ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Tran Ngoc NAM

Transfert algébrique et action du groupe linéaire sur les puissances divisées modulo 2

Tome 58, nº 5 (2008), p. 1785-1837.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2008__58_5_1785_0>

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://aif.cedram.org/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://aif.cedram.org/legal/). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
58, 5 (2008) 1785-1837

TRANSFERT ALGÉBRIQUE ET ACTION DU GROUPE LINÉAIRE SUR LES PUISSANCES DIVISÉES MODULO 2

par Tran Ngoc NAM

Résumé. — On détermine la dimension d'une représentation du groupe linéaire définie par un sous-espace vectoriel de l'algèbre à puissances divisées, puis on explicite l'image du transfert algébrique en degré générique et celle du transfert algébrique quadruple, et finalement on identifie les indécomposables de degré pair de l'algèbre polynomiale à quatre variables, vue comme module sur l'algèbre de Steenrod.

Abstract. — We compute the dimension of an algebra with divided powers viewed as a representation of the general linear group, then compute the image of the algebraic transfer in generic degrees, and determine the indecomposable elements of even degree in the polynomial algebra in four variables viewed as a module over the Steenrod algebra.

1. Introduction

Soit $\mathcal{P} := \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_k]$ l'algèbre polynomiale graduée à k variables sur le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$, chacune de degré 1. En tant que cohomologie modulo 2 du classifiant $B(\mathbb{Z}/2)^k \simeq (\mathbb{R}P^\infty)^k$, l'algèbre $\mathcal{P}$ est dotée d'une structure naturelle d'algèbre instable sur $\mathcal{A}$, l'algèbre de Steenrod mod 2.

Soient $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ l'idéal de l'augmentation et $\bar{\mathcal{A}}\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel engendré par les éléments θP avec $\theta \in \bar{\mathcal{A}}$ et $P \in \mathcal{P}$. Le problème qui constitue le point de départ de notre recherche consiste à expliciter une base de l'espace vectoriel gradué $\mathcal{P}_{\mathcal{A}} := \mathcal{P}/\bar{\mathcal{A}}\mathcal{P}$. Que ce problème ait des liens étroits avec l'algèbre homologique, le cobordisme, la théorie des représentations, l'étude des espaces de lacets infinis et la théorie des invariants a été

Mots-clés : algèbre de Steenrod, groupe linéaire, puissances divisées.
Classification math. : 55S10.

bien expliqué à travers les travaux de Singer [51], Peterson [46], Wood [57], Lannes–Zarati [23, 24, 25], Hung [19] et Hung–Nam [20]. Ceci dit, nous en avons résolu dans [41] une bonne partie par la découverte d'une base de $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ dans les degrés dits génériques. Cet article fait suite à ce travail. Nous nous proposons d'étudier

– $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ et son dual comme représentation du groupe $\mathcal{GL} := \mathcal{GL}_k$ des matrices $k \times k$ inversibles à coefficients dans $\mathbb{F}_2$,
– le transfert algébrique Tr_k, autrement dit le dual du morphisme $Tr_k^* : Tor_k^{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \longrightarrow Tor_0^{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathcal{P})^{\mathcal{GL}} \cong (\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}}$ défini par Singer [51].

Le transfert algébrique Tr_k est induit « au niveau E_2 » par le transfert homotopique $\pi_*^S(B(\mathbb{Z}/2)_+^k) \longrightarrow \pi_*^S(S^0)$ [4, 14, 31, 39, 47]. Une analyse de son comportement apportera sans doute des informations importantes à la théorie de l'homotopie, comme l'ont montré les travaux de Minami [36, 38]. La nécessité d'une telle analyse contribuera, nous l'espérons, à justifier la raison d'être de nos présents travaux. Nous signalons que le problème analogue en caractéristique impaire a été étudié par Crossley [10, 12, 11] (pour $k \leqslant 2$).

Fixons d'abord quelques notations. Tous les espaces vectoriels rencontrés dans l'article ont $\mathbb{F}_2$ pour le corps de base. Sauf indication explicite, tous les produits tensoriels ont $\mathbb{F}_2$ pour l'anneau de base. Un espace vectoriel gradué V étant donné, V^d ou V_d désigne sa composante de degré d. Un ensemble B étant donné, $\mathbb{F}_2\langle B\rangle$ signifie l'espace vectoriel ayant B pour base. Si B est un sous-ensemble d'un $\mathcal{GL}$-module, $\mathcal{GL}\langle B\rangle$ est le sous-$\mathcal{GL}$-module engendré par B de celui-ci. Enfin, le crochet $\langle *, *\rangle$ désigne l'accouplement canonique entre un espace vectoriel (gradué ou non) et son dual.

Avec ces préliminaires, voici le panorama de nos résultats :

1.1. Dimension d'une représentation du groupe linéaire

Soit Γ l'espace vectoriel gradué dual de $\mathcal{P}$. Chaque composante Γ_d est un $\mathcal{GL}$-module à droite. Notons $a_1^{(i_1)} \cdots a_k^{(i_k)} \in \Gamma$ l'élément dual de $x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}$ par rapport à la base monomiale usuelle de $\mathcal{P}$. Soit Ω l'ensemble des suites d'entiers

$$\omega = (r, k_0, k_1, \ldots, k_r, k_{r+1}, m_1, \ldots, m_r, m_{r+1})$$

vérifiant $0 < r \leqslant k$, $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_r \leqslant k_{r+1} = k$ et $m_1 > \cdots > m_r > m_{r+1} = 0$. À chaque $\omega \in \Omega$ nous associons l'élément

$$a_\omega := \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} a_j^{(2^{m_i}-1)}$$

de degré $\deg a_\omega = (k_1 - k_0)(2^{m_1} - 1) + \cdots + (k_r - k_{r-1})(2^{m_r} - 1)$, et le groupe

$$G_\omega := \left\{ \begin{pmatrix} A_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & A_r \end{pmatrix} \middle| A_0 \in \mathcal{GL}_{k_1-k_0}, \dots, A_r \in \mathcal{GL}_{k_{r+1}-k_r} \right\}.$$

Le problème qui nous intéresse consiste à déterminer la structure du sous-$\mathcal{GL}$-module $\mathcal{GL}\langle a_\omega \rangle \subset \Gamma_{\deg a_\omega}$ et, en particulier, sa dimension en tant qu'espace vectoriel. L'intérêt de ce problème provient de ce que $\mathcal{GL}\langle a_\omega \rangle$ constitue une bonne approximation de l'espace vectoriel dual $(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^{\deg a_\omega})^*$, approximation qui est exacte dans le cas « générique » (cf. la Section 1.2). L'information que nous obtenons sur $\mathcal{GL}\langle a_\omega \rangle$ et sa dimension est la clef de nos Théorèmes 1.2, 1.3 et 1.4(ii).

Étant un sous-groupe parabolique [54] de $\mathcal{GL}$, le groupe G_ω est d'indice

$$|\mathcal{GL}/G_\omega| = \prod_{i=1}^{k}(2^i - 1) \ / \ \prod_{i=1}^{r+1} \ \prod_{j=1}^{k_i - k_{i-1}} (2^j - 1)$$

et coïncide avec le stabilisateur de a_ω pour l'action du groupe $\mathcal{GL}$. Le morphisme naturel $\mathbb{F}_2\langle \mathcal{GL}/G_\omega \rangle \longrightarrow \mathcal{GL}\langle a_\omega \rangle$, $G_\omega g \longmapsto a_\omega g$ est un épimorphisme de $\mathcal{GL}$-modules à droite. En tant que tel, ce morphisme a été étudié par Crabb–Hubbuck [9] qui ont démontré son injectivité sous l'hypothèse $k_1 = 1, \dots, k_r = r$, $2^{m_1 - m_2} > k, \dots, 2^{m_r - m_{r+1}} > k - r + 1$. Ceci étant, notre théorème (que nous avons eu l'occasion d'énoncer dans [41]) est une généralisation du leur.

Soit $\mathcal{W}^\perp \subset \Gamma$ le sous-espace vectoriel gradué engendré par les éléments $a_1^{(i_1)} \cdots a_k^{(i_k)}$ avec $\prod_{j=1}^{k} i_j$ impair.

Théorème 1.1. — *Soit $\omega = (r, k_0, \dots, k_{r+1}, m_1, \dots, m_{r+1}) \in \Omega$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, notons*

$$G_\omega^i := \left\{ \begin{pmatrix} A_0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & A_{i-1} & \\ * & & & A_i \end{pmatrix} \middle| A_0 \in \mathcal{GL}_{k_1-k_0}, \dots, A_{i-1} \in \mathcal{GL}_{k_i - k_{i-1}}, A_i \in \mathcal{GL}_{k-k_i} \right\}.$$

(i) *Supposons $m_1 - m_2 = 1$. Posons*

$$\widetilde{a}_\omega := \prod_{j=1}^{k_1} a_j^{(2^{m_2}-1)} \cdot \prod_{i=2}^{r} \ \prod_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} a_j^{(2^{m_i}-1)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle &\geqslant \binom{k_2}{k_1}\dim \mathcal{GL}\langle \widetilde{a}_\omega\rangle,\\ \dim \mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle/\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle\cap \mathcal{W}^\perp &\geqslant \binom{k_2}{k_1}\dim \mathcal{GL}\langle \widetilde{a}_\omega\rangle/\mathcal{GL}\langle \widetilde{a}_\omega\rangle\cap \mathcal{W}^\perp.\end{aligned}$$

(ii) *Supposons qu'il existe* $1\leqslant s\leqslant r$ *tel que* $m_{i-m_{i+1}}\geqslant k_{i+1}-k_{i-1}$ *pour tout* $1\leqslant i<s$ *et que*

- *soit* $m_{s-m_{s+1}}\geqslant k-k_{s-1}$,
- *soit* $m_{s-m_{s+1}}=k-k_{s-1}-1$ *et* $k>k_{s+1}$.

Notons $\widetilde{W}^\perp\subset\Gamma$ *le sous-espace vectoriel gradué engendré par les éléments* $a_{k_s+1}^{(i_{k_s+1})}\cdots a_k^{(i_k)}$ *avec* $\prod_{j=k_s+1}^k i_j$ *impair,* $\widetilde{\mathcal{GL}}:=\mathcal{GL}_{k-k_s}$ *et*

$$\widetilde{a}_\omega:=\prod_{i=s+1}^{r}\prod_{j=k_{i-1}+1}^{k_i}a_j^{(2^{m_i}-1)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle &= |\mathcal{GL}/G_\omega^s|\dim \widetilde{\mathcal{GL}}\langle \widetilde{a}_\omega\rangle,\\ \dim \mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle\cap \mathcal{W}^\perp &= |\mathcal{GL}/G_\omega^s|\dim \widetilde{\mathcal{GL}}\langle \widetilde{a}_\omega\rangle\cap \widetilde{\mathcal{W}}^\perp.\end{aligned}$$

En particulier, si $m_i-m_{i+1}\geqslant k_{i+1}-k_{i-1}$ *pour* $1\leqslant i\leqslant r$, *alors l'épimorphisme naturel* $\mathbb{F}_2\langle\mathcal{GL}/G_\omega\rangle\longrightarrow\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle$ *est un isomorphisme, et l'on a*

$$\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle\cap\mathcal{W}^\perp=\begin{cases}0 & \text{si}\quad k_r<k,\\ \mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle & \text{si}\quad k_r=k.\end{cases}$$

1.2. Transfert algébrique en degré générique

Soit Γ l'espace vectoriel gradué mentionné dans la section précédente. Γ étant un $\mathcal{A}$-module à droite, on note $\Gamma^{\mathcal{A}}$ son sous-espace vectoriel gradué invariant sous l'action de l'opération de Steenrod totale $Sq=\sum_{r\geqslant 0}Sq^r$. Chaque composante $\Gamma_d^{\mathcal{A}}$ est un $\mathcal{GL}$-module à droite. Ceci dit, le transfert algébrique

$$Tr_k:(\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}=\bigoplus_{d\geqslant 0}(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}\longrightarrow H^k(\mathcal{A})$$

est défini sur les $\mathcal{GL}$-coinvariants de $\Gamma^{\mathcal{A}}$ et prend sa valeur dans le k-ième groupe de cohomologie de l'algèbre de Steenrod. C'est un morphisme d'espaces vectoriels gradués avec les composantes

$$Tr_k:(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}\longrightarrow H^{k,d+k}:=Ext_{\mathcal{A}}^{k,d+k}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2).$$

Notons $\widetilde{\mathcal{P}} := \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_{k-1}] \subset \mathcal{P}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{A}} := \mathbb{F}_2 \otimes_{\mathcal{A}} \widetilde{\mathcal{P}}$. Pour tout entier $N > 0$, notons $\alpha(N)$ le nombre d'occurrences du chiffre 1 dans son écriture binaire. Étant donnés des entiers $m, n, d, \widetilde{d} \geqslant 0$ avec $d = 2^{m+n}(\widetilde{d} + k - 1) + 2^n - k$, le résultat principal de notre article [41] est le suivant : $\dim \mathcal{P}^d_{\mathcal{A}} = (2^k - 1) \dim \widetilde{\mathcal{P}}^{\widetilde{d}}_{\mathcal{A}}$ si $m \geqslant k$ et

(i) soit $\alpha(\widetilde{d} + k - 1) = k - 1$,

(ii) soit $n = 0$ et $\alpha(\widetilde{d} + k - 2) \geqslant k - 2$.

Afin d'étudier en degré générique (au sens de [41]) le transfert *algébrique* qui concerne $\Gamma^{\mathcal{A}}$ plutôt que $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ (qui est le dual de $\Gamma^{\mathcal{A}}$), il est nécessaire d'avoir une version duale de ce résultat.

L'espace vectoriel gradué dual $\widetilde{\Gamma} := \widetilde{\mathcal{P}}^*$ s'identifie au sous-espace vectoriel gradué de Γ engendré par les monômes $a_1^{(i_1)} \cdots a_{k-1}^{(i_{k-1})}$ avec $i_1, \dots, i_{k-1} \geqslant 0$. Soit $\widetilde{\mathcal{GL}} := \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les espaces vectoriels gradués $\widetilde{\Gamma}$ et $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}} := \widetilde{\Gamma} \cap \Gamma^{\mathcal{A}}$ sont des $\widetilde{\mathcal{GL}}$-modules à droite. En désignant par $\iota^* : \Gamma^{\mathcal{A}} \longrightarrow (\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$ et $\widetilde{\iota}^* : \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}} \longrightarrow (\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}})_{\widetilde{\mathcal{GL}}}$ les projections canoniques, l'inclusion $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}} \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{A}}$ induit [51] un morphisme $\varphi : (\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}})_{\widetilde{\mathcal{GL}}} \longrightarrow (\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\iota}^*"] & \Gamma^{\mathcal{A}} \arrow[d, "\iota^*"] \\ (\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}})_{\widetilde{\mathcal{GL}}} \arrow[r, "\varphi"] & (\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}. \end{tikzcd}$$

Notons $Sq^0 : \Gamma^{\mathcal{A}} \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{A}}$ la restriction à $\Gamma^{\mathcal{A}}$ du morphisme linéaire $\Gamma \longrightarrow \Gamma$ défini [3, 8] par $a_1^{(i_1)} \cdots a_k^{(i_k)} \longmapsto a_1^{(2i_1+1)} \cdots a_k^{(2i_k+1)}$. Le morphisme Sq^0 se factorise par les $\mathcal{GL}$-coinvariants et induit un morphisme $Sq^0 : (\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} \longrightarrow (\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$. Il existe des analogues $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}} \longrightarrow \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}$ et $(\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}})_{\widetilde{\mathcal{GL}}} \longrightarrow (\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}})_{\widetilde{\mathcal{GL}}}$ qu'il est d'usage de noter également Sq^0.

Soient $Sq^0 : H^{s,t} \longrightarrow H^{s,2t}$ l'opération de Steenrod classique [27, 43], et h_i la multiplication par l'élément $h_i \in H^{1,2^i}$ dans l'anneau de cohomologie $H^*(\mathcal{A})$.

Théorème 1.2. — *Soit $d = 2^{m+n}(\widetilde{d}+k-1)+2^n-k$ avec $m+n \geqslant n \geqslant 0$ et $\widetilde{d} \geqslant 0$. Posons $d' := 2^m(\widetilde{d} + k - 1) - k + 1$.*

(i) *On a $\dim \Gamma^{\mathcal{A}}_{d'} \geqslant \dim \mathcal{GL}\langle \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d'} \rangle \geqslant (\binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{m}) \dim \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{d}}$, les égalités ayant lieu si $m \geqslant k$ et $\alpha(\widetilde{d} + k - 2) \geqslant k - 2$.*

(ii) *On a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccc}
(\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{d}})_{\widetilde{\mathcal{GL}}} & \xrightarrow{(Sq^0)^m} & (\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d'})_{\widetilde{\mathcal{GL}}} & \xrightarrow{\varphi} & (\Gamma^{\mathcal{A}}_{d'})_{\mathcal{GL}} & \xrightarrow{(Sq^0)^n} & (\Gamma^{\mathcal{A}}_{d})_{\mathcal{GL}} \\
\downarrow{\scriptstyle Tr_{k-1}} & & \downarrow{\scriptstyle Tr_{k-1}} & & \downarrow{\scriptstyle Tr_k} & & \downarrow{\scriptstyle Tr_k} \\
H^{k-1,\widetilde{d}+k-1} & \xrightarrow{(Sq^0)^m} & H^{k-1,d'+k-1} & \xrightarrow{h_0} & H^{k,d'+k} & \xrightarrow{(Sq^0)^n} & H^{k,d+k}.
\end{array}$$

Dans la première ligne :

- $(Sq^0)^m$ *est bijectif si* $\alpha(\widetilde{d}+k-2) \geqslant k-2$,
- $(Sq^0)^n$ *est bijectif si* $n=0$ *ou* $\alpha(\widetilde{d}+k-1) \geqslant k-1$,
- φ *est surjectif si* $m \geqslant k$ *et* $\alpha(\widetilde{d}+k-2) \geqslant k-2$.

Dans la deuxième ligne : $(Sq^0)^n h_0 (Sq^0)^m = h_n (Sq^0)^{m+n}$. *D'où*

$$(\operatorname{Im} Tr_k)^d = h_n (Sq^0)^{m+n}\big((\operatorname{Im} Tr_{k-1})^{\widetilde{d}}\big)$$

si $m \geqslant k$ *et soit* $\alpha(\widetilde{d}+k-1) = k-1$, *soit* $n=0$ *et* $\alpha(\widetilde{d}+k-2) \geqslant k-2$.

(iii) *Supposons que* $d = 2^{m_1} + \cdots + 2^{m_k} - k$ *et que* $m_{i-1} - m_i \geqslant i$ *pour* $2 < i \leqslant k$, $m_1 - m_2 \geqslant 1$ *si* $k > 1$. *Alors* $(\operatorname{Im} Tr_k)^d$, *la composante de degré* d *de* $\operatorname{Im} Tr_k$, *est le sous-espace vectoriel de* $Ext^{k,k+d}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ *engendré par* $h_{m_1} \cdots h_{m_k}$. *De plus* $\Gamma^{\mathcal{A}}_d = \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{m_1}-1)} \cdots a_k^{(2^{m_k}-1)}\rangle$ *et*

$$(\Gamma^{\mathcal{A}}_d)_{\mathcal{GL}} = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si} \quad k=1 \quad \text{ou} \quad m_1 - m_2 \geqslant 2, \\ 0 & \text{si} \quad k>1 \quad \text{et} \quad m_1 - m_2 = 1. \end{cases}$$

1.3. Primitifs comme représentation

L'intérêt pour l'étude de $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, initiée par Singer [49], a été amplifié par Peterson [45] en 1986. C'est dans [45] que Peterson a déterminé $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ pour $k = 1, 2$ et formulé sa célèbre conjecture sur la $\mathcal{A}$-décomposabilité en général, qui devait être démontrée par Wood [58] quelques années plus tard. La détermination de $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ pour $k = 3$ est compliquée et a été faite par Kameko dans sa thèse [22] à l'Université Johns Hopkins en 1990. A peu près six mois plus tard et indépendamment, $\Gamma^{\mathcal{A}}$ pour $k = 3$ a été explicité par Alghamdi–Crabb–Hubbuck [3] à l'Université d'Aberdeen. Probablement à cause des difficultés techniques, mis à part les raffinements du théorème de Wood et les travaux de Crossley [10, 12] en caractéristique impair, aucune tentative d'aller plus loin dans cette direction n'a été enregistrée pendant les dix ans qui suivent. Ce n'est que très récemment (2002) qu'un calcul effectif de $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ en degré $d = 2^{p+3} + 2^{p+2} - 4$ pour $k = 4$ a été réalisé par

Bruner–Hà–Hung [8]. Au moment d'écrire ces lignes, nous avons appris que Kameko est en train de rédiger ses résultats complets [21] sur $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ pour $k=4$. En attendant, en vue de déterminer l'image du transfert algébrique quadruple, nous précisons la structure de $\mathcal{GL}$-module de $\Gamma^{\mathcal{A}}$ en degré *pair* pour $k=4$.

Soient $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ la projection canonique et $\psi : \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ l'épimorphisme défini [22] par

$$\pi(P) \longmapsto \begin{cases} \pi(Q) & \text{si } P = x_1 \cdots x_k Q^2,\ Q \in \mathcal{P}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le morphisme dual ψ^*, noté Sq^0 selon l'usage, est la restriction à $\Gamma^{\mathcal{A}}$ du monomorphisme $\Gamma \longrightarrow \Gamma$, $a_1^{(i_1)} \cdots a_k^{(i_k)} \longmapsto a_1^{(2i_1+1)} \cdots a_k^{(2i_k+1)}$. En identifiant $\operatorname{Coker} Sq^0$ à un sous-espace vectoriel de $\Gamma^{\mathcal{A}}$, on obtient les formules récursives

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^d \cong \mathcal{P}_{\mathcal{A}}^{(d-k)/2} \oplus (\operatorname{Ker}\psi)^d && \text{si } d \equiv k \pmod 2, \\ &\Gamma_d^{\mathcal{A}} = Sq^0(\Gamma_{(d-k)/2}^{\mathcal{A}}) \oplus (\operatorname{Coker} Sq^0)_d && \text{si } d \equiv k \pmod 2, \\ &\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^d = (\operatorname{Ker}\psi)^d,\ \Gamma_d^{\mathcal{A}} = (\operatorname{Coker} Sq^0)_d && \text{si } d \not\equiv k \pmod 2. \end{aligned}$$

Notre théorème détermine $(\operatorname{Ker}\psi)^d$ pour $k=4$ et d pair > 22. Le cas $d \leqslant 22$ sera traité dans la Section 6.

THÉORÈME 1.3. — *Soient $k=4$ et $d \geqslant 0$ un entier pair.*

(i) *Si $\alpha(d+2) > 2$, alors $(\operatorname{Ker}\psi)^d = (\operatorname{Coker} Sq^0)_d = 0$. Par conséquent $\Gamma_d^{\mathcal{A}} = Sq^0(\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}})$ et $(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} = Sq^0((\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}})$.*

(ii) *Supposons que $d = 2^{p+q} + 2^p - 2 > 22$ avec $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 0$. Alors*

$$\Gamma_d^{\mathcal{A}} = \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{p+q}-1)} a_2^{(2^p-1)} \rangle + Sq^0(\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}}),$$

$$(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} = \begin{cases} Sq^0((\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}) \text{ si } p \leqslant 2 \text{ ou } q = 1, \\ \mathbb{F}_2\langle \iota^*(a_1^{(2^{p+q}-1)} a_2^{(2^p-1)}) \rangle \oplus Sq^0((\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}) \text{ sinon,} \end{cases}$$

où $\iota^* : \Gamma^{\mathcal{A}} \longrightarrow (\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$ désigne la projection canonique.

1.4. Transfert algébrique quadruple

Soit F_k la k-ième filtration d'Adams (relative à la cohomologie [1]) du groupe d'homotopie stable $\pi_*^S(S^0)$. Lannes–Zarati ont montré dans [24] l'existence d'un morphisme $F_k/F_{k+1} \longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, (\mathcal{P}^{\mathcal{GL}})^*)$, qu'ils notent $\mathcal{H}$ (pour Hopf). Ils ont aussi construit dans [23, 25] un morphisme $H^k(\mathcal{A}) \longrightarrow$

$Hom_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, (\mathcal{P}^{\mathcal{GL}})^*)$, que nous notons $\mathcal{LZ}$. Les espaces vectoriels gradués $H^k(\mathcal{A})$, F_k/F_{k+1} sont respectivement les termes E_2, E_∞ de la suite spectrale d'Adams stable du sphère S^0. On a le triangle

$$\begin{tikzcd} F_k/F_{k+1} \arrow[drr, "\mathcal{H}"] & & \\ H^k(\mathcal{A}) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[rr, "\mathcal{LZ}"] & & Hom_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, (\mathcal{P}^{\mathcal{GL}})^*) = (\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}. \end{tikzcd}$$

Lannes–Zarati [24] et Goerss [16] ont démontré que ce triangle est commutatif en un sens approprié. Hung [19] y a vu une possibilité d'attaquer une vieille conjecture qui est attribuée à Curtis–Madsen [13, 29, 37] et qui s'énonce : *le morphisme de Hurewicz* $\pi_*^S(S^0) \cong \pi_*(Q_0S^0) \longrightarrow H_*(Q_0S^0; \mathbb{F}_2)$ *ne détecte que les invariants de Hopf et ceux de Kervaire.* En s'appuyant sur le résultat de Lannes–Zarati et Goerss, Hung a proposé la version algébrique suivante de la conjecture de Curtis–Madsen : *$\mathcal{LZ}$ est nul en degré positif si $k > 2$.* L'idée de Hung s'est révélée fructueuse en ce qu'elle l'a amené à conjecturer [19] que *la composée $\mathcal{LZ} \circ Tr_k$ est nulle en degré positif si $k > 2$*, conjecture qui a été démontrée par Hung et l'auteur [20]. C'est dans ce contexte que nous nous intéressons au transfert, particulièrement à l'image du transfert algébrique.

