René Spector

Espaces de mesures et de fonctions invariants par les isomorphismes locaux de groupes abéliens localement compacts

Annales de l'institut Fourier, tome 15, n° 2 (1965), p. 325-343

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_325_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 2 (1965), 325-343.

ESPACES DE MESURES ET DE FONCTIONS INVARIANTS PAR LES ISOMORPHISMES LOCAUX DE GROUPES ABÉLIENS LOCALEMENT COMPACTS

par René SPECTOR

Soit f une fonction complexe de variable réelle, continue et nulle hors de l'intervalle $]-\alpha, +\alpha[$ $(0 < \alpha < \pi)$. On sait (Wiener, Rudin) que si g désigne la fonction définie sur T (cercle trigonométrique) par

$$\begin{cases} g(e^{ix}) = f(x) & \text{si} \quad |x| < \alpha \\ g(e^{ix}) = 0 & \text{si} \quad \alpha \leqslant |x| \leqslant \pi \end{cases}$$

les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) $f \in A(R)$, c'est-à-dire f est transformée de Fourier d'une fonction sommable sur R;

b) $g \in A(T)$, c'est-à-dire g est somme d'une série de Fourier absolument convergente.

Soit U l'intervalle ouvert $]-\alpha, +\alpha[$, U′ l'ouvert de T défini par $U' = \{e^{ix} | x \in U\}$. L'application $\varphi : x \to e^{ix}$ de U sur U′ est un homéomorphisme; soit φ' l'homéomorphisme inverse.

Désignons par f_R et f_T un couple de fonctions définies sur R et T respectivement, à supports dans U et U′, qui vérifient de plus les relations (équivalentes) suivantes :

$$f_{R|U} = f_{T|U'} \circ \varphi, \qquad f_{T|U'} = f_{R|U} \circ \varphi'.$$

Le résultat rappelé ci-dessus peut alors s'exprimer sous la forme suivante :

Les conditions

a) $f_R \in A(R)$;

b) $f_T \in A(T)$

sont équivalentes.

Remarquons que l'homéomorphisme φ ne définit pas, en général, un isomorphisme local des groupes R et T; il n'en est ainsi que dans le cas où $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Cependant φ définit un « isomorphisme local prolongé » au sens suivant :

a) Il existe un sous-intervalle V de U, de centre O, tel que $\varphi_{|V}$ soit un isomorphisme local;

b) Pour tout $x \in U$, il existe un intervalle V_x de centre O tel que

$$\begin{cases} V_x \subset U \quad \text{et} \quad x + V_x \subset U, \\ \forall y \in V_x, \quad \varphi(x+y) = \varphi(x).\varphi(y). \end{cases}$$

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'établir un résultat analogue à celui-ci, ainsi que des résultats portant sur certains espaces de mesures, dans le cas de deux groupes abéliens localement compacts localement isomorphes.

Notations.

G est un groupe abélien localement compact.

Γ est le groupe dual de G.

C(G) est l'algèbre des fonctions continues $G \to C$.

A(G) est l'algèbre des transformées de Fourier des fonctions de $L^1(\Gamma)$, munie de la norme $\|f\| = \|g\|_1$ si $f = \hat{g}$, $g \in L^1(\Gamma)$.

M(G) est l'algèbre de convolution des mesures de Radon sur G de masse totale finie, munie de la norme $\|\mu\| = \int_G d|\mu|$.

Si $\mu \in M(G)$, posons $\|\mu\|_{pm} = \sup_{\chi \in \Gamma} |\hat{\mu}(\chi)|$. $\| \quad \|_{pm}$ est une norme sur M(G) et on a $\|\mu\|_{pm} \leqslant \|\mu\|$.

$M_0(G)$ est la sous-algèbre de M(G) formée des mesures dont la transformée de Fourier-Stieltjes tend vers 0 à l'infini.

Si $E \subset G$, C(E) (resp. A(E), $L^2(E)$, M(E), $M_0(E)$) est le sous-espace de C(G) (resp. A(G), $L^2(G)$, M(G), $M_0(G)$) formé des fonctions (resp. mesures) dont le support est contenu dans E.

Remarque. — Nous posons, si $f \in L^1(G)$ et $\chi \in \Gamma$,

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\,(\chi, x)\,dx$$

et si $\mu \in M(G)$,

$$\hat{\mu}(\chi) = \int_G (\chi, x)\,d\mu.$$

Nous commençons par établir certains résultats portant sur les multiplicateurs de $M_0(G)$.

