ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Hammadi ABIDI & Marius PAICU

Existence globale pour un fluide inhomogène

Tome 57, nº 3 (2007), p. 883-917.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_3_883_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
57, 3 (2007) 883-917

EXISTENCE GLOBALE POUR UN FLUIDE INHOMOGÈNE

par Hammadi ABIDI & Marius PAICU

Résumé. — Dans cet article on s'intéresse à l'existence et l'unicité globale de solutions pour le système de Navier-Stokes à densité variable, lorsque la donnée initiale de la vitesse est dans l'espace de Besov homogène de régularité critique $B_{p,1}^{-1+\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Notons que ce résultat fait suite aux résultats de H. Abidi qui a généralisé le travail de R. Danchin. Toutefois, dans les travaux antérieurs, l'existence de la solution est obtenue pour $1 < p < 2N$ et l'unicité est démontrée sous l'hypothèse plus restrictive $1 < p \leqslant N$. Notre résultat répond à la question de l'existence pour tout $1 < p < +\infty$ et de l'unicité dans la plage $1 < p \leqslant 2N$. L'intérêt de ce théorème est qu'on obtient alors des espaces de régularité d'indices négatifs, dans lesquels toute donnée initiale devient petite en présence des fortes oscillations.

Abstract. — In this article we are interested in the existence and global uniqueness of the solution for the equation of inhomogeneous fluid, when the initial velocity is in the critical homogeneous Besov space $B_{p,1}^{-1+\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Let us note that this result followed upon the results of H. Abidi which generalized the work of R. Danchin. However, the existence of solutions is obtained when $1 < p < 2N$ and uniqueness is shown under more restrictive assumption $1 < p \leqslant N$. Our result resolves the question of the existence for all $1 < p < +\infty$ and uniqueness for $1 < p \leqslant 2N$. As an interesting application of this theorem, we obtain global existence for oscillating initial data.

1. Introduction

Dans cet article, nous allons étudier l'équation de Navier-Stokes inhomogène, qui modélise l'évolution d'un fluide visqueux, incompressible et à densité variable. Ce système a déjà été étudié par plusieurs auteurs, et on

Mots-clés : équations de Navier-Stokes inhomogènes, existence globale, unicité.
Classification math. : 35Q30, 35B30, 76D03, 76D05.

trouve une riche littérature (voir par exemple, [1], [2], [12], [8] [13], [15], [19], [21], [25],...). Rappelons le système

$$\text{(INS)}\begin{cases} \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho \mathrm{u}) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho \mathrm{u}\otimes \mathrm{u}) - 2\operatorname{div}\big(\mu(\rho)\mathcal{M}\big) + \nabla\Pi = \rho \mathrm{f} \\ \operatorname{div}\mathrm{u} = 0 \\ (\rho,u)_{|t=0} = (\rho_0,u_0), \end{cases}$$

où $\mathcal{M} = \frac{1}{2}\big(\nabla u +^t \nabla u\big)$, ρ est la densité, u est le champ de la vitesse, Π est la pression et μ est la viscosité qui est fonction régulière strictement positive et peut dépendre de la densité.

On va rappeler brièvement les résultats déjà connus sur ce système. Tout d'abord, on a des résultats "à la Leray" sur l'existence globale des solutions faibles. La démonstration repose sur des méthodes de compacité et sur l'estimation d'énergie suivante :

$$\|\sqrt{\rho}u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 2\inf_x \mu(x)\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}ds \leqslant \|\sqrt{\rho_0}u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

valable pour les solutions régulières. Les solutions faibles ont été construites par P.-L. Lions [21] et par B. Desjardins [13]. Dans [14] est étudiée l'existence d'une solution faible globale lorsque la viscosité est variable. D'autre part, même en dimension deux, l'unicité de ces solutions reste une question ouverte, même lorsque la viscosité est constante. Citons à présent le résultat de R. Danchin [12] dans le cas de la viscosité constante, qui montre que le système est globalement bien posé en dimension deux, lorsque $(\rho_0^{-1} - 1, u_0) \in H^{1+\alpha}(\mathbb{R}^2)\times H^\alpha(\mathbb{R}^2)$ pour $\alpha > 0$.

Dans la suite, on va discuter les résultats sur les solutions fortes dans le cas de la viscosité constante. Les premiers résultats on été obtenus, par Ladyzhenskaya et Solonnikov [20] sur un domaine borné Ω avec condition de Dirichlet aux bords, dans le cadre de l'espace de Sobolev $W^{2-\frac{2}{q},q}$ ($q > N$, $N = 2,3$) et pour une densité régulière $\rho_0 \in C^1(\overline{\Omega})$. Récemment, R. Danchin [11], a étudié ce système dans les espaces de Besov homogènes de régularité critique. Notons que le système a une invariance par changement d'échelle, c'est-à-dire, si (ρ,u) est une solution du système avec donnée initiale (ρ_0,u_0), alors

$$(\rho,u)_\lambda = (\rho(\lambda^2\cdot,\lambda\cdot),\lambda u(\lambda^2\cdot,\lambda\cdot))$$

est aussi une solution du système (INS), avec donnée initiale $(\rho_0(\lambda\cdot)$, $\lambda u_0(\lambda\cdot))$. Ainsi l'espace invariant par ce changement d'échelle est $(\rho,u) \in B^{\frac{N}{2}}_{2,1}\times B^{-1+\frac{N}{2}}_{2,1}$. R. Danchin obtient pour le système de Navier-Stokes inhomogène un théorème à la Fujita-Kato, en montrant l'existence et l'unicité locale pour des données initiales quelconques dans ces espaces critiques et l'existence et l'unicité globale pour des données initiales petites. Récemment, H. Abidi [1] a traité le cas d'une viscosité variable et obtient des solutions dans les espaces de Besov construits sur les L^p. Il obtient le théorème suivant (concernant la définition de l'espace de Besov homogène $B^s_{p,r}$ voir la définition 2.1).

Théorème 1.1. — [1] *Soient* $1 < p < 2N$, $0 < \underline{\mu} \leqslant \mu$, $u_0 \in B^{\frac{N}{p}-1}_{p,1}(\mathbb{R}^N)$ *avec* $\operatorname{div} u_0 = 0$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; B^{\frac{N}{p}-1}_{p,1}(\mathbb{R}^N))$ *et* $a_0 = \frac{1}{\rho_0} - 1 \in B^{\frac{N}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^N)$. *Alors il existe une constante positive* c *dépendant de* N, p *et de la fonction* μ *telle que si*

$$\|a_0\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p,1}} \leqslant c,$$

il existe un $T \in (0, +\infty]$ *tel que le système* (INS) *admet une solution* $(a, u, \nabla\Pi)$ *vérifiant*

$$\begin{aligned}
&a \in C_b([0,T);\, B^{\frac{N}{p}}_{p,1}),\ u \in C_b([0,T);\, B^{\frac{N}{p}-1}_{p,1}) \cap L^1(0,T;\, B^{\frac{N}{p}+1}_{p,1}),\\
&\textit{et}\ \nabla\Pi \in L^1(0,T;\, B^{\frac{N}{p}-1}_{p,1}).
\end{aligned}$$

De plus, cette solution est unique lorsque $1 < p \leqslant N$. *D'autre part, il existe une constante* c' *strictement positive dépendant de* N, μ *et* p *telle que si*

$$\|u_0\|_{B^{\frac{N}{p}-1}_{p,1}} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\, B^{\frac{N}{p}-1}_{p,1})} \leqslant c'\mu^1$$

avec $\mu^1 = \mu(1)$, *alors* $T = +\infty$.

Toutefois, pour le système de Navier-Stokes homogène ($\rho = \mathrm{cste}$), on connaît l'existence et l'unicité globale de la solution pour des données initiales petites dans l'espace de Besov homogène $B^{-1+\frac{N}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 < p < \infty$ (voir [4]). Le résultat de Cannone-Meyer-Planchon, généralise le théorème classique de Fujita- Kato [17], qui assure l'existence et l'unicité de la solution dans l'espace de Sobolev homogène $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, respectivement le théorème de Kato [18] d'existence et unicité dans l'espace $L^3(\mathbb{R}^3)$, à des espaces de Besov d'indice négatif. L'intérêt d'un tel résultat vient du fait qu'une donnée initiale de norme grande dans l'espace $L^3(\mathbb{R}^3)$ devient petite en présence des oscillations dans la norme de l'espace $B^{-1+\frac{N}{p}}_{p,1}$ lorsque $N < p < +\infty$. En particulier, on obtient que les oscillations rapides de la donnée initiale stabilise le système de Navier-Stokes classique dans le sens que le flot engendré existe globalement en temps. Plus précisément, on a :

Théorème 1.2. — [4] *Soient* $1 < p < +\infty$ *et* $u_0 \in B_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}(\mathbb{R}^N)$ *champ de divergence nulle. Alors il existe un temps* $T > 0$ *tel que le système de Navier-Stokes classique admet une unique solution*

$$u \in C_b\Big([0,T);\, B_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}\Big) \cap L^1\Big(0,T;\, B_{p,1}^{\frac{N}{p}+1}\Big).$$

De plus, il existe une constante $c > 0$ *assez petite telle que si*

$$\|u_0\|_{B_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}} \leqslant c\nu$$

alors il existe une unique solution globale en temps

$$u \in C_b\Big(\mathbb{R}_+;\, B_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}\Big) \cap L^1\Big(\mathbb{R}_+;\, B_{p,1}^{\frac{N}{p}+1}\Big).$$

Dans cet article, nous allons démontrer l'existence et l'unicité globale de la solution pour un système à densité variable lorsque la donnée initiale est fortement oscillante. Pour cela, il faudra travailler dans un espace d'indice de régularité négatif. Notons que le résultat de [1] ne permet pas de construire une solution globale unique pour des données dans des espaces d'indice négatif, puisqu'on a l'unicité de la solution uniquement dans le cas $1 < p \leqslant N$. Notons aussi qu'on a l'existence d'une solution globale faible lorsque $N < p < 2N$ pour des données petites. Dans cet article, on va démontrer qu'en fait, le système (INS) est globalement bien posé pour des données initiales oscillantes, lorsque $\frac{1}{\rho_0} - 1 \in B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}}$ et $u_0 \in B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}-1}$ avec $\sup(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}) \leqslant \inf(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}) + \frac{1}{N}$ et $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \geqslant \frac{2}{N}$. Notons qu'on obtient les résultats de H. Abidi [1] comme cas particulier de notre théorème en faisant $p_1 = p_2$. L'amélioration obtenue dans notre résultat vient exactement du fait de travailler avec la densité et le champ de la vitesse dans des espaces de Besov construits sur des espaces de Lebesgue différents. La méthode de la démonstration s'appuie sur l'effet régularisant pour l'équation de la chaleur (pour plus de précisions voir [6]). Plus précisément on dispose d'un résultat d'analyse harmonique dû à R. Danchin [10], qui est une inégalité du type inégalité de Poincaré pour les fonctions localisées en fréquences. Cela nous permet de gagner deux dérivées sur la solution de l'équation de la chaleur à partir du laplacien, et donc, pour une donnée initiale de $B_{p,1}^{-1+\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$ on trouve que la solution appartient à l'espace $L^1([0,T];\, B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})$. D'autre part, notons que le fait de travailler avec des champs de vecteurs qui sont dans les espaces de Besov $L_t^1(B_{p,1}^{1+\frac{N}{p}})$ permet d'avoir un champ $L_t^1(\mathrm{Lip})$ et cela est fortement utile lorsqu'on étudie l'équation de transport vérifiée par ρ. C'est la raison principale pour laquelle on ne peut pas travailler avec une donnée initiale $u_0 \in B_{p,r}^{-1+\frac{N}{p}}$ pour $r > 1$.

Dans la suite, on s'intéresse à l'étude du système (INS) avec viscosité constante et à des solutions à densité strictement positive. Notons que la condition $\inf_x \rho(t,x) > 0$ est vérifiée dès que $\inf_x \rho(0,x) > 0$ car $\rho(t,x)$ vérifie une équation de transport par un champ lipschitzien et de divergence nulle, ce qui implique que $\inf_x \rho(t,x) = \inf_x \rho(0,x)$. On peut ainsi effectuer le changement d'inconnue $a = \frac{1}{\rho} - 1$. Le système devient (en supposant $\mu = \text{cste}$)

$$(\widetilde{\text{INS}}) \begin{cases} \partial_t a + u \cdot \nabla a = 0 \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + (1+a)\big(\nabla \Pi - \mu \Delta u\big) = f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ (a,u)_{|t=0} = (a_0, u_0). \end{cases}$$

Avant d'énoncer les résultats, on rappelle que l'opérateur de Leray $\mathcal{P}$ est le projecteur orthogonal sur les champs à divergence nulle. On note $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$ le projecteur sur les champs de type gradient. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 1.3. — *Soient $1 \leqslant p_1 < \infty$ et $1 < p_2 < \infty$ tels que $\sup(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}) \leqslant \frac{1}{N} + \inf(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2})$. Il existe une constante c dépendant de N, p_1 et p_2 telle que pour $u_0 \in B_{p_2,1}^{-1+\frac{N}{p_2}}(\mathbb{R}^N)$ avec $\operatorname{div} u_0 = 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}_+; B_{p_2,1}^{-1+\frac{N}{p_2}}(\mathbb{R}^N))$ tel que $\mathcal{Q}f \in L^2(\mathbb{R}_+; B_{p_2,1}^{-2+\frac{N}{p_2}}(\mathbb{R}^N))$ et $a_0 \in B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}}(\mathbb{R}^N)$ où*

$$\|a_0\|_{B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}}} \leqslant c,$$

les assertions suivantes sont vraies.

Si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > \frac{1}{N}$, alors il existe $T \in (0, +\infty]$ tel que le système $(\widetilde{INS})$ admette une solution $(a, u, \nabla\Pi)$ vérifiant

$$\begin{aligned} &a \in C_b\big([0,T);\, B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}}\big) \cap \widetilde{L}_T^\infty(B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}}), \\ &u \in C_b([0,T);\, B_{p_2,1}^{-1+\frac{N}{p_2}}) \cap L_T^1(B_{p_2,1}^{1+\frac{N}{p_2}}) \cap \widetilde{L}_T^\infty(B_{p_2,1}^{-1+\frac{N}{p_2}}) \\ \text{et} \quad &\nabla\Pi \in L_T^1(B_{p_2,1}^{-1+\frac{N}{p_2}}). \end{aligned}$$

De plus, il existe une constante c' strictement positive dépendant de N et p telle que si

$$\|u_0\|_{B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}-1}} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\, B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}-1})} \leqslant c'\mu,$$

alors $T = +\infty$. En outre, cette solution est unique lorsque $\frac{2}{N} \leqslant \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$.