Soient h_i le générateur de $H^{1,2^i} = \mathbb{F}_2$ (voir [2]) et c_i celui de $H^{3,11\cdot 2^i} = \mathbb{F}_2$ (voir [55]). La composante $H^4(\mathcal{A})$ de l'algèbre de cohomologie $H^*(\mathcal{A})$ contient [34, 53] les indécomposables

$$\begin{aligned} &d_i \in H^{4,18\cdot 2^i}, \quad && e_i \in H^{4,21\cdot 2^i}, \quad && f_i \in H^{4,22\cdot 2^i}, \quad && p_i \in H^{4,37\cdot 2^i}, \\ &g_{i+1} \in H^{4,24\cdot 2^i}, && D_3(i) \in H^{4,65\cdot 2^i}, && p'_i \in H^{4,73\cdot 2^i}, && \text{où } i \geqslant 0. \end{aligned}$$

Un théorème de Lin [26] confirme que ce sont les seuls indécomposables de $H^4(\mathcal{A})$. En tant qu'espace vectoriel gradué, $H^4(\mathcal{A})$ est donc engendré par ces éléments et les décomposables de la forme $h_{i_1}h_{i_2}h_{i_3}h_{i_4}$, h_ic_j. Encore d'après Lin [26], toute relation dans $H^4(\mathcal{A})$ découle des suivantes :

$$\begin{aligned} &h_ih_{i+1} = 0, \quad && h_{i+1}^3 = h_i^2h_{i+2}, \quad && h_ih_{i+2}^2 = 0, \quad && h_i^2h_{i+3}^2 = 0, \\ &h_ic_{i+1} = 0, && h_ic_i = 0, && h_{i+2}c_i = 0, && h_{i+3}c_i = 0, \quad \text{où } i \geqslant 0. \end{aligned}$$

Basé sur ces propriétés, notre théorème partiellement détermine l'image du transfert algébrique de degré quatre $Tr_4 : (\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} \longrightarrow H^4(\mathcal{A})$ et établit l'injectivité conjecturale [49] de ce morphism. (Comme le terme « triple » a été désigné au transfert de degré trois [36], le transfert de degré quatre sera désormais appelé transfert quadruple.) Signalons qu'une large partie de notre théorème a été découverte dans [8, 17, 18], à savoir : $g_{i+1} \notin \operatorname{Im} Tr_4$ par

Bruner–Hà–Hung [8], $D_3(i), p_i' \notin \mathrm{Im}\, Tr_4$ par Hung [18], et $d_i, e_i \in \mathrm{Im}\, Tr_4$ par Hà [17]. Dans cet article, nous avançons une autre preuve de leurs résultats. La première partie du theorème suivant confirme partiellement Hung [18, Conjecture 1.11].

Théorème 1.4. —

(i) *En tant qu'espace vectoriel gradué, en degré différent de* $37.2^i - 4 (i \geqslant 0)$, $\mathrm{Im}\, Tr_4$ *est engendré par les décomposables de* $H^4(\mathcal{A})$ *et les indécomposables* d_i, e_i, f_i *avec* $i \geqslant 0$.

(ii) *Soit* $d = 2^s(d' + 4) - 4$ *avec* $d' > 0$ *impair et* $s \geqslant 0$. *Alors* Tr_4 *est injectif en degré* d *si et seulement s'il est injectif en degré* d'. *De plus,* Tr_4 *est injectif en degré* d *dans les cas suivants :*
- $d \leqslant 22$,
- $\alpha(d + 4) > 4$,
- $H^{4,d+4}$ *contient au moins un indécomposable différent des* $p_i (i \geqslant 0)$,
- $H^{4,d+4}$ *contient* $h_i c_j$ *avec* $j \geqslant i + 4 \geqslant 4$,
- $H^{4,d+4}$ *contient* $h_{i_1} h_{i_2} h_{i_3} h_{i_4}$ *avec* $i_4 > i_3 \geqslant i_2 \geqslant i_1 + 4 \geqslant 4$.

Comme $Sq^0 : H^4(\mathcal{A}) \to H^4(\mathcal{A})$ est un monomorphisme, l'équivalence de l'injectivité de Tr_4 en degré d et d' dans la seconde partie de ce théorème est une version précise d'un cas spécial de Hung [18, Corollaire 9.12] (Hung y questionne non seulement l'injectivité mais aussi la surjectivité de Tr_k).

Remerciements. Je tiens d'abord à remercier le Prof. John Hubbuck qui a rendu possible ma visite à l'Université d'Aberdeen en Janvier 2003. J'aimerais ensuite remercier le Dr. Gérald Gaudens et le Prof. Sadok Kallel pour leur invitation aux séminaires qu'ils organisent à l'Université de Nantes et à l'Université de Lille I. Cet article n'aurait pas vu le jour sans l'aide précieuse des Professeurs Nguyen H. V. Hung et Lionel Schwartz, mes directeurs de thèse. Ils ont contribué de manière essentielle à mon article par leurs remarques pertinentes sur mes théorèmes, leur incessant encouragement, et par leurs corrections de mes fautes de français. Mes remerciements vont également aux Professeurs : Michael Weiss pour les renseignements qu'il m'a donnés sur le cobordisme, Bob Bruner pour avoir vérifié mes résultats avec son logiciel pendant le Congrès de Topologie Algébrique (Barcelone, Juillet 2002), Wen Hsiung Lin pour l'envoi de [26], et Bill Singer pour l'envoi de [45, 49]. Enfin, je tiens à remercier le Dr. Masaki Kameko pour les conversations fort intéressantes que nous avons eues lors de la Conférence de Théorie d'Invariants (Göttingen, Mars 2003).

2. Dimension d'une représentation du groupe linéaire

2.1. Algèbre à puissances divisées

Multiplication. Soit $a_1^{(i_1)} \cdots a_k^{(i_k)}$ l'élément dual de $x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}$ par rapport à la base monomiale usuelle de $\mathcal{P}$. Les éléments $a_1^{(i_1)} \cdots a_k^{(i_k)}$ avec $i_1, \ldots, i_k \geqslant 0$ forment une base de Γ en tant qu'espace vectoriel gradué. L'espace vectoriel Γ est une algèbre commutative, et $a_1^{(i_1)} \cdots a_k^{(i_k)}$ est précisément le produit de $a_1^{(i_1)}, \ldots, a_k^{(i_k)}$. La multiplication de Γ vérifie : $a_i^{(i_1)} a_i^{(i_2)} = \binom{i_1+i_2}{i_1} a_i^{(i_1+i_2)}$ pour tout $i_1, i_2 \geqslant 0$ et $1 \leqslant i \leqslant k$. D'où Γ s'appelle l'algèbre à puissances divisées (les éléments $a_i^{(j)}$ vérifient la même règle de multiplication que les monômes $a_i^j / j!$ de l'anneau polynomial $\mathbb{Q}[a_i]$).

Par analogie avec les polynômes, nous appelons $a_1^{(i_1)} \cdots a_k^{(i_k)}$ un monôme en $a_1, \ldots, a_k$. Le degré de a_r $(1 \leqslant r \leqslant k)$ dans ce monôme est i_r. Un polynôme en $a_1, \ldots, a_k$ est une somme de monômes distincts en $a_1, \ldots, a_k$. Le degré de a_r dans un polynôme non nul est le plus grand degré de a_r dans les monômes dont il est la somme.

Comme dans tout espace vectoriel gradué, dans Γ un élément est homogène s'il appartient à Γ_d pour un certain entier d. Le degré d'un élément homogène γ est noté $\deg \gamma$. Si $\gamma \in \Gamma_d$, on a $\deg \gamma = d$.

Comultiplications. L'algèbre polynomiale $\mathcal{P}$ est une algèbre de Hopf dont la comultiplication $\delta_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$ est donnée par

$$\begin{cases} \delta_{\mathcal{P}}(P'P'') & = & \delta_{\mathcal{P}}(P')\delta_{\mathcal{P}}(P''), & P' \in \mathcal{P},\ P'' \in \mathcal{P}, \\ \delta_{\mathcal{P}}(x_i) & = & 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1, & 1 \leqslant i \leqslant k. \end{cases}$$

L'espace vectoriel gradué dual $\Gamma = \mathcal{P}^*$ est également une algèbre de Hopf dont la comultiplication $\delta_\Gamma : \Gamma \longrightarrow \Gamma \otimes \Gamma$ est donnée par

$$\begin{cases} \delta_\Gamma(\gamma'\gamma'') & = & \delta_\Gamma(\gamma')\delta_\Gamma(\gamma''), & \gamma' \in \Gamma,\ \gamma'' \in \Gamma, \\ \delta_\Gamma(a_i^{(j)}) & = & \sum_{j'+j''=j} a_i^{(j')} \otimes a_i^{(j'')}, & 1 \leqslant i \leqslant k,\ j \geqslant 0. \end{cases}$$

La multiplication de Γ est induite par $\delta_{\mathcal{P}}$, celle de $\mathcal{P}$ est induite par δ_Γ. D'où

$$\begin{cases} \langle \gamma'\gamma'', P \rangle & = & \langle \gamma' \otimes \gamma'', \delta_{\mathcal{P}}(P) \rangle, & \gamma' \in \Gamma,\ \gamma'' \in \Gamma,\ P \in \mathcal{P}, \\ \langle \gamma, P'P'' \rangle & = & \langle \delta_\Gamma(\gamma), P' \otimes P'' \rangle, & \gamma \in \Gamma,\ P' \in \mathcal{P},\ P'' \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

Autre interprétation. Afin d'introduire dans la Section 2.2 l'action des matrices sur l'algèbre Γ, nous avons besoin de l'interprétation suivante de celle-ci. Soient $a_1, \dots, a_k$ les formes linéaires $\mathbb{F}_2\langle x_1, \dots, x_k\rangle \longrightarrow \mathbb{F}_2$ définies par $\langle a_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$ (le symbole de Kronecker). Notons $\mathcal{V}^0 := \mathbb{F}_2$ et $\mathcal{V} := \mathbb{F}_2\langle a_1, \dots, a_k\rangle$. Pour $n \geqslant 0$, le groupe symmétrique à n lettres $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathcal{V}^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{V} \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}}_{n}$ par permutation des facteurs. Désignons par $(\mathcal{V}^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \subset \mathcal{V}^{\otimes n}$ le sous-espace vectoriel des éléments $\mathfrak{S}_n$-invariants.

Considérons le morphisme bilinéaire $\mathcal{V}^{\otimes m} \times \mathcal{V}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{V}^{\otimes (m+n)}$ qui envoie le couple $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, v_{m+1} \otimes \cdots \otimes v_{m+n})$ sur

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n}/\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(m+n)},$$

où $\mathfrak{S}_{m+n}/\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n}$ vérifiant $\sigma(1) < \cdots < \sigma(m)$, $\sigma(m+1) < \cdots < \sigma(m+n)$. Par restriction, puis par passage au quotient, ce morphisme induit une morphisme linéaire

$$(\mathcal{V}^{\otimes m})^{\mathfrak{S}_m} \otimes (\mathcal{V}^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \longrightarrow (\mathcal{V}^{\otimes (m+n)})^{\mathfrak{S}_{m+n}}, \ u \otimes v \longmapsto u \cdot v,$$

qui munit $\Gamma(\mathcal{V}) = \Gamma(a_1, \dots, a_k) := \bigoplus_{n \geqslant 0} (\mathcal{V}^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ d'une structure de $\mathbb{F}_2$-algèbre unitaire commutative. L'application linéaire

$$\Gamma \longrightarrow \Gamma(\mathcal{V}), \ a_1^{(i_1)} \cdots a_k^{(i_k)} \longmapsto \underbrace{(a_1 \otimes \cdots \otimes a_1)}_{i_1} \cdots \underbrace{(a_k \otimes \cdots \otimes a_k)}_{i_k}$$

est un isomorphisme d'algèbres [9]. En identifiant Γ et $\Gamma(\mathcal{V})$, puis en posant $v^{(d)} := v^{\otimes d}$ pour tout $v \in \mathcal{V}$, on établit sans peine que

$$(a_{j_1} + \cdots + a_{j_s})^{(d)} = \sum_{d_1 + \cdots + d_s = d} a_{j_1}^{(d_1)} \cdots a_{j_s}^{(d_s)}$$

pour tout $d \geqslant 0$ et $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_s \leqslant k$.

L'identification $\Gamma \equiv \Gamma(\mathcal{V}) = \Gamma(a_1, \dots, a_k)$ permet de voir chaque élément $\gamma \in \Gamma$ comme une fonction $\gamma = \gamma(a_1, \dots, a_k)$ qui dépend des variables $a_1, \dots, a_k$. D'où l'on peut former l'expression $\gamma(v_1, \dots, v_k)$ pour tout $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{V}$ en substituant respectivement $v_1, \dots, v_k$ à la place de $a_1, \dots, a_k$ dans l'écriture de γ. On aura l'occasion d'effectuer ces substitutions dans la Section 2.2.

L'action des matrices sur Γ rencontrée dans le lemme qui suit sera définie dans la Section 2.2.

Lemme 2.1. — *Soient $m \geqslant 0$, $P \in \mathcal{P}$ et $\gamma \in \Gamma$ un polynôme en $a_1, \dots, a_k$, non nul, homogène, ayant le degré de chaque a_i inférieur à 2^m.*

Supposons que $\deg \gamma \geqslant \deg P$*. Alors, pour tout* $v_1, \ldots, v_r \in \mathcal{V}$*,* $i_1, \ldots, i_r \geqslant 0$ *et* $Q \in \mathcal{P}$*, on a*

$$\langle \gamma v_1^{(2^m i_1)} \cdots v_r^{(2^m i_r)}, PQ^{2^m} \rangle = \langle \gamma, P \rangle \cdot \langle v_1^{(i_1)} \cdots v_r^{(i_r)}, Q \rangle.$$

De plus $\langle (\gamma v_1^{(2^m i_1)} \cdots v_r^{(2^m i_r)})g, PQ^{2^m} \rangle = \langle \gamma g, P \rangle \cdot \langle (v_1^{(i_1)} \cdots v_r^{(i_r)})g, Q \rangle$ *pour toute matrice carrée* g *d'ordre* k *à coefficients dans* $\mathbb{F}_2$*.*

Démonstration. — D'abord

$$\langle \gamma v_1^{(2^m i_1)} \cdots v_r^{(2^m i_r)}, PQ^{2^m} \rangle = \langle \gamma \otimes v_1^{(2^m i_1)} \cdots v_r^{(2^m i_r)}, \delta_{\mathcal{P}}(PQ^{2^m}) \rangle.$$

Supposons que

$$\delta_{\mathcal{P}}(P) = P \otimes 1 + \sum_{\deg P''>0} P' \otimes P'', \;\; \delta_{\mathcal{P}}(Q) = 1 \otimes Q + \sum_{\deg Q'>0} Q' \otimes Q''.$$

Alors

$$\begin{aligned}\delta_{\mathcal{P}}(PQ^{2^m}) = P \otimes Q^{2^m} &+ \sum_{\deg P''>0} P' \otimes P''Q^{2^m} + \sum_{\deg Q'>0} P(Q')^{2^m} \otimes (Q'')^{2^m} \\ &+ \sum_{\deg P''>0,\ \deg Q'>0} P'(Q')^{2^m} \otimes P''(Q'')^{2^m}.\end{aligned}$$

Par hypothèse sur le degré $\langle \gamma, P(Q')^{2^m} \rangle = \langle \gamma, P'(Q')^{2^m} \rangle = \langle \gamma, P' \rangle = 0$. D'où

$$\begin{aligned}\langle \gamma \otimes v_1^{(2^m i_1)} \cdots v_r^{(2^m i_r)}, \delta_{\mathcal{P}}(PQ^{2^m}) \rangle &= \langle \gamma \otimes v_1^{(2^m i_1)} \cdots v_r^{(2^m i_r)}, P \otimes Q^{2^m} \rangle \\ &= \langle \gamma, P \rangle \cdot \langle v_1^{(2^m i_1)} \cdots v_r^{(2^m i_r)}, Q^{2^m} \rangle.\end{aligned}$$

Pour toute suite d'entiers positifs ou nuls $J = (j_1, \ldots, j_r)$, posons $2J := (2j_1, \ldots, 2j_r)$ et $v^J := v_1^{(j_1)} \cdots v_r^{(j_r)}$. Observons que $\langle v^{2J}, R^2 \rangle = \langle v^J, R \rangle$ pour tout $R \in \mathcal{P}$ et toute suite J. En effet, δ_Γ étant Mc-équivariante (cf. le Lemme 2.3), il est facile de voir que $\delta_\Gamma(v^{2J}) = \sum_{J'+J''=2J} v^{J'} \otimes v^{J''}$. D'où

$$\langle v^{2J}, R^2 \rangle = \langle \delta_\Gamma(v^{2J}), R \otimes R \rangle = \sum_{J'+J''=2J} \langle v^{J'}, R \rangle \cdot \langle v^{J''}, R \rangle = \langle v^J, R \rangle^2 = \langle v^J, R \rangle.$$

Posons $I := (i_1, \ldots, i_r)$. La première partie du Lemme 2.1 résulte de ce que $\langle v^{2^m I}, Q^{2^m} \rangle = \cdots = \langle v^I, Q \rangle$. Pour montrer la seconde partie, il suffit de savoir que

$$\begin{aligned}(\gamma v_1^{(2^m i_1)} \cdots v_r^{(2^m i_r)})g &= (\gamma g)(v_1 g)^{(2^m i_1)} \cdots (v_r g)^{(2^m i_r)}, \\ (v_1^{(i_1)} \cdots v_r^{(i_r)})g &= (v_1 g)^{(i_1)} \cdots (v_r g)^{(i_r)},\end{aligned}$$

et que le degré de chaque variable $a_1, \ldots, a_k$ dans γg est inférieur à 2^m. Ceci résulte facilement de la formule

$$(a_{j_1} + \cdots + a_{j_s})^{(d)} = \sum_{d_1+\cdots+d_s=d} a_{j_1}^{(d_1)} \cdots a_{j_s}^{(d_s)}$$

qui se vérifie pour tout $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_s \leqslant k$, $d \geqslant 0$, et du fait que l'ensemble des polynômes en $a_1, \ldots, a_k$ ayant le degré de chaque variable a_i inférieur à 2^m forme une sous-algèbre de Γ (cela parce que tout carré de Γ est nul). □

Soit $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel gradué engendré par les monômes $x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}$ avec $\prod_{j=1}^k i_j$ pair. Notons $\mathcal{W}^* \subset \Gamma$ le sous-espace vectoriel gradué engendré par les monômes $a_1^{(i_1)} \cdots a_k^{(i_k)}$ avec $\prod_{j=1}^k i_j$ pair. L'accouplement canonique entre $\mathcal{P}$ et Γ permet d'identifier $\mathcal{W}^*$ au dual de $\mathcal{W}$. Rappelons que $\mathcal{W}^\perp \subset \Gamma$ désigne le sous-espace vectoriel gradué engendré par les monômes $a_1^{(i_1)} \cdots a_k^{(i_k)}$ avec $\prod_{j=1}^k i_j$ impair.

Lemme 2.2. — *Soient $d > 0$, $m \geqslant 0$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \Gamma_d$. Supposons que les classes modulo $\mathcal{W}^\perp$ de $\gamma_1, \ldots \gamma_N$ sont linéairement indépendantes dans $\Gamma/\mathcal{W}^\perp$. Alors il existe $P_1, \ldots, P_N \in \mathcal{W}^d$ vérifiant*

$$\langle \gamma_i, P_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leqslant i = j \leqslant N, \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant i \neq j \leqslant N. \end{cases}$$

Démonstration. — L'espace vectoriel gradué Γ se décompose en $\Gamma = \mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{W}^*$. Soient $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_N$ les images de $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ (respectivement) par la projection canonique $\Gamma \longrightarrow \mathcal{W}^*$. Par hypothèse, les éléments $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_N$ sont linéairement indépendants dans $\mathcal{W}_d^*$. Comme les espaces vectoriels $\mathcal{W}_d^*$ et $\mathcal{W}^d$ sont en dualité, il existe $P_1, \ldots, P_N \in \mathcal{W}^d$ tels que $\langle \bar{\gamma}_i, P_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant N$. En observant $\gamma_i - \bar{\gamma}_i \in \mathcal{W}^\perp$, il suit que $\langle \gamma_i - \bar{\gamma}_i, P_j \rangle = 0$, d'où $\langle \gamma_i, P_j \rangle = \langle \bar{\gamma}_i, P_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant N$. □

2.2. Action du semigroupe des matrices

Soit Mc le semigroupe multiplicatif des matrices $k \times k$ à coefficients dans $\mathbb{F}_2$. L'action naturelle à gauche de Mc sur $\mathcal{P}$ est définie [40] par la formule

$$(gP)(x_1, \ldots, x_k) := P\big((x_1, \ldots, x_k)g\big), \ P \in \mathcal{P}, \ g \in Mc,$$

où $(x_1, \ldots, x_k)g$ est le produit matriciel de g et $(x_1, \ldots, x_k)$, ce dernier vu comme une matrice ligne $(1 \times k)$. En particulier, $(gx_1, \ldots, gx_k) = (x_1, \ldots, x_k)g$ en tant que matrices lignes, $g(x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}) = (gx_1)^{i_1} \cdots (gx_k)^{i_k}$ pour tout $i_1, \ldots i_k \geqslant 0$ et $g(\sum P) = \sum gP$ pour toute somme $\sum P$ dans $\mathcal{P}$.

Par transposition, l'action à droite de Mc sur Γ est définie par la formule

$$(\gamma g)(a_1,\ldots,a_k) := \gamma\big((a_1,\ldots,a_k)g^T\big),\ \gamma\in\Gamma,\ g\in Mc,$$

où g^T est le transposé de g. On observera que $(a_1g,\ldots,a_kg)=(a_1,\ldots,a_k)g^T$ en tant que matrices lignes, $(a_1^{(i_1)}\cdots a_k^{(i_k)})g = (a_1g)^{(i_1)}\cdots(a_kg)^{(i_k)}$ pour tout $i_1,\ldots i_k \geqslant 0$ et $(\sum\gamma)g = \sum\gamma g$ pour toute somme $\sum\gamma$ dans Γ.

L'action de Mc sur $\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}$ et sur $\Gamma\otimes\Gamma$ est définie respectivement par

$$\begin{cases} g(P'\otimes P'') := gP'\otimes gP'', & g\in Mc,\ P'\in\mathcal{P},\ P''\in\mathcal{P},\\ (\gamma'\otimes\gamma'')g := \gamma' g\otimes\gamma'' g, & g\in Mc,\ \gamma'\in\Gamma,\gamma''\in\Gamma. \end{cases}$$

Lemme 2.3. —

(i) *La multiplication, la comultiplication de $\mathcal{P}$ et celles de Γ sont Mc-équivariantes.*

(ii) $\langle\gamma g, P\rangle = \langle\gamma, gP\rangle$ *pour tout $\gamma\in\Gamma$, $g\in Mc$, $P\in\mathcal{P}$.*

Démonstration. — L'espace vectoriel $\mathbb{F}_2\langle x_1,\ldots,x_k\rangle$ s'identifie au dual $\mathcal{V}^*$ de l'espace vectoriel $\mathcal{V} = \mathbb{F}_2\langle a_1,\ldots,a_k\rangle$ défini dans la Section 2.1. Pour $n\geqslant 0$, le groupe symmétrique $\mathfrak{S}_n$ opère sur $(\mathcal{V}^*)^{\otimes n}$ par permutation des facteurs. L'algèbre $\mathcal{P}$ s'identifie à l'algèbre symmétrique $S(\mathcal{V}^*) := \bigoplus_{n\geqslant 0}(\mathcal{V}^*)^{\otimes n}_{\mathfrak{S}_n}$ formée des coinvariants pour l'action des groupes symmétriques. En identifiant $\mathcal{GL}$ au groupe des applications linéaires inversibles $\mathcal{GL}(\mathcal{V}^*)$, ce groupe opère de manière naturelle à gauche sur $S(\mathcal{V}^*)\equiv\mathcal{P}$. Par transposition, $\mathcal{GL}(\mathcal{V}^*)$ opère à droite sur $\mathcal{V}$ et donc à droite sur $\Gamma(\mathcal{V})\equiv\Gamma$. En examinant de près, on s'aperçoit que cette action de $\mathcal{GL}\equiv\mathcal{GL}(\mathcal{V}^*)$ sur $\mathcal{P}$ et sur Γ est donnée par les formules citées plus haut. Cela démontre le lemme[(1)]. □

Soit Ω l'ensemble mentionné dans la Section 1.1. Ses éléments sont des suites d'entiers $\omega = (r,k_0,\ldots,k_{r+1},m_1,\ldots,m_{r+1})$ ayant $0<r<k$, $0 = k_0<\cdots<k_r\leqslant k_{r+1}=k$ et $m_1>\cdots>m_{r+1}=0$. À chaque $\omega\in\Omega$ sont associés le monôme $a_\omega = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} a_j^{(2^{m_i}-1)}$ et le groupe

$$G_\omega = \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_{k_1-k_0} & & 0\\ & \ddots & \\ * & & \mathcal{GL}_{k_{r+1}-k_r}\end{pmatrix}.$$

(1) Nous remercions le Pr. Lionel Schwartz pour cette démonstration conceptuelle.

