



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Olivier SCHNEIDER

Sur la dimension de l'ensemble des points base du fibré déterminant sur $SU_C(r)$

Tome 57, n° 2 (2007), p. 481-490.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_2_481_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

SUR LA DIMENSION DE L'ENSEMBLE DES POINTS BASE DU FIBRÉ DÉTERMINANT SUR $SU_C(r)$

par Olivier SCHNEIDER

RÉSUMÉ. — Soit $SU_C(r)$ l'espace des modules des fibrés vectoriels semi-stables de déterminant trivial sur une courbe lisse C de genre $g \leq 2$ sur \mathbb{C} . On étudie dans cet article, un exemple de fibré introduit par Raynaud dans [4], ne possédant pas de diviseur thêta. On construit ensuite des extensions stables de ce fibré ce qui conduit à une majoration de la codimension du lieu de base du fibré déterminant sur $SU_C(r)$.

ABSTRACT. — Let $SU_C(r)$ be the moduli space of semi stable bundles with trivial determinant on a smooth curve C of genus $g \leq 2$ on \mathbb{C} . In this article, we are studying a vector bundle introduced by Raynaud in [4], with no theta divisor. Then we build some stable extension of this bundle which gives us an upper bound of the codimension of the base locus of the determinant bundle on $SU_C(r)$.

1. Introduction

Soit C une courbe lisse de genre $g \geq 2$ sur \mathbb{C} . Soit \mathcal{J} la Jacobienne de C . Soit $SU_C(r)$ l'espace des modules des fibrés vectoriels semi-stables sur C , de rang r et de déterminant trivial. On a $\text{Pic}(SU_C(r)) = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{L}$ où \mathcal{L} est le "fibré déterminant". On s'intéresse dans cet article aux points bases du système linéaire $|\mathcal{L}|$. On rappelle qu'un fibré E de $SU_C(r)$ est un point base du fibré déterminant si pour tout fibré en droites L de degré $g - 1$, $H^0(C, E \otimes L) \neq 0$ (voir [1]). Soit $\mathcal{U}_C(r, \mu)$ l'espace des modules des fibrés vectoriels stables sur C , de rang r et de pente μ . Pour tout $\mu \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{U}_C(r, \mu)$ est, à un recouvrement étale fini près, le produit de $SU_C(r)$ par \mathcal{J} . De ce

Mots-clés: fibrés stables, jacobienne d'une courbe, fibré déterminant, polarisation principale.

Classification math.: 14H60, 14D20.

fait, on détermine ici des points bases du fibré déterminant en construisant des fibrés E de $\mathcal{U}_C(r, g-1)$ tels que pour tout fibré en droites L de degré 0,

$$(R) \quad h^0(C, E \otimes L) \geq 1.$$

Soit N un fibré ample sur \mathcal{J} . Dans [4], M. Raynaud construit à partir de N , un fibré F_N sur \mathcal{J} dont la restriction à C , notée E_N , est un fibré semi-stable. On étudiera dans un premier temps quelques propriétés de F_N pour en déduire notamment la stabilité de E_N .

On s'intéressera ensuite au cas $N = \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(n\Theta)$, $n \geq 2$, avec Θ un diviseur de la polarisation principale sur \mathcal{J} . On notera dans ce cas F_n et E_n les fibrés associés respectivement sur \mathcal{J} et C . Le choix de N n'étant pas canonique, les propriétés démontrées par la suite sur ce fibré seront les propriétés vérifiées par tout autre fibré $E_n \otimes L$, où L est un fibré en droites de degré 0 sur C . On dira que ces fibrés sont de "type E_n ". On démontre ici dans la deuxième partie le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1. — *Soit $n \geq 2$ et $k \geq 1$. La sous-variété de $\mathcal{U}_C(kn^g, g-1)$ des fibrés stables contenant un fibré de type E_n est de codimension $kgn^{2g-1} + 1 - g$.*

Dans [4], Raynaud démontre que E_n est un fibré semi-stable de rang n^g , de pente g/n , tel que pour tout fibré L de degré 0,

$$h^0(C, E_n \otimes L) \geq 1.$$

De ce fait, pour tout $r \geq n^g$, tous les fibrés de $\mathcal{U}_C(r, g-1)$ contenant des fibrés de type E_n ne vérifient pas (R) dès que $n \geq 2$. Le résultat de la Proposition 1.1 nous donne alors pour $r = kn^g$, avec k un entier supérieur ou égal à 1, une majoration de la codimension du lieu de base du système linéaire $|\mathcal{L}|$ sur $\mathcal{SU}_C(r)$ de l'ordre de $\frac{1}{kn} \dim(\mathcal{SU}_C(r))$.