Remarque 1.4. — Remarquons que si $p_1 = p_2$, alors on retrouve le théorème 1.1 dans le cas $\mu = \text{cste}$.

Remarque 1.5. — Notons aussi que ce théorème nous permet de construire une solution (locale en temps en général, respectivement globale lorsque la donnée initiale est petite devant la viscosité), pour $u_0 \in B_{p_2,1}^{-1+\frac{N}{p_2}}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $1 < p_2 < +\infty$. En effet, il suffit par exemple de considérer la densité telle que $a_0 = \rho_0^{-1} - 1 \in B^1_{N\,1}(\mathbb{R}^N)$ lorsque $N \leqslant p_2 < +\infty$, dans le cas $1 < p_2 < N$ on peut prendre par exemple $p_1 = p_2$ (d'autre choix sont possibles, notamment il suffit que p_1 vérifie $\sup(1, \frac{Np_2}{N+p_2}) \leqslant p_1 \leqslant \frac{Np_2}{N-p_2}$).

D'autre part, on obtient une unique solution pour tout $u_0 \in B_{p_2,1}^{-1+\frac{N}{p_2}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 < p_2 \leqslant 2N$, pour cela il suffit par exemple de considérer $a_0 = \rho_0^{-1} - 1 \in B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}}(\mathbb{R}^N)$ avec $p_1 = \frac{2N}{3}$ lorsque $N \leqslant p_2 \leqslant 2N$, et lorsque $1 < p_2 < N$, il suffit de prendre par exemple $p_1 = p_2$ (plus généralement, $\frac{1}{p_1} \in [\sup(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{N}, \frac{2}{N} - \frac{1}{p_2}), \inf(1, \frac{1}{N} + \frac{1}{p_2})]$).

Remarque 1.6. — En particulier, le théorème 1.3 implique l'existence d'une unique solution globale pour le système (INS), lorsque la donnée initiale (ρ_0, u_0) est de la forme

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^3} \rho_0 > 0, \quad a_0 = \rho_0^{-1} - 1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad u_0 = \sin\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right)(-\partial_2\phi, \partial_1\phi, 0),$$

avec $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, a_0 de norme petit et $\varepsilon > 0$ assez petit. En effet, il est facile à vérifier l'affirmation suivante. Soient $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $k \in \mathbb{R}^N$, $|k| \neq 0$ et $(\sigma, p, r) \in \mathbb{R}_+^* \times [1, \infty)^2$. Alors, la fonction $\phi_\varepsilon(x) = \phi(x)\, e^{ix\cdot k/\varepsilon}$ petite dans l'espace $B^{-\sigma}_{p,r}$. Plus précisément on a

$$\|\phi_\varepsilon\|_{B^{-\sigma}_{p,r}} \leqslant C(\phi)\varepsilon^\sigma,$$

où $C(\phi) = \|\phi\|_{B^\sigma_{p,r}}$.

Remarque 1.7. — En suivant la même démarche que [1] et en utilisant le fait que l'espace de Besov est stable par l'action d'une fonction C^∞ (voir par exemple [22]), le théorème précédent reste valable lorsque μ dépend de la densité de manière régulière sous l'hypothèse supplémentaire $p_1 \leqslant p_2$. Pour éviter les complications techniques on a choisi de donner la démonstration uniquement dans le cas où la viscosité est constante.

2. Notations et définitions

2.1. Notations

On dit que $A \lesssim B$ s'il existe une constante c strictement positive telle que $A \leqslant cB$, et $A \approx B$ si $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$. Soient X un espace de

Banach et $p \in [1,\infty]$, on désigne par $L^p(0,T;\, X)$ l'ensemble des fonctions f mesurables sur $(0,T)$ à valeurs dans X, telles que $t \longmapsto \|f(t)\|_X$ appartient à $L^p(0,T)$. On note $C([0,T);\, X)$ l'espace des fonctions continues de $[0,T)$ à valeurs dans X et $C_b([0,T);\, X) \stackrel{\text{déf}}{=} C([0,T);\, X) \cap L^\infty(0,T;\, X)$. On désigne par p' l'exposant conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

2.2. Théorie de Littlewood-Paley

Dans cette section, nous allons rappeler brièvement la décomposition de Littlewood-Paley homogène et définir les espaces fonctionnels dans lesquels nous allons travailler. Pour cela, nous utilisons une décomposition dyadique de l'unité (voir par exemple [5]). Soient φ et $\chi \in C^\infty$ telles que $\operatorname{supp}\varphi \subset \{\frac{3}{4} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{8}{3}\}$, $\operatorname{supp}\chi \subset \{|\xi| \leqslant \frac{4}{3}\}$ et

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1 \qquad \forall \xi \neq 0 \quad \text{et} \quad \chi(\xi) = 1 - \sum_{q\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-q}\xi).$$

On définit les opérateurs de localisation en fréquences Δ_q et S_q de $\mathcal{L}(\mathcal{S}')$ par :

$$\begin{aligned} &\Delta_q\, u = \varphi(2^{-q}D)u \quad \text{pour tout} \quad q \in \mathbb{Z},\\ &S_q\, u = \chi(2^{-q}D)u = \sum_{p\leqslant q-1} \Delta_p\, u \quad \text{pour tout} \quad q \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Notons que pour une distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, la fonction $\Delta_q u$ est une fonction analytique à croissance lente. Si de plus, il existe un réel s tel que $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$, alors on a $\Delta_q u$ appartient à l'espace $\cap_{\sigma\in\mathbb{R}} H^\sigma(\mathbb{R}^N)$. De plus, on a :

$$u = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \Delta_q\, u \quad \forall\, u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)/\mathcal{P}[\mathbb{R}^N]$$

où $\mathcal{P}[\mathbb{R}^N]$ est l'ensemble des polynômes (voir par exemple [23]). Par ailleurs, la décomposition de Littlewood-Paley vérifie la propriété de presque orthogonalité :

(2.1)
$$\Delta_k \Delta_q u \equiv 0 \quad \text{si} \quad |k-q| \geqslant 2 \quad \text{et} \quad \Delta_k(S_{q-1}u\Delta_q u) \equiv 0 \quad \text{si} \quad |k-q| \geqslant 5.$$

DÉFINITION 2.1. — *Soient $s \in \mathbb{R}$, $(p,r) \in [1,+\infty]^2$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on note*

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{rqs} \|\Delta_q\, u\|^r_{L^p}\Big)^{\frac{1}{r}}$$

avec le changement habituel pour $r=+\infty$. On définit l'espace de Besov homogène $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^N)$ par :

– $B^s_{p\,r}=\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)\ \mid\ \|u\|_{B^s_{p\,r}}<+\infty\}$, *lorsque* $s<\frac{N}{p}$ *ou* $s=\frac{N}{p}$ *et* $r=1$.
– $B^s_{p\,r}=\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)\ \mid\ \forall\ \ |\alpha|=k,\ \ \partial^\alpha\, u\in B^{s-k}_{p\,r}\}$, *lorsque* $\frac{N}{p}+k\leqslant s<\frac{N}{p}+k+1$, $k\in\mathbb{N}$, *ou* $s=\frac{N}{p}+k+1$ *et* $r=1$.

Comme conséquence de l'inégalité de Bernstein (voir par exemple [5]) et par définition de $B^s_{p,r}$ on a la proposition suivante :

Proposition 2.2.

(i) *Il existe une constante c strictement positive telle que*

$$c^{-1}\|u\|_{B^s_{p,r}}\leqslant\|\nabla u\|_{B^{s-1}_{p,r}}\leqslant c\|u\|_{B^s_{p,r}}. \tag{2.2}$$

(ii) *Pour* $p_1\leqslant p_2$ *et* $r_1\leqslant r_2$, *on a* $B^s_{p_1,r_1}\hookrightarrow B^{s-N(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}_{p_2,r_2}$.

(iii) *Si* $p\in[1,\infty]$, *alors* $B^{\frac{N}{p}}_{p,1}\hookrightarrow B^{\frac{N}{p}}_{p,\infty}\cap L^\infty$.

(iv) *Interpolation réelle :* $(B^{s_1}_{p,r},B^{s_2}_{p,r})_{\theta,\,r'}=B^{\theta s_2+(1-\theta)s_1}_{p,r'}$ *pour* $0<\theta<1$ *(voir par exemple [24]).*

Proposition 2.3. — *Soient* p_1, p_2, $r\in[1,+\infty]$, $(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2$ *et* $p\in[1,+\infty]$, *alors on a les inégalités suivantes :*

si $\frac{1}{p}\leqslant\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$ *et* $s_1+s_2+N\inf\big(0,1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\big)>0$, *alors*

$$\Big\|R(u,v)\Big\|_{B^{s_1+s_2+\frac{N}{p}-\frac{N}{p_1}-\frac{N}{p_2}}_{p,r}}\lesssim\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r}}\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,\infty}}.$$

Si $\frac{1}{p}\leqslant\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$, $s_1+s_2=0$ *et* $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leqslant 1$, *alors*

$$\Big\|R(u,v)\Big\|_{B^{\frac{N}{p}-\frac{N}{p_1}-\frac{N}{p_2}}_{p,\infty}}\lesssim\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,1}}\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,\infty}}.$$

Si $\frac{1}{p}\leqslant\frac{1}{p_2}+\frac{1}{\lambda}\leqslant 1$ *avec* $\lambda\in[1,\infty]$ *et* $p_1\leqslant\lambda$, *alors*

$$\|T_uv\|_{B^{s_1+s_2+\frac{N}{p}-\frac{N}{p_1}-\frac{N}{p_2}}_{p,r}}\lesssim\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r}}\begin{cases}\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,\infty}} & si\ s_1+\frac{N}{\lambda}<\frac{N}{p_1}\\ \|u\|_{B^{s_1}_{p_1,1}} & si\ s_1+\frac{N}{\lambda}=\frac{N}{p_1}\end{cases}$$

et

$$\|T_uv\|_{B^{s_1+s_2+\frac{N}{p}-\frac{N}{p_1}-\frac{N}{p_2}}_{p,r}}\lesssim\begin{cases}\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,\infty}}\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r}} & si\ s_1+\frac{N}{\lambda}<\frac{N}{p_1}\\ \|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r}}\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,1}} & si\ s_1+\frac{N}{\lambda}=\frac{N}{p_1}.\end{cases}$$

Remarque 2.4. — Des lois de produits de ce type ont été déjà données par exemple dans [6] et [24].

Preuve. — D'après la décomposition de J.-M. Bony [3], on a :

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v)$$

avec

$$T_u v = \sum_{q\in\mathbb{Z}} S_{q-1}u\,\Delta_q v \quad \text{et} \quad R(u,v) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \Delta_q u\,\widetilde{\Delta}_q v$$

où $\widetilde{\Delta}_q v = (\Delta_{q-1} + \Delta_q + \Delta_{q+1})v$. On applique l'opérateur Δ_k sur $R(u,v)$, on trouve

$$\Delta_k R(u,v) = \sum_{k-q\leqslant 3} \Delta_k\big(\Delta_q u\,\widetilde{\Delta}_q v\big).$$

Pour étudier le terme de reste il y a deux cas : $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leqslant 1$ et $1<\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$. Si $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leqslant 1$, grâce aux inégalités de Bernstein et de Hölder, on a la majoration suivante :

$$\|\Delta_k R(u,v)\|_{L^p} \lesssim 2^{Nk(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p})} \sum_{k-q\leqslant 3} \|\Delta_q u\|_{L^{p_1}}\|\widetilde{\Delta}_q v\|_{L^{p_2}}.$$

Et par suite

$$\begin{aligned}&2^{k(s_1+s_2+\frac{N}{p}-\frac{N}{p_1}-\frac{N}{p_2})}\|\Delta_k R(u,v)\|_{L^p}\\ &\lesssim \sum_{k-q\leqslant 3} 2^{(k-q)(s_1+s_2)}2^{qs_1}\|\Delta_q u\|_{L^{p_1}}2^{qs_2}\|\widetilde{\Delta}_q v\|_{L^{p_2}},\end{aligned}$$

ainsi l'inégalité de Young implique que $2^{k(s_1+s_2+\frac{N}{p}-\frac{N}{p_1}-\frac{N}{p_2})}\|\Delta_k R(u,v)\|_{L^p} \in \ell^r(\mathbb{Z})$, dès que $s_1+s_2>0$ lorsque $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leqslant 1$.

Maintenant si $1<\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$, alors $p_2\leqslant p_1'$ avec p_1' l'exposant conjugué de p_1, c'est-à-dire, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1'}=1$, et par suite les inégalités de Bernstein de Hölder impliquent

$$\begin{aligned}\|\Delta_k R(u,v)\|_{L^p} &\lesssim 2^{Nk(1-\frac{1}{p})} \sum_{k-q\leqslant 3} \|\Delta_q u\|_{L^{p_1}}\|\widetilde{\Delta}_q v\|_{L^{p_1'}}\\ &\lesssim 2^{Nk(1-\frac{1}{p})} \sum_{k-q\leqslant 3} \|\Delta_q u\|_{L^{p_1}}2^{Nq(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1'})}\|\widetilde{\Delta}_q v\|_{L^{p_2}}.\end{aligned}$$

On remplace $\frac{1}{p_1'}$ par $1-\frac{1}{p_1}$, on trouve

$$\begin{aligned}&2^{k(s_1+s_2+\frac{N}{p}-\frac{N}{p_1}-\frac{N}{p_2})}\|\Delta_k R(u,v)\|_{L^p}\\ &\lesssim \sum_{k-q\leqslant 3} 2^{(k-q)(s_1+s_2+N-\frac{N}{p_1}-\frac{N}{p_2})}2^{qs_1}\|\Delta_q u\|_{L^{p_1}}2^{qs_2}\|\widetilde{\Delta}_q v\|_{L^{p_2}},\end{aligned}$$

enfin l'inégalité de Young implique que $2^{k(s_1+s_2+\frac{N}{p}-\frac{N}{p_1}-\frac{N}{p_2})}\|\Delta_k R(u,v)\|_{L^p}\in\ell^r(\mathbb{Z})$ dès que $s_1+s_2+N-\frac{N}{p_1}-\frac{N}{p_2}>0$. On suit la même démarche que dans le premier cas, on en déduit la deuxième inégalité sur le terme du reste car on a besoin seulement de $2^{k(\frac{N}{p}-\frac{N}{p_1}-\frac{N}{p_2})}\|\Delta_k R(u,v)\|_{L^p}\in\ell^\infty(\mathbb{Z})$.

