad \left(\text{car } \vec{x} = 0\right).$$

Les (30 ; 3) où $h > n$ sont vérifiées identiquement d'après (29 ; 1) et (30 ; 2).

4° Les (26 ; 4) donnent

$$(30\,;\,4) \quad \vec{x}_j\vec{a}_i(k) - \vec{x}_i\vec{a}_j(k) = \Omega_{ij}(k, p+1) \qquad k \leqslant p.$$

Les raisonnements du n° 24 s'appliquent à (30 ; 3, 4) et conduisent à prendre q assez grand pour que les $\vec{a}(h)$ et $\vec{a}_i(k)$ où $h \leqslant n$, $i \leqslant n - 1$, $k \leqslant 2n - 2$ puissent être indépendants : cela donne

$$q = n + 2(n-1)^2.$$

5° Puisque $q \geqslant n^2$, on peut prendre (au 1°) les $\vec{a}(h)$ et les $\vec{a}_i(h)$ indépendants pour $i \leqslant n-1$, $h \leqslant n$.

Alors, $I_{n+p'-1}$ étant supposé connu et tel que ses $\vec{a}(h)$, $\vec{a}_i(k)$ soient indépendants pour $i \leqslant n-1$, les équations (30 ; 3, 4) sont compatibles si $n+p'-1 \leqslant 2n-2$, et permettent, si $n+p'-1 \leqslant 2n-3$, de prendre pour $i \leqslant n-1$ les $\vec{x}_i$ indépendants entre eux et indépendants des $\vec{a}(h)$, $\vec{a}_i(k)$. D'où par récurrence la chaîne (C) cherchée, dont nous allons montrer qu'elle vérifie

$$X \leqslant P.$$

31. — **Calcul de P.** — Le calcul du n° 24 montre que

$$\sigma_p = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{pour} \qquad p \leqslant n-1.$$

Pour $p = n$, les équations réduites tirées des $\bar{\Sigma}$ sont encore toutes indépendantes, puisque les vecteurs $\vec{a}(h)$, $\vec{a}_i(h)$ sont indépendants pour $i \leqslant n-1$, $h \leqslant n$. D'autre part, elles ne contiennent pas $\vec{x}$, et les équations réduites tirées de (26 ; 5) sont

$$\omega_\alpha(x) = 0,$$

donc de rang q. Il en résulte que

$$\sigma_n = \frac{n(n+1)}{2} + q.$$

Pour $p > n$, toutes les équations réduites (3′, 4′) tirées de (30 ; 3, 4) sont indépendantes, mais les (3′) sont les mêmes quel que soit p, de sorte que

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+2} = \cdots = \sigma_{2n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Finalement :

$$P = \frac{n^2(n+1)(2n-1)}{2} + q(n-1) - \frac{n(n-1)(n-2)}{2}.$$

32. — **Calcul de X.** — Soit X_i, $i \leqslant 5$ les nombres de relations indépendantes en $t_{\lambda s}$ tirées des équations (26 ; i) :

$$X_1 = n(2n-1)$$

$$X_2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{2}$$

$$X_5 = (n-1)q.$$

Les relations tirées de $(\Sigma_1, 3)$ s'obtiennent par identification en $[\omega_i\omega_j]$ et en $[\omega_i\omega_{1j}]$, puisqu'aucun des 2 membres n'a de termes en $[\omega_{1i}\omega_{1j}]$; donc :

$$X_3 \leqslant \left[\frac{n(n-1)}{2} + n(n-1)\right]n.$$

Enfin, les (26 ; 4) ayant des termes en $[\omega_i\omega_j]$, $[\omega_i\omega_{1j}]$, $[\omega_{1i}\omega_{1j}]$:

$$X_4 \leqslant \left[\frac{n(n-1)}{2} + n(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]\frac{n(n-1)}{2}.$$

On trouve ainsi :

$$X \leqslant \Sigma X_i \leqslant \frac{n^2(n+1)(2n-1)}{2} + (n-1)q - \frac{n(n-1)(n-2)}{2}.$$

Le dernier membre est précisément P, donc $X \leqslant P$ c. q. f. d.