PROPOSITION 1. — *Soit* $f \in C(G)$, *à support compact.*
Désignons par f^* *l'application linéaire* $\mu \to f\mu$ *de* $M_0(G)$ *dans* $M(G)$.
Pour que f^* *soit bornée au sens de la norme* $\| \quad \|_{pm}$, *il est nécessaire et suffisant que* $f \in A(G)$. f^* *applique alors* $M_0(G)$ *dans* $M_0(G)$ *et la norme de cette application vérifie*

$$\|f^*\| = \|f\|.$$

A) Supposons d'abord $f \in A(G)$. Comme $f \in L^1(G)$, cette condition équivaut à $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$.
Soit $\mu \in M_0(G)$. On sait qu'alors $f\mu \in M_0(G)$.
On a, quel que soit $\chi \in \Gamma$,

$$\widehat{f\mu}(\chi) = \int_\Gamma \hat{f}(\psi)\hat{\mu}(\chi - \psi)\, d\psi,$$

d'où

$$\|f\mu\|_{pm} \leqslant \|\hat{f}\|_1 \|\mu\|_{pm},$$

ce qui montre que f^* est bornée et que l'on a

$$\|f^*\| \leqslant \|\hat{f}\|_1 = \|f\|.$$

B) Montrons que l'on a en fait

$$\|f^*\| = \|f\|.$$

Soit ε un nombre positif.
On peut trouver un compact P de Γ et un réel $a > 0$ tels que

$$|\hat{f}(\chi)| \geqslant a \quad \text{si} \quad \chi \in P,$$
$$\int_{\complement P} |\hat{f}(\chi)|\, d\chi < \varepsilon.$$

Il existe alors une fonction h de $C_0(\Gamma)$ (espace des fonctions continues $\Gamma \to C$ tendant vers 0 à l'infini) telle que

$$|h(\chi)| \leqslant 1 \quad \text{sur } \Gamma$$
$$h(\chi) = \frac{\overline{\hat{f}(-\chi)}}{|\hat{f}(-\chi)|} \quad \text{si} \quad -\chi \in P.$$

Comme $A(\Gamma)$ est dense dans $C_0(\Gamma)$, il existe $g \in L^1(G)$ telle que

$$||\hat{g} - h||_\infty < \varepsilon.$$

Prenons pour μ la mesure définie par g. On a $\mu \in M_0(G)$ et

$$||\mu||_{pm} = ||\hat{g}||_\infty \leqslant 1 + \varepsilon.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
||f\mu||_{pm} \geqslant |\widehat{f\mu}(0)| &= \left|\int_\Gamma \hat{f}(\chi)\hat{g}(-\chi)\, d\chi\right| \\
&= \left|\int_\Gamma \hat{f}(\chi)h(-\chi)\, d\chi + \int_\Gamma \hat{f}(\chi)[\hat{g}(-\chi) - h(-\chi)]\, d\chi\right| \\
&= \left|\int_P \hat{f}(\chi)\frac{\overline{\hat{f}(\chi)}}{|\hat{f}(\chi)|} + \int_{\complement P} \hat{f}(\chi)h(-\chi)\, d\chi\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \int_\Gamma \hat{f}(\chi)[\hat{g}(-\chi) - h(-\chi)]\, d\chi\right| \\
&\geqslant \int_P |\hat{f}(\chi)|\, d\chi - \left|\int_{\complement P} \hat{f}(\chi)h(-\chi)\, d\chi\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \int_\Gamma \hat{f}(\chi)[\hat{g}(-\chi) - h(-\chi)]\, d\chi\right| \\
&\geqslant ||\hat{f}||_1 - \varepsilon(2 + ||\hat{f}||_1).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{||f\mu||_{pm}}{||\mu||_{pm}} \geqslant \frac{||\hat{f}||_1 - \varepsilon(2 + ||\hat{f}||_1)}{1 + \varepsilon},$$

quantité que l'on peut rendre arbitrairement voisine de $||\hat{f}||_1$.

Ceci montre bien que l'on a

$$||f^*|| = ||f||.$$

C) Montrons maintenant que si $f \notin A(G)$, c'est-à-dire si $\hat{f} \notin L^1(\Gamma)$, l'application f^* n'est pas bornée.

On peut, sans restreindre la généralité, supposer

$$|\hat{f}(\chi)| \leqslant 1 \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

Soit N un nombre positif.