LEMME 2.4. — *Soient* $\omega = (r, k_0, \ldots, k_{r+1}, m_1, \ldots, m_{r+1}) \in \Omega$, $g \in Mc$, $m > 0$ *et* $0 < s < k$. *Alors*

(i) $(a_1^{(2^m-1)} \cdots a_k^{(2^m-1)})g = \begin{cases} a_1^{(2^m-1)} \cdots a_k^{(2^m-1)} & si\ g \in \mathcal{GL}, \\ 0 & si\ g \notin \mathcal{GL}. \end{cases}$

(ii) $\langle (a_1 \cdots a_s)g, x_1 \cdots x_s \rangle = 1$ *si et seulement si* $g \in \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_s & * \\ * & * \end{pmatrix}$. *Par conséquent* $(a_1 \cdots a_s)g = a_1 \cdots a_s$ *si et seulement si* $g \in \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_s & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$. *Le stabilisateur de* $a_1 \cdots a_s$ *pour l'action du groupe* $\mathcal{GL}$ *est* $\begin{pmatrix} \mathcal{GL}_s & 0 \\ * & \mathcal{GL}_{k-s} \end{pmatrix}$.

(iii) $a_\omega g = a_\omega$ *si et seulement si* $(a_1 \cdots a_{k_i})g = a_1 \cdots a_{k_i}$ *pour tout* $1 \leqslant i \leqslant r$. *Par conséquent,* G_ω *est le stabilisateur de* a_ω *pour l'action du groupe* $\mathcal{GL}$.

Démonstration. — (i) Soit $g = (g_{i,j})_{i,j=1}^k$ avec $g_{i,j} \in \mathbb{F}_2$. Désignons par $\det g$ le déterminant de la matrice g. Posons $\gamma_m := a_1^{(2^m-1)} \cdots a_k^{(2^m-1)}$. Montrons $\gamma_m g = \det g \cdot \gamma_m$ par récurrence sur m. Si $m = 1$, on a

$$\begin{aligned} \gamma_1 g &= (a_1 g) \cdots (a_k g) = \prod_{i=1}^k (g_{1,i} a_1 + \cdots + g_{k,i} a_k) \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 \neq \cdots \neq i_k \leqslant k} g_{i_1,1} \cdots g_{i_k,k} \cdot a_1 \cdots a_k = \det g \cdot a_1 \cdots a_k = \det g \cdot \gamma_1. \end{aligned}$$

Supposons $m > 1$ et $\gamma_{m-1} = \det g \cdot \gamma_{m-1}$. On a

$$\begin{aligned} \gamma_m g &= \gamma_{m-1} g \cdot (a_1 g)^{(2^{m-1})} \cdots (a_k g)^{(2^{m-1})} \\ &= \det g \cdot \gamma_{m-1} \prod_{i=1}^k (g_{1,i} a_1 + \cdots + g_{k,i} a_k)^{(2^{m-1})} \\ &= \det g \cdot \gamma_{m-1} \prod_{i=1}^k \Big(\sum_{j_1 + \cdots + j_k = 2^{m-1}} g_{1,i}^{j_1} \cdots g_{k,i}^{j_k} a_1^{(j_1)} \cdots a_k^{(j_k)} \Big). \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $\gamma_{m-1} a_t^{(j_t)} = 0$ si $1 \leqslant t \leqslant k$ et $0 < j_t < 2^{m-1}$. D'où

$$\begin{aligned} \gamma_m g = \det g \cdot \gamma_{m-1} & \prod_{i=1}^k (g_{1,i} a_1^{(2^{m-1})} + \cdots + g_{k,i} a_k^{(2^{m-1})}) \\ = \quad \det g \cdot \gamma_{m-1} & \sum_{1 \leqslant i_1 \neq \cdots \neq i_k \leqslant k} g_{i_1,1} \cdots g_{i_k,k} \cdot a_1^{(2^{m-1})} \cdots a_k^{(2^{m-1})} = \det g \cdot \gamma_m. \end{aligned}$$

(ii) Soit $g = (g_{i,j})_{i,j=1}^k$ avec $g_{i,j} \in \mathbb{F}_2$. Posons $\bar{g} := (g_{i,j})_{i,j=1}^s$. On a

$$\begin{aligned}(a_1 \cdots a_s)g = (a_1 g) \cdots (a_s g) &= \prod_{i=1}^{s} (g_{1,i}a_1 + \cdots + g_{k,i}a_k) \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 \neq \cdots \neq i_s \leqslant s} g_{i_1,1} \cdots g_{i_s,s} \cdot a_1 \cdots a_k + a_{s+1}u_{s+1} + \cdots + a_k u_k \\ &= \deg \bar{g} \cdot a_1 \cdots a_s + a_{s+1}u_{s+1} + \cdots + a_k u_k\end{aligned}$$

pour certains $u_{k+1}, \ldots, u_k \in \Gamma$. D'où $\langle (a_1 \cdots a_s)g, x_1 \cdots x_s \rangle = 1$ si et seulement si $\bar{g} \in \mathcal{GL}_s$, c'est-à-dire si et seulement si $g \in \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_s & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

Supposons $(a_1 \cdots a_s)g = a_1 \cdots a_s$. Par ce qui précède $\bar{g} \in \mathcal{GL}_s$. Notons que $(a_1 \cdots a_s) \begin{pmatrix} \bar{g}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{k-s} \end{pmatrix} = (a_1 \cdots a_s)\bar{g}^{-1} = a_1 \cdots a_s$ d'après le Lemme 2.4(i). Posant $\begin{pmatrix} \bar{g}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{k-s} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_s & \widetilde{g} \\ * & * \end{pmatrix}$ avec $\widetilde{g} = (\widetilde{g}_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant s < j \leqslant k}$, on a

$$\begin{aligned} a_1 \cdots a_s &= (a_1 \cdots a_s)g = (a_1 \cdots a_s) \begin{pmatrix} \bar{g}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{k-s} \end{pmatrix} g \\ &= (a_1 \cdots a_s) \begin{pmatrix} \mathbb{I}_s & \widetilde{g} \\ * & * \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{s} (a_i + \widetilde{g}_{i,s+1}a_{s+1} + \cdots + \widetilde{g}_{i,k}a_k). \end{aligned}$$

En développant ce produit, on voit apparaître le monôme $\widetilde{g}_{i,s+q}a_{s+q} \prod_{1 \leqslant j \neq i \leqslant s} a_j$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant s < s+q \leqslant k$. Il s'ensuit que $\widetilde{g}_{i,s+q} = 0$ et que

$$g = \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{k-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_s & 0 \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_s & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Inversement, si $g = \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_s & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, alors d'après le Lemme 2.4(i) on a $(a_1 \cdots a_s)g = (a_1 \cdots a_s)\bar{g} = a_1 \cdots a_s$.

Finalement, si $g \in \mathcal{GL}$, il résulte clairement de ce qui précède que g est le stabilisateur de $a_1 \cdots a_s$ si et seulement si

$$g \in \mathcal{GL} \cap \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_s & 0 \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_s & 0 \\ * & \mathcal{GL}_{k-s} \end{pmatrix}.$$

(iii) Supposons $a_\omega g = a_\omega$. Soient $P_0, \ldots, P_{m_1-1} \in \mathcal{P}$ des polynômes homogènes vérifiant $\deg P_j = k_i$ si $m_{i+1} \leqslant j < m_i$ et $1 \leqslant i \leqslant r$. Posons

$$f(P_0, \ldots, P_{m_1-1}) := \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=m_{i+1}}^{m_i-1} P_j^{2^j}.$$

Puisque

$$a_\omega = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=m_{i+1}}^{m_i-1} a_1^{(2^j)} \cdots a_{k_i}^{(2^j)},$$

d'après le Lemme 2.1 on a

$$\langle a_\omega g, f(P_0,\ldots,P_{m_1-1})\rangle = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=m_{i+1}}^{m_i-1} \langle (a_1\cdots a_{k_i})g, P_j\rangle.$$

Il suit que

$$\prod_{i=1}^{r} \prod_{j=m_{i+1}}^{m_i-1} \langle (a_1\cdots a_{k_i})g, P_j\rangle = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=m_{i+1}}^{m_i-1} \langle a_1\cdots a_{k_i}, P_j\rangle.$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et $m_{i+1} \leqslant j < m_i$, en choisissant $P_j := x_1\cdots x_{k_i} + Q_j$ avec Q_j étant un monôme quelconque de degré k_i et différent de $x_1\cdots x_{k_i}$, de sorte que $\langle a_1\cdots a_{k_i}, P_j\rangle = 1$, on obtient $\langle (a_1\cdots a_{k_i})g, P_j\rangle = 1$. Les Q_j étant quelconques, ceci implique que $(a_1\cdots a_{k_i})g = a_1\cdots a_{k_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$.

Supposons $(a_1\cdots a_{k_i})g = a_1\cdots a_{k_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$. Montrons $a_\omega g = a_\omega$ par récurrence sur r. Si $r = 1$, ceci est vrai à cause du Lemme 2.4(i). Supposons $r > 1$ et qu'il est vrai pour toute valeur inférieure de r. D'abord, d'après le Lemme 2.4(ii) on a $g \in \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ * & \widetilde{g} \end{pmatrix}$ pour certains $g_1 \in \mathcal{GL}_{k_1}$ et $\widetilde{g} \in \mathcal{GL}_{k-k_1}$ vérifiant $(a_{k_1+1}\cdots a_{k_i})g = a_{k_1+1}\cdots a_{k_i}$ pour tout $1 < i \leqslant r$. Posant $\widetilde{a}_\omega := \prod_{i=2}^{r}\prod_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} a_j^{(2^{m_i}-1)}$, on a

$$a_\omega g = \left(\widetilde{a}_\omega \prod_{j=1}^{k_1} a_j^{(2^{m_1}-1)}\right) g = \widetilde{a}_\omega g \cdot \left(\prod_{j=1}^{k_1} a_j^{(2^{m_1}-1)}\right) g_1 = \widetilde{a}_\omega g \cdot \prod_{j=1}^{k_1} a_j^{(2^{m_1}-1)}$$

d'après le lemme 2.4(i). Il est facile de vérifier que $\widetilde{a}_\omega g = \widetilde{a}_\omega \widetilde{g} + \sum_{i,\ell} u_{i\ell} a_i^{(\ell)}$ pour certains $u_{i\ell} \in \Gamma$, où $1 \leqslant i \leqslant k_1$ et $1 \leqslant \ell < 2^{m_2}$. D'où

$$\begin{aligned} a_\omega g &= \widetilde{a}_\omega \widetilde{g} \cdot \prod_{j=1}^{k_1} a_j^{(2^{m_1}-1)} + \sum_{i\ell} u_{i\ell} a_i^{(\ell)} \prod_{j=1}^{k_1} a_j^{(2^{m_1}-1)} \\ &= \widetilde{a}_\omega \widetilde{g} \cdot \prod_{j=1}^{k_1} a_j^{(2^{m_1}-1)} = \widetilde{a}_\omega \cdot \prod_{j=1}^{k_1} a_j^{(2^{m_1}-1)} = a_\omega, \end{aligned}$$

car $\widetilde{a}_\omega \widetilde{g} = \widetilde{a}_\omega$ par hypothèse de récurrence. □

Lemme 2.5. — *Soient $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant k$ des entiers. Alors il existe $g \in \mathcal{GL}$ tel que*

$$(a_1 \cdots a_{k-1})g = \sum_{j=1}^{r} \prod_{1 \leqslant i \neq i_j \leqslant k} a_i.$$

Démonstration. — Le lemme est démontré en observant

– que $\{(a_1 \cdots a_{k-1})g \mid g \in \mathcal{GL}\} \cong \mathcal{GL}/G_0$, où $G_0 := \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_{k-1} & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ est le stabilisateur de $a_1 \cdots a_{k-1}$ pour l'action du groupe $\mathcal{GL}$,

– que $\{(a_1 \cdots a_{k-1})g \mid g \in \mathcal{GL}\}$ est inclu dans l'ensemble des expressions

$$\prod_{1 \leqslant i \neq i_1 \leqslant k} a_i + \cdots + \prod_{1 \leqslant i \neq i_r \leqslant k} a_i$$

avec $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant k$,

– que $|\mathcal{GL}/G_0| = 2^k - 1$ est égal au nombre de suites d'entiers $(i_1, \ldots, i_r)$ vérifiant $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant k$.

□

Le lemme suivant sera utile pour la démonstration des Théorèmes 1.1(i) et 1.3(ii).

Lemme 2.6. — *Soit m un entier positif.*

(i) *On a* $\dim \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^m-1)}\rangle = \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{2^m-1}$ *et*

$$\dim \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^m-1)}\rangle \cap \mathcal{W}^{\perp} = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad 2^m - 1 = k, \\ 0 & \qquad\qquad \textit{sinon.} \end{cases}$$

(ii) *Supposons $k > 1$. Alors* $\dim \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^m-1)} \cdots a_{k-1}^{(2^m-1)}\rangle = \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{m}$ *et*

$$\mathcal{GL}\langle a_1^{(2^m-1)} \cdots a_{k-1}^{(2^m-1)}\rangle \cap \mathcal{W}^{\perp} = 0.$$

Démonstration. — (i) Pour tout sous-ensemble $I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$ de $\{1, \ldots, k\}$ vérifiant $r \leqslant 2^m - 1$, notons

$$x_I := \begin{cases} x_{i_1}^{2^m-r} x_{i_2} x_{i_3} \cdots x_{i_r} & \text{si} \quad 2^m - 1 \leqslant k, \\ x_{i_1}^{2^m-r-1} x_{i_2}^2 x_{i_3} \cdots x_{i_r} & \text{si} \quad 2^m - 1 > k. \end{cases}$$

En utilisant la formule

$$(a_{i_1} + \cdots + a_{i_r})^{(2^m-1)} = \sum_{m_1 + \cdots + m_r = 2^m - 1} a_{i_1}^{(m_1)} \cdots a_{i_r}^{(m_r)},$$

il est facile de vérifier que $\langle (a_{i_1} + \cdots + a_{i_r})^{(2^m-1)}, x_J\rangle = \delta_{IJ}$ pour tous sous-ensembles $I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$, $J = \{j_1 < \cdots < j_s\}$ de $\{1, \ldots, k\}$ vérifiant $r, s \leqslant 2^m - 1$. Il s'ensuit que le dual de l'espace vectoriel $\mathcal{GL}\langle a_1^{(2^m-1)}\rangle$

s'identifie à $\bigoplus_I \mathbb{F}_2\langle x_I\rangle$. D'où $\mathcal{GL}\langle a_1^{(2^m-1)}\rangle \cap \mathcal{W}^\perp = 0$ si $2^m-1 \neq k$, et $\dim \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^m-1)}\rangle = \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{2^m-1}$.

Supposons $2^m - 1 = k$. Puisque $\langle (a_{i_1} + \cdots + a_{i_r})^{(k)}, x_1 \cdots x_k\rangle = 0$ si $r < k$, on a $\dim \mathcal{GL}\langle a_1^{(k)}\rangle \cap \mathcal{W}^\perp \leqslant 1$. Pour montrer que l'égalité a lieu dans ce cas, il suffit de vérifier que

$$\sum_{(m_1,\dots,m_r)} a_{i_1}^{(m_1)} \cdots a_{i_r}^{(m_r)} \in \mathcal{GL}\langle a_1^{(k)}\rangle$$

pour tout $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant k$, où $(m_1,\dots,m_r)$ parcourt l'ensemble des suites d'entiers positifs de somme $m_1 + \cdots + m_r = k$. Montrons ceci par récurrence sur r. Il n'y a rien à faire si $r = 1$. Supposons $r > 1$ et que cette propriété est vérifiée pour toute valeur inférieure de r. On a

$$(a_{i_1} + \cdots + a_{i_r})^{(k)} = \sum_{(j_1,\dots,j_s)} \sum_{(m_1,\dots,m_s)} a_{j_1}^{(m_1)} \cdots a_{j_s}^{(m_s)},$$

où la première somme est prise sur l'ensemble des sous-suites de $(i_1,\dots,i_r)$, la seconde est prise sur l'ensemble des suites d'entiers positifs $(m_1,\dots,m_s)$ vérifiant $m_1 + \cdots + m_s = k$. Par hypothèse de récurrence

$$\sum_{(m_1,\dots,m_s)} a_{j_1}^{(m_1)} \cdots a_{j_s}^{(m_s)} \in \mathcal{GL}\langle a_1^{(k)}\rangle$$

pour toute sous-suite propre $(j_1,\dots,j_s) \subsetneq (i_1,\dots,i_r)$. Il suit donc que

$$\sum_{(m_1,\dots,m_r)} a_{i_1}^{(m_1)} \cdots a_{i_r}^{(m_r)} \in \mathcal{GL}\langle a_1^{(k)}\rangle.$$

(ii) Pour toute suite d'entiers $I = (i_1,\dots,i_r)$ vérifiant $1 \leqslant r \leqslant m$ et $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant k$, notons

$$P_I := \prod_{t=0}^{r} (x_1 \cdots x_k / x_{i_t})^{2^t} \cdot \prod_{r<t\leqslant m} (x_1 \cdots x_k / x_{i_r})^{2^t}.$$

Soit $g_I \in \mathcal{GL}$ une matrice (dont l'existence est assurée par le Lemme 2.5) satisfaisant à

$$(a_1 \cdots a_{k-1}) g_I = \prod_{1\leqslant i\neq i_1\leqslant k} a_i + \cdots + \prod_{1\leqslant i\neq i_r\leqslant k} a_i.$$

Soient $I = (i_1,\dots,i_r)$, $J = (j_1,\dots,j_s)$ des suites entiers vérifiant $1 \leqslant r, s \leqslant m$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant k$ et $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_s \leqslant k$. Notons

$\gamma := a_1^{(2^m-1)} \cdots a_{k-1}^{(2^m-1)}$. Comme $\gamma = \prod_{0\leqslant t<m} a_1^{(2^t)} \cdots a_{k-1}^{(2^t)}$, par application itérative du Lemme 2.1 on a

$$\langle \gamma g_I, P^J\rangle = \prod_{0\leqslant t<m} \langle (a_1\cdots a_{k-1})g_I, P^J_{[t]}\rangle$$
$$= \prod_{t=0}^{s} \langle (a_1\cdots a_{k-1})g_I, x_1\cdots x_k/x_{j_t}\rangle \cdot \prod_{s<t\leqslant m} \langle (a_1\cdots a_{k-1})g_I, x_1\cdots x_k/x_{j_s}\rangle.$$

D'où $\langle \gamma g_I, P^J\rangle \neq 0$ si et seulement si $j_t \in \{i_1,\ldots,i_r\}$ pour tout $1\leqslant t\leqslant s$, c'est-à-dire si et seulement si J est une sous-suite de I. Observons que les éléments γg_I engendrent l'espace vectoriel $\mathcal{GL}\langle\gamma\rangle$. Il en résulte facilement que le dual de celui-ci est isomorphe à $\bigoplus_I \mathbb{F}_2\langle P_I\rangle$. Puisque le nombre des suites I est égal à $\binom{k}{1}+\cdots+\binom{k}{m}$, le lemme suit. □

2.3. Lemmes clefs

Cette section est une préparation à la démonstration du Théorème 1.1(ii). Pour tous entiers positifs m, n, notons

– $Mc_{m,n}$ l'ensemble des matrices $m\times n$ à coefficients dans $\mathbb{F}_2$,
– $\mathbb{O}_{m,n} = 0 \in Mc_{m,n}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls,
– $\mathbb{I}_n \in \mathcal{GL}_n$ la matrice unité d'ordre n.

Pour $0\leqslant p < m+n$, posons

$$A_p^{m,n} := \begin{cases} \mathbb{O}_{m,n} & \text{si} \quad p=0,\\ \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_p\\ 0 & 0\end{pmatrix} \in Mc_{m,n} & \text{si} \quad 1\leqslant p\leqslant \min(m,n),\\ \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,p-m}\end{pmatrix} \in Mc_{m,n} & \text{si} \quad m<p\leqslant n,\\ \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{p-n,n}\\ \mathbb{I}_n\\ 0\end{pmatrix} \in Mc_{m,n} & \text{si} \quad n<p\leqslant m,\\ \begin{pmatrix} 0 & 0\\ \mathbb{I}_{m+n-p} & 0\end{pmatrix} \in Mc_{m,n} & \text{si} \quad \max(m,n)<p<m+n.\end{cases}$$

Étant donnés une matrice $X = (X_{i,j}) \in Mc_{m,n}$ et un entier positif $p < m+n$, appelons le vecteur $(X_{i,j})_{i-j=m-p}$ la p-ième diagonale de X. Si X est une matrice carrée, notons $\det X$ son déterminant.