33. — **Degré d'arbitraire.** — La solution générale dépend de

$$H = \xi - \sigma_0 - \sigma_1 - \cdots - \sigma_{2n-2}$$

fonctions arbitraires de $2n-1$ arguments. On a :

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_{2n-2} = (2n-1)\frac{n(n+1)}{2} + q - n(n-2)$$

et

$$\xi = \frac{n(n+1)}{2} + q(n+1).$$

D'où $H = n(q - n^2 + n - 1)$ soit $H = n(n-1)^2$.

VI. — RÉALISATION DES ESPACES D'ÉLÉMENTS LINÉAIRES A CONNEXION EUCLIDIENNE

34. — Soit un L_{2n-1} défini (cf. n° 12) par les fonctions $g_{ij}(x, x')$ et les formes différentielles $\omega_i^j(x, x', dx, dx')$ qui donnent dans (12 ; 1) et (12 ; 2) la longueur d'un vecteur $\vec{X}$ d'éléments d'appui (x, x') et sa différentielle absolue. Les formes $g_{ij}(x, x')X^iX^j$ sont supposées *définies positives*.

Si les g_{ij} et les ω_i^j sont analytiques on en déduit (n° 12) un système $\{\omega\}$ analytique de composantes de L_{2n-1}, et d'après les théorèmes des n^{os} 20 et 27, des réalisations locales de L_{2n-1}.

35. — **Réalisations générales,** c'est-à-dire celles du n° 20. Une telle réalisation V_{2n-1} se compose (cf. n^{os} 14 et 18) d'une variété $V_{2n-1}(L)$ d'éléments linéaires $L = (M, \Delta)$ de E_N, à tout L de laquelle est attaché un n-plan $P(L)$ passant par L.

A toute *courbe* Γ de L_{2n-1} [lieu d'éléments linéaires tangents à $x = x(t)$], correspond une $V_1(L) \subset V_{2n-1}(L)$, qui sera dite l'*image* de Γ. Les images des Γ sont des $V_1(L)$ particulières, caractérisées par le fait que *la tangente en* M *au lieu* $V_1(M)$ *des centres des* $L \in V_1(L)$ *se projette orthogonalement suivant* $\Delta(L)$ *sur* $P(L)$, comme le montrent les relations

$$\omega_i = \varpi_i = 0, \qquad 2 \leqslant i \leqslant n.$$

La longueur de Γ est donc le travail le long de $\Gamma^*(M)$ du vecteur unitaire de $\Delta(L)$. En résumé :

Théorème. — *Tout* L_{2n-1} *analytique est localement réalisable dans l'espace euclidien* E_N *à* $N = 2n^2 - n$ *dimensions par des variétés* V_{2n-1} *; la longueur d'une courbe de* L_{2n-1} *est, sur son image, le travail du vecteur unitaire du support* Δ *le long de la trajectoire du centre* M.

36. — **Réalisations semi-ponctuelles.** — D'après le n° 27, L_{2n-1} admet des réalisations semi-ponctuelles V_{2n-1}. A (x, x') correspond $S \in V_{2n-1}$, et $\Delta(S)$ est la projection orthogonale sur $P(S)$ de la direction dM définie par $dx = x'dt$.

On peut donc définir une variété réalisante V_{2n-1} par une variété ponctuelle $V_n(M)$ à tout élément linéaire (M, dM) de laquelle est attaché un n-plan $P(M, dM)$; soit $\Delta(M, dM)$ la projection orthogonale de la direction dM sur $P(M, dM)$: V_{2n-1} est engendrée par les éléments $S = [M, \Delta(M, dM), P(M, dM)]$.

A tout (x, x') de L_{2n-1} correspond un voisinage

$$w(x, x') = w(x) \times w(x')$$

dont l'image est une V_{2n-1} ; soit W le lieu des (M, dM) des $S \in V_{2n-1}$. Toute $V_1(M, dM) \subset W$ où dM est tangent à $V_1(M)$ est lieu des centres de l'image d'une $\Gamma \subset w$. La longueur de l'image de Γ est le travail du vecteur unitaire $\vec{e}_1$ de $\Delta(M, dM)$ le long de $V_1(M)$. En résumé :

Théorème. — *Tout* L_{2n-1} *analytique est localement réalisable dans l'espace euclidien à* $N = 2(n^2 - n + 1)$ *dimensions par des variétés* *semi-ponctuelles* V_{2n-1} ; *chacune de ces* V_{2n-1} *est définie par une variété ponctuelle* $V_n(M)$ *à chaque élément linéaire* (M, dM) *de laquelle est attaché un n-plan* $P(M, dM)$; V_{2n-1} *est le lieu de*

$$S = [M, \Delta(M, dM), P(M, dM)]$$

où Δ *est la projection orthogonale de* dM *sur* P ; *la longueur d'une courbe de* L_{2n-1} *est le travail, le long de son image, du vecteur unitaire de* $\Delta(M, dM)$.