Pour le terme de paraproduit, on a :

$$\Delta_k T_u v=\sum_{|k-q|\leqslant 4}\Delta_k\big(S_{q-1}u\,\Delta_q v\big).$$

Démontrons maintenant les inégalités sur le paraproduit. Si $\frac{1}{p}\leqslant\frac{1}{p_2}+\frac{1}{\lambda}\leqslant 1$ avec $p_1\leqslant\lambda$. Alors les inégalités de Hölder et de Bernstein impliquent :

$$\|\Delta_k T_u v\|_{L^p}\lesssim 2^{kN(\frac{1}{p_2}+\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{p})}\sum_{|k-q|\leqslant 4}\|S_{q-1}u\|_{L^\lambda}\|\Delta_q v\|_{L^{p_2}}.$$

Mais par définition de l'opérateur S_q et l'inégalité de Bernstein, on a l'estimation suivante :

$$\|S_{q-1}u\|_{L^\lambda}\lesssim 2^{q(\frac{N}{p_1}-\frac{N}{\lambda}-s_1)}\begin{cases}\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,\infty}} & \text{si } s_1+\frac{N}{\lambda}<\frac{N}{p_1}\\ \|u\|_{B^{s_1}_{p_1,1}} & \text{si } s_1+\frac{N}{\lambda}=\frac{N}{p_1}.\end{cases}$$

Remarquons que si $u\in L^\lambda$, alors :

$$\|S_{q-1}u\|_{L^\lambda}\lesssim\|u\|_{L^\lambda}.$$

Et par suite, on a :

$$\|T_u v\|_{B^{s_1+s_2+\frac{N}{p}-\frac{N}{p_1}-\frac{N}{p_2}}_{p,r}}\lesssim\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r}}\begin{cases}\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,\infty}} & \text{si } s_1+\frac{N}{\lambda}<\frac{N}{p_1}\\ \|u\|_{B^{s_1}_{p_1,1}} & \text{si } s_1+\frac{N}{\lambda}=\frac{N}{p_1}.\end{cases}$$

L'autre inégalité se démontre de la même manière mais on utilise le fait que $2^{q(s_1+\frac{N}{\lambda}-\frac{N}{p_1})}S_{q-1}u\in\ell^r(L^\lambda)$, si $s_1+\frac{N}{\lambda}<\frac{N}{p_1}$ et dans $\ell^1(L^\lambda)$, si $s_1+\frac{N}{\lambda}=\frac{N}{p_1}$. En effet, si $s_1+\frac{N}{\lambda}<\frac{N}{p_1}$, alors :

$$\begin{aligned}\|S_{q-1}u\|_{L^\lambda}&\lesssim\sum_{j\leqslant q-2}2^{j(\frac{N}{p_1}-\frac{N}{\lambda}-s_1)}2^{js_1}\|\Delta_j u\|_{L^{p_1}}\\&\lesssim 2^{q(\frac{N}{p_1}-\frac{N}{\lambda}-s_1)}\sum_{j\leqslant q-2}2^{(j-q)(\frac{N}{p_1}-\frac{N}{\lambda}-s_1)}a_j\|u\|_{B^{s_1}_{p,r}}\\&\leqslant C2^{q(\frac{N}{p_1}-\frac{N}{\lambda}-s_1)}\tilde a_q\|u\|_{B^{s_1}_{p,r}},\end{aligned}$$

où $\tilde a_j=\sum_{j\leqslant q-2}2^{(j-q)(\frac{N}{p_1}-\frac{N}{\lambda}-s_1)}a_j\in\ell^r(\mathbb{Z})$, lorsque $s_1+\frac{N}{\lambda}<\frac{N}{p_1}$, sinon, c'est-à-dire, $s_1+\frac{N}{\lambda}=\frac{N}{p_1}$, on a $\|S_{q-1}u\|_{L^\lambda}\lesssim\|u\|_{B^{s_1}_{p,1}}$. D'où la proposition. □

Comme conséquence de la proposition précédente, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.5. — *Soient* $(p, p_1, p_2, r, \lambda_1, \lambda_2) \in [1, \infty]^6$ *tels que* $\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $p_1 \leqslant \lambda_2$, $p_2 \leqslant \lambda_1$, $\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{p_1} + \frac{1}{\lambda_1} \leqslant 1$ *et* $\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{p_2} + \frac{1}{\lambda_2} \leqslant 1$. *Alors on a les inégalités suivantes :*

si $s_1 + s_2 + N \inf(0, 1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}) > 0$, $s_1 + \frac{N}{\lambda_2} < \frac{N}{p_1}$ *et* $s_2 + \frac{N}{\lambda_1} < \frac{N}{p_2}$. *Alors :*

$$\|uv\|_{B_{p,r}^{s_1+s_2-N(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p})}} \lesssim \|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r}} \|v\|_{B^{s_2}_{p_2,\infty}}, \tag{2.3}$$

lorsque $s_1 + \frac{N}{\lambda_2} = \frac{N}{p_1}$ (resp. $s_2 + \frac{N}{\lambda_1} = \frac{N}{p_2}$) *on remplace* $\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r}} \|v\|_{B^{s_2}_{p_2,\infty}}$ (resp. $\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,\infty}}$) *par* $\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,1}} \|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r}}$ (resp. $\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,\infty} \cap L^\infty}$), *si* $s_1 + \frac{N}{\lambda_2} = \frac{N}{p_1}$ *et* $s_2 + \frac{N}{\lambda_1} = \frac{N}{p_2}$ *on prend* $r = 1$.

Si $s_1 + s_2 = 0$, $s_1 \in (\frac{N}{\lambda_1} - \frac{N}{p_2}, \frac{N}{p_1} - \frac{N}{\lambda_2}]$ *et* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leqslant 1$, *alors :*

$$\|uv\|_{B_{p,\infty}^{-N(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p})}} \lesssim \|u\|_{B^{s_1}_{p_1,1}} \|v\|_{B^{s_2}_{p_2,\infty}}. \tag{2.4}$$

Si $|s| < \frac{N}{p}$ *pour* $p \geqslant 2$ *et* $-\frac{N}{p'} < s < \frac{N}{p}$ *sinon, alors :*

$$\|uv\|_{B^s_{p,r}} \lesssim \|u\|_{B^s_{p,r}} \|v\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p,\infty} \cap L^\infty}. \tag{2.5}$$

Si $s + N - \frac{N}{p} > 0$, *alors on a :*

$$\|uv\|_{B^s_{p,r}} \lesssim \|u\|_{L^2 \cap B_{2,r}^{s+N-\frac{N}{p}}} \|v\|_{L^2 \cap B_{2,r}^{s+N-\frac{N}{p}}}. \tag{2.6}$$

Remarque 2.6. — En général dans la suite p sera égal à p_1 ou à p_2 et $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$ si $p_1 \leqslant p_2$, respectivement $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}$ si $p_2 \leqslant p_1$.

Pour étudier le système $(\widetilde{INS})$ nous avons besoin d'utiliser l'effet régularisant de l'équation de la chaleur. Pour cela on introduit les espaces $\widetilde{L}^\rho_T(B^s_{p,r})$ découverts par J.-Y. Chemin et N. Lerner dans [7].

Définition 2.7. — *Soient* $s \in \mathbb{R}$, $(r, \rho, p) \in [1, +\infty]^3$ *et* $T \in]0, +\infty]$, *on dit alors que* $f \in \widetilde{L}^\rho_T(B^s_{p,r})$, *si*

$$\|f\|_{\widetilde{L}^\rho_T(B^s_{p,r})} \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\sum_{q \in \mathbb{Z}} 2^{qrs} \Big(\int_0^T \|\Delta_q f(t)\|^\rho_{L^p} dt \Big)^{\frac{r}{\rho}} \Big)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

avec le changement usuel si $r = \infty$.

Pour $\theta \in [0, 1]$, on a :

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(B^s_{p,r})} \leqslant \|u\|^\theta_{\widetilde{L}^{\rho_1}_T(B^{s_1}_{p,r})} \|u\|^{1-\theta}_{\widetilde{L}^{\rho_2}_T(B^{s_2}_{p,r})} \tag{2.7}$$

avec $\frac{1}{\rho} = \frac{\theta}{\rho_1} + \frac{1-\theta}{\rho_2}$ et $s = \theta s_1 + (1 - \theta) s_2$.

Remarquons que l'inégalité de Minkowski, implique que :

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(B^s_{p,r})} \leqslant \|u\|_{L^\rho_T(B^s_{p,r})} \quad \text{si} \quad \rho \leqslant r$$
$$\text{et } \|u\|_{L^\rho_T(B^s_{p,r})} \leqslant \|u\|_{\widetilde{L}^\rho_T(B^s_{p,r})} \quad \text{si} \quad r \leqslant \rho.$$

Remarque 2.8. — Le corollaire 2.5 reste vrai dans les espaces $\widetilde{L}^\rho_T(B^s_{p,r})$. Par exemple, on a :

$$\|uv\|_{\widetilde{L}^\rho_t(B^s_{p,r})} \lesssim \|u\|_{\widetilde{L}^{\rho_1}_t(B^s_{p,r})} \|v\|_{\widetilde{L}^{\rho_2}(B^{\frac{N}{p}}_{p,\infty} \cap L^\infty)}$$

où $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ et $|s| < \frac{N}{p}$ lorsque $p \geqslant 2$ respectivement $-\frac{N}{p'} < s < \frac{N}{p}$ sinon.

3. Estimations pour l'équation de transport et pour l'équation de Stokes

On remarque que le système de Navier-Stokes avec densité variable $(\widetilde{INS})$ est formé par une équation de transport sur la densité et par une équation de Stokes sur le champ de la vitesse. On commence ainsi par donner les estimations nécessaires pour l'équation de transport et pour le système de Stokes non stationnaire :

Proposition 3.1. — *Soient* $(p_1, p_2) \in [1, +\infty]^2$, $s \in]-1-\frac{N}{p_2}, 1 + N\inf(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2})[$ *si* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leqslant 1$ *et* $s \in]-1-\frac{N}{p_1'}, 1+N\inf(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2})[$ *si* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \geqslant 1$ *où* p_1' *l'exposant conjugué de* p_1 (resp. $s = 1+N\inf(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2})$) *et* $r \in [1, +\infty]$ (resp. $r = 1$)*. Soit* u *un champ de vecteurs à divergence nulle tel que* $\nabla u \in L^1(0,T; B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,r} \cap L^\infty)$ (resp. $u \in L^1(0,T; B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})$)*. Supposons que* $\rho_0 \in B^s_{p_1,r}$, $f \in L^1(0,T; B^s_{p_1,r})$*. Soit* $\rho \in L^\infty(0,T; B^s_{p_1,r}) \cap C([0,T]; \mathcal{S}')$ *une solution du système suivant :*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = f, \\ \rho_{|t=0} = \rho_0. \end{cases}$$

Alors il existe une constante C *strictement positive dépendant de* N *et* s *telle que :*

$$\|\rho\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^s_{p_1,r})} \leqslant e^{CU(t)} \Big(\|\rho_0\|_{B^s_{p_1,r}} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{B^s_{p_1,r}} d\tau \Big), \tag{3.1}$$

où $U(t) = \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,r} \cap L^\infty} d\tau$. (resp. $U(t) = \int_0^t \|u(\tau)\|_{B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1}} d\tau$).

Preuve. — On applique Δ_q à l'équation, après on multiplie par $|\Delta_q\rho|^{p_1-2}$ $\Delta_q\rho$. On obtient :

$$\frac{1}{p_1}\frac{d}{dt}\|\Delta_q\rho\|_{L^{p_1}}^{p_1}+\int \Delta_q(u\cdot\nabla\rho)|\Delta_q\rho|^{p_1-2}\Delta_q\rho\,dx\leqslant\|\Delta_q f\|_{L^{p_1}}\|\Delta_q\rho\|_{L^{p_1}}^{p_1-1}$$

D'après la décomposition de Bony, on peut écrire :

$$\Delta_q(u\cdot\nabla\rho)=\Delta_q(T_{u^i}\partial_i\rho)+\Delta_q(T_{\partial_i\rho}u^i)+\Delta_q(R(u^i,\partial_i\rho)).$$

D'autre part, le terme $\Delta_q(T_{u^i}\partial_i\rho)$ peut s'écrire à l'aide des commutateurs :

$$\begin{aligned}S_{q-1}u\cdot\nabla\Delta_q\rho&+\sum_{|q-q'|\leqslant 1}(S_{q'-1}-S_{q-1})u\cdot\nabla\Delta_q\Delta_{q'}\rho\\&+\sum_{|q-q'|\leqslant 4}[\Delta_q,S_{q'-1}u]\cdot\nabla\Delta_{q'}\rho.\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que :

$$\int S_{q-1}u\cdot\nabla\Delta_q\rho|\Delta_q\rho|^{p_1-2}\Delta_q\rho\,dx=0.$$

On injecte cela dans l'estimation sur l'équation de transport et on trouve :

$$\frac{1}{p_1}\frac{d}{dt}\|\Delta_q\rho\|_{L^{p_1}}^{p_1}\leqslant(\|F_q\|_{L^{p_1}}+\|\Delta_q f\|_{L^{p_1}})\|\Delta_q\rho\|_{L^{p_1}}^{p_1-1}$$

avec :

$$\begin{aligned}F_q\stackrel{\text{déf}}{=}\Delta_q\Big(\sum_{|q-q'|\leqslant 4}\Delta_{q'}u\cdot\nabla S_{q'-1}\rho\Big)+\Delta_q\Big(\sum_{q'\geqslant q-3}\Delta_{q'}u\cdot\nabla\widetilde{\Delta}_{q'}\rho\Big)\\+\sum_{|q-q'|\leqslant 1}(S_{q'-1}-S_{q-1})u\cdot\nabla\Delta_q\Delta_{q'}\rho+\sum_{|q-q'|\leqslant 4}[\Delta_q,S_{q'-1}u]\cdot\nabla\Delta_{q'}\rho\end{aligned}$$

où $\widetilde{\Delta}_q=\Delta_{q-1}+\Delta_q+\Delta_{q+1}$. Comme $\operatorname{div}u=0$, alors si $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leqslant 1$ les inégalités de Bernstein et de Hölder, donnent :

$$\begin{aligned}\|\Delta_q(\Delta_{q'}u\cdot\nabla\widetilde{\Delta}_{q'}\rho)\|_{L^{p_1}}&\lesssim 2^q\|\Delta_q(\Delta_{q'}u\widetilde{\Delta}_{q'}\rho)\|_{L^{p_1}}\\&\lesssim 2^{q(1+\frac{N}{p_2})}\|\Delta_{q'}u\widetilde{\Delta}_{q'}\rho\|_{L^{\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}}}\\&\lesssim 2^{q(1+\frac{N}{p_2})}\|\Delta_{q'}u\|_{L^{p_2}}\|\widetilde{\Delta}_{q'}\rho\|_{L^{p_1}}.\end{aligned}$$