2. Propriétés du fibré F_N .

Soit C une courbe lisse de genre $g \geq 2$ sur \mathbb{C} . Soit \mathcal{J} la Jacobienne de C . On identifie canoniquement \mathcal{J} à sa variété abélienne duale grâce à la polarisation principale sur \mathcal{J} . On note \mathcal{P} le fibré de Poincaré sur $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$, trivial sur $\mathcal{J} \times \{0\}$ et sur $\{0\} \times \mathcal{J}$. Soient p_1 et $p_2 : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ les deux projections. Soit $D(\mathcal{J})$ la catégorie dérivée associée aux faisceaux cohérents sur \mathcal{J} et $[g]$ la translation de g degrés vers la gauche dans $D(\mathcal{J})$. Dans [2], Mukai définit la transformée de Fourier-Mukai comme l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : D(\mathcal{J}) &\longrightarrow D(\mathcal{J}) \\ M &\longmapsto Rp_{2,*} (p_1^* M \otimes \mathcal{P}). \end{aligned}$$

Soit N un fibré en droites ample sur \mathcal{J} , on note

$$F_N := \mathcal{F}(N^{-1})[g],$$

ou F_D si $N = \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(D)$. Soit $\Phi_N : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ l'isogénie qui à $x \in \mathcal{J}$ associe $T_x^* N \otimes N^{-1}$, où T_x est la translation par x dans \mathcal{J} . On note $H(N)$ le noyau de Φ_N . Soit $l := h^0(\mathcal{J}, N)$, $H(N)$ est un sous groupe de \mathcal{J} d'ordre l^2 . On peut définir sur $H(N)$ une forme bilinéaire non dégénérée à valeurs dans \mathbb{C}^* (voir [3]). Il existe alors deux sous groupes d'ordre l K et K' , totalement isotropes pour cette forme et tels que $H(N) = K \oplus K'$. Soit $\mathcal{J}' := \mathcal{J}/K'$, c'est une variété abélienne principalement polarisée ; on a une factorisation canonique (voir [3])

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{J}' & \\ \alpha \nearrow & & \searrow \tau \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{\phi_N} & \mathcal{J} \end{array}$$

Soit N' le fibré en droites associé à une polarisation principale sur \mathcal{J}' . On a $\alpha^* N' = N$ et donc N' est déterminé à translation par K près. Par ailleurs, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1.

1. F_N est un fibré vectoriel sur \mathcal{J} de rang l .
2. $F_N \cong \tau_* N'$.
3. $\Phi_N^* F_N = N \otimes H^0(\mathcal{J}, N)^*$ comme $H(N)$ -fibrés.

Démonstration. — Mukai prouve les deux premiers points dans [2] (p. 162). Il établit aussi l'isomorphisme suivant

$$(\dagger) \quad \Phi_N^* F_N \cong N \otimes V,$$

où V est un espace vectoriel de dimension l . On rappelle maintenant quelques résultats dus à Mumford (voir [3], p.288–297) : Soit $\mathcal{G}(N)$ l'ensemble des paires (x, φ) , où x est un élément de $H(N)$ et φ est un isomorphisme entre N et $T_x^* N$. $\mathcal{G}(N)$ est un groupe et on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{G}(N) \longrightarrow H(N) \longrightarrow 0.$$

Mumford établit que toute représentation de dimension finie de $\mathcal{G}(N)$ sur laquelle \mathbb{C}^* agit par homothéties, est isomorphe à $\bigoplus_r H^0(\mathcal{J}, N)$ pour un entier r . Du fait de l'isomorphisme (\dagger) , $V = H^0(\mathcal{J}, \Phi_N^* F_N \otimes N^{-1})$ et comme $H(N)$ agit sur $H^0(\mathcal{J}, \Phi_N^* F_N)$, V est une représentation irréductible de $\mathcal{G}(N)$ sur laquelle \mathbb{C}^* agit par multiplication par l'inverse. V^* est donc une

représentation de $\mathcal{G}(N)$ sur laquelle \mathbb{C}^* agit naturellement ; pour des raisons de dimension, V^* est isomorphe à $H^0(\mathcal{J}, N)$, d'où l'égalité de $H(N)$ -fibrés :

$$\Phi_N^* F_N = N \otimes H^0(\mathcal{J}, N)^*.$$

□

Soit $E_N := F_{NC}$ où C est un plongement de la courbe dans sa Jacobienne \mathcal{J} .