Lemme 2.7. — *Soient m, n, q des entiers positifs, $q < m+n$, et $X = (X_{i,j}) \in Mc_{n,m}$. Supposons que $\mathbb{I}_n + XA_p^{m,n} \in \mathcal{GL}_n$ pour tout $1\leqslant p\leqslant q$. Alors les q premières diagonales de X sont nulles.*

Démonstration. — Soit $1 \leqslant p \leqslant q$. Il est facile de vérifier que si les $p-1$ premières diagonales de X sont toutes nulles, alors $\det(\mathbb{I}_n + XA_p^{m,n}) = \prod_{i-j=n-p}(1+X_{i,j})$. Ceci implique que la p-ième diagonale de X est nulle. D'où le lemme. □

LEMME 2.8. — *Soit $\omega = (r, k_0, \ldots, k_{r+1}, m_1, \ldots, m_{r+1}) \in \Omega$ avec $m_1 \geqslant k$. Notons $i(p)$, pour $0 \leqslant p \leqslant k-2$, l'entier vérifiant $m_1 - m_{i(p)} \leqslant p < m_1 - m_{i(p)+1}$, et posons $i(k-1) := i(k-2)$. Pour tout $0 \leqslant p \leqslant k-1$ ayant $i(p) > 1$, soit $\tau_p \in Mc_{k-k_1,k-k_1}$ une matrice dont les $k-p$ dernières lignes sont nulles. Pour tout $0 \leqslant p \leqslant k-1$, posons*

$$\sigma_p := \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_1} & 0 \\ A_p^{k-k_1,k_1} & 0 \end{pmatrix} \in Mc & si \quad i(p) = 1, \\ \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_1} & 0 \\ A_p^{k-k_1,k_1} & \tau_p \end{pmatrix} \in Mc & si \quad i(p) > 1. \end{cases}$$

Supposons

- *que $P = \sum x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}$ est une somme de monômes qui vérifient : $2^{m_1-k} > \max(i_1, i_k)$ si $m_1 - m_{i(k-2)+1} = k-1$,*
- *que $P = (x_1 \cdots x_{k_1})^{2^{m_1-k}-1}\widetilde{P} + R$ avec $\widetilde{P} \in \mathcal{P}$, et R étant une somme de monômes non divisibles par $(x_1 \cdots x_{k_1})^{2^{m_1-k}-1}$,*
- *que $g = \begin{pmatrix} A & * \\ * & \widetilde{g} \end{pmatrix} \in Mc$ avec $A \in Mc_{k_1,k_1}$ et $\widetilde{g} \in Mc_{k-k_1,k-k_1}$.*

Posons $\widetilde{a}_\omega := \prod_{i=2}^{r} \prod_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} a_j^{(2^{m_i}-1)}$, $P_1 := \prod_{p=0}^{k-1} \sigma_p(x_1 \cdots x_{k_{i(p)}})^{2^{m_1-p-1}}$ et $\widetilde{P}_1 := \prod_{p=m_1-m_2}^{k-1} \tau_p(x_{k_1+1} \cdots x_{k_{i(p)}})^{2^{m_1-p-1}}$. Alors :

(i) *Si $g \in G_\omega^1$, on a $\langle a_\omega g, PP_1 \rangle = \langle \widetilde{a}_\omega \widetilde{g}, \widetilde{P}\widetilde{P}_1 \rangle$.*

(ii) *Si $g \notin G_\omega^1$, on a $\langle a_\omega g, PP_1 \rangle = 0$.*

Démonstration. —

(i) Au cours de la démonstration du Lemme 2.4(iii) on a montré que $a_\omega g = \widetilde{a}_\omega \widetilde{g} \cdot \prod_{j=1}^{k_1} a_j^{(2^{m_1}-1)}$. Notons que $P_1 + (x_1 \cdots x_{k_1})^{2^{m_1}-2^{m_1-k}} \widetilde{P}_1$ est une somme de monômes non divisibles par $(x_1 \cdots x_{k_1})^{2^{m_1}-1}$. D'où

$$\begin{aligned} \langle a_\omega g, PP_1 \rangle &= \langle \widetilde{a}_\omega \widetilde{g} \cdot \prod_{j=1}^{k_1} a_j^{(2^{m_1}-1)}, (x_1 \cdots x_{k_1})^{2^{m_1-k}-1} \widetilde{P} P_1 + RP_1 \rangle \\ &= \langle \widetilde{a}_\omega \widetilde{g} \cdot \prod_{j=1}^{k_1} a_j^{(2^{m_1}-1)}, (x_1 \cdots x_{k_1})^{2^{m_1-k}-1} \widetilde{P} P_1 \rangle \\ &= \langle \widetilde{a}_\omega \widetilde{g} \cdot \prod_{j=1}^{k_1} a_j^{(2^{m_1}-1)}, (x_1 \cdots x_{k_1})^{2^{m_1}-1} \widetilde{P}\widetilde{P}_1 \rangle = \langle \widetilde{a}_\omega \widetilde{g}, \widetilde{P}\widetilde{P}_1 \rangle. \end{aligned}$$

(ii) Raisonnons par l'absurde. Supposons que $Q = x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k}$ soit un monôme de P qui vérifie $\langle a_\omega g, QP_1\rangle = 1$. Soit $1 \leqslant t \leqslant r$ l'entier tel que $m_1 - m_t \leqslant k-1 < m_1 - m_{t+1}$. Posant $Q_1 := Q\sigma_{k-1}(x_1\cdots x_{k_t})^{2^{m_1-k}}$ et

$$\gamma_1 := \prod_{j=1}^{k_t} a_j^{(2^{m_1-k+1}-1)}\cdot \prod_{i=t+1}^{r}\prod_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} a_j^{(2^{m_i}-1)},$$

de sorte que $a_\omega = \gamma_1 \prod_{p=0}^{k-2}\prod_{j=1}^{k_{i(p)}} a_j^{(2^{m_1-p-1}-1)}$, on a

$$\begin{aligned} 1 &= \langle a_\omega g, QP_1\rangle \\ &= \langle (\gamma_1 \prod_{p=0}^{k-2}\prod_{j=1}^{k_{i(p)}} a_j^{(2^{m_1-p-1}-1)})g, Q_1\prod_{p=0}^{k-2}\sigma_p(x_1\cdots x_{k_1})^{2^{m_1-p-1}}\rangle \\ &= \langle \gamma_1 g, Q_1\rangle\cdot\prod_{p=0}^{k-2}\langle (a_1\cdots a_{k_{i(p)}})g, \sigma_p(x_1\cdots x_{k_{i(p)}})\rangle \end{aligned}$$

d'après le Lemme 2.1. Il suit que $1 = \langle\gamma_1 g, Q_1\rangle$ et que $g\sigma_p \in \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_{k_{i(p)}} & * \\ * & * \end{pmatrix}$ pour tout $0 \leqslant p \leqslant k-2$, ceci d'après les Lemmes 2.3(ii) et 2.4(ii). D'où l'on vérifie sans peine

– que $A \in \mathcal{GL}_{k_1}$,
– que $g_1 := \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{k-k_1}\end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_1} & X \\ * & * \end{pmatrix}$ pour un certain $0 \neq X \in Mc_{k_1,k-k_1}$,
– que $\gamma_1 g = \gamma_1 g_1$ et que $g_1\sigma_p \in \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_{k_{i(p)}} & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

Montrons que les p premières diagonales de X sont nulles pour tout $0 \leqslant p \leqslant k-2$. Ceci étant vrai pour $p=0$, on suppose $0 < p \leqslant k-2$ et qu'il est vrai pour toute valeur inférieure de p. Si $i(p) = 1$, on a

$$\begin{aligned} g_1\sigma_p &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_1} & X \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_1} & 0 \\ A_p^{k-k_1,k_1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_1} + XA_p^{k-k_1,k_1} & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_{k_1} & * \\ * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où $\det(\mathbb{I}_{k_1} + XA_p^{k-k_1,k_1}) = 1$, ce qui implique que la p-ième diagonale de X est nulle (cf. la démonstration du Lemme 2.7). Si $i(p) > 1$, on a

$$\begin{aligned} g_1\sigma_p &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_1} & X \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_1} & 0 \\ A_p^{k-k_1,k_1} & \tau_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_1} + XA_p^{k-k_1,k_1} & X\tau_p \\ * & * \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_{k_{i(p)}} & * \\ * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque les $p-1$ premières diagonales de X et les $k-p$ dernières lignes de τ_p sont nulles par hypothèse, on a $X\tau_p = 0$. D'où $\det(\mathbb{I}_{k_1} + XA_p^{k-k_1,k_1}) = 1$, ce qui implique que la p-ième diagonale de X est nulle (cf. la démonstration du Lemme 2.7).

On vient de montrer que les $k-2$ premières diagonales de X sont nulles. Comme $X \neq 0$, il suit que $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Mc_{k_1,k-k_1}$. Montrons que $m_1 - m_t = k-1$. En effet, supposant le contraire et posant

$$\gamma_2 := \prod_{j=1}^{k_t} a_j^{(2^{m_1-k}-1)} \cdot \prod_{i=t+1}^{r} \prod_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} a_j^{(2^{m_i}-1)},$$

de sorte que $\gamma_1 = \gamma_2 \prod_{j=1}^{k_t} a_j^{(2^{m_1-k})}$, on a

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \gamma_1 g_1, Q_1 \rangle = \langle (\gamma_2 \prod_{j=1}^{k_t} a_j^{(2^{m_1-k})}) g_1, Q\sigma_{k-1}(x_1 \cdots x_{k_t})^{2^{m_1-k}} \rangle \\ &= \langle \gamma_2 g_1, Q \rangle \cdot \langle (a_1 \cdots a_{k_t}) g_1, \sigma_p(x_1 \cdots x_{k_t}) \rangle \end{aligned}$$

d'après le Lemme 2.1. D'où $g_1\sigma_{k-1} \in \begin{pmatrix} \mathcal{GL}_{k_t} & * \\ * & * \end{pmatrix}$ d'après les Lemmes 2.3(ii) et 2.4(ii), ce qui équivaut à $\mathbb{I}_{k_1} + XA_{k-1}^{k-k_1,k_1} \in \mathcal{GL}_{k_1}$. Ceci est impossible, car $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Mc_{k_1,k-k_1}$ et $A_{k-1}^{k-k_1,k_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mc_{k-k_1,k_1}$.

On a montré que $m_1 - m_t = k-1$. Il s'ensuit facilement que $t = i(k-2)+1$. D'où $\max(i_1, i_k) < 2^{m_t-1}$ par hypothèse. Posant

$$\gamma_2 := \prod_{j=2}^{k_t} a_j^{(2^{m_t}-1)} \cdot \prod_{i=t+1}^{r} \prod_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} a_j^{(2^{m_i}-1)},$$

de sorte que $\gamma_1 = \gamma_2 a_1^{(2^{m_t}-1)}$, on a

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \gamma_1 g_1, Q_1 \rangle = \langle (\gamma_2 a_1^{(2^{m_t}-1)}) g_1, Q\sigma_{k-1}(x_1 \cdots x_{k_t})^{2^{m_t-1}} \rangle \\ &= \langle \gamma_2 g_1 \cdot (a_1 + a_k)^{(2^{m_t}-1)}, Q(x_2 \cdots x_{k_t})^{2^{m_t-1}} (x_1 + x_k)^{2^{m_t-1}} \rangle. \end{aligned}$$

Notons que si $A, B \in \Gamma$, $X, Y \in \mathcal{P}$ sont tels que A ne concerne que les variables a_1, a_k, B ne concerne que les variables $a_2, \ldots, a_{k-1}$, $X \in \mathbb{F}_2[x_1, x_k]$, $Y \in \mathbb{F}_2[x_2, \ldots, x_{k-1}]$, alors on a l'identité $\langle AB, XY \rangle = \langle A, X \rangle \langle B, Y \rangle$. En effet, pour montrer celle-ci, à cause de la bilinéarité du produit $\langle , \rangle$, il suffit de considérer le cas où A, B, X, Y sont des monômes, auquel cas elle est claire.

Par conséquent, d'abord en choisissant un monôme $a_1^{(j_1)}\cdots a_k^{(j_k)}$ qui apparaît dans $\gamma_2 g_1$ tel que

$$1=\langle a_1^{(j_1)}\cdots a_k^{(j_k)}(a_1+a_k)^{(2^{m_t}-1)}, Q(x_2\cdots x_{k_t})^{2^{m_t-1}}(x_1+x_k)^{2^{m_t-1}}\rangle,$$

puis en ne considérant que la partie qui concerne les variables a_1, a_k, x_1, x_k dans le membre de droite de cette égalité, on obtient que

$$1=\langle a_1^{(j_1)}a_k^{(j_k)}(a_1+a_k)^{(2^{m_t}-1)}, x_1^{i_1}x_k^{i_k}(x_1+x_k)^{2^{m_t-1}}\rangle,$$

où les entiers j_1, j_k vérifient $j_1+j_k = i_1+i_k-2^{m_t-1}+1 < 2^{m_t-1}$. En appliquant le Lemme 2.1 on a

$$\begin{aligned}1&=\langle a_1^{(j_1)}a_k^{(j_k)}(a_1+a_k)^{(2^{m_t-1}-1)}\cdot(a_1+a_k)^{(2^{m_t-1})}, x_1^{i_1}x_k^{i_k}(x_1+x_k)^{2^{m_t-1}}\rangle\\ &=\langle a_1^{(j_1)}a_k^{(j_k)}(a_1+a_k)^{(2^{m_t-1}-1)}, x_1^{i_1}x_k^{i_k}\rangle\cdot\langle a_1+a_k, x_1+x_k\rangle\\ &=\langle a_1^{(j_1)}a_k^{(j_k)}(a_1+a_k)^{(2^{m_t-1}-1)}, x_1^{i_1}x_k^{i_k}\rangle\cdot 0=0.\end{aligned}$$

Ceci est une contradiction. □

Corollaire 2.9. — *Soit $\omega=(r,k_0,\dots,k_{r+1},m_1,\dots,m_{r+1})\in\Omega$. Supposons qu'il existe $1\leqslant s\leqslant r$ tel que $m_i-m_{i+1}\geqslant k_{i+1}-k_{i-1}$ pour tout $1\leqslant i<s$ et que*

- *soit $m_s-m_{s+1}\geqslant k-k_{s-1}$,*
- *soit $m_s-m_{s+1}=k-k_{s-1}-1$ et $k>k_{s+1}$.*

Notons $i(p)$, pour $0\leqslant p\leqslant k-2$, l'entier vérifiant $m_1-m_{i(p)}\leqslant p<m_1-m_{i(p)+1}$, et posons $i(k-1):=i(k-2)$. Soient $\widetilde{P}\in\mathbb{F}_2[x_{k_s+1},\dots,x_k]$ un polynôme ayant le degré de x_k inférieur à 2^{m_1-k}, et $P:=(x_1\cdots x_{k_s})^{2^{m_1-k}-1}\widetilde{P}$. Alors il existe $\sigma_0,\dots,\sigma_{k-1}\in Mc$ tels que pour tout $g=\begin{pmatrix} * & * \\ * & \widetilde{g}\end{pmatrix}\in Mc$ avec $\widetilde{g}\in Mc_{k-k_s,k-k_s}$, l'on ait

$$\langle a_\omega g, P\prod_{p=0}^{k-1}\sigma_p(x_1\cdots x_{k_{i(p)}})^{2^{m_1-p-1}}\rangle=\begin{cases}\langle\widetilde{a}_\omega\widetilde{g},\widetilde{P}\rangle & si \quad g\in G_\omega^s,\\ 0 & si\quad g\notin G_\omega^s.\end{cases}$$

Démonstration. — Pour tout $0\leqslant p\leqslant k-1$, soit $\sigma_p=(B_1\cdots B_{i(p)}\ 0)\in Mc$ la matrice ayant les blocs $B_i\in Mc_{k,k_i-k_{i-1}}$ définis par

$$B_i:=\begin{cases}\begin{pmatrix}\mathbb{I}_{k_1}\\ A_p^{k-k_1,k_1}\end{pmatrix} & \text{si}\qquad i=1,\\ \begin{pmatrix}\mathbb{O}_{k_{i-1},k_i-k_{i-1}}\\ \mathbb{I}_{k_1}\\ A_{p-m_1+m_i}^{k-k_i,k_i-k_{i-1}}\end{pmatrix} & \text{si}\quad 1<i\leqslant i(p).\end{cases}$$

Pour tout $0 \leqslant p \leqslant k-1$ ayant $i(p) > 1$, soit $\tau_p = (C_2 \cdots C_{i(p)}\ 0) \in Mc$ la matrice ayant les blocs $C_i \in Mc_{k-k_1,k_i-k_{i-1}}$ définis par

$$C_i := \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_2} \\ A^{k-k_2,k_2-k_1}_{p-m_1+m_2} \end{pmatrix} & \text{si} \qquad i=2, \\ \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{k_{i-1}-k_1,k_i-k_{i-1}} \\ \mathbb{I}_{k_i-k_{i-1}} \\ A^{k-k_i,k_i-k_{i-1}}_{p-m_1+m_i} \end{pmatrix} & \text{si} \quad 2 < i \leqslant i(p). \end{cases}$$

Grâce à l'hypothèse sur les écarts entre $m_1, \ldots, m_{s+1}$, on vérifie sans peine, pour tout $0 \leqslant p \leqslant k-1$ ayant $i(p) > 1$, que les $k-p$ dernières lignes de τ_p sont nulles et que $\sigma_p = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_1} & 0 \\ A^{k-k_1,k_1}_p & \tau_p \end{pmatrix}$. Le corollaire résulte alors du Lemme 2.8 par récurrence sur r. $\square$

Lemme 2.10. — *Soient $m \geqslant 0$, et $\gamma = \sum a_1^{(i_1)} \cdots a_k^{(i_k)} \in \Gamma$ un polynôme non nul dont les monômes vérifient :* $\max(i_1, \ldots, i_k) < 2^{m+1}$ *et* $\binom{i_1}{2^m} \cdots \binom{i_k}{2^m} = 0$.

(i) *Il existe $g \in \mathcal{GL}$ tel que γg contienne au moins un monôme ayant le degré de a_k inférieur à 2^m.*

(ii) *Supposons $\gamma \notin \mathcal{W}^\perp$. Alors il existe $g \in \mathcal{GL}$ tel que γg contienne au moins un monôme qui ne soit pas dans $\mathcal{W}^\perp$ et dont le degré de a_k soit inférieur à 2^m.*

Démonstration. — Étant donné un polynôme $\gamma_1 \in \Gamma$, notons $i_k(\gamma_1)$ le degré de a_k dans celui-ci. Soient $g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{GL}$ les matrices définies par

$$a_j g_i := \begin{cases} a_j & \text{si} \quad 1 \leqslant j < k \quad \text{et} \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \\ a_i + a_k & \text{si} \quad j = k \qquad \text{et} \quad 1 \leqslant i \leqslant k. \end{cases}$$

Il est facile de montrer
- que $i_k(\gamma + \gamma g_i) < i_k(\gamma)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$,
- que les monômes des polynômes $\gamma + \gamma g_i$ satisfont à l'hypothèse du lemme,
- que les $\gamma + \gamma g_i$ ne sont pas tous nuls,
- que si $\gamma \notin \mathcal{W}^\perp$, il existe $1 \leqslant i \leqslant k$ tel que $\gamma + \gamma g_i \notin \mathcal{W}^\perp$.

D'où le lemme se vérifie aisément par récurrence sur $i_k(\gamma)$. $\square$

2.4. Démonstration du Théorème 1.1(i)

Soient

- $g_1, \ldots, g_M \in \mathcal{GL}$ tels que les éléments $\widetilde{a}_\omega g_1, \ldots, \widetilde{a}_\omega g_M$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{GL}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle$,
- $h_1, \ldots, h_N \in \mathcal{GL}$ tels que les classes modulo $\mathcal{GL}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle \cap \mathcal{W}^\perp$ des éléments $\widetilde{a}_\omega h_1, \ldots, \widetilde{a}_\omega h_N$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{GL}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle / \mathcal{GL}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle \cap \mathcal{W}^\perp$,
- $P_1, \ldots, P_M \in \mathcal{P}^{\deg \widetilde{a}_\omega}$ tels que $\langle a_{\underset{\sim}{\omega}} g_i, P_j\rangle = \delta_{ij}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant M$,
- $Q_1, \ldots, Q_N \in \mathcal{W}^{\deg \widetilde{a}_\omega}$ (cf. le Lemme 2.2) tels que $\langle a_{\underset{\sim}{\omega}} h_i, Q_j\rangle = \delta_{ij}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant N$.

Pour tout sous-ensemble $I = \{i_1 < \cdots < i_{k_1}\} \subset \{1, \ldots, k_2\}$, soit $\tau_I \in \mathcal{GL}$ une matrice satisfaisant à

$$\begin{cases} (a_1\tau_I, \ldots, a_{k_1}\tau_I) & = & (a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k_1}}), \\ \{a_1\tau_I, \ldots, a_{k_2}\tau_I\} & = & \{a_1, \ldots, a_{k_2}\}, \\ (a_{k_2+1}\tau_I, \ldots, a_k\tau_I) & = & (a_{k_2+1}, \ldots, a_k). \end{cases}$$

Supposons d'abord $1 \leqslant i, j \leqslant M$, $I = \{i_1 < \cdots < i_{k_1}\} \subset \{1, \ldots, k_2\}$ et $J = \{j_1 < \cdots < j_{k_1}\} \subset \{1, \ldots, k_2\}$. Alors

$$\begin{aligned} &\langle a_\omega \tau_J g_j, P_i\big(g_i^{-1}(x_{i_1}\cdots x_{i_{k_1}})\big)^{2^{m_2}}\rangle \\ &= \langle (a_{\underset{\sim}{\omega}} a_1^{(2^{m_2})} \cdots a_{k_1}^{(2^{m_2})})\tau_J g_j, P_i\big(g_i^{-1}(x_{i_1}\cdots x_{i_{k_1}})\big)^{2^{m_2}}\rangle \\ &= \langle a_{\underset{\sim}{\omega}} \tau_J g_j, P_i\rangle \cdot \langle (a_1\cdots a_{k_1})\tau_J g_j, g_i^{-1}(x_{i_1}\cdots x_{i_{k_1}})\rangle \text{ d'après le Lemme 2.1} \\ &= \langle a_{\underset{\sim}{\omega}} g_j, P_i\rangle \cdot \langle (a_{j_1}\cdots a_{j_{k_1}}) g_j, g_i^{-1}(x_{i_1}\cdots x_{i_{k_1}})\rangle \\ &= \delta_{ij}\langle a_{j_1}\cdots a_{j_{k_1}}, g_j g_i^{-1}(x_{i_1}\cdots x_{i_{k_1}})\rangle \text{ d'après le Lemme 2.3(ii)} \\ &= \delta_{ij}\langle a_{j_1}\cdots a_{j_{k_1}}, x_{i_1}\cdots x_{i_{k_1}}\rangle = \delta_{ij}\delta_{IJ}. \end{aligned}$$

Ceci implique l'indépendance linéaire des éléments $a_\omega \tau_I g_i$. D'où

$$\dim \mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle \geqslant \binom{k_2}{k_1} M = \binom{k_2}{k_1} \dim \mathcal{GL}\langle a_{\underset{\sim}{\omega}}\rangle.$$

Supposons maintenant $1 \leqslant i, j \leqslant N$, $I = \{i_1 < \cdots < i_{k_1}\} \subset \{1, \ldots, k_2\}$ et $J = \{j_1 < \cdots < j_{k_1}\} \subset \{1, \ldots, k_2\}$. D'une manière analogue à ce qui était fait plus haut, on montre que $\langle a_\omega \tau_J h_j, Q_i\big(h_i^{-1}(x_{i_1}\cdots x_{i_{k_1}})\big)^{2^{m_2}}\rangle = \delta_{ij}\delta_{IJ}$. Puisque $Q_i\big(h_i^{-1}(x_{i_1}\cdots x_{i_{k_1}})\big)^{2^{m_2}} \in \mathcal{W}$, on a

$$\langle \gamma, Q_i\big(h_i^{-1}(x_{i_1}\cdots x_{i_{k_1}})\big)^{2^{m_2}}\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{W}^\perp.$$

Il suit que les classes modulo $\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle \cap \mathcal{W}^\perp$ des éléments $a_\omega \tau_I h_i$ sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle / \mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle \cap \mathcal{W}^\perp$. D'où

$$\dim \mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle / \mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle \cap \mathcal{W}^\perp \geqslant \binom{k_2}{k_1} N = \binom{k_2}{k_1} \dim \mathcal{GL}\langle \widetilde{a}_\omega\rangle / \mathcal{GL}\langle \widetilde{a}_\omega\rangle \cap \mathcal{W}^\perp .$$

2.5. Démonstration du Théorème 1.1(ii)

C'est à Crabb–Hubbuck [9, p. 150][2] que nous devons l'idée d'utiliser l'accouplement canonique entre Γ et $\mathcal{P}$ pour démontrer l'indépendance linéaire des éléments de $\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle$. Crabb–Hubbuck ont considéré le cas $k_1 = 1$. Grâce à des techniques exposées dans les Sections 2.1, 2.2 et surtout 2.3, nous traitons le cas général.

Soient $\gamma := \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} a_j^{(2^{m_i}-1)}$ et $\widetilde{\mathcal{GL}} \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_s} & 0 \\ 0 & \mathcal{GL}_{k-k_s} \end{pmatrix} \subset \mathcal{GL}$. Étant donnés un sous-espace vectoriel $V \subset \widetilde{\mathcal{GL}}\langle \widetilde{a}_\omega\rangle$ et une matrice $g \in \mathcal{GL}$, notons $\gamma V g := \{(\gamma v)g \mid v \in V\}$. Il est clair que $\gamma V g$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle$ et $\dim \gamma V g = \dim V$. Soient $g_1, \dots, g_M \in \mathcal{GL}$ des représentants des classes à gauche de $\mathcal{GL}/G_\omega^s$.

Supposons donnés $\gamma_1, \dots, \gamma_M \in \widetilde{\mathcal{GL}}\langle \widetilde{a}_\omega\rangle$ avec $\gamma_1 \neq 0$. Comme $m_{s+1} - 1 \leqslant m_1 - k$, d'après le Lemme 2.10 il existe $h \in \widetilde{\mathcal{GL}}$ tel que $\gamma_1 h$ contienne au moins un monôme de la forme $a_{k_s+1}^{(i_{k_s+1})} \cdots a_k^{(i_k)}$ avec $i_k < 2^{m_1-k}$, monôme qui ne soit pas dans $\widetilde{\mathcal{W}}^\perp$ si $\gamma_1 \notin \widetilde{\mathcal{W}}^\perp$. Posons $\widetilde{P} := x_{k_s+1}^{i_{k_s+1}} \cdots x_k^{i_k}$ et $P := (x_1 \cdots x_{k_s})^{2^{m_1-k}-1} \widetilde{P}$. D'après le Corollaire 2.9, il existe $Q \in \mathcal{P}$ tel que pour tout $g = \begin{pmatrix} * & * \\ * & \widetilde{g} \end{pmatrix} \in Mc$ avec $\widetilde{g} \in Mc_{k-k_s, k-k_s}$, l'on ait

$$\langle a_\omega g, PQ^{2^{m_1-k}} \rangle = \begin{cases} \langle \widetilde{a}_\omega \widetilde{g}, \widetilde{P} \rangle & \text{si} \quad g \in G_\omega^s, \\ 0 & \text{si} \quad g \notin G_\omega^s. \end{cases}$$

Posons $\gamma_i := \sum_j \widetilde{a}_\omega h_{ij}$ avec $h_{ij} \in \widetilde{\mathcal{GL}}$, $1 \leqslant i \leqslant M$. Comme $h_{ij} g_i g_1^{-1} h \notin G_\omega^s$ si $i \neq 1$, en notant δ_{1i} le symbole de Kronecker on a

$$\begin{aligned} \langle (\gamma\gamma_i) g_i g_1^{-1} h, PQ^{2^{m_1-k}} \rangle &= \sum_j \langle (\gamma \widetilde{a}_\omega) h_{ij} g_i g_1^{-1} h, PQ^{2^{m_1-k}} \rangle \\ &= \sum_j \langle a_\omega h_{ij} g_i g_1^{-1} h, PQ^{2^{m_1-k}} \rangle = \delta_{1i} \sum_j \langle a_\omega h_{1j} h, PQ^{2^{m_1-k}} \rangle \\ &= \delta_{1i} \sum_j \langle \widetilde{a}_\omega h_{1j} h, \widetilde{P} \rangle = \delta_{1i} \langle \gamma_i h, \widetilde{P} \rangle = \delta_{1i}. \end{aligned}$$

---

(2) Nous remercions le Pr. Lionel Schwartz d'avoir attiré notre attention sur l'article de Crabb–Hubbuck.