VII. — RÉALISATION DES ESPACES DE FINSLER

37. — Soit $F_n = F_n(\mathfrak{L})$ l'espace de Finsler à n dimensions défini par la distance élémentaire

$$ds = \mathfrak{L}(x, dx)$$

où $x = (x_1, \dots x_n)$, et où $\mathfrak{L}(x, x')$ désigne une fonction : (37 ; 1) positivement homogène du premier degré par rapport aux x'_i, (37 ; 2) conduisant à un problème régulier du calcul des variations, (37 ; 3) admettant des dérivées partielles continues du troisième ordre.

La *connexion de Cartan* de F_n est définie par des conventions de nature intrinsèque qui déterminent les $g_{ij}(x, x')$ et les $\omega_i^j(x, x', dx, dx')$ attachés (cf. n° 12) à l'espace des *éléments linéaires* (x, x'). Voir à ce sujet E. Cartan, Les espaces de Finsler (*loc. cit.*, n° 12), pp. 1-17. Cet ouvrage sera désigné par la suite par EF.

En particulier :

$$(37\,;\,4) \qquad g_{ij}(x, x') = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\mathfrak{L}^2)}{\partial x'_i \partial x'_j}, \qquad (\text{EF, p. 11, VI})$$

et (37 ; 1, 2, 4) entraînent

$$g_{ij}X^iX^j > 0 \qquad \text{quel que soit } \vec{X} \neq 0\,;$$

par suite (cf. n° 12) la connexion de Cartan admet des composantes $\{\omega\}$ — définies à des rotations près autour de $\vec{e}_1$.

38. — **Relations entre les $\{\omega\}$ d'un F_n ([9]).** — Les conventions A, B, C, D, E de Cartan (EF, p. 10) entraînent (pour les $\{\omega\}$ du n° 11), les relations suivantes :

$$(38\,;\,1)\qquad \omega_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_i}\, dx_i.$$

$$(38\,;\,2)\qquad \Omega_1 = 0.$$

$$(38\,;\,3)\qquad \Omega_i = T_{ijk}[\omega_j \omega_{1k}].$$

$$(38\,;\,4)\qquad T_{ijk} = T_{jik}.$$

La première traduit les conventions A et B ; E conduit à (38 ; 3), c'est-à-dire $P_{ijk} = 0$ dans (9 ; 1) ; C donne (38 ; 4), puis D (38 ; 2).

On peut voir que les (38 ; 1 à 4) suffisent pour que $\{\omega\}$ définisse la connexion de Cartan de $F_n(\mathcal{L})$.

A toute courbe de F_n nous associerons le lieu Γ de ses éléments linéaires tangents. La longueur d'un arc de F_n est :

$$(38\,;\,5)\qquad l = \int_\Gamma \omega_1.$$

Une V_{2n-1} quelconque ne réalise pas un F_n : il faut pour cela que ses $\{\varpi\}$ vérifient certaines relations correspondant aux (38 ; 2 à 4), et dont nous n'expliciterons que celle qui se déduit de (38 ; 2) à savoir :

$$(38\,;\,6)\qquad [\varpi_{1\alpha}\varpi_\alpha] = 0.$$

39. — **Réalisation des espaces de Finsler analytiques.** — Si $\mathcal{L}(x, x')$ vérifie (37 ; 1, 2) et de plus est *analytique* par rapport aux x_i, x'_i, la connexion de Cartan admet (cf. nos 37 et 12) des composantes $\{\omega\}$ analytiques, c'est un L_{2n-1} vérifiant les conditions des théorèmes des nos 20, 27 et 35, 36 :

Théorème. — *Tout F_n analytique est réalisable dans les conditions des théorèmes des nos 35 et 36.*

([9]) Les $\{\omega\}$ s'introduiraient directement à partir de $\mathcal{L}(x, dx)$. La géométrie de Finsler est en effet l'étude des invariants de $\mathcal{L}(x, dx)$ par rapport aux changements de coordonnées ; donc l'étude *des conditions d'équivalence* de $\mathcal{L}(x, dx)$ et de $\overline{\mathcal{L}}(\overline{x}, \overline{dx})$ par rapport à un groupe infini de transformations ponctuelles. Cf. E. Cartan, Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés (*Mathematica*, t. 4, 1930, pp. 114-136), où les $\{\omega\}$ sont obtenus, dans le cas $n = 2$, par application des théories d'équivalence.