COROLLAIRE 2.2. — E_N est stable.

Démonstration. — Soit $C'' := \Phi^{-1}C$. Comme E_N est somme directe de fibrés en droites de même pente, E_N est semi-stable. Soit F un sous fibré strict de E_N tel que $\mu(F) = \mu(E_N)$, alors

$$\Phi_N^* F = N|_{C''} \otimes W,$$

avec W un sous-espace vectoriel strict de $H^0(\mathcal{J}, N)^*$ stable sous l'action de $\mathcal{G}(N)$. Mais ceci est en contradiction avec le fait que $H^0(\mathcal{J}, N)^*$ est une représentation irréductible de $\mathcal{G}(N)$. □

Soit maintenant pour tout x dans \mathcal{J} , M_x le fibré associé à x par l'isomorphisme canonique déterminé par la polarisation principale.

PROPOSITION 2.3.

1. $\Phi_N^*(\bigoplus_{x \in H(N)} M_x) = H^0(\mathcal{J}, N) \otimes H^0(\mathcal{J}, N)^* \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{J}}$ comme $H(N)$ -fibré.
2. Si N est engendré par ses sections globales, on a un homomorphisme surjectif

$$\bigoplus_{x \in H(N)} M_x \longrightarrow F_N.$$

Démonstration. — 1. Soit φ le caractère de $H^0(\mathcal{J}, N)$ comme représentation irréductible de $\mathcal{G}(N)$ et γ le caractère de $H^0(\mathcal{J}, N) \otimes H^0(\mathcal{J}, N)^*$ vu comme représentation de $H(N)$ (voir [5]). Comme pour tout élément g non central de $\mathcal{G}(N)$, $\varphi(g) = 0$, γ vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in H(N) - \{0\}, \gamma(x) = 0 \text{ et } \gamma(0) = \dim(H^0(\mathcal{J}, N) \otimes H^0(\mathcal{J}, N)^*).$$

De plus $\text{ord}(H(N)) = \dim(H^0(\mathcal{J}, N) \otimes H^0(\mathcal{J}, N)^*)$, donc $H^0(\mathcal{J}, N) \otimes H^0(\mathcal{J}, N)^*$ est la représentation régulière de $H(N)$. Comme $H(N)$ est commutatif, on a la décomposition suivante :

$$H^0(\mathcal{J}, N) \otimes H^0(\mathcal{J}, N)^* = \bigoplus_{\chi \in \text{Hom}(H(N), \mathbb{C}^*)} V_\chi,$$

où V_χ est la représentation irréductible de degré 1 de $H(N)$ associée à χ . Par ailleurs, pour tout x dans $H(N)$, $\Phi_N^*(M_x)$ est un fibré trivial de rang 1 stable sous l'action de $H(N)$, donc

$$\Phi_N^*(M_x) = V_{\chi_x} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{J}},$$

où χ_x est donné par l'isomorphisme canonique

$$H(N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H(N), \mathbb{C}^*).$$

De ce fait,

$$\Phi_N^*\left(\bigoplus_{x \in H(N)} M_x\right) = H^0(\mathcal{J}, N) \otimes H^0(\mathcal{J}, N)^* \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{J}}.$$

2. L'application

$$H^0(\mathcal{J}, N) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{J}} \longrightarrow N$$

est surjective. Il en est donc de même pour

$$H^0(\mathcal{J}, N) \otimes H^0(\mathcal{J}, N)^* \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{J}} \longrightarrow N \otimes H^0(\mathcal{J}, N)^*.$$

D'après ce qui précède, on obtient donc l'homomorphisme surjectif suivant

$$\bigoplus_{x \in H(N)} M_x \longrightarrow F_N.$$

□

3. Démonstration de la Proposition 1.1

Dans tout ce qui suit, $N := \mathcal{O}_{\mathcal{J}}(n\Theta)$, où Θ est un diviseur associé à une polarisation principale. On note alors F_n et E_n les fibrés associés. On dira qu'un fibré est de "type E_n " s'il s'écrit $E_n \otimes L$, avec L un fibré en droites de degré 0 sur C . Le choix de N n'étant pas canonique, ces fibrés vérifient les mêmes propriétés que E_n . En particulier, ces fibrés sont de rang n^g et de pente $\frac{g}{n}$. De plus, on notera $W_{n,r}$ la sous variété des fibrés vectoriels de rang r , de pente $g - 1$, contenant un fibré de type E_n et dont le quotient par ce fibré est stable. Par ailleurs, pour tout x dans $\mathcal{J}_n := \text{Ker}(\Phi_{n\theta})$, on note $L_x := M_x|_C$.