Montrons que $\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle = \sum_{i=1}^M \gamma\widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle g_i$. En effet, supposons $g \in \mathcal{GL}$ et $gg_1^{-1} \in G_\omega^s$. Alors $a_\omega gg_1^{-1} = (\gamma\widetilde{a}_\omega)gg_1^{-1} = \gamma\cdot\widetilde{a}_\omega gg_1^{-1}$ (cf. la démonstration du Lemme 2.4(iii)). Notons que $\widetilde{a}_\omega gg_1^{-1} \in \widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle$. D'où $a_\omega g = (a_\omega gg_1^{-1})g_1 = (\gamma\cdot\widetilde{a}_\omega gg_1^{-1})g_1 \in \gamma\widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle g_1$.

Montrons que $\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle = \bigoplus_{i=1}^M \gamma\widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle g_i$. Supposons le contraire : il existe $\gamma_1,\dots,\gamma_M \in \widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle$ avec $\gamma_1 \neq 0$ tels que $\sum_{i=1}^M(\gamma\gamma_i)g_i = 0$. Par ce qui précède, il existe $h \in \widetilde{\mathcal{GL}}$, $P \in \mathcal{P}$ et $Q \in \mathcal{P}$ tels que

$$\langle(\gamma\gamma_i)g_ig_1^{-1}h, PQ^{2^{m_1-k}}\rangle = \delta_{1i} \quad \text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant M.$$

D'où

$$0 = \langle\sum_{i=1}^M(\gamma\gamma_i)g_ig_1^{-1}h, PQ^{2^{m_1-k}}\rangle = \sum_{i=1}^M\langle(\gamma\gamma_i)g_ig_1^{-1}h, PQ^{2^{m_1-k}}\rangle = \sum_{i=1}^M \delta_{1i} = 1,$$

ce qui est une contradiction.

Montrons que $\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle \cap \mathcal{W}^\perp \supset \bigoplus_{i=1}^M \gamma(\widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle \cap \widetilde{\mathcal{W}}^\perp)g_i$. En effet, ceci résulte de ce que $\mathcal{W}^\perp$ est stable sous l'action de $\mathcal{GL}$ (cf. le Lemme 2.4(i)).

Montrons que $\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle \cap \mathcal{W}^\perp = \bigoplus_{i=1}^M \gamma(\widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle \cap \widetilde{\mathcal{W}}^\perp)g_i$. Supposons le contraire : il existe $\gamma_1,\dots,\gamma_M \in \widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle$ avec $\gamma_1 \notin \mathcal{W}^\perp$ tels que $\sum_{i=1}^M(\gamma\gamma_i)g_i \in \mathcal{W}^\perp$. Par ce qui précède $\langle(\gamma\gamma_i)g_ig_1^{-1}h, PQ^{2^{m_1-k}}\rangle = \delta_{1i}$ pour certains $h \in \widetilde{\mathcal{GL}}$, $P \in \mathcal{W}$, $Q \in \mathcal{P}$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant M$. D'où

$$0 = \langle\sum_{i=1}^M(\gamma\gamma_i)g_ig_1^{-1}h, PQ^{2^{m_1-k}}\rangle = \sum_{i=1}^M\langle(\gamma\gamma_i)g_ig_1^{-1}h, PQ^{2^{m_1-k}}\rangle = \sum_{i=1}^M \delta_{1i} = 1,$$

ce qui est une contradiction.

Pour résumer, on a

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle &= \sum_{i=1}^M \dim \gamma\widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle g_i = \sum_{i=1}^M \dim \widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle \\
&= |\mathcal{GL}/G_\omega^s| \dim \widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle, \\
\dim \mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle \cap \mathcal{W}^\perp &= \sum_{i=1}^M \dim \gamma(\widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle \cap \widetilde{\mathcal{W}}^\perp)g_i = \sum_{i=1}^M \dim \widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle \cap \widetilde{\mathcal{W}}^\perp \\
&= |\mathcal{GL}/G_\omega^s| \dim \widetilde{\mathcal{GL}}\langle\widetilde{a}_\omega\rangle \cap \widetilde{\mathcal{W}}^\perp.
\end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

3. Transfert algébrique en degré générique

3.1. Préliminaires

Action de l'algèbre de Steenrod. L'action naturelle à gauche de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{P}$ est définie par $Sq^q(x_i^j) = \binom{j}{q} x_i^{j+q}$. Elle vérifie la formule de Cartan [52]

$$Sq^q(PQ) = \sum_{r=0}^{q} Sq^r(P)Sq^{q-r}(Q),\ q \geqslant 0,\ P \in \mathcal{P},\ Q \in \mathcal{P}.$$

On transpose cette action en une $\mathcal{A}$-action à droite sur Γ en posant $\langle \gamma\theta, P\rangle := \langle \gamma, \theta P\rangle,\ \gamma \in \Gamma,\ \theta \in \mathcal{A},\ P \in \mathcal{P}$. L'action à droite vérifie aussi la formule de Cartan.

Soit $\Gamma^{\mathcal{A}} \subset \Gamma$ le sous-espace vectoriel gradué engendré par les éléments $\gamma \in \Gamma$ vérifiant $\gamma\theta = 0$ pour tout $\theta \in \bar{\mathcal{A}}$. L'accouplement canonique entre Γ et $\mathcal{P}$ permet d'identifier $\Gamma^{\mathcal{A}}$ au dual de $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. De plus, à cause de la formule de Cartan, $\Gamma^{\mathcal{A}}$ est une sous-algèbre de Γ. Cette sous-algèbre contient [51] le monôme $a_i^{(2^j-1)}$, donc le monôme a_ω mentionné dans la Section 1.1. On verra plus loin que $\Gamma^{\mathcal{A}}$ est un sous-$\mathcal{GL}$-module de Γ. Donc, le $\mathcal{GL}$-module $\Gamma^{\mathcal{A}}_{\deg a_\omega}$ contient $\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle$ comme sous-$\mathcal{GL}$-module. Dans la Section 3.4 on démontrera que $\Gamma^{\mathcal{A}}_{\deg a_\omega} = \mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle$ dans le cas « générique". C'est en ce sens que l'espace vectoriel dual $\Gamma^{\mathcal{A}}_{\deg a_\omega} = (\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^{\deg a_\omega})^*$ peut être approchée par $\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle$, qui en constitue une bonne approximation (cf. la Section 1.1).

Invariants et coinvariants. Les actions de $\mathcal{A}$ et de Mc (le semigroupe des matrices $k\times k$) sur $\mathcal{P}$ commutent [57, 59]. Les espaces vectoriels gradués $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ et $\Gamma^{\mathcal{A}}$ sont naturellement des Mc-modules, donc des $\mathcal{GL}$-modules. La projection $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ est Mc-linéaire.

Soit $(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}} \subset \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ le sous-espace vectoriel gradué engendré par les éléments $\pi(P)$ vérifiant $P \in \mathcal{P}$ et $g\pi(P) = \pi(gP) = \pi(P)$ pour tout $g \in \mathcal{GL}$. Notons $(\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$ le quotient de $\Gamma^{\mathcal{A}}$ par le sous-espace vectoriel gradué engendré par les éléments de la forme $\gamma g - \gamma$ avec $\gamma \in \Gamma^{\mathcal{A}}$ et $g \in \mathcal{GL}$. Les éléments de $(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}}$ s'appellent les $\mathcal{GL}$-invariants, ceux de $(\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$: les $\mathcal{GL}$-coinvariants. Les espaces vectoriels gradués $(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}}$ et $(\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$ sont en dualité.

Morphisme de Kameko. Soit $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ la projection canonique. Un des outils dont s'est servi Kameko [22] pour une description récursive de $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ est l'épimorphisme $\psi : \mathcal{P}_{\mathcal{A}}^{2d+k} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}^d$ défini par la formule

$$\psi(\pi(P)) = \begin{cases} \pi(Q) & \text{si} \quad P = x_1 \cdots x_k Q^2,\ Q \in \mathcal{P}^d, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le morphisme dual de ψ, noté $Sq^0 : \Gamma^{\mathcal{A}}_d \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{A}}_{2d+k}$, est la restriction à $\Gamma^{\mathcal{A}}$ du morphisme linéaire $\Gamma^{\mathcal{A}}_d \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{A}}_{2d+k}$, $a_1^{(i_1)} \cdots a_k^{(i_k)} \longmapsto a_1^{(2i_1+1)} \cdots a_k^{(2i_k+1)}$.

Lemme 3.1. — *Si $\alpha(d+k-1) \geqslant k-1$, alors sont bijectifs les morphismes ψ, Sq^0, ainsi que les morphismes induits $\psi : (\mathcal{P}^{2d+k}_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}} \longrightarrow (\mathcal{P}^d_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}}$, $Sq^0 : (\Gamma^{\mathcal{A}}_d)_{\mathcal{GL}} \longrightarrow (\Gamma^{\mathcal{A}}_{2d+k})_{\mathcal{GL}}$.*

Démonstration. — Puisque Sq^0 est le morphisme dual de ψ, il suffit de montrer le lemme pour ψ. Pour montrer l'injectivité de celui-ci, observons d'abord que $\pi(\mathcal{W}^{2d+k}) = 0$ (cf. la Section 2.1 pour $\mathcal{W}$). En effet, tout monôme de $\mathcal{W}^{2d+k}$ s'écrit sous la forme $P_0P_1^2$ pour certains $P_0, P_1 \in \mathcal{P}$ avec $\deg P_0 = k-2r$, $r \geqslant 1$. Comme $\alpha(\deg(P_0P_1^2) + \deg P_0) = \alpha(d+k-r) \geqslant k-r > \deg P_0$ par hypothèse, on a $\pi(P_0P_1^2) = 0$ d'après un théorème de Wood [58] (rappelé dans le Théorème 4.1 du présent article).

Supposons que $P \in \mathcal{P}^{2d+k}$ et $\psi(\pi(P)) = 0$. Montrons que $\pi(P) = 0$. Ceci étant vrai si $P \in \mathcal{W}^{2d+k}$, on peut supposer que $P \notin \mathcal{W}^{2d+k}$, ce qui revient à dire que $P = x_1 \cdots x_k Q^2$ pour un certain $Q \in \mathcal{P}^d$. On a $\pi(Q) = \psi(\pi(P)) = 0$. Soient $Q_1, \ldots, Q_N \in \mathcal{P}^d$ des polynômes tels que $Q = Sq^1(Q_1) + \cdots + Sq^N(Q_N)$. D'après la formule de Cartan

$$\begin{aligned} P = x_1 \cdots x_k Q^2 &= \sum_{i=1}^N x_1 \cdots x_k Sq^{2i}(Q_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^N \big(Sq^{2i}(x_1 \cdots x_k Q^2) + \sum_{j=1}^i Sq^{2j}(x_1 \cdots x_k)(Sq^{2i-2j}(Q_i^2)\big) \in \mathcal{W} + \bar{\mathcal{A}}\mathcal{P}. \end{aligned}$$

Comme $\pi(\mathcal{W} + \bar{\mathcal{A}}\mathcal{P})^{2d+k} = 0$, il suit que $\pi(P) = 0$.

La surjectivité de ψ étant claire, il reste à établir celle de la restriction $\psi : (\mathcal{P}^{2d+k}_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}} \longrightarrow (\mathcal{P}^d_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}}$. Soit $P \in \mathcal{P}^d$ un polynôme avec $\pi(P) \in (\mathcal{P}^d_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}}$. Comme $\psi(\pi(x_1 \cdots x_k P^2)) = \pi(P)$, il suffit de montrer que $\pi(x_1 \cdots x_k P^2)$ est un $\mathcal{GL}$-invariant. Soit $g \in \mathcal{GL}$. Il est facile de voir que $g(x_1 \cdots x_k) + x_1 \cdots x_k \in W$, d'où $g(x_1 \cdots x_k)g(P)^2 + x_1 \cdots x_k g(P)^2 \in \mathcal{W}^{2d+k}$. Le fait $\pi(\mathcal{W}^{2d+k}) = 0$ implique que $g\pi(x_1 \cdots x_k P^2) = \pi(g(x_1 \cdots x_k)g(P)^2) = \pi(x_1 \cdots x_k g(P)^2)$. Comme

$$\psi(\pi(x_1 \cdots x_k g(P)^2)) = \pi(g(P)) = g\pi(P) = \pi(P) = \psi(\pi(x_1 \cdots x_k P^2))$$

par hypothèse, il suit de l'injectivité de ψ que

$$\pi(x_1 \cdots x_k g(P)^2) = \pi(x_1 \cdots x_k P^2).$$

D'où $g\pi(x_1 \cdots x_k P^2) = \pi(x_1 \cdots x_k P^2)$, ce qu'il fallait démontrer. □

3.2. Démonstration du Théorème 1.2(i)

Soient

- $\mathbb{Z}_+$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls et $\mathbb{Z}_+^{k-1} = \overbrace{\mathbb{Z}_+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_+}^{k-1}$,
- $E_1, \ldots, E_M \subset \mathbb{Z}_+^{k-1}$ tels que les polynômes $\displaystyle\sum_{(i_1,\ldots,i_{k-1})\in E_r} a_1^{(i_1)} \cdots a_{k-1}^{(i_{k-1})}$ $(1 \leqslant r \leqslant M)$ forment une base de l'espace vectoriel $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{d}}$,
- $\gamma := a_1^{(2^m-1)} \cdots a_{k-1}^{(2^m-1)}$ et $g_1, \ldots, g_N \in \mathcal{GL}$ tels que $\gamma g_1, \ldots, \gamma g_N$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{GL}\langle\gamma\rangle$, où $N = \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{m}$ d'après le Lemme 2.6(ii),
- $P_1, \ldots, P_N \in \mathcal{P}$ tels que $\langle a g_{s'}, P_s\rangle = \delta_{ss'}$ pour $1 \leqslant s, s' \leqslant N$,
- $Q_1, \ldots, Q_M \in \widetilde{\mathcal{P}}$ tels que $\langle \sum_{(i_1,\ldots,i_{k-1})\in E_{r'}} a_1^{(i_1)} \cdots a_{k-1}^{(i_{k-1})}, Q_r\rangle = \delta_{rr'}$ pour $1 \leqslant r, r' \leqslant M$.

Montrons que les éléments $(\gamma \sum_{(i_1,\ldots,i_{k-1})\in E_r} a_1^{(2^m i_1)} \cdots a_{k-1}^{(2^m i_{k-1})}) g_s$, où $1 \leqslant r \leqslant M$ et $1 \leqslant s \leqslant N$, sont linéairement indépendants dans Γ. En effet, on a

$$\begin{aligned}
&\langle (\gamma \sum_{E_{r'}} a_1^{(2^m i_1)} \cdots a_{k-1}^{(2^m i_{k-1})}) g_{s'}, P_s (g_s^{-1} Q_r)^{2^m} \rangle \\
= \ &\langle \gamma g_{s'}, P_s\rangle \cdot \langle \sum_{E_{r'}} (a_1^{(i_1)} \cdots a_{k-1}^{(i_{k-1})}) g_{s'}, g_s^{-1} Q_r\rangle \text{ d'après le Lemme 2.1} \\
= \ &\delta_{ss'} \langle \sum_{E_{r'}} a_1^{(i_1)} \cdots a_{k-1}^{(i_{k-1})}, g_{s'} g_s^{-1} Q_r\rangle \text{ d'après le Lemme 2.3(ii)} \\
= \ &\delta_{ss'} \langle \sum_{E_{r'}} a_1^{(i_1)} \cdots a_{k-1}^{(i_{k-1})}, Q_r\rangle = \delta_{ss'}\delta_{rr'}.
\end{aligned}$$

Ceci donne l'indépendance linéaire voulue. De plus, du fait que

$$\gamma \sum_{E_r} a_1^{(2^m i_1)} \cdots a_{k-1}^{(2^m i_{k-1})} = (Sq^0)^m \left(\sum_{E_r} a_1^{(i_1)} \cdots a_{k-1}^{(i_{k-1})} \right) \in (Sq^0)^m \left(\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{d}} \right) \subset \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d'},$$

on a $(\gamma \sum_{E_r} a_1^{(2^m i_1)} \cdots a_{k-1}^{(2^m i_{k-1})}) g_s \in \mathcal{GL}\langle \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d'}\rangle \subset \Gamma^{\mathcal{A}}_{d'}$ pour tout $1 \leqslant r \leqslant M$ et $1 \leqslant s \leqslant N$. D'où $\dim \Gamma^{\mathcal{A}}_{d'} \geqslant \dim \mathcal{GL}\langle \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d'}\rangle \geqslant MN = N \dim \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{d}} = (\binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{m}) \dim \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{d}}$.

Supposons maintenant que $m \geqslant k$ et $\alpha(\widetilde{d} + k - 2) \geqslant k - 2$. Par ce qui précède $\dim \Gamma^{\mathcal{A}}_{d'} \geqslant \dim \mathcal{GL}\langle \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d'}\rangle \geqslant (2^k - 1) \dim \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{d}}$. D'autre part, d'après [41] on a $\dim \Gamma^{\mathcal{A}}_{d'} = \dim \mathcal{P}^{d'}_{\mathcal{A}} = (2^k - 1) \dim \widetilde{\mathcal{P}}^{\widetilde{d}}_{\mathcal{A}} = (2^k - 1) \dim \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{d}}$. Il suit que $\dim \Gamma^{\mathcal{A}}_{d'} = \dim \mathcal{GL}\langle \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d'}\rangle = (2^k - 1) \dim \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{d}}$.

3.3. Démonstration du Théorème 1.2(ii)

La commutativité des carrés contenant $(Sq^0)^m$ et $(Sq^0)^n$ a été démontrée par Boardman [5]. Celle du carré contenant φ est un cas particulier d'un théorème de Singer [51] que nous rappelons ci-après.

Soient k_1, k_2, d_1, d_2 des entiers positifs ou nuls avec $k_1 + k_2 \leqslant k$. Posons

$$\begin{aligned} \Gamma(k_1)^{\mathcal{A}} &:= \Gamma(a_1, \dots, a_{k_1}) \cap \Gamma^{\mathcal{A}}, \\ \Gamma(k_2)^{\mathcal{A}} &:= \Gamma(a_1, \dots, a_{k_2}) \cap \Gamma^{\mathcal{A}}, \\ \Gamma(k_1+k_2)^{\mathcal{A}} &:= \Gamma(a_1, \dots, a_{k_1+k_2}) \cap \Gamma^{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Le morphisme bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(k_1)^{\mathcal{A}}_{d_1} \times \Gamma(k_2)^{\mathcal{A}}_{d_2} & \longrightarrow & \Gamma(k_1+k_2)^{\mathcal{A}}_{d_1+d_2}, \\ (a_1^{(i_1)} \cdots a_{k_1}^{(i_{k_1})}, a_1^{(j_1)} \cdots a_{k_2}^{(j_{k_2})}) & \longmapsto & a_1^{(i_1)} \cdots a_{k_1}^{(i_{k_1})} a_{k_1+1}^{(j_1)} \cdots a_{k_1+k_2}^{(j_{k_2})} \end{array}$$

se factorise par les coinvariants sous l'action des groupes linéaires et induit un morphisme linéaire

$$(\Gamma(k_1)^{\mathcal{A}}_{d_1})_{\mathcal{GL}_{k_1}} \otimes (\Gamma(k_2)^{\mathcal{A}}_{d_2})_{\mathcal{GL}_{k_2}} \longrightarrow (\Gamma(k_1+k_2)^{\mathcal{A}}_{d_1+d_2})_{\mathcal{GL}_{k_1+k_2}}.$$

D'autre part, la multiplication usuelle de l'anneau de cohomologie $H^*(\mathcal{A})$ fournit un morphisme linéaire

$$H^{k_1, d_1+k_1} \otimes H^{k_2, d_2+k_2} \longrightarrow H^{k_1+k_2, d_1+d_2+k_1+k_2}.$$

Le théorème de Singer [51] confirme la commutativité du carré

$$\begin{tikzcd} (\Gamma(k_1)^{\mathcal{A}}_{d_1})_{\mathcal{GL}_{k_1}} \otimes (\Gamma(k_2)^{\mathcal{A}}_{d_2})_{\mathcal{GL}_{k_2}} \arrow[r] \arrow[d, "Tr_{k_1} \otimes Tr_{k_2}"] & (\Gamma(k_1+k_2)^{\mathcal{A}}_{d_1+d_2})_{\mathcal{GL}_{k_1+k_2}} \arrow[d, "Tr_{k_1+k_2}"] \\ H^{k_1, d_1+k_1} \otimes H^{k_2, d_2+k_2} \arrow[r] & H^{k_1+k_2, d_1+d_2+k_1+k_2} \end{tikzcd}$$

(une petite remarque : l'attribut « algébrique » que nous donnons au morphisme Tr_k a pour origine ce carré commutatif). En choisissant $k_1 := k-1$, $k_2 := 1$, $d_1 := d'$ et $d_2 := 0$, on obtient le carré contenant φ dans le diagramme du Théorème 1.2(ii). Ainsi, la commutativité de ce diagramme est établie.

Les énoncés concernant les morphismes $(Sq^0)^m$ et $(Sq^0)^n$ de la première ligne résultent trivialement du Lemme 3.1.

Supposons $m \geqslant k$ et $\alpha(\widetilde{d} + k - 2) \geqslant k - 2$. Montrons que φ est surjectif. D'après le Théorème 1.2(i), on a $\dim \Gamma^{\mathcal{A}}_{d'} = \dim \mathcal{GL}\langle \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d'} \rangle$, d'où $\Gamma^{\mathcal{A}}_{d'} = \mathcal{GL}\langle \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d'} \rangle$. Il s'ensuit que la composée $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d'} \longrightarrow \Gamma^{\mathcal{A}}_{d'} \xrightarrow{\iota^*} (\Gamma^{\mathcal{A}}_{d'})_{\mathcal{GL}}$ est surjective, le premier morphisme étant l'inclusion. Comme cette composée est égale à la composée $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d'} \xrightarrow{\widetilde{\iota}^*} (\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d'})_{\widetilde{\mathcal{GL}}} \xrightarrow{\varphi} (\Gamma^{\mathcal{A}}_{d'})_{\mathcal{GL}}$, on en déduit la surjectivité de φ.

L'égalité $(Sq^0)^n h_0 (Sq^0)^m = h_n (Sq^0)^{m+n}$ résulte du fait $(Sq^0)^n(h_0) = h_n$ et de ce que $Sq^0 : H^*(\mathcal{A}) \longrightarrow H^*(\mathcal{A})$ est un morphisme d'algèbres [27, 43].

Pour terminer, l'énoncé concernant $(\operatorname{Im} Tr_k)^d$ est une conséquence facile de la commutativité du diagramme et des énoncés qui précèdent.

3.4. Démonstration du Théorème 1.2(iii)

Ce théorème sera démontré par récurrence sur k. Sa validité pour $k = 1$ étant classique [45, 51], on suppose $k \geqslant 2$ et qu'il est vrai pour toute valeur inférieure de k.