Vu que :

$$\|\widetilde{\Delta}_{q'}\rho\|_{L^{p_1}}\leqslant 2^{-q's}a_{q'}\|\rho\|_{B^s_{p_1,r}}$$

où $a_{q'}\in\ell^r$. Comme la transformée de Fourier de $\Delta_{q'}u$ est localisée dans une couronne $2^{q'}\mathcal{C}$, alors :

$$\|\Delta_{q'}u\|_{L^{p_2}}\lesssim 2^{-q'(\frac{N}{p_2}+1)}\|\nabla u\|_{B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,\infty}}.$$

Finalement, on a obtenu :

$$\|\Delta_q(\Delta_{q'}u\cdot\nabla\widetilde{\Delta}_{q'}\rho)\|_{L^{p_1}}\lesssim a_{q'}2^{(q-q')(\frac{N}{p_2}+1+s)}2^{-qs}\|\nabla u\|_{B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,\infty}}\|\rho\|_{B^s_{p_1,r}}.$$

Comme $3\geqslant q-q'$ et $s+1+\frac{N}{p_2}>0$, on trouve finalement :

$$\sum_{q'\geqslant q-3}\|\Delta_q(\Delta_{q'}u\cdot\nabla\widetilde{\Delta}_{q'}\rho)\|_{L^{p_1}}\leqslant Ca_q2^{-qs}\|\nabla u\|_{B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,\infty}}\|\rho\|_{B^s_{p_1,r}}$$

si $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leqslant 1$ où $a_q=\sum_{q-q'\leqslant 3}2^{(q-q')(s+1+\frac{N}{p_2})}a_{q'}\in\ell^r$.

Si $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\geqslant 1$, alors $p_2\leqslant p_1'$ avec p_1' l'exposant conjugué de p_1 et par suite les inégalités de Bernstein et de Hölder, impliquent :

$$\begin{aligned}\|\Delta_q(\Delta_{q'}u\cdot\nabla\widetilde{\Delta}_{q'}\rho)\|_{L^{p_1}}&\lesssim 2^{q(1+N-\frac{N}{p_1})}\|\Delta_{q'}u\widetilde{\Delta}_{q'}\rho\|_{L^1}\\&\lesssim 2^{q(1+\frac{N}{p_1'})}2^{-q'(1+\frac{N}{p_1'})}2^{q'\frac{N}{p_2}}\|\Delta_{q'}\nabla u\|_{L^{p_2}}\|\widetilde{\Delta}_{q'}\rho\|_{L^{p_1}}.\end{aligned}$$

Ainsi, si $s+1+\frac{N}{p_1'}>0$, on trouve :

$$\sum_{q'\geqslant q-3}\|\Delta_q(\Delta_{q'}u\cdot\nabla\widetilde{\Delta}_{q'}\rho)\|_{L^{p_1}}\leqslant Ca_q2^{-qs}\|\nabla u\|_{B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,\infty}}\|\rho\|_{B^s_{p_1,r}}$$

si $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1$. De la même manière se traite le terme qui contient $(S_{q-1}-S_{q'-1})u$ puisque $|q-q'|\leqslant 1$, et par suite c'est une fonction localisée sur une couronne dyadique $2^q\mathcal{C}$, ainsi :

$$\sum_{|q-q'|\leqslant 1}\|(S_{q-1}-S_{q'-1})u\cdot\nabla\Delta_q\Delta_{q'}\rho\|_{L^{p_1}}\leqslant Ca_q2^{-qs}\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\rho\|_{B^s_{p_1,r}}.$$

Pour le terme $\Delta_q(\sum_{|q-q'|\leqslant 4}\Delta_{q'}u\cdot\nabla S_{q'-1}\rho)$, il y a deux cas soit $p_2\leqslant p_1$ soit $p_1\leqslant p_2$:

Cas $p_2\leqslant p_1$.

Les inégalités de Hölder et Bernstein impliquent :

$$\|\Delta_{q'}u\cdot\nabla S_{q'-1}\rho\|_{L^{p_1}}\lesssim 2^{q'N(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1})}\|\Delta_{q'}u\|_{L^{p_2}}\|S_{q'-1}\nabla\rho\|_{L^\infty},$$

mais par la définition de l'opérateur S_q, on a :

$$\|S_{q'-1}\nabla\rho\|_{L^\infty}\lesssim 2^{q'(\frac{N}{p_1}+1-s)}\begin{cases}\|\rho\|_{B^s_{p_1,\infty}} & \text{si } s<\frac{N}{p_1}+1\\ \|\rho\|_{B^s_{p_1,1}} & \text{si } s=\frac{N}{p_1}+1.\end{cases}$$

D'où on trouve finalement l'inégalité suivante :

$$\Big\|\Delta_q\Big(\sum_{|q-q'|\leqslant 4}\Delta_{q'}u\cdot\nabla S_{q'-1}\rho\Big)\Big\|_{L^{p_1}}$$

$$\leqslant C2^{-qs}a_q\|\nabla u\|_{B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,r}}\begin{cases}\|\rho\|_{B^s_{p_1,\infty}} & \text{si } s<\frac{N}{p_1}+1\\ \|\rho\|_{B^s_{p_1,1}} & \text{si } s=\frac{N}{p_1}+1.\end{cases}$$

Cas $p_1<p_2$.

L'inégalité de Hölder implique que :

$$\|\Delta_{q'}u\cdot\nabla S_{q'-1}\rho\|_{L^{p_1}}\leqslant\|\Delta_{q'}u\|_{L^{p_2}}\|S_{q'-1}\nabla\rho\|_{L^{\frac{p_1p_2}{p_2-p_1}}},$$

or, vu que $\nabla\rho\in B^{s-1}_{p_1,r}\hookrightarrow B^{s-1-\frac{N}{p_2}}_{\frac{p_1p_2}{p_2-p_1},r}$, et par définition de l'opérateur S_q, on a :

$$\|S_{q'-1}\nabla\rho\|_{L^{\frac{p_1p_2}{p_2-p_1}}}\lesssim 2^{q'(\frac{N}{p_2}+1-s)}\begin{cases}\|\rho\|_{B^s_{p_1,\infty}} & \text{si } s<\frac{N}{p_2}+1\\ \|\rho\|_{B^s_{p_1,1}} & \text{si } s=\frac{N}{p_2}+1.\end{cases}$$

Ainsi :

$$\|\Delta_q(\sum_{|q-q'|\leqslant 4}\Delta_{q'}u\cdot\nabla S_{q'-1}\rho)\|_{L^{p_1}}$$

$$\leqslant C2^{-qs}a_q\|\nabla u\|_{B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,r}}\begin{cases}\|\rho\|_{B^s_{p_1,\infty}} & \text{si } s<\frac{N}{p_2}+1\\ \|\rho\|_{B^s_{p_1,1}} & \text{si } s=\frac{N}{p_2}+1.\end{cases}$$

Il nous reste le terme qui contient le commutateur. On a par une inégalité classique sur les commutateurs (voir par exemple [5]) :

$$\|[\Delta_q,S_{q'-1}u]\cdot\nabla\Delta_{q'}\rho\|_{L^{p_1}}\lesssim 2^{-q'}\|\nabla S_{q'-1}u\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'}\nabla\rho\|_{L^{p_1}}$$

Donc, on trouve :

$$\|[\Delta_q,S_{q'-1}u]\cdot\nabla\Delta_{q'}\rho\|_{L^{p_1}}\lesssim\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\Delta_{q'}\rho\|_{L^{p_1}}.$$

Comme $|q-q'|\leqslant 4$ dans cette somme, alors :

$$\sum_{|q-q'|\leqslant 4}\|[\Delta_q,S_{q'-1}u]\cdot\nabla\Delta_{q'}\rho\|_{L^{p_1}}\leqslant C2^{-qs}a_q\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\rho\|_{B^s_{p_1,r}}.$$

En sommant toutes ces estimations, on trouve :

$$\|F_q\|_{L^{p_1}}\lesssim 2^{-qs}a_q\begin{cases}\|\nabla u\|_{B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,r}\cap L^\infty}\|\rho\|_{B^s_{p_1,r}}\\ \qquad\text{si } -1-\frac{N}{p_2}<s<1+N\inf(\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_2})\text{ et }\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leqslant 1\\ \qquad\text{ou bien}\\ \qquad\text{si } -1-\frac{N}{p_1'}<s<1+N\inf(\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_2})\text{ et }\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\geqslant 1\\ \|u\|_{B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1}}\|\rho\|_{B^s_{p_1,1}}\\ \qquad\text{si } s=1+N\inf(\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_2}).\end{cases}$$

En revenant à l'estimation sur l'équation de transport, on trouve, en multipliant avec 2^{qs} et en sommant en $q \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\|\rho(t)\|_{B^s_{p_1,r}} \leqslant \|\rho_0\|_{B^s_{p_1,r}} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{B^s_{p_1,r}} d\tau \\ + C\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,r}\cap L^\infty} \|\rho(\tau)\|_{B^s_{p_1,r}} d\tau,\end{aligned}$$

dès que $-1-\frac{N}{p_2} < s < 1+N\inf(\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_2})$ lorsque $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \leqslant 1$ ou $-1-\frac{N}{p_1'} < s < 1+N\inf(\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_2})$ pour $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \geqslant 1$. Sinon, c'est-à-dire, $s = 1+N\inf(\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_2})$, alors :

$$\begin{aligned}\|\rho(t)\|_{B^s_{p_1,1}} \leqslant \|\rho_0\|_{B^s_{p_1,1}} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{B^s_{p_1,1}} d\tau \\ + C\int_0^t \|u(\tau)\|_{B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1}} \|\rho(\tau)\|_{B^s_{p_1,1}} d\tau.\end{aligned}$$

Pour conclure il suffit d'utiliser le lemme de Gronwall. □

Pour l'équation de Stokes, on a la proposition suivante.

Proposition 3.2. — *Soient $p \in]1,\infty[$ et $s = \frac{N}{p} - \eta$ avec $\eta > 0$ tel que $1-\eta+N\inf(1,\frac{2}{p}) > 0$. Soient u_0 un champ de vecteurs à divergence nulle avec coefficients dans $B^s_{p,r}$ et g un champ de vecteurs à coefficients dans $\widetilde{L}^1_T(B^s_{p,r})$. Soient u et v deux champs de vecteurs à divergence nulle tels que ∇v soit à coefficients dans $L^1(0,T;\, B^{\frac{N}{p}}_{p,r}\cap L^\infty)$ (resp. $L^1_T(B^{\frac{N}{p}}_{p,1})$) et $u \in C([0,T;\, B^s_{p,r}) \cap \widetilde{L}^1_T(B^{s+2}_{p,r})$ soit une solution du système de Stokes non stationnaire :*

$$\text{(L)} \qquad \begin{cases} \partial_t u + v\cdot\nabla u - \nu\Delta u + \nabla\Pi = g \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases}$$

Alors il existe C dépendant de N et s tel que u vérifie l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}&\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^s_{p,r})} + \nu\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(B^{s+2}_{p,r})} + \|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(B^s_{p,r})} \\ &\leqslant e^{C\|\nabla v\|_{L^1_T(B^{\frac{N}{p}}_{p,r}\cap L^\infty)}}\Big\{\|u_0\|_{B^s_{p,r}} + C\|g\|_{\widetilde{L}^1_T(B^s_{p,r})}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Si $2 \leqslant p$ et $1-\eta+\frac{2N}{p} = 0$, alors on a de plus l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}&\|u\|_{L^\infty_T(B^s_{p,\infty})} + \nu\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(B^{2+s}_{p,\infty})} + \|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(B^s_{p,\infty})} \\ &\leqslant e^{C\|\nabla v\|_{L^1_T(B^{\frac{N}{p}}_{p,1})}}\Big\{\|u_0\|_{B^s_{p,\infty}} + C\|g\|_{\widetilde{L}^1_T(B^s_{p,\infty})}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Preuve. — Rappelons tout d'abord une inégalité semblable à l'inégalité de Bernstein (voir [10]) qui nous permet de gagner deux dérivées à partir du laplacien dans L^p si $1 < p < \infty$.