On peut trouver, puisque $\hat{f} \notin L^1(\Gamma)$, un compact P de Γ et un nombre $a > 0$ tels que

$$|\hat{f}(\chi)| \geqslant a \qquad \text{si} \qquad \chi \in P,$$
$$\int_P |\hat{f}(\chi)|\, d\chi > N.$$

Soit alors ε un nombre positif; la mesure de Haar du groupe Γ étant régulière, on peut trouver un voisinage U de P tel que

$$\int_{U \cap \complement P} |\hat{f}(\chi)|\, d\chi < \varepsilon.$$

Il existe une fonction $h \in C_0(\Gamma)$ telle que $|h(\chi)| \leqslant 1$ sur Γ,

$$h(\chi) = \frac{\overline{\hat{f}(-\chi)}}{|\hat{f}(-\chi)|} \quad \text{si} \quad -\chi \in P, \qquad h(\chi) = 0 \quad \text{si} \quad -\chi \notin U;$$

on peut alors trouver une fonction $g \in L'(G)$ telle que

$$\|\hat{g} - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\int_U |\hat{f}(\chi)|\, d\chi}, \qquad \hat{g} = 0 \quad \text{hors de } - U.$$

La mesure μ de densité g est bien un élément de $M_0(G)$ et l'on a

$$\|\mu\|_{pm} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{N}.$$

Évaluons, comme ci-dessus en B), $\widehat{f\mu}(0)$;

$$\begin{aligned}
|\widehat{f\mu}(0)| &= \left|\int_\Gamma \hat{f}(\chi)\hat{g}(-\chi)\, d\chi\right| \\
&= \left|\int_P \hat{f}(\chi)h(-\chi)\, d\chi + \int_{U\cap\complement P} \hat{f}(\chi)h(-\chi)\, d\chi\right. \\
&\quad \left. + \int_U \hat{f}(\chi)[\hat{g}(-\chi) - h(-\chi)]\, d\chi\right| \\
&\geqslant N - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\|\mu\|_{pm} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{N}$$

et

$$\|f\mu\|_{pm} \geqslant N - 2\varepsilon,$$

quantité qui peut être rendue arbitrairement grande, ce qui montre que l'application f^* n'est pas bornée.

Ceci achève la démonstration de la proposition 1.

Proposition 2. — *Soit* K *une partie compacte de* Γ, V *un voisinage de* K, $f \in C(K)$.

Désignons par $f^*_{(V)}$ *la restriction de* f^* *à* $M_0(V)$.

Pour que $f^*_{(V)}$ *soit bornée au sens de la norme* $\| \ \|_{pm}$, *il est nécessaire et suffisant que* $f \in A(K)$; *il existe alors une constante* $m(K, V)$ *ne dépendant que de* K *et* V, *telle que*

$$m(K, V)\|f\| \leqslant \|f^*_{(V)}\| \leqslant \|f\|.$$

A) Supposons $f \notin A(K)$.

On peut trouver une suite $\{\mu_n\}$ de mesures de $M_0(G)$ telles que

$$\frac{\|f\mu_n\|_{pm}}{\|\mu_n\|_{pm}} \to \infty.$$

Il existe une fonction $\alpha \in A(G)$, à support compact, égale à 1 sur K, à 0 hors de V. Posons

$$\nu_n = \alpha\mu_n.$$

On a $\nu_n \in M_0(V)$, et

$$\|\nu_n\|_{pm} \leqslant \|\alpha\| \, \|\mu_n\|_{pm}.$$

D'autre part

$$f\nu_n = f(\alpha\mu_n) = (f\alpha)\mu_n = f\mu_n.$$

On a donc

$$\frac{\|f\nu_n\|_{pm}}{\|\nu_n\|_{pm}} \geqslant \frac{\|f\mu_n\|_{pm}}{\|\mu_n\|_{pm}} \cdot \frac{1}{\|\alpha\|},$$

ce qui entraîne

$$\frac{\|f\nu_n\|_{pm}}{\|\nu_n\|_{pm}} \to \infty$$

et montre que $f^*_{(V)}$ n'est pas bornée.

B) Supposons donc $f \in A(K)$.

En vertu de la proposition 1, la seule propriété à démontrer est l'existence de $m(K, V)$. Soit $\alpha \in A(G)$, à support compact, égale à 1 sur K, à 0 hors de V.