Donnons maintenant quelques résultats utiles à la démonstration de la Proposition 1.1.

PROPOSITION 3.1. — *Soit C une courbe lisse de genre $g \geq 2$ sur \mathbb{C} et C' une autre courbe lisse sur \mathbb{C} . Soit $\pi : C' \rightarrow C$ un revêtement galoisien de groupe de Galois G . Pour M un fibré vectoriel stable sur C' , on a :*

1. $\pi_* M$ est semi-stable.

2. Si $\forall g \in G, g^*M \not\cong M$, alors π_*M est stable sur C .

Ce résultat est une conséquence directe de la théorie des représentations de Mackey.

LEMME 3.2 (A. Beauville). — Soit C une courbe lisse de genre $g \geq 2$ sur \mathbb{C} . Soient L un faisceau cohérent et M un fibré vectoriel sur C tels que $h^0(C, L) \leq h^1(C, M)$. Pour c générique dans $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(L, M)$, l'application multiplication par c

$$H^0(C, L) \longrightarrow H^1(C, M),$$

est injective.

Démonstration. — Comme par dualité $H^1(C, M) \cong H^0(C, \omega_C \otimes M^*)^*$ et que $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(L, M) \cong H^0(C, \omega_C \otimes L \otimes M^*)^*$, Il revient au même de démontrer que

$$H^0(C, L) \otimes H^0(C, \omega_C \otimes M^*) \xrightarrow{\varphi} H^0(C, \omega_C \otimes L \otimes M^*) \xrightarrow{c} \mathbb{C}$$

vérifie la propriété suivante pour c générique :

$$\forall a_1, a_2 \in H^0(C, L), a_1 \neq a_2 \Rightarrow \exists b \in H^0(C, \omega_C \otimes M^*), \\ c \circ \varphi(a_1, b) \neq c \circ \varphi(a_2, b).$$

On dira alors que $c \circ \varphi$ est séparante à gauche.

On considère pour cela A, B et V des espaces vectoriels de dimensions respectives a, b, n tels que $a \leq b$. Soit c générique et

$$\varphi : A \times B \longrightarrow V,$$

une application bilinéaire vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (a, b) \in A \times B, (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0) \Rightarrow \varphi(a, b) \neq 0.$$

Démontrons que $c \circ \varphi$ est séparante à gauche. Pour cela, on montre qu'un hyperplan générique de V ne contient aucun des B -plans $\varphi(a, B)$. Ces B -plans sont paramétrés par une sous-variété G d'une Grassmannienne de dimension inférieure à $a - 1$. Notons \check{P} l'espace projectif des hyperplans de V : soit

$$Z := \{(L, H) \in G \times \check{P} \mid L \subset H\}.$$

Z est un fibré sur G de fibre en L , l'espace projectif des hyperplans de V contenant L , de dimension $n - b - 1$; de ce fait,

$$\dim Z \leq (a - 1) + (n - b - 1) = n - 2 - (b - a) < \dim \check{P}.$$

□

PROPOSITION 3.3. — Soit $n \geq 2$ tel que $\frac{g}{n} < g - 1$. Soient

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{i_\epsilon} F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

$\epsilon = 0, 1$, deux structures d'extensions de E_n par un faisceau cohérent G sur C sur le même fibré de pente $g - 1$, F . Si pour tout x dans \mathcal{J}_n ,

$$(*) \quad h^1(C, G \otimes L_x^{-1}) = 0.$$

Alors i_0 et i_1 diffèrent d'un automorphisme de E_n près.