LEMME 3.3. — *Soient $N \geqslant 1$, $1 < p < +\infty$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tel que supp $\mathcal{F}u \subset C(0, R_1, R_2)$ (avec $0 < R_1 < R_2$). Alors il existe une contante K strictement positive dépendant de N et $\frac{R_1}{R_2}$ telle que*

$$K\frac{R_1^2}{p^2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2|u|^{p-2}dx = -\frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^N}\Delta u|u|^{p-2}u\,dx. \tag{3.4}$$

En suivant la même démarche que dans la démontration de la proposition 3.1, on trouve après l'application de $\mathcal{P}$ et lemme précédent que :

$$\begin{aligned}&2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^\infty_T(L^p)} + k\nu 2^{q(s+2)}\|\Delta_q u\|_{L^1_T(L^p)}\\ &\quad\leqslant 2^{qs}\|\Delta_q u_0\|_{L^p} + 2^{qs}\|\Delta_q\mathcal{P}g\|_{L^1_T(L^p)}\\ &\quad+ 2^{qs}\Big\|[v,\Delta_q]\cdot\nabla u\Big\|_{L^1_T(L^p)},\end{aligned} \tag{3.5}$$

avec

$$\big[v,\Delta_q\big]\cdot\nabla u = v\cdot\nabla\Delta_q u - \Delta_q(v\cdot\nabla u).$$

Après on multiplie l'inégalité (3.5) par 2^{qs}, on somme sur $q \in \mathbb{Z}$ et on utilise le lemme A.1 [11] et l'inégalité de Minkowski, on trouve

$$\begin{aligned}&\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^s_{p,r})} + k\nu\|u\|_{\widetilde{L}^1_T(B^{s+2}_{p,r})}\\ &\quad\leqslant \|u_0\|_{B^s_{p,r}} + \|\mathcal{P}g\|_{\widetilde{L}^1_T(B^s_{p,r})} + C\int_0^T\|\nabla v(t)\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p,r}\cap L^\infty}\|u(t)\|_{B^s_{p,r}}dt.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Pour estimer $\nabla\Pi$ dans $\widetilde{L}^1_T(B^s_{p,r})$, on applique l'opérateur de divergence, on trouve l'équation suivante :

$$\Delta\Pi = \operatorname{div}\mathcal{Q}g - \operatorname{div}(v\cdot\nabla u).$$

Donc l'inégalité (2.2), l'inégalité de Minkowski et le fait que $\operatorname{div} v = \operatorname{div} u = 0$, impliquent :

$$\begin{aligned}\|\Delta\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(B^{s-1}_{p,r})} &\leqslant c\|\mathcal{Q}g\|_{\widetilde{L}^1_T(B^s_{p,r})} + \Big\|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant N}\partial_j(\partial_i v^j\,u^i)\Big\|_{L^1_T(B^{s-1}_{p,r})}\\ &\lesssim \|\mathcal{Q}g\|_{\widetilde{L}^1_T(B^s_{p,r})} + \|u\cdot\nabla v\|_{L^1_T(B^s_{p,r})}\end{aligned}$$

Mais d'après la décomposition de J.-M. Bony et le fait que $\operatorname{div} u = 0$, on a :

$$u\cdot\nabla v = T_{u^j}\partial_j v + T_{\partial_j v}u^j + \partial_j R(u^j, v).$$

Comme $1-\eta+N\inf(1,\frac{2}{p})>0$, alors la proposition 2.3 et l'inégalité (2.2) impliquent :

$$\begin{aligned}\|\partial_j R(u^j,v)\|_{L^1_T(B^s_{p,r})} \lesssim \|R(u^j,v)\|_{L^1_T(B^{s+1}_{p,r})} &\lesssim \int_0^T \|v(\tau)\|_{B^{\frac{N}{p}+1}_{p,r}} \|u(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau \\ &\lesssim \int_0^T \|\nabla v(\tau)\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p,r}} \|u(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau,\end{aligned}$$

de nouveau la proposition 2.3 implique que :

$$\|T_{\partial_j v} u^j\|_{L^1_T(B^s_{p,r})} \lesssim \int_0^T \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} \|u(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau$$

et $T_{u^j}\partial_j v$, on utilise le fait que $\eta>0$ (on peut prendre $\eta=0$ si $r=1$) et de nouveau la proposition 2.3, on trouve :

$$\|T_{u^j}\partial_j v\|_{L^1_T(B^s_{p,r})} \lesssim \int_0^T \|\nabla v(\tau)\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p,r}} \|u(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau.$$

Ainsi, on a :

$$\|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T(B^s_{p,r})} \lesssim \|\mathcal{Q}g\|_{\widetilde{L}^1_T(B^s_{p,r})} + \int_0^T \|\nabla v\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p,r}\cap L^\infty} \|u\|_{B^s_{p,r}} dt. \tag{3.7}$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser les inégalités (3.6), (3.7) et un argument du type lemme de Gronwall. Pour montrer l'inégalité (3.3) on reprend les calculs qui conduisent à l'inégalité (3.2) puisque le lemme A.1 [11] est vrai pour $p\geqslant 2$ et $1-\eta+\frac{2N}{p}=0$ car la proposition 2.3 implique :

$$\|\partial_j R(v^j,u)\|_{L^1_T(B^s_{p,\infty})} \lesssim \|R(v^j,u)\|_{L^1_T(B^{s+1}_{p,\infty})} \lesssim \int_0^T \|u(\tau)\|_{B^s_{p,\infty}} \|v(\tau)\|_{B^{\frac{N}{p}+1}_{p,1}} d\tau$$

et pour l'estimation de la pression de nouveau la proposition 2.3 montre que :

$$\|\partial_j R(u^j,v)\|_{L^1_T(B^s_{p,\infty})} \lesssim \int_0^T \|u(\tau)\|_{B^s_{p,\infty}} \|v(\tau)\|_{B^{\frac{N}{p}+1}_{p,1}} d\tau \quad \text{dès que} \quad p\geqslant 2.$$

D'où la proposition. □

Rappelons finalement le lemme d'Osgood (voir [16]), qui va nous permettre de conclure à l'unicité dans les cas critiques (voir la section 5.1).

Lemme 3.4. — (Osgood) Soient $\rho\geqslant 0$ une fonction mesurable, γ une fonction localement intégrable et μ une fonction positive, continue et croissante qui vérifie la condition suivante :

$$\int_0^1 \frac{dr}{\mu(r)} = +\infty.$$

Soient aussi a un nombre réel positif et ρ vérifiant l'inégalité :

$$\rho(t) \leqslant a + \int_0^t \gamma(s)\mu(\rho(s))ds.$$

Alors, si a est nul, la fonction ρ est identiquement nulle. Si a est non nul, alors on a

$$-\mathcal{M}(\rho(t)) + \mathcal{M}(a) \leqslant \int_0^t \gamma(s)ds, \quad \text{avec } \mathcal{M}(x) = \int_x^1 \frac{dr}{\mu(r)}\cdot$$

4. Existence

Proposition 4.1. — *Soient $1 \leqslant p_1 < \infty$ et $1 < p_2 < \infty$ telles que $\sup(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}) \leqslant \frac{1}{N} + \inf(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2})$ et $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > \frac{1}{N}$. Il existe une constante c dépendant de N et p telle que pour $u_0 \in B_{p_2,1}^{-1+\frac{N}{p_2}}(\mathbb{R}^N)$ avec $\operatorname{div} u_0 = 0$, $f \in L^1(\mathbb{R}_+;\, B_{p_2,1}^{-1+\frac{N}{p_2}}(\mathbb{R}^N))$, $\mathcal{Q}f \in L^2(\mathbb{R}_+;\, B_{p_2,1}^{-2+\frac{N}{p_2}}(\mathbb{R}^N))$ et $a_0 \in B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}}(\mathbb{R}^N)$ où :*

$$\|a_0\|_{B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}}} \leqslant c.$$

Alors il existe $T \in (0, +\infty]$ tel que le système $(\widetilde{INS})$ admette une solution $(a, u, \nabla\Pi)$ vérifiant :

$$a \in C_b\Big([0,T);\, B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}}\Big) \cap \widetilde{L}_T^{\infty}\Big(B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}}\Big),$$
$$u \in C_b\Big([0,T);\, B_{p_2,1}^{-1+\frac{N}{p_2}}\Big) \cap L_T^1\Big(B_{p_2,1}^{1+\frac{N}{p_2}}\Big) \quad \text{et} \quad \nabla\Pi \in L_T^1\Big(B_{p_2,1}^{-1+\frac{N}{p_2}}\Big).$$

De plus, il existe une constante c' strictement positive dépendant de N et p telle que si

$$\|u_0\|_{B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}-1}} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\, B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}-1})} \leqslant c'\mu,$$

alors $T = +\infty$.

Démonstration de la proposition 4.1. — La démonstration de la proposition est organisée de la manière suivante. Premièrement on résout un système approché, deuxièmement on montre que la solution du problème approché est uniformément bornée et enfin, on étudie la convergence de la solution approchée et on démontre que sa limite est une solution de $(\widetilde{INS})$. □

Première étape : Solution approchée régulière

Tout d'abord on régularise la donnée initiale (a_0, u_0, f) (pour plus de détails, voir le lemme 4.2 [1]) après grâce au théorème 1.2 [1], on déduit que le système $(\widetilde{INS})$ avec données (a_0^n, u_0^n, f^n) admet une solution locale unique $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n)$ telle que :

$$\begin{aligned} (4.1) \qquad & a^n \in C([0,T^n);\, H^{s_0+1}(\mathbb{R}^N)),\ u^n \in C([0,T^n); \\ & \qquad H^{s_0}(\mathbb{R}^N)) \cap \widetilde{L}^1_{T^n}(H^{s_0+2}(\mathbb{R}^N)) \\ & \qquad \text{et } \nabla\Pi^n \in \widetilde{L}^1([0,T^n);\, H^{s_0}(\mathbb{R}^N)) \end{aligned}$$

pour $s_0 > N$, pour avoir que l'espace de Sobolev $H^{s_0}(\mathbb{R}^N)$ est inclus dans l'espace de Besov homogène $B^N_{2,1}$.

Deuxième étape : Estimation de la solution régularisée

On va montrer l'existence d'un $T > 0$ tel que $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n)$ appartiennent à l'espace

$$E_T = \widetilde{L}^\infty_T\Big(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}\Big) \times L^1_T\Big(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1}\Big) \cap \widetilde{L}^\infty_T\Big(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}\Big) \times L^1_T\Big(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}\Big).$$

et forment une suite uniformément bornée dans E_T.

Nous allons montrer tout d'abord que $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n) \in \widetilde{L}^\infty_{T^n}(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}) \times \widetilde{L}^\infty_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}) \times L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})$ et $u^n \in L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})$. Le problème se pose seulement pour $p_1 < 2$ ou $p_2 < 2$ et $N = 2$. Puisque dans le cas $2 \leqslant p_1$, $2 \leqslant p_2$ et $N \geqslant 3$, on utilise le fait que $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n)$ vérifie (4.1) et l'inégalité de Bernstein, qui entraîne

$$(4.2)\quad H^{s_1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow B^{s_2}_{2,1}(\mathbb{R}^N) \text{ dès que } \begin{cases} s_2 > 0 & \text{pour les basses fréquences} \\ s_2 < s_1 & \text{pour les hautes fréquences.} \end{cases}$$

Donc $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n) \in E_{T^n}$ pour $2 \leqslant p_1$, p_2 et $N \geqslant 3$.

Maintenant, on traite le cas $p_1 < 2$ ou $p_2 < 2$ ou $N = 2$. Pour cela, on écrit $(u^n, \nabla\Pi^n) = (u^n_L, \nabla\Pi^n_L) + (\overline{u}^n, \nabla\overline{\Pi}^n)$ avec $(u^n_L, \nabla\Pi^n_L)$ la solution du système de Stokes non-stationnaire suivant :

$$(\mathrm{L}) \quad \begin{cases} \partial_t u^n_L - \mu\Delta u^n_L + \nabla\Pi^n_L = f^n \\ \operatorname{div} u^n_L = 0 \\ u^n_{L|t=0} = u^n_0. \end{cases}$$

Comme, $u^n_0 \in B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}(\mathbb{R}^N) \cap H^{s_0}(\mathbb{R}^N)$ et $f^n \in \widetilde{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\, B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1} \cap H^{s_0})$. Alors la proposition 2.3 [10] implique que $(u^n_L, \nabla\Pi^n_L) \in \widetilde{L}^\infty_T\Big(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}(\mathbb{R}^N) \cap$

$H^{s_0}(\mathbb{R}^N)\Big) \times \widetilde{L}^1_T\Big(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}(\mathbb{R}^N) \cap H^{s_0}(\mathbb{R}^N)\Big)$ et de plus $u^n_L \in \widetilde{L}^1_T(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1} \cap H^{s_0+2})$ pour tout $T > 0$. Pour la partie non linéaire, on a :

$$\begin{aligned}(a^n, \overline{u}^n, \nabla\overline{\Pi}^n) &\in C([0, T^n); H^{s_0+1}(\mathbb{R}^N)) \\ &\times C([0, T^n);\ H^{s_0}(\mathbb{R}^N)) \times \widetilde{L}^1_{T^n}(H^{s_0}(\mathbb{R}^N))\end{aligned}$$

satisfait :

$$(\mathrm{NL}) \quad \begin{cases} \partial_t a^n + u^n \cdot \nabla a^n = 0 \\ \partial_t \overline{u}^n + u^n \cdot \nabla \overline{u}^n - \mu\Delta\overline{u}^n + \nabla\overline{\Pi}^n = H(a^n, u^n, \nabla\Pi^n) \\ \operatorname{div} \overline{u}^n = 0 \\ (a^n, \overline{u}^n)_{|t=0} = (a^n_0, 0) \end{cases}$$

avec $H(a^n, u^n, \nabla\Pi^n) = -u^n \cdot \nabla u^n_L + a^n(\mu\Delta u^n - \nabla\Pi^n)$. Dans ce cas, on n'utilise pas l'injection de l'espace de Sobolev dans l'espace de Besov construit sur l'espace de Lebesgue L^p. Mais on utilise les inégalités (2.6) et (4.2) et le résultat suivant qui est une application directe de l'inégalité (2.6) (pour plus de détails, voir [1]).

Lemme 4.2. — *Soient $p \in]1, \infty[$, u_0 un champ de vecteurs à divergence nulle avec coefficients dans $B^s_{p,r}$ et g un champ de vecteurs à coefficients dans $L^1_T(B^s_{p,1})$. Soient u et v des champs de vecteurs à divergence nulle tels que $v \in L^1_T(B^{s+1+N-\frac{N}{p}}_{2,1} \cap L^2)$ et $u \in L^\infty_T(B^{s+1+N-\frac{N}{p}}_{2,1} \cap L^2)$ une solution de système de Stokes non stationnaire :*

$$(\mathcal{L}) \qquad \begin{cases} \partial_t u + v \cdot \nabla u - \nu\Delta u + \nabla\Pi = g \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases}$$

Si $s + 1 + N - \frac{N}{p} > 0$, alors il existe C dépendant de N, p et s tel que u vérifie l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\|u\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^s_{p,1})} + \nu\|u\|_{L^1_T(B^{s+2}_{p,1})} + \|\nabla\Pi\|_{L^1_T(B^s_{p,1})} \leqslant C\Big(&\|u_0\|_{B^s_{p,1}} + \|g\|_{L^1_T(B^s_{p,1})} \\ &+ \|u\|_{L^\infty_T\left(L^2 \cap B^{s+1+N-\frac{N}{p}}_{2,1}\right)} \|v\|_{L^1_T\left(L^2 \cap B^{s+1+N-\frac{N}{p}}_{2,1}\right)}\Big).\end{aligned}$$

De même pour l'équation de transport :

$$(\mathcal{T}) \qquad \begin{cases} \partial_t f + \operatorname{div}(fv) = 0 \\ f_{|t=0} = f_0, \end{cases}$$

si $s + 1 + N - \frac{N}{p} > 0$, alors on a l'estimation suivante :

(4.3)
$$\|f\|_{\widetilde{L}^\infty_T(B^s_{p,1})} \leqslant \|f_0\|_{B^s_{p,1}} + C\|f\|_{L^\infty_T\left(L^2 \cap B^{s+1+N-\frac{N}{p}}_{2,1}\right)} \|v\|_{L^1_T\left(L^2 \cap B^{s+1+N-\frac{N}{p}}_{2,1}\right)}.$$

Appliquons le lemme 4.2 (resp. l'inégalité (4.3)) avec $u = \overline{u}^n$, $v = u^n$, $g = -u^n \cdot \nabla u^n_L + a^n(\mu\Delta u^n - \nabla\Pi^n)$, $p = p_2$ (resp. $p = p_1$) et $s = \frac{N}{p_2} - 1$ (resp. $s = \frac{N}{p_1}$), et on utilise le fait que $s_0 > N$ et l'inégalité (2.6) qui montrent que :

$$\begin{aligned}
&\|a^n(\Delta u^n - \nabla\Pi^n)\|_{L^1_T(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})} \\
&\qquad \lesssim \|a^n\|_{L^\infty_T(L^2\cap B^{N-1}_{2,1})}\Big(\|\Delta u^n\|_{L^1_T(L^2\cap B^{N-1}_{2,1})} + \|\nabla\Pi^n\|_{L^1_T(L^2\cap B^{N-1}_{2,1})}\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n) \in E_{T^n}$ pour $1 < p$.