Posons

$$\begin{aligned} d_1 &:= 2^{m_1 - m_k} + \cdots + 2^{m_{k-1} - m_k} - (k-1), \\ d_2 &:= 2^{m_1 - m_{k-1}} + \cdots + 2^{m_{k-2} - m_{k-1}} + 2^0 - (k-1). \end{aligned}$$

Puisque $d = 2^{m_{k-1}}(d_2 + k - 1) + 2^{m_k} - k$ et $m_{k-1} \geqslant m_k + k \geqslant k$, d'après le Théorème 1.2(i) on a $\Gamma^{\mathcal{A}}_{d_1} = \mathcal{GL}\langle \widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d_1} \rangle$. Par hypothèse de récurrence $\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d_1} = \widetilde{\mathcal{GL}}\langle a_1^{(2^{m_1-m_k}-1)} \cdots a_{k-1}^{(2^{m_{k-1}-m_k}-1)} \rangle$. Il en résulte que

$$\Gamma^{\mathcal{A}}_{d_1} = \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{m_1-m_k}-1)} \cdots a_{k-1}^{(2^{m_{k-1}-m_k}-1)} \rangle.$$

D'autre part, du fait que $\alpha(d_1 + k - 1) = k - 1$, l'application itérative du Lemme 3.1 permet d'obtenir que

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mathcal{A}}_d &= (Sq^0)^{m_k}(\Gamma^{\mathcal{A}}_{d_1}) = (Sq^0)^{m_k}(\mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{m_1-m_k}-1)} \cdots a_{k-1}^{(2^{m_{k-1}-m_k}-1)} \rangle) \\ &= \mathcal{GL}\langle (Sq^0)^{m_k}(a_1^{(2^{m_1-m_k}-1)} \cdots a_{k-1}^{(2^{m_{k-1}-m_k}-1)}) \rangle \\ &= \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{m_1}-1)} \cdots a_k^{(2^{m_k}-1)} \rangle. \end{aligned}$$

Observons que par hypothèse de récurrence, $(\operatorname{Im} Tr_{k-1})^{d_2}$ est le sous-espace vectoriel de H^{k-1, d_2+k-1} engendré par $h_{m_1 - m_{k-1}} \cdots h_{m_{k-2} - m_{k-1}} h_0$. Il suit du Théorème 1.2(ii) et de la commutativité [2] de l'algèbre de cohomologie $H^*(\mathcal{A})$ que $(\operatorname{Im} Tr_k)^d$ est le sous-espace vectoriel de $H^{k, d+k}$ engendré par

$$h_{m_k}(Sq^0)^{m_{k-1}}(h_{m_1 - m_{k-1}} \cdots h_{m_{k-2} - m_{k-1}} h_0) = h_{m_1} \cdots h_{m_k}.$$

Il reste à vérifier l'égalité concernant $(\Gamma^{\mathcal{A}}_d)_{\mathcal{GL}}$. Si $m_1 - m_2 = 1$, d'une part $(\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d_1})_{\widetilde{\mathcal{GL}}} = 0$ par hypothèse de récurrence, de l'autre

$$(\Gamma^{\mathcal{A}}_d)_{\mathcal{GL}} = (Sq^0)^{m_k} \varphi((\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d_1})_{\widetilde{\mathcal{GL}}})$$

d'après le Théorème 1.2(ii) ; cela implique $(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} = 0$. Si $m_1 - m_2 \geqslant 2$, alors le $\mathcal{GL}$-module $\Gamma_d^{\mathcal{A}} = \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{m_1}-1)} \cdots a_k^{(2^{m_k}-1)}\rangle$ est isomorphe à $\mathbb{F}_2\langle \mathcal{GL}/G_0\rangle$ d'après le Théorème 1.1(i), où $G_0 \subset \mathcal{GL}$ désigne le sous-groupe de Borel des matrices supérieures inversibles. Il suit que $(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} = \mathbb{F}_2$.

4. Primitifs comme représentation

4.1. Généralités

Rappelons d'abord les formules

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^d \cong \mathcal{P}_{\mathcal{A}}^{(d-k)/2} \oplus (\operatorname{Ker}\psi)^d && \text{si } d \equiv k \pmod 2,\\
&\Gamma_d^{\mathcal{A}} = Sq^0(\Gamma_{(d-k)/2}^{\mathcal{A}}) \oplus (\operatorname{Coker} Sq^0)_d && \text{si } d \equiv k \pmod 2,\\
&\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^d = (\operatorname{Ker}\psi)^d,\ \Gamma_d^{\mathcal{A}} = (\operatorname{Coker} Sq^0)_d && \text{si } d \not\equiv k \pmod 2,
\end{aligned}$$

qui ramènent la détermination de $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, $\Gamma^{\mathcal{A}}$ à celle de $\operatorname{Ker}\psi$, $\operatorname{Coker} Sq^0$ respectivement. Pour déterminer $\operatorname{Ker}\psi$, notre méthode consiste à :

- en produire un système générateur et établir une borne supérieure de la dimension $\dim \operatorname{Ker}\psi$,
- faire appel au Théorème 1.1 qui fournit une borne inférieure de la dimension $\dim \operatorname{Coker} Sq^0 = \dim \operatorname{Ker}\psi$,
- effectuer des retouches nécessaires pour que ces bornes soient égales et obtenir la valeur exacte de $\dim \operatorname{Ker}\psi$.

D'après ce que nous en savons, cette méthode a été utilisée par Alghamdi–Crabb–Hubbuck [3] et Boardman [5], pour qui les travaux de Kameko [22] ont été une source de référence.

Théorème classique. Soit $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ la projection canonique. Le théorème classique de cette branche de la topologie algébrique qui étudie la relation $\pi(P) = 0$ est le suivant :

Théorème 4.1 (Wood [58]). — *Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. Alors*

(i) $\pi(\theta(P)Q) = \pi(P\chi(\theta)(Q))$ *pour tout* $\theta \in \mathcal{A}$, *où* $\chi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ *désigne l'antiautomorphisme canonique de l'algèbre de Steenrod.*

(ii) $\pi(PQ^2) = 0$ *si* $\alpha(\deg(PQ^2) + \deg P) = \alpha(\deg P + \deg Q) > \deg P$.

La première moitié du Théorème 4.1 est connue [58] sous le nom de χ-technique. La seconde (conséquence de la première) est la généralisation d'une conjecture de Peterson [45] dont elle était issue.

Décomposition. Soient $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant k$ des entiers. On note $\mathcal{P}_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}$ l'idéal engendré par $x_{i_1}\cdots x_{i_r}$ dans la sous-algèbre $\mathbb{F}_2[x_{i_1},\ldots, x_{i_r}] \subset \mathcal{P}$. L'idéal $\mathcal{P}_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}$ est un sous-$\mathcal{A}$-module de $\mathcal{P}$. On a la somme directe de $\mathcal{A}$-modules

$$\mathcal{P} = \mathbb{F}_2 \bigoplus_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant k} \mathcal{P}_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}$$

et la somme directe d'espaces vectoriels gradués

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}} = \mathbb{F}_2 \bigoplus_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant k} \pi(\mathcal{P}_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}).$$

Système générateur. Soit $\mathcal{B}_{x_1\ldots x_r}$ un système générateur minimal de $\mathcal{P}_{x_1\ldots x_r}$ en tant que $\mathcal{A}$-module, i.e. un sous-ensemble de $\mathcal{P}_{x_1\ldots x_r}$ tel que

$$\pi(\mathcal{P}_{x_1\ldots x_r}) \cong \mathbb{F}_2\langle\pi(\mathcal{B}_{x_1\ldots x_r})\rangle.$$

Notons $\mathcal{B}_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}$ l'image de $\mathcal{B}_{x_1\ldots x_r}$ par l'isomorphisme d'algèbres $\mathcal{P}_{x_1\ldots x_r} \longrightarrow \mathcal{P}_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}$ qui envoie x_s sur x_{i_s} pour tout $1 \leqslant s \leqslant r$. Il est clair que $\mathcal{B}_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}$ est un système générateur minimal de $\mathcal{P}_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}$ comme $\mathcal{A}$-module : $\pi(\mathcal{P}_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}) = \mathbb{F}_2\langle\pi(\mathcal{B}_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}})\rangle$. On désigne par $\mathcal{B}^d_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}$ le sous-ensemble des éléments de degré d dans $\mathcal{B}_{x_{i_1}\ldots x_{i_r}}$.

Cas de trois variables. On écrira x, y, z respectivement à la place de x_1, x_2, x_3 dans ce paragraphe.

Alors que $\mathcal{B}_x$ est unique, les ensembles $\mathcal{B}_{xy}$ et $\mathcal{B}_{xyz}$ semblent varier selon les chercheurs. Les informations sur ces ensembles sont rassemblées dans le Théorème 4.2 suivant. La connaissance de $\mathcal{B}_x$, $\mathcal{B}_{xy}$ fournie par le Théorème 4.2(i) est due à Peterson [45]. Celle de $\mathcal{B}_{xyz}$ fournie par le Théorème 4.2(ii) est due à Kameko [22] et à l'auteur [42][(3)] (indépendamment de Kameko). Notons que le système générateur minimal de Kameko presque coïncide avec celui de l'auteur (la seule différence se manifeste en un monôme de degré 8, qui est xzx^2y^4 pour Kameko et $xy(xyz)^2$ pour l'auteur). La description actuelle de $\mathcal{B}_{xy}$ et $\mathcal{B}_{xyz}$ est due à l'auteur [42, Proposition 3.2].

THÉORÈME 4.2. —

(i) $\mathcal{B}_x = \{x^{2^p-1} \mid p \geqslant 1\}$, *tandis que* $\mathcal{B}_{xy}$ *est composé des monômes* $x^{2^{p+q}-1}y^{2^{p+1}-1}$, $x^{2^{p+1}-1}y^{2^{p+q}-1}$, $x^{2^{p+1}-1}y^{2^{p+q+1}-2^p-1}$ *avec* $p \geqslant 1$, $q \geqslant 0$. *D'une manière récursive,* $\mathcal{B}_x = \{xP^2 \mid P \in \mathcal{B}_x$ *ou* $P = 1\}$ *et* $\mathcal{B}_{xy}$ *se décrit comme étant l'ensemble des monômes*

$$\begin{cases} xP^2, & P \in \mathcal{B}_y, \\ xyP^2, & P \in \mathcal{B}_{xy} \cup \mathcal{B}_x \cup \mathcal{B}_y \cup \{1\}. \end{cases}$$

(3) Mes travaux [42] ont été dirigés par le Pr. Nguyen Huu Viet Hung.

(ii) *D'une manière récursive, $\mathcal{B}_{xyz}$ se décrit comme étant l'ensemble des monômes*

$$\begin{cases} xyP^2, & P \in \mathcal{B}_{xz} \cup \mathcal{B}_{yz} \cup \mathcal{B}_z \cup \{xyz\}, \\ xzP^2, & P \in \mathcal{B}_{yz} \cup \mathcal{B}_y, \\ xy(xz)^2P^4, & P \in \mathcal{B}_{yz} \cup \mathcal{B}_y, \\ (xy)^3P^4, & P \in \mathcal{B}_z, \\ xy^2P^4, & P \in \mathcal{B}_z, \\ xyzP^2, & P \in \mathcal{B}_{xyz} \cup \mathcal{B}_{xy} \cup \mathcal{B}_{xz} \cup \mathcal{B}_{yz} \cup \mathcal{B}_x \cup \mathcal{B}_y \cup \mathcal{B}_z \cup \{1\}. \end{cases}$$

4.2. Démonstration du Théorème 1.3

(i) Ce théorème résulte trivialement du Théorème 4.1(ii).

(ii) D'abord, en renvoyant à Kameko [21], on a que

$$\dim(\operatorname{Ker}\psi)^d \leqslant \begin{cases} 35 & \text{si} \quad p \geqslant 4 \quad \text{et} \quad q = 0, \\ 70 & \text{si} \quad p \geqslant 4 \quad \text{et} \quad q = 1, \\ 105 & \text{si} \quad p \geqslant 3 \quad \text{et} \quad q \geqslant 2, \\ 90 & \text{si} \quad p = 2 \quad \text{et} \quad q \geqslant 3, \\ 45 & \text{si} \quad p = 1 \quad \text{et} \quad q \geqslant 4. \end{cases}$$

Ensuite, observons que

$$\begin{aligned} & \dim(\operatorname{Ker}\psi)^d = \dim(\operatorname{Coker} Sq^0)_d = \dim \Gamma_d^{\mathcal{A}} - \dim Sq^0(\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}}) \\ \geqslant \; & \dim\big(\mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{p+q}-1)} a_2^{(2^p-1)}\rangle + Sq^0(\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}})\big) - \dim Sq^0(\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}}) \\ = \; & \dim \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{p+q}-1)} a_2^{(2^p-1)}\rangle - \dim \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{p+q}-1)} a_2^{(2^p-1)}\rangle \cap Sq^0(\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}}) \\ \geqslant \; & \dim \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{p+q}-1)} a_2^{(2^p-1)}\rangle - \dim \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{p+q}-1)} a_2^{(2^p-1)}\rangle \cap \mathcal{W}^\perp \\ = \; & \dim \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{p+q}-1)} a_2^{(2^p-1)}\rangle / \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{p+q}-1)} a_2^{(2^p-1)}\rangle \cap \mathcal{W}^\perp, \end{aligned}$$

et que, d'après le Théorème 1.1 et le Lemme 2.6 :

$$\begin{aligned} & \dim \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{p+q}-1)} a_2^{(2^p-1)}\rangle / \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{p+q}-1)} a_2^{(2^p-1)}\rangle \cap \mathcal{W}^\perp \\ \geqslant \; & \begin{cases} 35 & \text{si} \quad p \geqslant 4 \quad \text{et} \quad q = 0, \\ 70 & \text{si} \quad p \geqslant 4 \quad \text{et} \quad q = 1, \\ 105 & \text{si} \quad p \geqslant 3 \quad \text{et} \quad q \geqslant 2, \\ 90 & \text{si} \quad p = 2 \quad \text{et} \quad q \geqslant 3, \\ 45 & \text{si} \quad p = 1 \quad \text{et} \quad q \geqslant 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Par ces inégalités, les affirmations concernant $\Gamma_d^{\mathcal{A}}$ sont justifiées. Montrons l'affirmation qui concerne $(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$. Si $q \neq 1$ et $p \geqslant 3$, alors par ce qui précède on a

$$\mathcal{GL}\langle a_1^{(2^{p+q}-1)}a_2^{(2^p-1)}\rangle = \mathbb{F}_2\langle \mathcal{GL}/G_0\rangle,\ \Gamma_d^{\mathcal{A}} = \mathbb{F}_2\langle \mathcal{GL}/G_0\rangle \oplus Sq^0(\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}}),$$

où $G_0 \subset \mathcal{GL}$ désigne le stabilisateur de $a_1^{(2^{p+q}-1)}a_2^{(2^p-1)}$ pour l'action de $\mathcal{GL}$. Notons que cette somme-ci est une somme directe de $\mathcal{GL}$-modules. D'où

$$(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} = \mathbb{F}_2\langle \iota^*(a_1^{(2^{p+q}-1)}a_2^{(2^p-1)})\rangle \oplus Sq^0(\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}.$$

Supposons que $q=1$ ou $p\leqslant 2$. En notant $\gamma := a_1^{(2^{p+q}-1)}a_2^{(2^p-1)}$, montrer $(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} = Sq^0(\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$ revient à vérifier que $\iota^*(\gamma) \in Sq^0(\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$. Soient $g_1, g_2 \in \mathcal{GL}$ des matrices satisfaisant à $(a_1g_1, a_2g_1) = (a_2, a_1)$ et $(a_1g_2, a_2g_2) = (a_1+a_2, a_2)$. Pour tout $0 \neq v \in \mathbb{F}_2\langle a_2, a_3, a_4\rangle$, soit $g_v \in \mathcal{GL}$ une matrice vérifiant $(a_1g_v, a_2g_v) = (a_1, v)$. Si $q=1$, on a

$$\begin{aligned} & \iota^*(\gamma) = \iota^*(\gamma + \gamma g_1 + \gamma g_2) \\ = \quad & \iota^*(a_1^{(2^{p+1}-1)}a_2^{(2^p-1)} + (a_1+a_2)^{(2^{p+1}-1)}a_2^{(2^p-1)} + a_2^{(2^{p+1}-1)}a_1^{(2^p-1)}) = 0. \end{aligned}$$

Si $p=1$, on a

$$\begin{aligned} \iota^*(\gamma) &= \iota^*(\gamma + \gamma g_{a_3} + \gamma g_{a_2+a_3}) \\ &= \iota^*(a_1^{(2^{q+1}-1)}a_2 + a_1^{(2^{q+1}-1)}a_3 + a_1^{(2^{q+1}-1)}(a_2+a_3)) = 0. \end{aligned}$$

Si $p=2$, comme $|\mathbb{F}_2\langle a_2,a_3,a_4\rangle| = 8$, on a

$$\begin{aligned} \iota^*(\gamma) &= \iota^*(\sum_{0\neq v\in\mathbb{F}_2\langle a_2,a_3,a_4\rangle} \gamma g_v) = \iota^*(a_1^{(2^{q+2}-1)} \sum_{v\in\mathbb{F}_2\langle a_2,a_3,a_4\rangle} v^{(3)}) \\ &= \iota^*(a_1^{(2^{q+2}-1)}a_2a_3a_4) = Sq^0(\iota^*(a_1^{(2^{q+1}-1)})) \in Sq^0(\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

5. Transfert algébrique quadruple

5.1. Transfert et bar-résolution

Suspension. Soit $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ un espace vectoriel gradué. Pour $m \in \mathbb{Z}$, la suspension m-ième de V, noté $\Sigma^m V$, est l'espace vectoriel gradué défini par $(\Sigma^m V)_n := V_{n-m}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Si $v \in V_{n-m}$, l'élément dans $(\Sigma^m V)_n$ qui lui correspond est noté $\Sigma^m v$.

Soient U, V des espaces vectoriels gradués et $f : U \longrightarrow V$ un morphisme. On note $\Sigma^m f$ le morphisme $\Sigma^m U \longrightarrow \Sigma^m V$, $\Sigma^m u \longmapsto \Sigma^m f(u)$.

Soit V est un $\mathcal{A}$-module à gauche. Alors $\Sigma^m V$ l'est également. L'action de $\mathcal{A}$ sur $\Sigma^m V$ est définie par la formule $\theta(\Sigma^m v) := \Sigma^m(\theta v)$, $v \in V$, $\theta \in \mathcal{A}$.

Extensions. Soient $\mathcal{P}_1 = \mathbb{F}_2[x_1]$ et $\mathcal{L}_1 := x_1^{-1}\mathcal{P}_1 \subset \mathbb{F}_2[x_1^{\pm 1}]$. D'après [56], l'action naturelle de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{P}_1$ s'étend à $\mathcal{L}_1$ et fait de ce dernier un $\mathcal{A}$-module. On a la suite exacte courte de $\mathcal{A}$-modules

$$0 \longrightarrow \Sigma\mathcal{P}_1 \xrightarrow{\iota_1} \Sigma\mathcal{L}_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0,$$

où ι_1 est l'inclusion et $\pi_1(\Sigma x_1^{i_1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 = -1, \\ 0 & \text{si } i_1 \geqslant 0. \end{cases}$

Singer [51] et Lannes–Zarati [25] considèrent l'élément $e_1 \in Ext_{\mathcal{A}}^1(\mathbb{F}_2, \Sigma\mathcal{P}_1)$ correspondant à cette courte suite. Observant l'isomorphisme de $\mathcal{A}$-modules $(\Sigma\mathcal{P}_1)^{\otimes k} \cong \Sigma^k\mathcal{P}$, ils définissent $e_k := e_1^{\otimes k} \in Ext_{\mathcal{A}}^k(\mathbb{F}_2, \Sigma^k\mathcal{P})$. En termes de la bar-résolution [28] de l'algèbre de Steenrod, e_k est représenté par un certain morphisme $\mathcal{A}$-linéaire $e_k : \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}^{\otimes k} \longrightarrow \Sigma^k\mathcal{P}$. Dans ce qui suit, on se propose d'exhiber ce morphisme à l'aide des produits de Yoneda [28, 60] des suites exactes de $\mathcal{A}$-modules.

Soient $\mathcal{P}_2 = \mathbb{F}_2[x_1, x_2]$, $\mathcal{L}_2 := x_2^{-1}\mathcal{P}_2 \subset \mathbb{F}_2[x_1, x_2^{\pm 1}]$ et $\pi_2 : \Sigma^2\mathcal{L}_2 \longrightarrow \Sigma\mathcal{P}_1$ le morphisme $\mathcal{A}$-linéaire défini par

$$\pi_2(\Sigma^2 x_1^{i_1} x_2^{i_2}) = \begin{cases} \Sigma x_1^{i_1} & \text{si } i_2 = -1, \\ 0 & \text{si } i_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

La suite exacte précédente donne naissance au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}} \arrow[rr, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[dr, dashed, "e_1"] & & \mathcal{A} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi_0"] & \mathbb{F}_2 \arrow[d, equal] \\
\Sigma^2\mathcal{L}_2 \arrow[r, "\pi_2"] & \Sigma\mathcal{P}_1 \arrow[r, "\iota_1"] & \Sigma\mathcal{L}_1 \arrow[r, "\pi_1"] & \mathbb{F}_2
\end{tikzcd}$$

où ε est l'augmentation, $\partial(\theta[\theta_1]) = \theta\theta_1$, $\varphi_0(\theta) := \Sigma\theta(x_1^{-1})$ et

$$\begin{aligned} e_1(\theta[\theta_1]) &= \Sigma\theta\theta_1(x_1^{-1}), \\ \varphi_1(\theta[\theta_1]) &:= \Sigma\theta\big(x_2^{-1}e_1(1[\theta_1])\big) = \Sigma^2\theta(x_2^{-1}\theta_1(x_1^{-1})). \end{aligned}$$

Pour tout $r > 1$, notons

$$\mathcal{P}_r = \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_r],\ \mathcal{L}_r := x_r^{-1}\mathcal{P}_r \subset \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r^{\pm 1}].$$

On a la suite exacte courte de $\mathcal{A}$-modules

$$0 \longrightarrow \Sigma^r\mathcal{P}_r \xrightarrow{\iota_r} \Sigma^r\mathcal{L}_r \xrightarrow{\pi_r} \Sigma^{r-1}\mathcal{P}_{r-1} \longrightarrow 0,$$

où ι_r est l'inclusion et pour tout $P \in \mathcal{P}_{r-1} = \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_{r-1}] \subset \mathcal{P}_r$:

$$\pi_r(\Sigma^r P x_r^{i_r}) = \begin{cases} \Sigma^{r-1}P & \text{si } i_r = -1, \\ 0 & \text{si } i_r \geqslant 0. \end{cases}$$

Supposons que φ_{r-1} et e_{r-1} sont connus. Alors cette suite donne naissance au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}^{\otimes r} \arrow[rrr, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_r"] \arrow[dr, dashed, "e_r"] & & & \mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}^{\otimes(r-1)} \arrow[d, "\varphi_{r-1}"] \arrow[dr, dashed, "e_{r-1}"] & \\
\Sigma^{r+1}\mathcal{L}_{r+1} \arrow[r, "\pi_{r+1}"] & \Sigma^r\mathcal{P}_r \arrow[rr, "\iota_r"] & & \Sigma^r\mathcal{L}_r \arrow[r, "\pi_r"] & \Sigma^{r-1}\mathcal{P}_{r-1}
\end{tikzcd}$$

où $\partial(\theta[\theta_r|\cdots|\theta_1]) = \theta\theta_r[\theta_{r-1}|\cdots|\theta_1] + \sum_{i=1}^{r-1}\theta[\theta_r|\cdots|\theta_{i+1}\theta_i|\cdots|\theta_1]$ et

$$\begin{aligned}
e_r(\theta[\theta_r|\cdots|\theta_1]) &= \varphi_{r-1}\partial(\theta[\theta_r|\cdots|\theta_1]),\\
\varphi_r(\theta[\theta_r|\cdots|\theta_1]) &:= \Sigma\theta\big(x_{r+1}^{-1}e_r(1[\theta_r|\cdots|\theta_1])\big).
\end{aligned}$$

Transfert. Soit $\cap : Tor_k^{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)\otimes Ext_{\mathcal{A}}^k(\mathbb{F}_2,\Sigma^k\mathcal{P}) \longrightarrow Tor_0^{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2,\Sigma^k\mathcal{P}) = \Sigma^k\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ le cap-produit [28]. Le transfert est défini comme suit : $Tor_k^{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2) \longrightarrow \Sigma^k\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, $z \longmapsto z\cap e_k$. En utilisant la bar-résolution de $\mathcal{A}$, ce morphisme est représenté par un morphisme $\bar{\mathcal{A}}^{\otimes k} \longrightarrow \Sigma^k\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ que nous identifions ci-après.

Pour tout $\mathcal{A}$-module V, notons $1\otimes V$ le morphisme linéaire $V \longrightarrow \mathbb{F}_2\otimes_{\mathcal{A}}V$ qui envoie v sur $1\otimes v$. Le morphisme $\mathcal{A}$-linéaire e_k induit un morphisme linéaire

$$Tr_k^* : \bar{\mathcal{A}}^{\otimes k} \longrightarrow \Sigma^k\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$$

qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}^{\otimes k} \arrow[r, "1\otimes(\mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}^{\otimes k})"] \arrow[d, "e_k"] & \mathbb{F}_2\otimes_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}\otimes\bar{\mathcal{A}}^{\otimes k}) \cong \bar{\mathcal{A}}^{\otimes k} \arrow[d, "Tr_k^*"] \\
\Sigma^k\mathcal{P}_k = \Sigma^k\mathcal{P} \arrow[r, "\Sigma^k\pi = 1\otimes\Sigma^k\mathcal{P}_k"] & \mathbb{F}_2\otimes_{\mathcal{A}}\Sigma^k\mathcal{P}_k \cong \Sigma^k\mathcal{P}_{\mathcal{A}}.
\end{tikzcd}$$

La restriction de Tr_k^* au noyau du bord $\partial : \bar{\mathcal{A}}^{\otimes k} \longrightarrow \bar{\mathcal{A}}^{\otimes(k-1)}$ de la bar-construction de l'algèbre de Steenrod est précisément le morphisme représentant du transfert qu'ont défini Singer [51] et Lannes–Zarati [25]. Pour nous, cette restriction n'est pas nécessaire et Tr_k^* sera défini sur $\bar{\mathcal{A}}^{\otimes k}$ tout entier. On a ainsi la formule

$$Tr_k^*([\theta_k|\cdots|\theta_1]) = \Sigma^k\pi e_k(1[\theta_k|\cdots|\theta_1]).$$

Signalons [25, 51, 19] que le morphisme naturel $\Sigma^k(\mathcal{P}^{\mathcal{GL}})_{\mathcal{A}} \longrightarrow \Sigma^k(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}}$ est égal à la composée $Tr_k^*\circ\mathcal{LZ}^*$, où $\mathcal{LZ}^*$ désigne le dual du morphisme de Lannes–Zarati (voir la Section 1.4). Cette composée est nulle en vérité [20]. Signalons également que pour ne pas compliquer les choses, nous avons supprimé tout symbole de suspension dans l'écriture de Tr_k^* dans les sections qui précèdent.