Démonstration. — Comme $\mu(G) > g - 1$, pour tout fibré en droites L de degré 0,

$$\chi(G \otimes L) = -\chi(E_n \otimes L) > 0,$$

De ce fait, on a pour tout fibré G vérifiant (*), pour tout x dans \mathcal{J}_n ,

$$h^0(C, G \otimes L_x^{-1}) \leq h^1(C, E_n \otimes L_x^{-1}).$$

Par généralité de l'extension F dans $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(G, E_n) \cong H^0(C, \omega_C \otimes (E_n \otimes L_x^{-1})^* \otimes (G \otimes L_x^{-1}))^*$, on peut donc appliquer le Lemme 3.2 pour obtenir que pour tout x dans \mathcal{J}_n , l'application

$$H^0(C, G \otimes L_x^{-1}) \longrightarrow H^1(C, E_n \otimes L_x^{-1})$$

est injective. De ce fait, en écrivant la suite exacte longue de cohomologie, on obtient que

$$H^0(C, E_n \otimes L_x^{-1}) \cong H^0(C, F \otimes L_x^{-1}).$$

En conséquence, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{x \in \mathcal{J}_n} \text{Hom}(L_x, E_n) \otimes L_x & \xrightarrow{\psi} & E_n \\ \downarrow \wr & & \downarrow i \\ \bigoplus_{x \in \mathcal{J}_n} \text{Hom}(L_x, F) \otimes L_x & \xrightarrow{\varphi} & F. \end{array}$$

Mais comme pour $n \geq 2$, $\mathcal{O}_{\mathcal{J}}(n\theta)$ est engendré par ses sections globales, on a par la Proposition 2.3,

$$\bigoplus_{x \in \mathcal{J}_n} M_x \longrightarrow F_n \longrightarrow 0.$$

De ce fait, ψ est surjective et l'image de i est égale à $\text{Im}(\varphi)$. □

PROPOSITION 3.4. — Soit $n \geq 2$ tel que $\frac{g}{n} < g - 1$, soit $r \geq n^g$, on a :

$$\dim(W_{n,r}) = g + r^2(g - 1) - grn^{g-1}.$$

Démonstration. — 1. Si $r = n^g$, tout fibré de W_{n,n^g} se construit comme extension d'un fibré de type E_n et d'un fibré

$$G = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{C}_p,$$

où \mathbb{C}_p est le faisceau concentré en p et \mathcal{P} est un ensemble de points de C . Comme tout fibré de ce type vérifie la condition (*) de la Proposition 3.3, pour obtenir $\dim(W_{n,n^g})$, il suffit d'ajouter la dimension de l'espace des fibrés de type E_n , c'est à dire g , à la dimension de l'espace dans lequel on choisit G , c'est-à-dire $1 + (r - n^g)^2(g - 1)$, plus $\dim(\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(G, E_n)) - \dim(\text{Aut}(G))$. Or

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{C}_p, E_n)) &= \text{rg}(E_n) ((g - 1)n^g - gn^{g-1}) \\ &= n^g ((g - 1)n^g - gn^{g-1}). \end{aligned}$$

Comme $\dim(\text{Aut}(G)) = \text{Card}(\mathcal{P})$ et que la dimension de l'espace dans lequel on choisit le fibré G est aussi $\text{Card}(\mathcal{P})$, on a :

$$\dim(W) = g + n^g ((g - 1)n^g - gn^{g-1}).$$

2. Si $r > n^g$, tout fibré de $W_{n,r}$ se construit comme extension d'un fibré de type E_n et d'un fibré stable G de pente strictement supérieure à $g - 1$. Or un tel fibré générique G vérifie la condition (*) de la Proposition 3.3. il suffit de ce fait, pour obtenir $\dim(W_{n,r})$, d'ajouter la dimension de l'espace des fibrés de type E_n à la dimension de l'espace dans lequel on choisit G , plus $\dim(\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(G, E_n)) = h^1(C, G^* \otimes E_n)$ moins $\dim(\text{Aut}(G))$. Or pour G générique et stable de pente supérieure à la pente de E_n , du fait de la semi-stabilité de E_n , on a $h^0(C, G^* \otimes E_n) = 0$. On obtient donc par Riemann-Roch,

$$\begin{aligned} h^1(C, G^* \otimes E_n) &= \text{rg}(E_n) \text{deg}(G) - \text{deg}(E_n) \text{rg}(G) + \text{rg}(E_n) \text{rg}(G)(g - 1) \\ &= n^g(r(g - 1) - gn^{g-1}) - (r - n^g)gn^{g-1} \\ &\quad + (r - n^g)n^g(g - 1) \\ &= (g - 1)n^g(2r - n^g) - gn^{g-1}r. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme G est générique dans $\mathcal{U}_C(r - n^g, \frac{r(g-1) - gn^{g-1}}{r - n^g})$, $\dim(\text{Aut}(G)) = 1$. De plus