Maintenant on va démontrer que $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n)$ est bornée dans E_{T^n}.

D'après les propositions 3.1 et 3.2, on a :

$$\begin{aligned}
&\|a^n\|_{\widetilde{L}^\infty_{T^n}(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})} \leqslant C e^{C\|u^n\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})}} \|a^n_0\|_{B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}} \\
&\text{dès que} \quad \frac{N}{p_1} \leqslant 1 + N\inf\Big(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}\Big)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&U^n(T^n) \leqslant C e^{C\|u^n\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})}} \Big\|H(a^n, u^n, \nabla\Pi^n)\Big\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})} \\
&\text{dès que} \quad p_2 < \infty
\end{aligned}$$

avec

$$U^n(t) = \|\overline{u}^n\|_{\widetilde{L}^\infty_t(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})} + \mu\|\overline{u}^n\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})} + \|\nabla\overline{\Pi}^n\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})}.$$

Comme $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > \frac{1}{N}$ et $\frac{1}{p_2} \leqslant \frac{1}{N} + \frac{1}{p_1}$, (condition permettant de majorer $T_{\Delta u^n} a^n$ lorsque $p_2 < p_1$) alors par les inégalités (2.3), de Bernstein et de

Hölder et le fait que $B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1}$ soit une algèbre, impliquent :

$$\begin{aligned}
&\|H(a^n,u^n,\Pi^n)\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})} \lesssim \|u^n\otimes u^n_L\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1})}\\
&\quad + \|a^n\|_{L^\infty_{T^n}(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})}\Big(\mu\|u^n\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})} + \|\nabla\Pi^n\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})}\Big)\\
&\quad \lesssim \|u^n\|_{L^2_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1})}\|u^n_L\|_{L^2_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1})} + \|a^n\|_{L^\infty_{T^n}(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})}\\
&\quad \times\Big(\|u^n\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})} + \|\nabla\Pi^n\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})}\Big)\\
&\quad \lesssim \|u^n\|^{\frac12}_{L^\infty_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})}\|u^n\|^{\frac12}_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})}\|u^n_L\|^{\frac12}_{L^\infty_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})}\|u^n_L\|^{\frac12}_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})}\\
&\quad + \|a^n\|_{L^\infty_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_1,1})}\Big(\|u^n\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})} + \|\nabla\Pi^n\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})}\Big).
\end{aligned}$$

Et par suite :

$$\begin{aligned}
U^n(T^n) \leqslant\ & Ce^{C\|u^n\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})}}\\
&\Big\{\|u^n\|^{\frac12}_{L^\infty_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})}\|u^n\|^{\frac12}_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})}\|u^n_L\|^{\frac12}_{L^\infty_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})}\|u^n_L\|^{\frac12}_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})}\\
&+ \|a^n\|_{L^\infty_{T^n}(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})}\Big(\|u^n\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})} + \|\nabla\Pi^n\|_{L^1_{T^n}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})}\Big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Soit ζ un réel strictement positif petit. Il existe alors $T_1>0$ tel que :

$$\mu\|u_L\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})} + \|\nabla\Pi_L\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})} \leqslant \zeta. \tag{4.4}$$

En effet, on applique l'opérateur $\mathcal{Q}$ sur (L), on obtient :

$$\|\nabla\Pi_L\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})} \leqslant \|\mathcal{Q}f\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})} \leqslant \|f\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})} \leqslant \zeta \tag{4.5}$$

pour T_1 petit car $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})$. De même, on a :

$$\begin{aligned}
\mu\|u_L\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_1}+1}_{p_2,1})} \leqslant C\Big\{\sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{q(\frac{N}{p_2}-1)}\Big(\|\Delta_q u_0\|_{L^{p_2}} + \|\Delta_q\mathcal{P}f\|_{L^1_t(L^{p_2})}\Big)&\\
\Big(\frac{1-e^{-K\mu t2^{2q}}}{K}\Big)\Big\} \overset{\text{déf}}{=} F(t)\leqslant\zeta,&
\end{aligned} \tag{4.6}$$

car $t \longmapsto F(t)$ continue et clairement $F(0)=0$. D'après la proposition 2.3 de [10], on a :

$$\|u_L\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})} \leqslant \|u_0\|_{B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}} + \|\mathcal{P}f\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_1,1})} \stackrel{\text{déf}}{=} U_0.$$

Ainsi, nous avons les inégalités suivantes :

$$\mu\|u^n_L\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p_1}+1}_{p_2,1})} + \|\nabla\Pi^n_L\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})} \leqslant \alpha\zeta \ \text{ et } \ \|u^n_L\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})} \leqslant \alpha U_0. \tag{4.7}$$

Dans la suite on peut supposer que $T^n \leqslant T_1$ sinon il suffit de diminuer T^n. Fixons $t \leqslant T^n$, alors les inégalités précédentes impliquent :

$$\begin{aligned} U^n(t) \leqslant{}& C e^{C\left(\zeta + \|\overline{u}^n\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})}\right)} \\ &\times \left\{\zeta^{\frac12} U_0^{\frac12}\Big(U^n(t)+U_0\Big) + \|a^n\|_{L^\infty_t(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})}\Big(\zeta + U^n(t)\Big)\right\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

et

$$\|a^n\|_{\widetilde{L}^\infty_t(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})} \leqslant \alpha e^{C\left(\zeta + \|\overline{u}^n\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})}\right)} \|a_0\|_{B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}}. \tag{4.9}$$

Soit $0 < T_2$ tel que :

$$e^{C\left(\zeta + \|\overline{u}^n\|_{L^1_{T_2}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})}\right)} < 2. \tag{4.10}$$

Donc si :

$$8C\|a_0\|_{B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad C\zeta^{\frac12}U_0^{\frac12}(1+2CU_0) \leqslant \frac{1}{8},$$

alors :

$$U^n(T_2) \leqslant \zeta^{\frac12}\Big(2\zeta^{\frac12} + 8CU_0^{\frac32}\Big) \quad \text{et} \quad \|a^n\|_{\widetilde{L}^\infty_{T_2}(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})} \leqslant 2\alpha\|a_0\|_{B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}}. \tag{4.11}$$

Ainsi pour ζ suffisamment petite, la condition (4.10) est satisfaite. Après par connexité on montre que $T_2 = T^n$. Le même type de raisonnement permet aussi d'avoir $T_1 = T^n$, avec des estimations uniformes.

Lemme 4.3. — *Soit $0 < \eta < \inf(1, \frac{2N}{p_2})$ telle que $\frac{1}{N} + \frac{\eta}{N} < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Alors $(\nabla\Pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $L^{\frac{2}{2-\eta}}_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1-\eta}_{p_2,1})$.*

Preuve. — Pour étudier la pression, on utilise le fait que :

$$\mathrm{div}\Big(\big(1+\mathrm{a}^{\mathrm{n}}\big)\nabla\Pi^{\mathrm{n}}\Big)=\mathrm{div}\Big(\mathcal{Q}\mathrm{f}^{\mathrm{n}}-\mathrm{u}^{\mathrm{n}}\cdot\nabla\mathrm{u}^{\mathrm{n}}\Big).$$

Par construction de f^n et l'inégalité (2.7), $\mathcal{Q}f^n$ est uniformément bornée dans $L^{\frac{2}{2-\eta}}_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1-\eta}_{p_2,1})$. L'inégalité (2.7) implique que u^n est uniformément bornée dans $L^{\frac{2}{1-\eta}}_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-\eta}_{p_2,1})$, et par suite le choix de η et l'inégalité (2.5), impliquent $u^n\cdot\nabla u^n=\mathrm{div}(u^n\otimes u^n)$ uniformément bornée dans $L^{\frac{2}{2-\eta}}_{T_1}(B^{\frac{N}{p}-1-\eta}_{p,1})$. Mais comme $\|a^n\|_{\widetilde{L}^{\infty}_{T_1}(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})}\leqslant 2\alpha\|a_0\|_{B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}}<<1$ et $\frac{1}{p_2}\leqslant\frac{1}{N}+\frac{\eta}{N}+\frac{1}{p_1}$ (car $\frac{1}{p_2}\leqslant\frac{1}{N}+\frac{1}{p_1}$), alors l'inégalité (2.3) implique que $(\nabla\Pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $L^{\frac{2}{2-\eta}}_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1-\eta}_{p_2,1})$. □

Remarque 4.4. — La condition $\frac{1}{N}+\frac{\eta}{N}<\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$ est vérifiée pour un η assez petite car $\frac{1}{N}<\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$.

D'autre part, les inégalités (4.5) et (4.6) montrent que si

$$U_0+\|\mathcal{Q}f\|_{L^1(\mathbb{R}_+;\,B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})}\leqslant c'\mu,$$

alors $T_1=+\infty$.

Troisième étape : convergence

Par construction de (u_0^n,f^n), par définition de $(u_L^n,\nabla\Pi_L^n)$ et unicité des solutions du système (L), le couple $(u_L^n,\nabla\Pi_L^n)$ converge vers la solution $(u_L,\nabla\Pi_L)$, du système (L). Par contre pour montrer que la limite de $(a^n,\overline{u}^n,\nabla\overline{\Pi}^n)$ est une solution du système (NL), il va falloir recourir à des arguments de compacité. Mais comme $(a^n,\overline{u}^n,\nabla\overline{\Pi}^n)$ est uniformément bornée dans :

$$\widetilde{L}^{\infty}_{T_1}(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})\times\widetilde{L}^{\infty}_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})\cap L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})\times L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}),$$

de plus $\nabla\Pi^n$ est uniformément bornée dans $L^{\frac{2}{2-\eta}}_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1-\eta}_{p_2,1})$. Alors pour pouvoir utiliser le théorème d'Ascoli, il suffit d'estimer la dérivée par rapport au temps de a^n et $\overline{u}^n$ (voir par exemple [9]).

Lemme 4.5.

(i) *La suite* $(\partial_t a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée dans* $L^2_{T_1}(B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1})$ *lorsque* $\frac{1}{p_1}\leqslant\frac{1}{N}+\frac{1}{p_2}$.

(ii) *La suite* $(\partial_t \overline{u}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée dans* $L^{\frac{2}{2-\eta}}_{T_1}\big(B^{\frac{N}{p_2}-1-\eta}_{p_2,1}\big)$ *pour* $0<\eta<\inf(1,\frac{2N}{p_2})$ *tel que* $\frac{1}{N}+\frac{\eta}{N}<\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$.

Preuve. — Rappelons que :

$$\partial_t a^n = -u^n\cdot\nabla a^n.$$

Comme $\frac{1}{p_1}\leqslant\frac{1}{N}+\frac{1}{p_2}$, alors grâce à l'inégalité (2.3) et par interpolation, on trouve :

$$\begin{aligned}\|\partial_t a^n\|_{L^2_{T_1}\big(B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1}\big)} &\lesssim \|u^n\|_{L^2_{T_1}\big(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1}\big)}\|\nabla a^n\|_{L^\infty_{T_1}\big(B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1}\big)}\\ &\lesssim \|u^n\|^{\frac12}_{L^\infty_{T_1}\big(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}\big)}\|u^n\|^{\frac12}_{L^1_{T_1}\big(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1}\big)}\|a^n\|_{L^\infty_{T_1}\big(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}\big)}.\end{aligned}$$

Pour $\overline{u}^n$, rappelons que :

$$\partial_t\overline{u}^n = -\mathcal{P}\big(u^n\cdot\nabla u^n\big)+\mu\Delta\overline{u}^n+\mathcal{P}\big(a^n(\mu\Delta u^n-\nabla\Pi^n)\big).$$

Comme l'opérateur de Leray est continu sur les espaces de Besov inhomogènes $B^s_{p,r}$ pour $p>1$, alors les calculs du lemme 4.3 restent valables. Ainsi, il reste à montrer que $\Delta\overline{u}^n$ et $a^n\Delta u^n$ sont uniformément bornées dans $L^{\frac{2}{2-\eta}}_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1-\eta}_{p_2,1})$. Mais $\Delta\overline{u}^n$ est uniformément bornée dans $L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})\cap L^\infty_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-3}_{p_2,1})$. Donc l'inégalité (2.7) implique qu'il est uniformément borné dans $L^{\frac{2}{2-\eta}}_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1-\eta}_{p_2,1})$. Pour $a^n\Delta u^n$, on utilise de plus l'inégalité (2.3) et le fait que $\frac{N}{p_1}+\frac{N}{p_2}-1-\eta>0$ et $\frac{1}{p_2}\leqslant\frac{1}{N}+\frac{\eta}{N}+\frac{1}{p_1}$. □

À partir des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hölder et du lemme précédent, on obtient :

Corollaire 4.6.

(i) *La suite* $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée dans* $C^{\frac12}\big([0,T_1];\,B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1}\big)$ *pour* $\frac{1}{p_1}\leqslant\frac{1}{N}+\frac{1}{p_2}$.

(ii) *La suite* $(\overline{u}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée dans* $C^{\frac{\eta}{2}}\big([0,T_1];B^{\frac{N}{p_2}-1-\eta}_{p_2,1}\big)$ *avec* $\eta\in]0,\inf(1,\frac{2N}{p})[$ *et* $\frac{1}{N}+\frac{\eta}{N}<\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$.