Nous allons maintenant étudier une autre forme de réalisation, applicable à une classe de L_{2n-1} qui comprend les F_n. Nous raisonnerons sur les F_n.

40. — **Réalisations géodésiques.** — On appellera ainsi les réalisations de F_n telles que l'image d'une géodésique γ de F_n soit formée d'éléments $S = (M, \Delta, P)$ dont le centre décrit *une géodésique* de $V_\mu(M)$ (cf. n° 14) *tangente en chacun de ses points* $M(S)$ *à* $\Delta(S)$.

Cela impose en particulier à Δ de se trouver dans le μ-plan $P_\mu(M)$ tangent en M à $V_\mu(M)$.

41. — Théorème. — *Pour qu'une réalisation de composantes* $\{\varpi\}$ *soit géodésique, il faut et suffit que*

$$(41\ ;\ 1) \qquad [\varpi_\alpha\varpi_2 \cdots \varpi_n\varpi_{12} \cdots \varpi_{1n}] = 0.$$

La condition est *nécessaire,* car les géodésiques de F_n sont les courbes

$$\omega_i = \omega_{1i} = 0, \qquad 2 \leqslant i \leqslant n,$$

leurs images vérifient donc

$$(41\ ;\ 2) \qquad \varpi_i = \varpi_{1i} = 0, \qquad 2 \leqslant i \leqslant n,$$

et si le lieu Γ de $M(S)$ est tangent à $\Delta(S)$:

$$(41\ ;\ 3) \qquad \varpi_\alpha = 0, \qquad n < \alpha \leqslant N.$$

Donc si la réalisation est géodésique (41 ; 2) entraîne (41 ; 3), donc $\{\varpi\}$ vérifie (41 ; 1).

La condition est *suffisante* : d'après (41 ; 1) et (41 ; 2) Γ est tangent à $\Delta(M)$. Le fait que Γ est une géodésique de $V_\mu(M)$ va résulter du

Lemme. — Si p est le rang des ϖ_α, $n < \alpha \leqslant N$, on peut prendre les repères R_N tels que seules les p premières ϖ_α soient $\neq 0$; ces p formes ϖ_α sont indépendantes.

En effet, soit ϖ_σ p formes ϖ_α indépendantes, $\varpi_\tau = a_{\tau\sigma}\varpi_\sigma$ les autres :

$$(41\ ;\ 4) \qquad \varpi_\alpha\vec{e}_\alpha = \varpi_\sigma(\vec{e}_\sigma + a_{\tau\sigma}\vec{e}_\tau)$$

Les vecteurs $\vec{e}_\sigma + a_{\tau\sigma}\vec{e}_\tau$ forment un p-plan dans lequel on prendra p vecteurs $\vec{e}^{\,*}_\alpha$, et

$$(41\ ;\ 5) \qquad \varpi_\alpha\vec{e}_\alpha = \varpi^*_\alpha\vec{e}^{\,*}_\alpha.$$

Les ϖ_α^* sont indépendants, sinon il y aurait *du* tel que $\varpi_\alpha^* \vec{e}_\alpha^* = 0$, et $\varpi_\sigma = 0$; et

$$(41\ ;\ 6)\quad dM = \varpi_i \vec{e}_i + \varpi_\alpha^* \vec{e}_\alpha^* \qquad \text{le nombre des } \alpha \text{ étant } p.$$

Conséquences. — Soient $\{\varpi^*\}$ les composantes de

$$R^* = (M\vec{e}_i\vec{e}_\alpha^*\vec{e}_\beta^*), \qquad n+p < \beta \leqslant N$$

déduit de R par rotation des $\vec{e}_\alpha$. Les ϖ_β sont nuls.