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{U}_C(r - n^g, \frac{r(g-1) - gn^{g-1}}{r - n^g})) &= (r - n^g)^2(g - 1) \\ &= r^2(g - 1) + n^g(g - 1)(n^g - 2r). \end{aligned}$$

De ce fait,

$$\dim(W_{n,r}) = g + r^2(g - 1) - grn^{g-1}.$$

□

Démonstration de la Proposition 1.1. — De par la proposition précédente, les espaces W_{n, kn^g} ont la codimension recherchée. Il nous reste donc à démontrer que les fibrés de W_{n, kn^g} , sont génériquement stables. Pour cela, on considère $\pi : C' \rightarrow C$ la restriction de $\tau : \mathcal{J}' \rightarrow \mathcal{J}$ à $C' := \tau^{-1}C$ et $K := \text{Ker}(\pi)$. C' est connexe et d'après la Proposition 2.1, $E_n = \pi_* L'$, où L' est la restriction à C' d'un fibré associé à une polarisation principale de \mathcal{J}' . On va maintenant démontrer l'existence dans W_{n, kn^g} d'un fibré stable F , image directe par π d'une extension de L' :

1. Si $k = 1$, considérons le fibré en droites $F' := L'(\sum_{p \in \mathcal{P}} p)$, où \mathcal{P} est un ensemble de points de C' de cardinal $(g-1)n^g - gn^{g-1}$. Alors ou bien pour tout $\sigma \in K$, $\sigma^* F' \not\cong F'$ et alors F' vérifie les conditions de la Proposition 3.1 et de ce fait $F := \pi_* F'$ est stable. Ou bien il existe $\sigma \in K$ tel que $\sigma^* F' \cong F'$. Dans ce cas, soit $q_1 \in \mathcal{P}$, alors il existe $q_2 \in C' - \mathcal{P}$ tel que pour tout $\sigma \in K$,

$$\sigma^* L' \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} p \right) \otimes L' \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} p \right)^{-1} \not\cong \mathcal{O}_{C'}(q_1 - \sigma(q_1) + \sigma(q_2) - q_2).$$

De ce fait, pour tout $\sigma \in K$, $\sigma^* L'(q_2 - q_1 + \sum_{p \in \mathcal{P}} p) \not\cong L'(q_2 - q_1 + \sum_{p \in \mathcal{P}} p)$ et donc par la Proposition 3.1 son image directe par π sera stable.

2. Considérons maintenant un fibré F' extension de L' par un fibré vectoriel G' . $\det(F') = L' \otimes \det(G')$, donc pour G' générique, pour tout $\sigma \in K$, $\sigma^* \det(F') \not\cong \det(F')$. Cette propriété est aussi vérifiée par F' et par la Proposition 3.1 ceci implique que dans ce cas $\pi_* F'$ est stable.

□

Remerciements. Je remercie mon directeur de thèse Arnaud Beauville de m'avoir guidé dans ce travail de recherche.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BEAUVILLE, « Vector bundles on curves and generalized theta functions : recent results and open problems », in *Current topics in complex algebraic geometry (Berkeley, CA, 1992/93)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 28, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, p. 17-33.
- [2] S. MUKAI, « Duality between $D(X)$ and $D(\widehat{X})$ with its application to Picard sheaves », *Nagoya Math. J.* **81** (1981), p. 153-175.
- [3] D. MUMFORD, « On the equations defining abelian varieties », *I. Invent. Math.* **1** (1966), p. 287-354.

- [4] M. RAYNAUD, « Sections des fibrés vectoriels sur une courbe », *Bull. Soc. math. France* **110** (1982), p. 103-125.
- [5] J.-P. SERRE, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1971, Deuxième édition, refondue, 182 p.

Manuscrit reçu le 24 mars 2005,
révisé le 25 mai 2005,
accepté le 13 juin 2005.

Olivier SCHNEIDER
Université de Nice - Sophia Antipolis
Laboratoire J.-A. Dieudonné
U.M.R. no 6621 du C.N.R.S.
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 02 (France)
oschneid@math.unice.fr