Rappelons que l'injection de $B^{s+\varepsilon}_{p,q,\mathrm{loc}}$ dans l'espace de Besov inhomogène locale avec même indice de régularité est continue et l'injection de Besov inhomogène locale avec indice de régularité $s+\varepsilon$ dans l'espace de Besov inhomogène $B^s_{p,q}$ est compacte pour tout $\varepsilon>0$ (voir par exemple [24]). Ainsi il existe une sous-suite notée encore $(a^n,\overline{u}^n,\nabla\overline{\Pi}^n)$ qui converge vers

$(a, \overline{u}, \nabla\overline{\Pi})$. Et par suite le corollaire 2.5 et l'inégalité (4.11) impliquent $(a, u, \nabla\Pi)$ est une solution du système $(\widetilde{INS})$ appartenant à :

$$\widetilde{L}^\infty_{T_1}(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}) \times \Big(\widetilde{L}^\infty_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}) \cap L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})\Big) \times L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}).$$

Concernant la continuité de u voir [9]. Pour montrer que a est continue et que sa norme L^∞ est conservée, on utilise le fait que $a = a_0 \circ \Psi^{-1}$ avec Ψ, flot de u, ce qui démontre la proposition 1.3.

5. Unicité

Dans cette section, nous allons démontrer l'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes inhomogène dans l'espace de Besov

$$L^\infty([0,T], B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}) \times \big(L^\infty([0,T], B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}) \cap L^1([0,T], B^{1+\frac{N}{p_2}}_{p_2,1}\big).$$

Soit $(a^i, u^i, \nabla\Pi^i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 2$ deux solutions. Désignons par

$$(\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi) \overset{\text{déf}}{=} (a^2 - a^1, u^2 - u^1, \nabla\Pi^2 - \nabla\Pi^1)$$

leur différence, qui vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \delta a + u^2 \cdot \nabla \delta a = -\delta u \cdot \nabla a^1 \\ \partial_t \delta u + u^2 \cdot \nabla \delta u - \mu\Delta\delta u + \nabla\delta\Pi = F(a^i, u^i, \nabla\Pi^i) \\ \operatorname{div} \delta u = 0, \end{cases}$$

où

$$F(a^i, u^i, \nabla\Pi^i) = -\delta u \cdot \nabla u^1 + a^1(\mu\Delta\delta u - \nabla\delta\Pi) + \delta a(\mu\Delta u^2 - \nabla\Pi^2).$$

Donc δa (resp. $(\delta u, \nabla\delta\Pi)$) vérifie l'équation de transport avec un terme de force h (resp. le système de Stokes non stationnaire avec force g). Rappelons que parmi les conditions d'existence on a : $\sup(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}) \leqslant \frac{1}{N} + \inf(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2})$. D'autre part pour montrer l'unicité des solutions pour l'équation de transport, nous avons besoin d'estimer la différence δa dans un espace moins régulier d'un cran par rapport à l'espace de régularité de a_i. Puisque $a_i \in L^\infty([0,T], B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})$, on va estimer $\delta a \in L^\infty([0,T], B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1})$. De plus, parmi le terme de g, on a $\delta a \Delta u^2$ et pour définir ce terme il faut avoir $\frac{N}{p_1} + \frac{N}{p_2} - 2 \geqslant 0$, c'est-à-dire, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \geqslant \frac{2}{N}$, or $\sup(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}) \leqslant \frac{1}{N} + \inf(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2})$, ainsi $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant 2N$.

Proposition 5.1. — *Soient $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant 2N$ tels que $\sup(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}) \leqslant \frac{1}{N} + \inf(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2})$ et $\frac{2}{N} \leqslant \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Soient $(a^i, u^i, \nabla\Pi^i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 2$ deux solutions de $(\widetilde{INS})$ avec les mêmes données initiales a_0 appartenant* *à* $B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}$, $u_0 \in B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}$ *avec* $\operatorname{div} u_0 = 0$ *et un terme de force extérieure* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,T^*);\, B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})$ *telle que* $\mathcal{Q}f \in L^2(\mathbb{R}_+;\, B^{-2+\frac{N}{p_2}}_{p_2,1})$. *Supposons que pour* $i=1,2$ *on ait :*

$$\begin{aligned} a^i &\in C\Big([0,T^\star);\, B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}\Big) \cap \widetilde{L}^\infty\Big([0,T^\star);\, B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}\Big),\\ u^i &\in C\Big([0,T^\star);\, B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}\Big) \cap L^1_{\mathrm{Loc}}\Big([0,T^\star);\, B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1}\Big),\\ \nabla\Pi^i &\in L^1_{\mathrm{Loc}}\Big([0,T^\star);\, B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}\Big). \end{aligned}$$

Alors il existe une constante c *strictement positive dépendant de* N *et* p *telle que si on a*

$$\|a^1\|_{L^\infty_{T^\star}\left(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}\right)} \leqslant c,$$

alors $(a^2,u^2,\nabla\Pi^2) = (a^1,u^1,\nabla\Pi^1)$.

Preuve. — Pour montrer l'unicité des solutions de l'équation de transport, nous allons estimer la différence dans $L^\infty([0,T], B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1})$. D'autre part l'équation vérifiée par δu contient parmi les termes de forces extérieures $\delta a \Delta u^2$ qui se trouvent dans l'espace

$$L^\infty\Big([0,T], B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1}\Big) \times L^1\Big([0,T], B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}\Big)$$

ce qui donne un élément de l'espace $L^1([0,T], B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})$ si $p_2 < 2N$, $\frac{2}{N} < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ et $N>2$, sinon, c'est-à-dire, $p_2 = 2N$ ou $\frac{2}{N} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ ou $N=2$, il appartient à l'espace $L^1([0,T], B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,\infty})$. Ainsi nous sommes obligés de traiter deux cas.

Premier cas : $1 \leqslant p_2 < 2N$, $\frac{2}{N} < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ et $N \geqslant 3$.

Tout d'abord, on va montrer que $(\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi) \in F_T$, où :

$$F_T = C\big([0,T];\, B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1}\big) \times \big(L^1_T\big(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1}\big) \cap C\big([0,T];\, B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1}\big)\big) \times L^1_T\big(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1}\big),$$

muni de la norme suivante :

$$\begin{aligned} \|(a,u,\nabla\Pi)\|_{F_T} \overset{\text{déf}}{=} \|a\|_{L^\infty_T(B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1})} + \|u\|_{L^\infty_T(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})} + \mu\|u\|_{L^1_T(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1})}\\ + \|\nabla\Pi\|_{L^1_T(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})}. \end{aligned}$$

Tout d'abord, on va démontrer que $(\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi) \in F_T$. Pour δa il suffit de montrer que $a^i - a_0$ appartenant à $C([0,T];\, B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1})$, car $\delta a = (a^2 -$

$a_0) - (a^1 - a_0)$. Or, $\partial_t a^i = -u^i \cdot \nabla a^i$ et $\frac{1}{p_1} \leqslant \frac{1}{N} + \frac{1}{p_2}$ ainsi la proposition 2.3, implique que $\partial_t a^i \in L^2_T(B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1})$. Pour δu il suffit de démontrer que $(\overline{u}^i, \nabla\overline{\Pi}^i) \in L^1_T(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1}) \cap C([0,T];\, B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1}) \times L^1_T(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})$, avec $\overline{u}^i = u^i - u^i_L$ et $\nabla\overline{\Pi}^i = \nabla\Pi^i - \nabla\Pi^i_L$ car $\delta u = \overline{u}^2 - \overline{u}^1$ et $\nabla\delta\Pi = \nabla\overline{\Pi}^2 - \nabla\overline{\Pi}^1$. Avec $(u^i_L, \nabla\Pi^i_L)$ vérifie :

$$\begin{cases} \partial_t u^i_L - \mu\Delta u^i_L + \nabla\Pi^i_L = f \\ \operatorname{div} u^i_L = 0 \\ u^i_{L|t=0} = u_0, \end{cases}$$

et

$$(\mathrm{NS}_{\mathrm{mod}}) \begin{cases} \partial_t \overline{u}^i + u^i\cdot\nabla\overline{u}^i - \mu\Delta\overline{u}^i + \nabla\overline{\Pi}^i = -u^i\cdot\nabla u^i_L + a^i\big(\mu\Delta u^i - \nabla\Pi^i\big) \\ \operatorname{div}\overline{u}^i = 0 \\ \overline{u}^i_{|t=0} = 0. \end{cases}$$

La proposition 2.1 dans [6] assure que $(u^i_L, \nabla\Pi^i_L)$ appartient à

$$C\Big([0,T];\, B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}\Big) \cap L^1_T\Big(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1}\Big) \times L^1\Big(0,T;\, B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}\Big).$$

On applique à (NS_{mod}) l'opérateur $\mathcal{P}$, on obtient :

$$\partial_t\overline{u}^i - \mu\Delta\overline{u}^i = \mathcal{P}\Big(-u^i\cdot\nabla u^i + a^i\big(\mu\Delta u^i - \nabla\Pi^i\big)\Big). \tag{5.1}$$

Comme $p_2 < 2N$, alors l'inégalité (2.5) implique que $u^i\otimes u^i \in L^2_T(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})$, et par suite $u^i\cdot\nabla u^i \in L^2_T(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})$, car $\operatorname{div}\overline{u}^i = 0$. Par interpolation, on a $u^i \in L^2_T(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1})$, si $p_1 \leqslant p_2$ alors l'inégalité (2.3) implique que $a^i\Delta u^i \in L^2_T(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})$, sinon, c'est-à-dire $p_2 < p_1$, on a aussi $a^i\Delta u^i \in L^2_T(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})$, car $\frac{1}{p_2} \leqslant \frac{2}{N} + \frac{1}{p_1}$ et on utilise le fait que $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} + (\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1})$. Donc si $\nabla\Pi^i \in L^2_T(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})$, de nouveau l'inégalité (2.3) montre que $a^i\nabla\Pi^i \in L^2_T(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})$. Ainsi $\overline{u}^i \in C([0,T];\, B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1}) \cap L^1_T(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1})$ pour $T < \infty$. Il reste à montrer que $\nabla\Pi^i \in L^2_T(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})$. En effet, on applique l'opérateur de divergence à $(\widetilde{INS})$, on trouve :

$$\operatorname{div}\big((1+\mathrm{a}^{\mathrm{i}})\nabla\Pi^{\mathrm{i}}\big) - \operatorname{div}\mathcal{Q}\mathrm{f} = \operatorname{div}\big(-\mathrm{u}^{\mathrm{i}}\cdot\nabla\mathrm{u}^{\mathrm{i}} + \mu\mathrm{a}^{\mathrm{i}}\Delta\mathrm{u}^{\mathrm{i}}\big). \tag{5.2}$$

Comme $\frac{1}{p_2} \leqslant \frac{2}{N} + \frac{1}{p_1}$ et $p_2 < 2N$, alors la quantité de droite de l'égalité (5.2) appartient à $L^2_T(B^{\frac{N}{p_2}-3}_{p_2,1})$. Or $\mathcal{Q}f \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,T^\star);\, B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})$ et comme

$\|a^i\|_{L^\infty_T(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})}$ est petit, on utilise l'inégalité (2.3) et l'égalité (5.2), on obtient $\nabla\Pi^i \in L^2_T(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})$. Donc $(\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi) \in F_T$.

Maintenant comme $\frac{1}{p_1} \leqslant \frac{1}{N} + \inf(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2})$ et $1 < p_2 < 2N$, alors les propositions 3.1 et 3.2, impliquent pour tout $t \leqslant T$:

$$\|\delta a\|_{L^\infty_t(B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1})} \leqslant C\exp\Big(C\|\nabla u^2\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1})}\Big)\|\delta u\cdot\nabla a^1\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1})}$$

et

$$\begin{aligned}&\|\delta u\|_{L^\infty_t(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})} + \mu\|\delta u\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}}_{p,1})} + \|\nabla\delta\Pi\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})}\\ &\qquad\lesssim e^{C\|u^2\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})}}\|F(a^i,u^i,\nabla\Pi^i)\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})}.\end{aligned}$$

Le fait que $\frac{1}{p_1} \leqslant \frac{1}{N} + \frac{1}{p_2}$ (on a besoin de cette condition lorsque $p_1 \leqslant p_2$), alors l'inégalité (2.3), implique que :

$$\|\delta u\cdot\nabla a^1\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1})} \lesssim \|\delta u\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1})}\|a^1\|_{L^\infty_t(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})}.$$

Comme $\mathrm{div}\delta \mathrm{u} = 0$ et $p_2 < 2N$, alors d'après les inégalités de Bernstein, (2.5) et par interpolation, on trouve :

$$\begin{aligned}&\|\delta u\cdot\nabla u^1\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})} \lesssim \|\delta u\otimes u^1\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})} \lesssim \|\delta u\|_{L^2_t(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})}\|u^1\|_{L^2_t(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1})}\\ &\quad\lesssim \|u^1\|^{\frac12}_{L^\infty_t(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})}\|u^1\|^{\frac12}_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1})}\Big(\|\delta u\|_{L^\infty_t(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})} + \|\delta u\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,1})}\Big).\end{aligned}$$

Le fait que $\frac{2}{N} < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $N \geqslant 3$ et $\frac{1}{p_2} \leqslant \frac{1}{N} + \frac{1}{p_1}$ (on utilise cette condition seulement lorsque $p_2 \leqslant p_1$), alors l'inégalité (2.3) implique que :

$$\begin{aligned}&\|a^1(\mu\Delta\delta u - \nabla\delta\Pi) + \delta a(\mu\Delta u^2 - \nabla\Pi^2)\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})}\\ &\quad\lesssim \|a^1\|_{L^\infty_t(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1})}\Big(\|\Delta\delta u\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})} + \|\nabla\delta\Pi\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,1})}\Big)\\ &\quad+ \|\delta a\|_{L^\infty_t(B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1})}\Big(\|\Delta u^2\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})} + \|\nabla\Pi^2\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1})}\Big).\end{aligned}$$

Soit T_1 tel que :

$$\exp\Big(C\|u^2\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p}+1}_{p,1})}\Big) \leqslant 2$$

et

$$\mu\|u^i\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p}+1}_{p,1})} + \mu\|u^1\|^{\frac12}_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p}+1}_{p,1})} + \|\nabla\Pi^2\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p}-1}_{p,1})} \leqslant c.$$

En utilisant le fait que $\|a^1\|_{L^\infty_T(B^{\frac{N}{p}+1}_{p,1})} \leqslant c$, on obtient :

$$\|(\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi)\|_{F_{T_1}} \leqslant cC\|(\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi)\|_{F_{T_1}}.$$

Et par suite $(\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi) = 0$ sur $[0, T_1]$ pour T_1 petit. Un argument standard de connexité permet d'obtenir $(\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi) = 0$ sur $[0, T]$. Ainsi la démonstration est achevée pour $1 < p_2 < 2N$, $N \geqslant 3$ et $\frac{2}{N} < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Les calculs qu'on a effectués sont valables pour $1 < p_2$ (car ils reposent sur la proposition 3.2). Le cas $p_2 = 1$ s'en déduit par injection.