Formule récursive. Soient $\theta_1, \dots, \theta_k \in \bar{\mathcal{A}}$. Par définition

$$e_1(1[\theta_1]) = \Sigma\theta_1(x_1^{-1}).$$

Notons $\Delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ la comultiplication de l'algèbre de Steenrod et supposons que

$$\Delta(\theta_k) := 1 \otimes \theta_k + \sum_{\deg \theta_k' > 0} \theta_k' \otimes \theta_k''.$$

On veut démontrer la formule suivante pour $k > 1$:

$$e_k(1[\theta_k|\cdots|\theta_1]) = \sum_{\deg \theta_k' > 0} \Sigma\theta_k'(x_k^{-1})\theta_k'' e_{k-1}(1[\theta_{k-1}|\cdots|\theta_1]).$$

Posons $u := [\theta_k|\cdots|\theta_1]$ et $v := [\theta_{k-1}|\cdots|\theta_1]$. On a

$$\begin{aligned} & e_k(1[\theta_k|\cdots|\theta_1]) = e_k(1 \otimes u) = \varphi_{k-1}(\partial(1 \otimes u)) \\ = \quad & \varphi_{k-1}(u) + \varphi_{k-1}(1 \otimes \partial u) = \Sigma\theta_k\big(x_k^{-1} e_{k-1}(1 \otimes v)\big) + \Sigma x_k^{-1} e_{k-1}(1 \otimes \partial u) \\ = \quad & \sum_{\deg \theta_k' > 0} \Sigma\theta_k'(x_k^{-1})\theta_k'' e_{k-1}(1 \otimes v) + \Sigma x_k^{-1}\big(\theta_k e_{k-1}(1 \otimes v) + e_{k-1}(1 \otimes \partial u)\big), \end{aligned}$$

ceci d'après la formule de Cartan. La formule désirée résulte de ce que le second terme de cette somme est nul. En effet :

$$\begin{aligned} & \theta_k e_{k-1}(1 \otimes v) + e_{k-1}(1 \otimes \partial u) = e_{k-1}(\theta_k \otimes v + 1 \otimes \partial u) \\ = \quad & e_{k-1}(u + 1 \otimes \partial u) = e_{k-1}(\partial(1 \otimes u)) = \varphi_{k-2}(\partial\partial(1 \otimes u)) = 0. \end{aligned}$$

Afin d'éviter des complications inutiles, à partir d'ici nous supprimons à nouveau tout symbole de suspension dans les formules concernant le transfert.

Base de Milnor. L'algèbre de Steenrod duale $\mathcal{A}^*$ est isomorphe [35, 52] à l'algèbre polynomiale graduée $\mathbb{F}_2[\xi_1, \xi_2, \dots]$, où $\deg \xi_i = 2^i - 1$. Étant donnée une suite d'entiers positifs ou nuls $I = (i_1, \dots, i_t)$, on note $Sq(I) \in \mathcal{A}$ l'élément dual de $\xi^I := \xi_1^{i_1} \cdots \xi_t^{i_t}$ par rapport à la base formée des monômes en $\xi_1, \xi_2, \dots$ de $\mathcal{A}^*$. Si $i_1 = \cdots = i_{t-1} = 0$ et $i_t = 2^s$, l'élément $Sq(I)$ se note également P_t^s selon l'usage [33, 48]. Lorsque I parcourt toutes les suites d'entiers positifs ou nuls, les éléments $Sq(I)$ forment une base de l'espace vectoriel gradué $\mathcal{A}$. Cette base est baptisée d'après Milnor.

L'action de la comultiplication de $\mathcal{A}$ sur la base de Milnor est donnée par la formule $\Delta(Sq(I)) = \sum_{I'+I''=I} Sq(I') \otimes Sq(I'')$. D'où P_t^0 est primitif. Les P_t^0 sont les seuls éléments primitifs de l'algèbre de Hopf $\mathcal{A}$.

Dans l'algèbre $\mathcal{A}$, l'élément P_t^s est engendré par $Sq^1, \dots, Sq^{2^{s+t-1}}$. Si $s < t$, on a $(P_t^s)^2 = 0$ (voir [35]).

Le primitif P_t^0 commute [34] avec $Sq^1, \dots, Sq^{2^t-1}$. Ceci résulte de ce que l'action de $\mathcal{A}$ sur $\bigoplus_{n>0} H^*((\mathbb{R}P^\infty)^n; \mathbb{F}_2)$ est fidèle [52] et que le commutateur $[Sq^i, P_t^0] = Sq^i P_t^0 + P_t^0 Sq^i$ s'annule sur $\bigoplus_{n>0} H^*((\mathbb{R}P^\infty)^n; \mathbb{F}_2)$ pour tout $i < 2^t$.

Coaction de Milnor. L'action de la base de Milnor sur les polynômes peut être calculée à l'aide de la coaction de Milnor $\lambda : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}\widehat{\otimes}\mathcal{A}^*$ (cf. [35, 48]). Le morphisme λ est un morphisme d'algèbres et vérifie les formules

$$\begin{cases} \lambda(u) = u \otimes 1 + \sum_{i>0} u^{2^n} \otimes \xi_i & \text{si} \quad u \in \mathcal{P},\ \deg u = 1, \\ \lambda(P) = \sum_I Sq(I)(P) \otimes \xi^I & \text{si} \quad\quad\quad\quad P \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

D'où l'on déduit, par exemple, que $P_t^s(u^{2^s}) = u^{2^{s+t}}$ si $u \in \mathcal{P}$ et $\deg u = 1$.

Shuffle-produit. Soient $\gamma' := [\theta_1|\cdots|\theta_r]$ et $\gamma'' := [\theta_{r+1}|\cdots|\theta_{r+s}]$ des éléments de la bar-construction [28] de l'algèbre de Steenrod. Le shuffle-produit de γ' et γ'' est défini [2, 15, 28] comme étant

$$\gamma' * \gamma'' := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}/\mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s} [\theta_{\sigma^{-1}(1)}|\cdots|\theta_{\sigma^{-1}(r+s)}],$$

où $\mathfrak{S}_{r+s}/\mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$ désigne l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}$ vérifiant $\sigma(1) < \cdots < \sigma(r)$ et $\sigma(r+1) < \cdots < \sigma(r+s)$.

Supposons que $\theta_i\theta_j = \theta_j\theta_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r < j \leqslant r+s$. Alors, on a [2] la formule $\partial(\gamma' * \gamma'') = \partial(\gamma') * \gamma'' + \gamma' * \partial(\gamma'')$. D'où il suit que si deux cycles de la bar-construction commutent, leur shuffle-produit est un cycle.

5.2. Démonstration du Théorème 1.4(i)

Décomposables. Singer [51] a montré que $h_i \in \operatorname{Im} Tr_1$ et $c_0 \in \operatorname{Im} Tr_3$. Boardman [5] a montré que $c_i \in \operatorname{Im} Tr_3$ pour tout $i > 0$. Comme $\bigoplus_{n\geqslant 1} Tr_n$ est un morphisme d'algèbres [51], il suit que $\operatorname{Im} Tr_4$ contient tous les décomposables de $H^4(\mathcal{A})$.

Reprenons les calculs par lesquels Singer est parvenu à montrer $c_0 \in \operatorname{Im} Tr_3$. Les ingrédients en sont :

– une description explicite de l'objet dual de l'algèbre différentielle graduée Lambda [7] (dont l'homologie est isomorphe à $H^*(\mathcal{A})$) en termes des invariants de Dickson [20, 51],
– un cycle représentant explicite de c_0 en « langage » Lambda.

Cette méthode peut s'appliquer à d'autres éléments de $H^*(\mathcal{A})$. Elle risque pourtant d'échouer si les cycles représentants concernés sont compliqués, ou si leur expressions en termes des invariants de Dickson ne sont pas explicites. En fait, cette méthode ne marche plus dès que $k = 4$ et pour tous les indécomposables de $H^4(\mathcal{A})$. Face à cette difficulté, nous offrons la solution suivante :

– identifier les éléments non nuls de $(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}}$,
– choisir (intuitivement) des cycles représentants de la bar-construction de l'algèbre de Steenrod, puis vérifier qu'ils correspondent par le transfert aux éléments $(\mathcal{P}_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}}$ identifiés plus haut.

Nous espérons que notre méthode exprime bien ce que voulait dire Singer lorsqu'il a construit son morphisme : *le transfert sert (i) à vérifier si un élément donné de l'homologie de l'algèbre de Steenrod est non nul, (ii) à prédire l'existence de certains éléments non nuls de l'homologie de l'algèbre de Steenrod.*

À titre d'exemple, voici notre preuve de ce que $c_0 \in \operatorname{Im} Tr_3$. Comme $\pi(x_1x_2)$ est un $\mathcal{GL}_2$-invariant de $\mathbb{F}_2[x_1, x_2]_{\mathcal{A}}$ et Tr_2^* est un isomorphisme [51], il existe un cycle $\gamma_2 \in \bar{\mathcal{A}}^{\otimes 2}$ tel que $Tr_2^*(\gamma_2) = \pi(x_1x_2)$. Explicitement

$$\gamma_2 := [Sq^2|Sq^2] + [Sq^1|P_2^1].$$

Posons $c_0^* := \gamma_2 * [P_3^0]$. Comme P_3^0 est un élément primitif de $\mathcal{A}$, la formule évaluant $e_3(c_0^*)$ est simple. En effet $e_3(c_0^*) = x_1^6x_2x_3 + x_1x_2^6x_3 + x_1x_2x_3^6 \not\equiv 0$. Ceci implique que $Tr_3^*(c_0^*) \neq 0$. Comme $Tr_3^* : Tor^{\mathcal{A}}_{3,11}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \longrightarrow (\mathcal{P}^8_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}} = \mathbb{F}_2$ est non nul, il suit que Tr_3 est bijectif en degré 8. D'où $c_0 \in \operatorname{Im} Tr_3$.

Indécomposables d_i, e_i. Parmi les preuves du fait $d_0, e_0 \in \operatorname{Im} Tr_4$, celle donnée par Hà [17] mérite bien notre attention. Son idée est de considérer le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} \arrow[r, "Tr_4"] \arrow[d] & H^4(\mathcal{A}) \arrow[d] \\ (\Gamma^{\mathcal{B}})_{\mathcal{GL}} \arrow[r, "Tr_4^{\mathcal{B}}"] & H^4(\mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ désigne la sous-algèbre de Hopf engendrée par Sq^1 et Sq^2, les flèches verticales sont des morphismes naturels, et $Tr_4^{\mathcal{B}}$ désigne l'analogue du transfert algébrique. Les images de d_0, e_0 par la projection canonique $H^*(\mathcal{A}) \longrightarrow H^*(\mathcal{B})$ ont été explicitées par Zachariou [61, 62]. Elles sont décomposables et suffisamment simples pour que Hà puisse montrer l'existence des élements de $(\Gamma^{\mathcal{B}})_{\mathcal{GL}}$ qui leur correspondent par le morphisme $Tr_4^{\mathcal{B}}$.

Il reste à vérifier que ces éléments de $(\Gamma^{\mathcal{B}})_{\mathcal{GL}}$ proviennent de $(\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$, ce qu'a pu faire Hà en dualisant la situation.

La méthode de Hà peut s'appliquer aux wedge-algèbres [30, 32, 44]. Appliquée à un élément concret $\gamma \in H^*(\mathcal{A})$, le succès de sa méthode dépend

– de la connaissance de l'image de γ par la projection canonique $H^*(\mathcal{A}) \longrightarrow H^*(\mathcal{B}')$, où $\mathcal{B}' \subset \mathcal{A}$ est une certaine sous-algèbre de Hopf,
– de ce que cette image soit suffisamment simple pour qu'on puisse trouver son correspondant dans $(\Gamma^{\mathcal{B}'})_{\mathcal{GL}}$.

Ainsi, ce succès n'est plus assuré dans le cas de l'élément $f_0 \in H^{4,22}$, dont on ne connaît pas l'image par les projections canoniques $H^*(\mathcal{A}) \longrightarrow H^*(\mathcal{B}')$.

Voici notre preuve de ce que $d_0, e_0 \in \operatorname{Im} Tr_4$. Comme $\pi(x_1x_2x_3)$ est un $\mathcal{GL}_3$-invariant de $\mathbb{F}_2[x_1, x_2, x_3]_{\mathcal{A}}$ et Tr_3^* est un isomorphisme [5], il existe un cycle $\gamma_3 \in \bar{\mathcal{A}}^{\otimes 3}$ tel que $Tr_3^*(\gamma_3) = \pi(x_1x_2x_3)$. Explicitement

$$\begin{aligned}\gamma_3 \quad &:= \quad [Sq^2|Sq^2|Sq^2] + [Sq^1|Sq^1] * [Sq^4] + [Sq^1|Sq^2|Sq^3] \\ &\qquad +[Sq^2|Sq^3|Sq^1] + [Sq^3|Sq^1|Sq^2].\end{aligned}$$

(Notons que l'existence d'un cycle contenant le terme $[Sq^2|Sq^2|Sq^2]$ équivaut à ce que $h_1^3 \neq 0$.)

Rappelons le cycle $\gamma_2 = [Sq^2|Sq^2] + [Sq^1|P_2^1]$. Posons $d_0^* := \gamma_2 * [P_3^0|P_3^0]$ et $e_0^* := \gamma_3 * [P_4^0]$. Pour évaluer $e_4(d_0^*)$ et $e_4(e_0^*)$, observons

– que si $P \in \mathcal{P}^{14}$ est divisible par $\theta P_3^0(u^{-1})$, avec $\theta \in \bar{\mathcal{A}}$ et $\deg u = 1$, alors $P \equiv 0$,
– que si $P \in \mathcal{P}^{17}$ est divisible par $\theta P_4^0(u^{-1})$, avec $\theta \in \bar{\mathcal{A}}$ et $\deg u = 1$, alors $P \equiv 0$.

En posant $(\sigma P)(x_1, x_2, x_3, x_4) := P(x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}, x_{\sigma^{-1}(4)})$ pour tout $P \in \mathcal{P}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, il suit que

$$\begin{aligned} e_4(d_0^*) \quad &\equiv \quad \sigma \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4/\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2} P_3^0(x_4) P_3^0(x_3) e_2(\gamma_2) \\ &\equiv \quad x_1x_2(x_3x_4)^6 + (x_1x_2)^3(x_3x_4)^4 \not\equiv 0 \text{ d'après la Proposition 6.3,} \\ e_4(e_0^*) \quad &\equiv \quad \sigma \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4/\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_1} P_4^0(x_4) e_3(\gamma_3) \\ &\equiv \quad x_1^{14}x_2x_3x_4 + x_1x_2^{14}x_3x_4 + x_1x_2x_3^{14}x_4 + x_1x_2x_3x_4^{14} \not\equiv 0, \end{aligned}$$

ceci d'après la Proposition 6.4. D'où $Tr_4^*(d_0^*) \neq 0$ et $Tr_4^*(e_0^*) \neq 0$. Comme les morphismes

$$Tr_4^* : Tor_{4,18}^{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \longrightarrow (\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^{14})^{\mathcal{GL}} = \mathbb{F}_2,$$

$$Tr_4^* : Tor_{4,21}^{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \longrightarrow (\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^{17})^{\mathcal{GL}} = \mathbb{F}_2,$$

sont non nuls, il suit que Tr_4 est bijectif dans les degrés 14 et 17. D'où $d_0, e_0 \in \operatorname{Im} Tr_4$.

Pour les lecteurs qui aiment la diversité, les cycles suivants ont également des images non nulles par Tr_4^* :

$$d_0^* := [P_2^0|P_2^0] * [P_2^1|P_2^1], \ e_0^* := [P_2^1|P_2^1|P_2^1] * [P_2^0].$$

Comme $Sq^0 Tr_4 = Tr_4 Sq^0$, ce qui précède implique que $d_i = (Sq^0)^i(d_0) \in \operatorname{Im} Tr_4$ et que $e_i = (Sq^0)^i(e_0) \in \operatorname{Im} Tr_4$.

Indécomposables f_i. Soit $f_0^* := ([Sq^4|Sq^4] + [Sq^2|P_2^1]) * [P_3^0|P_3^0]$. Des calculs explicites montrent que

$$Tr_4^*(f_0^*) = \pi(x_1^3x_2^3x_3^4x_4^8 + x_1^4x_2^8x_3^3x_4^3 + x_1^3x_2^3x_3^6x_4^6 + x_1^6x_2^6x_3^3x_4^3),$$

l'expression qui n'est pas nulle d'après la Proposition 6.5.

Observons que $h_4h_2h_0^2 \neq 0$ d'après Lin [26]. Ceci équivaut à l'existence d'un cycle $\gamma_4 \in \bar{\mathcal{A}}^{\otimes 4}$ contenant $[Sq^{16}|Sq^4|Sq^1|Sq^1]$. Il est facile de vérifier que le monôme $x_1^{15}x_2^3$ apparaît dans l'expression de $e_4(\gamma_4)$. D'où $Tr_4^*(\gamma_4) \neq 0$ et $Tr_4^*(\gamma_4) \neq Tr_4^*(f_0^*)$. Comme l'image du morphisme

$$Tr_4^* : Tor_{4,22}^{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 \longrightarrow (\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^{18})^{\mathcal{GL}} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$$

est de dimension au moins 2, il suit que Tr_4 est bijectif en degré 18. D'où $f_0 \in \operatorname{Im} Tr_4$. Comme $Sq^0 Tr_4 = Tr_4 Sq^0$, ceci implique que $f_i = (Sq^0)^i(f_0) \in \operatorname{Im} Tr_4$.

Indécomposables g_{i+1}, $D_3(i)$, p_i'. Soient $i \geqslant 0$ et d un entier tel que $H^{4,d+4}$ contient l'un des éléments g_{i+1}, $D_3(i)$, p_i'. Si $i = 0$, alors $(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} = (\operatorname{Im} Tr_4)_d = 0$ d'après [8] et d'après les Propositions 6.6, 6.7. Si $i > 0$, alors d'après le Théorème 1.3, on a soit $(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} = Sq^0(\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$, soit

$$(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} = \mathcal{GL}\langle a_1^{(2^p-1)} a_2^{(2^q-1)} \rangle + Sq^0(\Gamma_{d/2-2}^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$$

pour certains $p, q \geqslant 0$. Comme $Tr_4(\iota^*(a_1^{(2^p-1)} a_2^{(2^q-1)})) = h_p h_q h_0^2$ d'après [5], il suit que l'espace vectoriel $(\operatorname{Im} Tr_4)^d$ est engendré par $h_p h_q h_0^2$ et $(\operatorname{Im} Tr_4)^{d/2-2}$. D'où, par récurrence sur i, on déduit que $(\operatorname{Im} Tr_4)^d$ est engendré par les produits $h_{i_1}h_{i_2}h_{i_3}h_{i_4}$. Par conséquent, les indécomposables g_{i+1}, $D_3(i)$, p_i' ne sont pas dans l'image de Tr_4.

5.3. Démonstration du Théorème 1.4(ii)

Cas 5.3.1 $\alpha(d+4) > 4$.

Dans ce cas $\mathcal{P}^d_{\mathcal{A}} = 0$ d'après le Théorème 4.1(ii), et $H^{4,d+4} = 0$ d'après Lin [26]. D'où $Tr_4 : (\Gamma^{\mathcal{A}}_d)_{\mathcal{GL}} \longrightarrow H^{4,d+4}$ est bijectif.

Cas 5.3.2 $d \leqslant 22$.

La bijectivité de $Tr_4 : (\Gamma^{\mathcal{A}}_d)_{\mathcal{GL}} \longrightarrow H^{4,d+4}$ est justifiée par le Théorème 1.4(i) grâce aux tableaux suivants (cf. la Section 6) :

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$(\mathcal{P}^d_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}}$	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{F}_2$	0	$\mathbb{F}_2$	0	0	0	0	$\mathbb{F}_2$
$H^{4,d+4}$	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{F}_2$	0	$\mathbb{F}_2$	0	0	0	0	$\mathbb{F}_2$

d	15	16	17	18	19	20	21	22
$(\mathcal{P}^d_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}}$	$\mathbb{F}_2$	0	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$	0	0	0	$\mathbb{F}_2$
$H^{4,d+4}$	$\mathbb{F}_2$	0	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$	0	0	0	$\mathbb{F}_2$

d	7	9	14	15	17	18	22
$H^{4,d+4}$	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_2$
Générateurs	$h_3h_0^3$	c_0h_1	d_0	$h_4h_0^3$	e_0	$f_0, h_4h_2h_0^2$	c_1h_2

Cas 5.3.3 $H^{4,d+4}$ contient $h_0\gamma$ avec $\gamma = \begin{cases} c_j & j \geqslant 4, \\ h_{i_2}h_{i_3}h_{i_4}, & i_4 > i_3 \geqslant i_2 \geqslant 4. \end{cases}$

Il est clair que $\gamma \in (Sq^0)^4(H^{4,\widetilde{d}+4})$ avec $\widetilde{d} := (d-60)/16$. Il est facile de vérifier que $\alpha(\widetilde{d}+2) \geqslant 2$. Posons $\widetilde{\Gamma} := \Gamma(a_2, a_3, a_4)$ et $\widetilde{\mathcal{GL}} := \mathcal{GL}_3$. D'après le Théorème 1.2(ii) on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
(\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{d}})_{\widetilde{\mathcal{GL}}} & \xrightarrow{(Sq^0)^4} & (\widetilde{\Gamma}^{\mathcal{A}}_{d})_{\widetilde{\mathcal{GL}}} & \xrightarrow{\varphi} & (\Gamma^{\mathcal{A}}_{d})_{\mathcal{GL}} \\
\downarrow{\scriptstyle Tr_3} & & & & \downarrow{\scriptstyle Tr_4} \\
H^{3,\widetilde{d}+3} & \xrightarrow{(Sq^0)^4} & H^{3,d+3} & \xrightarrow{h_0} & H^{4,d+4}
\end{array}$$

où $(Sq^0)^4$ de la première ligne est bijectif, et φ est une certaine surjection. Le morphisme Tr_3 est bijectif d'après Boardman [5]. Les morphismes de la seconde ligne sont injectifs d'après Lin [26]. Il suit que Tr_4 est injectif.

Cas 5.3.4 $s = 0$, $d > 22$ et $H^{4,d+4}$ contient un certain indécomposable.

Dans ce cas, les seuls indécomposables que puissent contenir $H^{4,d+4}$ sont $D_3 = D_3(0)$, p'_0. L'injectivité de $Tr_4 : (\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} \longrightarrow H^{4,d+4}$ est justifiée par le tableau suivant :

d	61	69
$(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^d)^{\mathcal{GL}}$	0	0
$H^{4,d+4}$	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_2$
Générateurs de $H^{4,d+4}$	$D_3 = D_3(0)$	p'_0

Cas 5.3.5 $s > 0$ et $d > 22$.

Soit $n = d/2 - 2$. On a le diagramme commutatif [5]

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma_n^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} & \xrightarrow{Sq^0} & (\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle Tr_4} & & \Big\downarrow {\scriptstyle Tr_4} \\ H^{4,n+4} & \xrightarrow{Sq^0} & H^{4,d+4}. \end{array}$$

Le morphisme Sq^0 de la première ligne est toujours injectif. D'après Lin [26], le morphisme Sq^0 de la seconde ligne est injectif. Si $\alpha(d+2) > 2$, alors $(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} = Sq^0(\Gamma_n^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$ d'après le Théorème 1.3(i). Ceci implique que Tr_4 est injectif en degré d si et seulement s'il l'est en degré n.

Supposons $\alpha(d+2) \leqslant 2$. Soient $p \geqslant 1$, $q \geqslant 0$ des entiers tels que $d = 2^{p+q} + 2^p - 2 > 22$. Si $q = 1$ ou $p \leqslant 2$, alors $(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} = Sq^0(\Gamma_n^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$ d'après le Théorème 1.3(ii). D'où Tr_4 est injectif en degré d si et seulement s'il l'est en degré n. Si $q \neq 1$ et $p \geqslant 3$, d'après le Théorème 1.3(ii) on a

$$(\Gamma_d^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} = \mathbb{F}_2\langle \iota^*(a_1^{(2^{p+q}-1)} a_2^{(2^p-1)})\rangle \oplus Sq^0(\Gamma_n^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}.$$

Observons que $Tr_4(\iota^*(a_1^{(2^{p+q}-1)} a_2^{(2^p-1)}) = h_{p+q}h_p h_0^2$ d'après Boardman [5], et que $h_{p+q}h_p h_0^2 \notin Sq^0(H^{4,n+4})$ d'après Lin [26]. Il suit que Tr_4 est injectif en degré d si et seulement s'il l'est en degré n.