L'hyperplan $P_\mu(M)$ tangent à $V_\mu(M)$ est contenu dans

$$P' = (M\vec{e}_i\vec{e}_\alpha^*), \qquad i \leqslant n, \qquad n < \alpha \leqslant n+p\ ;$$

d'après (38 ; 6) ($[\varpi_{1\alpha}^* \varpi_\alpha^*] = 0$) et l'indépendance des ϖ_α^*, Γ vérifiant $\varpi_\alpha^* = 0$ vérifie aussi $\varpi_{1\alpha}^* = 0$, donc [cf. (41 ; 2)] $\varpi_{1i} = \varpi_{1\alpha}^* = 0$ et *la projection de $d\vec{e}_1$* sur P' est nulle ; donc aussi la projection de $d\vec{e}_1$ sur $P_\mu(M) \subset P'$, et Γ est une géodésique de $V_\mu(M)$.

42. — **Propriétés des réalisations géodésiques.** — A un point Q de F_n correspond la variété $q = V_{\mu-n}$ de $V_\mu(M)$, définie par $\varpi_i = 0$, $i \leqslant n$: q est orthogonal à $\vec{e}_1$ donc à Γ : les Γ sont des trajectoires orthogonales des images des points à F_n. La distance de 2 points Q_1, Q_2 de F_n est une valeur stationnaire de la longueur des arcs de courbes qui joignent q_1 à q_2.

Toute géodésique de V(M) n'est évidemment pas une image de géodésique de F_n : il faut et suffit pour cela qu'elle soit tangente en chacun de ses points à Δ. Car $d\vec{e}_1 = 0$ donne $\varpi_{1i} = \varpi_{1\alpha} = 0$; $\varpi_i = 0$, $2 \leqslant i \leqslant n$ donne $\varpi_\alpha = 0$.

43. — **Existence des réalisations géodésiques.** — La démonstration de théorème du n° 20 est à peine modifiée : ajouter à Σ les q équations supplémentaires :

$$(43\ ;\ 1)\quad [\varpi_\alpha \omega_2 \ldots \omega_n \omega_{12} \ldots \omega_{1n}] = 0, \qquad n < \alpha \leqslant N.$$

Le système obtenu est fermé.

Les ϖ_α d'un élément linéaire en involution avec I_p restent arbitraires pour $p \leqslant 2n-3$. Pour $p = 2n-2$, ils sont complètement déterminés par le choix de $\omega_1\omega_2\ldots\omega_{1n}$ et les q équations indépendantes :

$$\begin{vmatrix} \varpi_\alpha & \omega_2 & \cdots & \omega_{1n} \\ \varpi_\alpha(1) & \varpi_2(1) & \cdots & \varpi_{1n}(1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varpi_\alpha(2n-2) & \varpi_2(2n-2) & \cdots & \varpi_{1n}(2n-2) \end{vmatrix} = 0.$$

Les $\varpi_{\alpha i}$ sont ensuite déterminés comme au n° 24, par

$$\frac{(2n-2)n(n+1)}{2}$$

équations indépendantes. Le système est encore en involution par $q = 2n^2 - n$). Pour le degré d'arbitraire (cf. n° 25), s_{2n-2} est augmenté de q et $K = n(n-1)^2$. Conclusion :

THÉORÈME. — *Tout* F_n *analytique admet des réalisations géodésiques (locales) dans l'espace à* $N = 2n^2 - n$ *dimensions. La solution générale dépend de* $n(n-1)^2$ *fonctions arbitraires de l'élément linéaire de* F_n.

44. — Ce théorème ne s'applique pas seulement aux F_n : le n° 41 s'applique à tout L_{2n-1} pour lequel $\Omega_1 = 0$.

On ne peut en général imposer aux réalisations de cumuler les deux propriétés des théorèmes n^{os} 27 et 43 : on aurait alors

$$[\varpi_\alpha\varpi_2\ldots\varpi_n[= 0,$$

et on en déduirait que l'espace F_n réalisé vérifie $T_{ijk} = 0$ et par suite se réduit à un espace de Riemann. La signification géométrique de la connexion induite rend d'ailleurs ce fait évident. J'indiquerai dans un prochain article les propriétés particulières (10) des réalisations dans le cas $n = 2$. On peut alors réaliser F par des variétés plongées dans un espace de Riemann à 3 dimensions ; la démonstration fait intervenir un prolongement du système différentiel qui donne les variétés réalisantes. Il est possible qu'un prolongement analogue permette d'étendre ce résultat à n quelconque.

(10) Cf. O. Galvani, *C. R. Acad Sc.*, 1946, t. 222, pp. 1200-1202 et t. 223, pp. 1088 1090.

(Parvenu aux Annales en avril 1951.)