Deuxième cas : $\frac{2}{N} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ ou $p_2 = 2N$ ou $N = 2$.

Dans ce cas, il suffit d'étudier le cas $\frac{2}{N} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, car on peut déduire les autres cas à partir de celui-ci. En effet :

si $p_2 = 2N$, alors $p_1 = \frac{2N}{3}$, car $\frac{1}{p_1} \leqslant \frac{1}{N} + \frac{1}{p_2}$ et $\frac{2}{N} \leqslant \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Donc c'est un cas particulier de $\frac{2}{N} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Pour $N = 2$, on commence par $p_2 = 4$ et $p_1 = \frac{4}{3}$ après par injection, on aura l'unicité pour $1 \leqslant p_1 \leqslant \frac{4}{3}$ et $1 \leqslant p_2 \leqslant 4$, de même pour $1 \leqslant p_1 \leqslant 4$ et $1 \leqslant p_2 \leqslant \frac{4}{3}$. Donc dans la suite on suppose que $\frac{2}{N} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. De plus, dans ce cas il y a deux cas, soit $1 < p_2 < 2$ soit $p_2 \geqslant 2$ à cause de l'inégalité (3.3), le premier le cas se déduit par injection, alors on suppose que $p_2 \geqslant 2$. Tout d'abord, on démontre que $(\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi) \in G_T$, où :

$$G_T = C\Big([0,T];\, B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1}\Big) \times C\Big([0,T];\, B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,\infty}\Big) \cap \widetilde{L}^1_T\Big(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,\infty}\Big) \times \widetilde{L}^1_T\Big(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,\infty}\Big),$$

muni de la norme suivante :

$$\begin{aligned}\|(a, u, \nabla\Pi)\|_{G_T} \overset{\text{déf}}{=} \|a\|_{L^\infty_T\big(B^{\frac{N}{p_1}-1}_{p_1,1}\big)} + \|u\|_{L^\infty_T\big(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,\infty}\big)} + \mu\|u\|_{\widetilde{L}^1_T\big(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,\infty}\big)} \\ + \|\nabla\Pi\|_{\widetilde{L}^1_T\big(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,\infty}\big)}.\end{aligned}$$

Pour δa, les calculs du premier cas sont valables car $\frac{1}{p_1} \leqslant \frac{1}{N} + \frac{1}{p_2}$. Pour δu, on utilise à nouveau l'équation (5.1) et les inégalités (2.3), (2.4) et le fait que $p_2 \leqslant 2N$, on trouve que le terme de forces extérieures de cette équation appartient à $L^2_T\big(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,\infty}\big)$. Donc $(u^i - u^i_L) \in L^\infty_T\big(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,\infty}\big) \cap \widetilde{L}^1_T\big(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,\infty}\big)$ pour $T < \infty$. D'autre part, Π^i vérifie le problème elliptique (5.2) et on obtient par les mêmes calculs que précédemment que $\nabla\Pi^i \in \widetilde{L}^1_T\big(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,\infty}\big)$. Donc $(\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi) \in G_T$.

Comme $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leqslant 1$, alors les propositions 3.1 et 3.2, l'inégalité (2.3) et le fait que $\frac{1}{p_1} \leqslant \frac{1}{N} + \frac{1}{p_2}$, on obtient les majorations suivantes pour tout

$t \leqslant T$
(5.3)
$$\|\delta a\|_{L_t^\infty\left(B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}-1}\right)} \leqslant C\exp\Big(C\|\nabla u^2\|_{L_t^1\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}}\right)}\Big)\|\delta u\|_{L_t^1\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}}\right)}\|\nabla a^1\|_{L_t^\infty\left(B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}-1}\right)}$$

et pour $p_2 \geqslant 2$

$$\begin{aligned}\|\delta u\|_{L_t^\infty\left(B_{p_2,\infty}^{\frac{N}{p_2}-2}\right)} &+ \mu\|\delta u\|_{\widetilde{L}_t^1\left(B_{p_2,\infty}^{\frac{N}{p_2}}\right)} + \|\nabla\delta\Pi\|_{\widetilde{L}_t^1\left(B_{p_2,\infty}^{\frac{N}{p_2}}\right)}\\ &\lesssim e^{C\|u^2\|_{L_t^1\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}+1}\right)}}\|F(a^i,u^i,\nabla\Pi^i)\|_{\widetilde{L}_t^1\left(B_{p_2,\infty}^{\frac{N}{p_2}-2}\right)}.\end{aligned}$$

Comme $\operatorname{div}\delta u = 0$, les inégalités de Bernstein, (2.5) (pour $p_2 < 2N$) et (2.4) (pour $p_2 = 2N$), impliquent :

$$\begin{aligned}\|\delta u\cdot\nabla u^1\|_{\widetilde{L}_t^1\left(B_{p_2,\infty}^{\frac{N}{p_2}-2}\right)} \lesssim \|\delta u\otimes u^1\|_{L_t^1\left(B_{p_2,\infty}^{\frac{N}{p_2}-1}\right)} &\lesssim \|u^1\|^{\frac12}_{L_t^\infty\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}-1}\right)}\|u^1\|^{\frac12}_{L_t^1\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}+1}\right)}\\ &\times\Big(\|\delta u\|_{L_t^\infty\left(B_{p_2,\infty}^{\frac{N}{p_2}-2}\right)} + \|\delta u\|_{\widetilde{L}_t^1\left(B_{p_2,\infty}^{\frac{N}{p_2}}\right)}\Big).\end{aligned}$$

Puisque $\sup\left(\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_2}\right) \leqslant \frac{1}{N} + \inf\left(\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_2}\right)$ et $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \leqslant 1$, alors l'inégalité (2.4) implique que :

$$\begin{aligned}&\Big\|a^1(\mu\Delta\delta u - \nabla\delta\Pi) + \delta a(\mu\Delta u^2 - \nabla\Pi^2)\Big\|_{\widetilde{L}_t^1\left(B_{p_2,\infty}^{\frac{N}{p_2}-2}\right)} \lesssim \|a^1\|_{L_t^\infty\left(B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}}\right)}\\ &\Big(\|\Delta\delta u\|_{\widetilde{L}_t^1\left(B_{p_2,\infty}^{\frac{N}{p_2}-2}\right)} + \|\nabla\delta\overline{u}\|_{\widetilde{L}_t^1\left(B_{p_2,\infty}^{\frac{N}{p_2}-2}\right)}\Big)\\ &+\int_0^t \|\delta a\|_{B_{p_1,1}^{\frac{N}{p_1}-1}}\Big(\|\Delta u^2\|_{B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}-1}} + \|\nabla\Pi^2\|_{B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}-1}}\Big)ds.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité logarithmique (voir [11] proposition 1.8), on peut écrire :

$$\|\delta u\|_{L_t^1\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}}\right)} \lesssim \|\delta u\|_{\widetilde{L}_t^1\left(B_{p_2,\infty}^{\frac{N}{p_2}}\right)} \ln\left(e+\frac{\|\delta u\|_{L_t^1\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}-1}\right)} + \|\delta u\|_{L_t^1\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}+1}\right)}}{\|\delta u\|_{\widetilde{L}_t^1\left(B_{p_2,\infty}^{\frac{N}{p_2}}\right)}}\right).$$

Vu le fait que :

$$\|\delta u\|_{L_t^1\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}-1}\right)} + \|\delta u\|_{L_t^1\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}+1}\right)} \leqslant V(t)$$

où

$$V(t)=t\Big(\|u^1\|_{L_t^\infty\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}-1}\right)}+\|u^2\|_{L_t^\infty\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}-1}\right)}\Big)+\|u^1\|_{L_t^1\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}+1}\right)}+\|u^2\|_{L_t^1\left(B_{p_2,1}^{\frac{N}{p_2}+1}\right)}.$$

On fait les notations

$$W(t)=\|\delta u\|_{L^\infty_t\left(B^{\frac{N}{p_2}-2}_{p_2,\infty}\right)}+\|\delta u\|_{\widetilde{L}^1_t\left(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,\infty}\right)}+\|\nabla\delta\Pi\|_{\widetilde{L}^1_t\left(B^{\frac{N}{p_2}}_{p_2,\infty}\right)}$$

et

$$Z(t)=\left(\|u^1\|_{L^1_t\left(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1}\right)}+\|u^2\|_{L^1_t\left(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1}\right)}+\|\nabla\Pi^2\|_{L^1_t\left(B^{\frac{N}{p_2}-1}_{p_2,1}\right)}\right).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}W(t)\leqslant Ce^{C\|u^2\|_{L^1_t\left(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1}\right)}}\Big\{&\|a^1\|_{L^\infty_t\left(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}\right)}W(t)+\|u^1\|^{\frac12}_{L^1_t\left(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1}\right)}W(t)\\&+\int_0^t Z(s)W(s)\ln\big(e+\frac{V(s)}{W(s)}\big)ds\Big\},\end{aligned}$$

car $x\longmapsto x\ln(e+\frac{y}{x})$ est croissante.

Si

$$Ce^{C\|u^2\|_{L^1_t\left(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1}\right)}}\left(\|a^1\|_{L^\infty\left(B^{\frac{N}{p_1}}_{p_1,1}\right)}+\|u^1\|^{\frac12}_{L^1_t\left(B^{\frac{N}{p_2}+1}_{p_2,1}\right)}\right)\leqslant\frac12,$$

on trouve par le lemme d'Osgood (lemme 3.4) que $W(t)=0$ sur un petit intervalle de temps, de même pour δa d'après l'inégalité (5.3). Enfin, on suit la même démarche que le premier cas, on trouve $(\delta a,\delta u,\nabla\delta\Pi)=0$ sur $[0,T]$ pour $1<p_2$. Le cas $p_2=1$ se déduit par injection. D'où la proposition. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Abidi, « Équation de Navier-Stokes avec densité et viscosité variables dans l'espace critique », Ã paraître au Rev. Mat. Iberoamericana.

[2] S. Antontsev, A. Kazhikhov & V. Monakhov, « Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids », 1990, Translated from the Russian. Studies in mathematics and its applications, 22. North-Holland publishing co. Amsterdam.

[3] J.-M. Bony, « Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **14** (1981), p. 209-246.

[4] M. Cannone, Y. Meyer & F. Planchon, « Solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes », in *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles*, École Polytechnique, Palaiseau, 1994.

[5] J.-Y. Chemin, « Fluides parfaits incompressibles », in *Astérisque*, vol. 230, Société Mathématique de France, 1995.

[6] ———, « Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel », *Journal d'analyse mathématique* **77** (1999), p. 25-50.

[7] J.-Y. Chemin & N. Lerner, « Flot de champs de vecteurs non-lipschitziens et équations de Navier-Stokes », *J. Differential equations* **121** (1995), p. 247-286.

[8] R. Danchin, « The inviscid limit for density-dependent incompressible fluids », à paraître aux Annales de la Faculté de Sciences de Toulouse.

[9] ———, « Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations », *Invent. Math.* **141** (2000), p. 579-614.

[10] ———, « Local theory in critical spaces for compressible viscous and heat-conductive gases », *Commun. Partial differential equations* **26** (2001), n° 7-8, p. 1183-1233, Commun. Partial differential equations 27 (2002), 11–12, 2531–2532.

[11] ———, « Density-dependent incompressible viscous fluids in critical spaces », *Proceedings of the royal society of Edinburgh* **133A** (2003), p. 1311-1334.

[12] ———, « Local and global well-posedness results for flows of inhomogeneous viscous fluids », *Advances in differential equations* **9** (2004), p. 353-386.

[13] B. Desjardins, « Global existence results for the incompressible density-dependent Navier-Stokes equations in the whole space », *Differential and integral equations* **10** (1997), p. 587-598.

[14] ———, « Regularity results for two-dimensional flows of multiphase viscous fluids », *Arch. Rational mech. Anal.* **137** (1997), p. 135-158.

[15] E. Fernandez-Cara & F. Guillén, « The existence of nonhomogenous,viscous, and incompressible flow in unbounded domains », *Comm. P.D.E.* **17** (1992), p. 1253-1265.

[16] T. M. Fleet, *Differential analysis*, Cambridge University Press, 1980.

[17] H. Fujita & T. Kato, « On the Navier-Stokes initial value problem I », *Archive for rational mechanics and analysis* **16** (1964), p. 269-315.

[18] T. Kato, « Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions », *Math. Z.* **187** (1984), p. 471-480.

[19] V. Kazhikov, « Resolution of boundary value problems for nonhomogeneous viscous fluids », *Dokl. Akad. Nauh* **216** (1974), p. 1008-1010.

[20] O. Ladyzhenskaya & V. Solonnikov, « The unique solvability of an initial-boundary value problem for viscous incompressible inhomogeneous fluids », *J. Soviet Math.* **9** (1978), p. 697-749.

[21] P.-L. Lions, « Mathematical topics in fluid dynamics », in *Incompressible models*, vol. 1, Oxford University Press, 1996.

[22] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, n° 3, Hermann, 1991.

[23] J. Peetre, « New thoughts on Besov spaces », in *Duke University Mathematical, Series 1*, Durham N.C., 1976.

[24] T. Runst & W. Sickel, « Sobolev spaces of fractional order, nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations », in *Nonlinear analysis and applications* (D. Gruyter, éd.), Walter de Wruyter and Co, Berlin, 1996.

[25] J. Simon, « Nonhomogeneous viscous incompressible fluids, existence of velocity, density, and pressure », *Siam J. Math. Anal.* **21** (1990), p. 1093-1117.

Manuscrit reçu le 31 mars 2006,
accepté le 14 septembre 2006.

Hammadi ABIDI
Université Paris 6
Laboratoire Jacques-Louis Lions
175, rue du Chevaleret
75013 Paris (France)
hammadi.abidi@univ-evry.fr

Marius PAICU
Université Paris-Sud
Laboratoire de Mathématiques
Bât. 425
CNRS – UMR 8628
91405 Orsay (France)
marius.paicu@math.u-psud.fr