Ce qui a été fait jusqu'ici permet de montrer, par récurrence sur d, que Tr_4 est injectif en degré d si et seulement s'il l'est en degré n, et que Tr_4 est injectif en degré d si $H^{4,d+4}$ contient

– au moins un indécomposable différent de p_i pour tout $i \geqslant 0$,

– $h_i c_j$ avec $j \geqslant i + 4 \geqslant 4$,

– $h_{i_1}h_{i_2}h_{i_3}h_{i_4}$ avec $i_4 > i_3 \geqslant i_2 \geqslant i_1 \geqslant 4$.

Ceci termine la démonstration du Théorème 1.4(ii).

6. Indécomposables de degré petit

Cette section a pour objectif la détermination de $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ en degré petit pour $k=4$. Écrivons x, y, z, t respectivement à la place de x_1, x_2, x_3, x_4 et renvoyons à la Section 4.1 pour les notations. Pour tout $d > 0$, posons

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^d &= \mathcal{B}^d_x \cup \mathcal{B}^d_y \cup \mathcal{B}^d_z \cup \mathcal{B}^d_t \cup \mathcal{B}^d_{xy} \cup \mathcal{B}^d_{xz} \cup \mathcal{B}^d_{xt} \cup \mathcal{B}^d_{yz} \cup \mathcal{B}^d_{yt} \cup \mathcal{B}^d_{zt} \\ &\quad \cup \mathcal{B}^d_{xyz} \cup \mathcal{B}^d_{xyt} \cup \mathcal{B}^d_{xzt} \cup \mathcal{B}^d_{yzt}.\end{aligned}$$

Les propositions suivantes se vérifient aisément en renvoyant à Kameko [21].

Proposition 6.1. — *Soit* $1 \leqslant d \leqslant 22$ *et* $d \neq 7, 9, 14, 15, 17, 18, 22$. *Alors* $(\mathcal{P}^d_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}} = 0$.

Proposition 6.2. — *Soit* $\iota^* : \Gamma^{\mathcal{A}} \longrightarrow (\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}}$ *la projection canonique et* [3, 5]

$$c_i := (Sq^0)^i(a_1a_2a_3^{(6)} + a_1a_2^{(2)}a_3^{(5)} + a_1a_2^{(4)}a_3^{(3)} + a_1^{(2)}a_2^{(3)}a_3^{(3)}).$$

Alors, pour $d \in \{7, 9, 15, 22\}$, *le générateur de* $(\Gamma^{\mathcal{A}})_{\mathcal{GL}} = \mathbb{F}_2$ *est donné dans le tableau suivant :*

d	7	9	15	22
Générateur de $(\Gamma^{\mathcal{A}}_d)_{\mathcal{GL}}$	$\iota^*(a_1^{(7)})$	$\iota^*(c_0a_4)$	$\iota^*(a_1^{(15)})$	$\iota^*(c_1a_4^{(3)})$

Proposition 6.3. — *Soit* $d = 14$. *Alors* $\mathcal{B}^{14}$ *et les* 13 *monômes suivants forment un système générateur minimal en degré* 14 *de* $\mathcal{P}$ *comme* $\mathcal{A}$*-module :*

$$\begin{array}{llll} xy(xz)^2(xt)^4, & xy(xz)^2(zt)^4, & xy(xt)^2(zt)^4, & \\ xy(yz)^2(yt)^4, & xy(yz)^2(zt)^4, & xy(yt)^2(zt)^4, & \\ xz(yz)^2(zt)^4, & xz(yt)^2(zt)^4, & xt(yt)^2(zt)^4, & \\ xy(xz)^2(yt)^4, & (xy)^3(zt)^4, & xy(zt)^6, & xz(yt)^6. \end{array}$$

De plus $(\mathcal{P}^{14}_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}} = \mathbb{F}_2\langle\pi(d_0^*)\rangle$, *où* $d_0^* := (xy)^3(zt)^4 + xy(zt)^6$.

(Rappelons que $\mathcal{B}^{14}_x = \varnothing$, $\mathcal{B}^{14}_{xy} = \{(xy)^7\}$ et $\mathcal{B}^{14}_{xyz}$ est composé de $xy(xz)^6$, $xy(yz)^6$, $xz(yz)^6$, $xy(xz)^2(yz)^4$.)

Proposition 6.4. — *Soit* $d = 17$. *Alors* $\mathcal{B}^{17}$ *et les* 47 *monômes suivants forment un système générateur minimal en degré* 17 *de* $\mathcal{P}$ *comme*

$\mathcal{A}$-module :

$$\begin{cases} xyzP^2, & P \in \{xy^2t^4, xz^2t^4, yz^2t^4, xt^6, yt^6, zt^6, t^7\}, \\ xytP^2, & P \in \{xy^2z^4, xz^2t^4, yz^2t^4, xz^6, yz^6, zt^6, z^7\}, \\ xztP^2, & P \in \{yz^2t^4, yz^6, yt^6, y^7\}, \\ xyz(xyt)^2P^4, & P \in \{xy, xz, xt, yz, yt, zt\}, \\ xyz(xzt)^2P^4, & P \in \{xz, xt, yz, yt, zt\}, \\ xyz(yzt)^2P^4, & P \in \{yz, yt, zt\}, \\ xyt(xzt)^2P^4, & P \in \{xz, xt, yz, yt, zt\}, \\ xyt(yzt)^2P^4, & P \in \{yz, yt, zt\}, \\ xzt(yzt)^2P^4, & P \in \{yz, yt, zt\}, \\ (xyz)^3P^4, & P \in \{xt, yt, zt\}, \\ (xyt)^3(zt)^4. \end{cases}$$

De plus $(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^{17})^{\mathcal{GL}} = \mathbb{F}_2\langle\pi(e_0^*)\rangle$, où

$$e_0^* := x^{14}yzt + xy^{14}zt + xyz^{14}t + xyzt^{14}.$$

(Rappelons que $\mathcal{B}_x^{17} = \mathcal{B}_{xy}^{17} = \varnothing$ et $\mathcal{B}_{xyz}^{17}$ est composé de 10 monômes

$$\begin{cases} xyzP^2, & P \in \{xy^2z^4, xy^6, xz^6, yz^6, x^7, y^7, z^7\}, \\ (xyz)^3P^4, & P \in \{xy, xz, yz\}.) \end{cases}$$

Proposition 6.5. — *Soit $d = 18$. Alors $\mathcal{B}^{18}$ et les 25 monômes suivants forment un système générateur minimal en degré 18 de $\mathcal{P}$ comme $\mathcal{A}$-module :*

$$\begin{cases} xyP^2, & P \in \mathcal{B}_{xzt}^8 \cup \mathcal{B}_{yzt}^8 \cup \mathcal{B}_{zt}^8 \backslash \{xz(xzt)^2, yz(yzt)^2\}, \\ xzP^2, & P \in \mathcal{B}_{yzt}^8 \cup \mathcal{B}_{yt}^8 \backslash \{yzy^2t^4, yz(yzt)^2\}, \\ xtP^2, & P \in \{ytz^2t^4, ytz^6\}, \\ xyP^2, & P \in \{xyz^2t^4, xzy^2t^4, xz(yzt)^2\}, \end{cases}$$

où $\mathcal{B}_{xy}^8 = \{xyx^6, xyx^2y^4, xyy^6\}$ et $\mathcal{B}_{xyz}^8$ est composé de xyx^2z^4, xyy^2z^4, xyz^6, xzy^2z^4, xzy^6, $xy(xyz)^2$. De plus $(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^{18})^{\mathcal{GL}} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2\langle\pi(f_0^*)\rangle$, où $f_0^* := x^3y^3z^4t^8 + x^4y^8z^3t^3 + x^3y^3z^6t^6 + x^6y^6z^3t^3$.

(Rappelons que $\mathcal{B}_x^{18} = \varnothing$, $\mathcal{B}_{xy}^{18}$ est composé de $(xy)^3x^{12}$, $(xy)^3y^{12}$, $(xy)^3x^4y^8$, et $\mathcal{B}_{xyz}^{18}$ est composé de 12 monômes

$$\begin{array}{llll} xy(xz)^2x^{12}, & xy(xz)^2z^{12}, & xy(xz)^2x^4z^8, & xy(yz)^2y^{12}, \\ xy(yz)^2z^{12}, & xy(yz)^2y^4z^8, & xz(yz)^2y^{12}, & xz(yz)^2z^{12}, \\ xz(yz)^2y^4z^8, & xy(xz)^2y^{12}, & (xy)^3z^{12}, & xy(xz)^2y^4z^8.) \end{array}$$

Proposition 6.6 (Nam [41]). — *Soit $d = 61$. Alors $\mathcal{B}^{61}$ et les 33 monômes suivants forment un système générateur minimal en degré 61 de $\mathcal{P}$ comme $\mathcal{A}$-module :*

$$\begin{cases} xyz(xyt)^{14}P^{16}, & P \in \{x,y,t\}, \\ xyz(xzt)^{14}P^{16}, & P \in \{x,z,t\}, \\ xyz(yzt)^{14}P^{16}, & P \in \{y,z,t\}, \\ xyt(xzt)^{14}P^{16}, & P \in \{x,z,t\}, \\ xyt(yzt)^{14}P^{16}, & P \in \{y,z,t\}, \\ xzt(yzt)^{14}P^{16}, & P \in \{y,z,t\}, \\ xyz(xyt)^{2}(xzt)^{12}P^{16}, & P \in \{x,z,t\}, \\ xyz(xyt)^{2}(yzt)^{12}P^{16}, & P \in \{y,z,t\}, \\ xyz(xzt)^{2}(yzt)^{12}P^{16}, & P \in \{y,z,t\}, \\ xyt(xzt)^{2}(yzt)^{12}P^{16}, & P \in \{y,z,t\}, \\ xyz(xyt)^{2}(xzt)^{4}(yzt)^{8}P^{16}, & P \in \{y,z,t\}. \end{cases}$$

De plus $(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}^{61})^{\mathcal{GL}} = 0$.

(Rappelons que $\mathcal{B}_x^{61} = \mathcal{B}_{xy}^{61} = \varnothing$ et $\mathcal{B}_{xyz}^{61}$ est composé de $(xyz)^{15}x^{16}$, $(xyz)^{15}y^{16}$, $(xyz)^{15}z^{16}$.)

Proposition 6.7. — *Soit $d = 69$. Alors $\mathcal{B}^{69}$ et les 128 monômes suivants*(4) *forment un système générateur minimal en degré 69 de $\mathcal{P}$ comme $\mathcal{A}$-module :*

$$\begin{cases} (xyz)^3P^4, & P \in \{xy^2t^{12}, xt^{14}, yt^{14}, zt^{14}, t^{15}\}, \\ (xyt)^3P^4, & P \in \{z^{15}, zt^{14}\}, \\ xyz(xyt)^2P^4, & P \in \mathcal{B}_{xyt}^{15} \cup \mathcal{B}_{xzt}^{15} \cup \mathcal{B}_{yzt}^{15} \cup \{x^{15}, y^{15}, z^{15}, t^{15}\} \\ & \quad \cup \{xy^{14}, xz^{14}, xt^{14}, yz^{14}, yt^{14}, zt^{14}\}, \\ xyz(xzt)^2P^4, & P \in \mathcal{B}_{xzt}^{15} \cup \mathcal{B}_{yzt}^{15} \cup \{x^{15}, y^{15}, z^{15}, t^{15}\} \\ & \quad \cup \{xz^{14}, xt^{14}, yz^{14}, yt^{14}, zt^{14}\}, \\ xyz(yzt)^2P^4, & P \in \mathcal{B}_{yzt}^{15} \cup \{y^{15}, z^{15}, t^{15}, yz^{14}, yt^{14}, zt^{14}\}, \\ xyt(xzt)^2P^4, & P \in \mathcal{B}_{xzt}^{15} \cup \mathcal{B}_{yzt}^{15} \cup \{x^{15}, y^{15}, z^{15}, t^{15}\} \\ & \quad \cup \{xz^{14}, xt^{14}, yz^{14}, yt^{14}, zt^{14}\}, \\ xyt(yzt)^2P^4, & P \in \mathcal{B}_{yzt}^{15} \cup \{y^{15}, z^{15}, t^{15}, yz^{14}, yt^{14}, zt^{14}\}, \\ xzt(yzt)^2P^4, & P \in \mathcal{B}_{yzt}^{15} \cup \{y^{15}, z^{15}, t^{15}, yz^{14}, yt^{14}, zt^{14}\}, \\ xyz(xyt)^2(xzt)^4P^8, & P \in \{(yz)^3, (yt)^3, yz(yt)^2, yz(zt)^2, yt(zt)^2\}, \end{cases}$$

(4) C'est grace au poster [21] que nous nous sommes apercus qu'il manquait 3 générateurs dans notre liste initiale.

où $\mathcal{B}^{15}_{xyz}$ *est composé de* xy^2z^{12} *et des monômes*

$$xyzP^2,\ P \in \{xy(xz)^2, xy(yz)^2, xz(yz)^2, (xy)^3, (xz)^3, (yz)^3\}.$$

De plus(5) $(\mathcal{P}^{69}_{\mathcal{A}})^{\mathcal{GL}} = 0$.

(Rappelons que $\mathcal{B}^{69}_{x} = \mathcal{B}^{69}_{xy} = \varnothing$ et $\mathcal{B}^{69}_{xyz}$ est composé de 13 monômes

$$\begin{cases} (xyz)^3P^4, & P \in \{xy^2z^{12}, xy^{14}, xz^{14}, yz^{14}, x^{15}, y^{15}, z^{15}\}, \\ (xyz)^7P^8, & P \in \{(xy)^3, (xz)^3, (yz)^3, xy(xz)^2, xy(yz)^2, xz(yz)^2\}.) \end{cases}$$

7. Conjectures

Dimension des indécomposables. La première conjecture que nous proposons concerne $\dim \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. Elle a son origine dans le Théorème 1.1(ii) et dans un théorème de [41].

Supposons que $\omega = (r, k_0, \ldots, k_{r+1}, m_1, \ldots, m_{r+1}) \in \Omega$ vérifie

$$\begin{cases} r = k \text{ et } k_i = i \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant k, \\ m_i - m_{i+1} > 1 \text{ pour } 1 \leqslant i < k. \end{cases}$$

Alors $G_\omega \subset \mathcal{GL}$ coïncide avec le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures inversibles, et $\deg a_\omega = (2^{m_1}-1)+\cdots+(2^{m_k}-1)$. D'après le Théorème 1.1(ii), le $\mathcal{GL}$-module $\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle$ est isomorphe à $\mathbb{F}_2\langle \mathcal{GL}/G_\omega\rangle$.

Conjecture 7.1. —

(i) $\mathcal{GL}\langle a_\omega\rangle = \Gamma^{\mathcal{A}}_{\deg a_\omega}$ *et* $\dim \mathcal{P}^{\deg a_\omega}_{\mathcal{A}} = \prod_{1\leqslant i\leqslant k}(2^i-1)$.

(ii) *Si* $d \neq \deg a_\omega$ *pour tout* $\omega \in \Omega$ *vérifiant les conditions énumérées plus haut, alors* $\dim \mathcal{P}^d_{\mathcal{A}} < \prod_{1\leqslant i\leqslant k}(2^i-1)$.

Cohomologie de l'algèbre de Steenrod. La seconde conjecture(6) que nous avons à proposer concerne $H^*(\mathcal{A})$. Son origine réside dans le Théorème 1.2(iii). Comme à l'ordinaire, on note $\alpha(t)$ le nombre d'occurences du chiffre 1 dans l'écriture binaire de t.

Conjecture 7.2. — *Soient* $t \geqslant s \geqslant 1$ *des entiers.*

(i) *Si* $\alpha(t) > s$, *alors* $Ext^{s,t}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) = 0$.

(ii) *Si* $t = 2^{m_1} + \cdots + 2^{m_s}$ *et* $m_i - m_{i+1} > 1$ *pour* $1 \leqslant i < s$, *alors*

$$Ext^{s,t}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2\langle h_{m_1}\cdots h_{m_s}\rangle.$$

(5) Ce fait a été constaté dans [18].
(6) La Conjecture 7.1(i) nous a été proposée par le Pr. Nicolas Kuhn.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. ADAMS, « On the structure and applications of the Steenrod algebra », *Comment. Math. Helv.* **32** (1958), p. 180-214.

[2] ———, « On the non-existence of elements of Hopf invariant one », *Ann. of Math.* **72** (1960), p. 20-104.

[3] M. A. ALGHAMDI, M. C. CRABB & J. R. HUBBUCK, « Representations of the homology of BV and the Steenrod algebra I », *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **176** (1992), p. 217-234.

[4] M. G. BARRATT & S. PRIDDY, « On the homology of non-connected monoids and their associated groups », *Comment. Math. Helv.* **47** (1972), p. 1-14.

[5] J. M. BOARDMAN, « Modular representations on the homology of powers of real projective spaces », *Contemp. Math.* **146** (1993), p. 49-70.

[6] W. BOSMA, J. CANNON & C. PLAYOUST, « The Magma algebra system I : The user language », *J. Symbolic Comput.* **24** (1997), p. 235-265.

[7] A. K. BOUSFIELD, E. B. CURTIS, D. M. KAN, D. G. QUILLEN, D. L. RECTOR & J. W. SCHLESINGER, « The mod p lower central series and the Adams spectral sequence », *Topology* **5** (1966), p. 331-342.

[8] R. BRUNER, L. M. HÀ & N. H. V. HUNG, « On behavior of the algebraic transfer », à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.

[9] M. C. CRABB & J. R. HUBBUCK, « Representations of the homology of BV and the Steenrod algebra II », *Progr. Math.* **136** (1996), p. 143-154.

[10] M. D. CROSSLEY, « $\mathcal{A}(p)$-annihilated elements in $H_*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$ », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **120** (1996), p. 441-453.

[11] ———, « $\mathcal{A}(p)$ generators for H^*V and Singer's homological transfer », *Math. Z.* **230** (1999), p. 401-411.

[12] ———, « Monomial bases for $H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$ over $\mathcal{A}(p)$ », *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (1999), p. 171-192.

[13] E. B. CURTIS, « The Dyer–Lashof algebra and the Λ-algebra », *Illinois J. Math.* **19** (1975), p. 231-246.

[14] E. DYER & R. K. LASHOF, « Homology of iterated loopspaces », *Amer. J. Math.* **84** (1962), p. 35-88.

[15] S. EILENBERG & S. MACLANE, « On the groups $H(\pi, n)$, I », *Ann. of Math.* **58** (1953), p. 55-106.

[16] P. GOERSS, « Unstable projectives and stable Ext : with applications », *Proc. London Math. Soc.* **53** (1986), p. 539-561.

[17] L. M. HÀ, « Sub-Hopf algebras of the Steenrod algebra and the Singer transfer », in preparation.

[18] N. H. V. HUNG, « The cohomology of the Steenrod algebra and representations of the general linear groups », à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.

[19] ———, « Spherical classes and the algebraic transfer », *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), p. 3893-3910, Erratum **355** (2003), p. 3841–3842.

[20] N. H. V. HUNG & T. N. NAM, « The hit problem for the Dickson algebra », *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), p. 5029-5040.

[21] M. KAMEKO, « Generators of the cohomology of BV_4 », in preparation.

[22] ———, « Products of projective spaces as Steenrod modules », Thèse, Johns Hopkins University, May 1990.

[23] J. Lannes & S. Zarati, « Foncteurs dérivés de la déstabilisation », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **296** (1983), p. 573-576.

[24] ———, « Invariants de Hopf d'ordre supérieur et suite spectrale d'Adams », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **296** (1983), p. 695-698.

[25] ———, « Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation », *Math. Z.* **194** (1987), p. 25-59.

[26] W. H. Lin, « Some differentials in the Adams spectral sequence for spheres », preprint.

[27] A. Liulivicius, *The factorization of cyclic reduced powers by secondary operations*, vol. 42, Mem. Amer. Math. Soc., 1962.

[28] S. Mac Lane, *Homology*, Classics in Mathematics, Springer–Verlag, Berlin, 1995.

[29] I. Madsen, « On the action of the Dyer–Lashof algebra in $H_*(G)$ », *Pacific J. Math.* **60** (1975), p. 235-275.

[30] M. Mahowald & M. Tangora, « An infinite subalgebra of $Ext_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ », *Trans. Amer. Math. Soc.* **132** (1968), p. 263-274.

[31] B. M. Mann, E. Y. Miller & H. R. Miller, « S^1-equivariant function spaces and characteristic classes », *Trans. Amer. Math. Soc.* **295** (1986), p. 233-256.

[32] H. Margolis, S. Priddy & M. Tangora, « Another systematic phenomenon in the cohomology of the Steenrod algebra », *Topology* **10** (1970), p. 43-46.

[33] H. R. Margolis, *Spectra and the Steenrod algebra*, vol. 29, North–Holland Mathematical Library, 1983.

[34] J. P. May, « The cohomology of restricted Lie algebras and Hopf algebras, applications to the Steenrod algebra », Ph.D. Thesis, Princeton University, 1964.

[35] J. Milnor, « The Steenrod algebra and its dual », *Ann. of Math.* **67** (1958), p. 150-171.

[36] N. Minami, « The Adams spectral sequence and the triple transfer », *Amer. J. Math.* **117** (1995), p. 965-985.

[37] ———, « On the Kervaire invariant problem », *Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI* **220** (1998), p. 229-253.

[38] ———, « The iterated transfer analogue of the new doomsday conjecture », *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (1999), p. 2325-2351.

[39] S. Mitchell, « Splitting $B(\mathbb{Z}/p)^n$ and BT^n via modular representation theory », *Math. Z.* **189** (1985), p. 1-9.

[40] H. Mùi, « Modular invariant theory and cohomology algebras of symmetric groups », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **22** (1975), p. 319-369.

[41] T. N. Nam, « $\mathcal{A}$-générateurs génériques pour l'algèbre polynomiale », à paraître dans *Advances in Mathematics*.

[42] ———, *Système générateur minimal de $\mathbb{F}_2[x, y, z]$ comme module sur l'algèbre de Steenrod*, (en langue vietnamienne), Mémoire de fin d'études universitaires, Université des Sciences à Hanoï, Juin 1999.

[43] S. P. Novikov, « On the cohomology of the Steenrod algebra (Russian) », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **128** (1959), p. 893-895.

[44] J. H. Palmieri, « Quillen stratification for the Steenrod algebra », *Ann. of Math.* **149** (1999), p. 421-449.

[45] F. P. Peterson, *Generators of $H^*(\mathbb{R}P^\infty \wedge \mathbb{R}P^\infty)$ as a module over the Steenrod algebra*, Abstracts Amer. Math. Soc., 833–55–89, April 1987.

[46] ———, « $\mathcal{A}$-generators for certain polynomial algebras », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **105** (1989), p. 311-312.

[47] D. QUILLEN, « On the completion of a simplicial monoid », preprint.

[48] L. SCHWARTZ, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Math., 1994.

[49] W. M. SINGER, « On finite linear groups and the homology of the Steenrod algebra », preprint, 1980.

[50] ———, « Invariant theory and the lambda algebra », *Trans. Amer. Math. Soc.* **280** (1983), p. 673-693.

[51] ———, « The transfer in homological algebra », *Math. Z.* **202** (1989), p. 493-523.

[52] N. E. STEENROD & D. B. A. EPSTEIN, *Cohomology operations*, Ann. of Math. Stud., vol. 50, Princeton University Press, 1962.

[53] M. C. TANGORA, « On the cohomology of the Steenrod algebra », *Math. Z.* **116** (1970), p. 18-64.

[54] T. T. TRÍ, « The irreducible modular representations of parabolic subgroups of general linear groups », *Comm. Algebra* **26** (1998), p. 41-47.

[55] J. S. P. WANG, « On the cohomology of the mod 2 Steenrod algebra and the nonexistence of elements of Hopf invariant one », *Illinois J. Math.* **11** (1967), p. 480-490.

[56] C. WILKERSON, « Classifying spaces, Steenrod operations and algebraic closure », *Topology* **16** (1977), p. 227-237.

[57] R. M. W. WOOD, « Steenrod squares of polynomials », *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **139** (1989), p. 173-177.

[58] ———, « Steenrod squares of polynomials and the Peterson conjecture », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **105** (1989), p. 307-309.

[59] ———, « Problems in the Steenrod algebra », *Bull. London Math. Soc.* **146** (1998), p. 449-517.

[60] N. YONEDA, « Notes on products in *Ext* », *Proc. Amer. Math. Soc.* **9** (1958), p. 873-875.

[61] A. ZACHARIOU, « A subalgebra of $Ext^{**}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ », *Bull. London Math. Soc.* **73** (1967), p. 647-648.

[62] ———, « A polynomial subalgebra of the cohomology of the Steenrod algebra », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **9** ((1973/74), p. 157-164.

Manuscrit reçu le 9 mai 2005,
accepté le 6 décembre 2005.

Tran Ngoc NAM
Vietnam National University
Department of Mathematics
334 Nguyên Trãi Street
Hanoi (Vietnam)
bruce-nam@hotmail.com