On peut trouver une suite $\{\mu_n\}$ de mesures de $M_0(G)$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f\mu_n\|_{pm}}{\|\mu_n\|_{pm}} = \|f\|.$$

Posons, pour tout entier positif n,

$$\nu_n = \alpha\mu_n.$$

On a $\nu_n \in M_0(V)$ et

$$\|\nu_n\|_{pm} \leqslant \|\alpha\| \, \|\mu_n\|_{pm}.$$

D'autre part

$$f\nu_n = f(\alpha\mu_n) = (f\alpha)\mu_n = f\mu_n.$$

On a donc, comme en A),

$$\frac{\|f\nu_n\|_{pm}}{\|\nu_n\|_{pm}} \geqslant \frac{\|f\mu_n\|_{pm}}{\|\mu_n\|_{pm}} \frac{1}{\|\alpha\|},$$

ce qui entraîne

$$\|f^*_{(V)}\| \geqslant \frac{\|f\|}{\|\alpha\|}.$$

On a donc trouvé une constante $m(K, V) = \dfrac{1}{\|\alpha\|}$ qui possède la propriété indiquée.

Considérons maintenant deux groupes abéliens localement compacts G et G′, localement isomorphes; O désigne indifféremment l'élément neutre de G ou de G′.

U et U′ sont des voisinages ouverts de O dans G et G′ respectivement et φ désigne un homéomorphisme $U \to U'$; φ' est l'homéomorphisme inverse.

Nous supposons que φ vérifie les deux conditions suivantes :

a) Il existe un voisinage V de 0, $V \subset U$, tel que $\varphi_{|V}$ soit un isomorphisme local de G vers G′;

b) Pour tout $x \in U$, il existe un voisinage V_x de 0 tel que

$$V_x \subset U \qquad \text{et} \qquad x + V_x \subset U,$$
$$\forall y \in V_x, \qquad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Un tel homéomorphisme φ sera appelé « *isomorphisme local prolongé* » de G vers G′. Il est clair que G et G′ jouent ici des rôles symétriques et que φ' a la même propriété que φ.

Tout isomorphisme local est un isomorphisme local prolongé, mais la réciproque est fausse.

Nous désignerons par f_G, $f_{G'}$ un couple de fonctions à supports dans U et U′ respectivement possédant la propriété suivante :

$$f_{G|U} = f_{G'|U'} \circ \varphi, \qquad f_{G'|U'} = f_{G|U} \circ \varphi'.$$

De même, μ_G, $\mu_{G'}$ est un couple de mesures de M(G) et M(G') respectivement, telles que la restriction de μ_G à U et celle de $\mu_{G'}$ à U' se correspondent par l'homéomorphisme φ.

Remarque 1. — Si f_G est μ_G-intégrable, $f_{G'}$ est $\mu_{G'}$-intégrable et on a

$$\int_G f_G \, d\mu_G = \int_{G'} f_{G'} \, d\mu_{G'}.$$

Remarque 2. — Il résulte d'une caractérisation locale des mesures de Haar (Bourbaki) que si μ_G coïncide sur U avec une mesure de Haar de G, $\mu_{G'}$ coïncide sur U' avec une mesure de Haar de G'.

PROPOSITION 3. — *Si μ_G et $\mu_{G'}$ sont à supports compacts, les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) $\mu_G \in M_0(U)$;

b) $\mu_{G'} \in M_0(U')$.

PROPOSITION 4. — *Soit* K *compact*, $K \subset U$ *et* $K' = \varphi(K)$.

L'application $\mu_G \to \mu_{G'}$ *de* $M_0(K)$ *sur* $M_0(K')$ *est, au sens des normes* $\| \quad \|_{pm}$, *un isomorphisme topologique d'espaces vectoriels normés.*

Nous commençons par établir un lemme qui permet de démontrer les propositions 3 et 4 à partir de deux cas particuliers.

LEMME 1. — *Soient* G, G' *deux groupes abéliens localement compacts,* U *un voisinage ouvert de* 0 *dans* G. U' *un voisinage ouvert de* 0 *dans* G', $\varphi : U \to U'$ *un isomorphisme local prolongé.*

Soit H *le sous-groupe ouvert de* G *engendré par* U, H' *le sous-groupe ouvert de* G' *engendré par* U'.

Il existe un groupe abélien localement compact G_0 *et deux sous-groupes discrets de* G_0, N *et* N', *tels que* H *soit topologiquement isomorphe à* G_0/N *et* H' *topologiquement isomorphe à* G_0/N'.

Ce résultat se trouve établi, sous une forme très proche de celle-ci, dans Pontrjagin.

Désignons par G_1 le groupe produit $H \times H'$. Soit $V \subset G_1 : V = \{(x, \varphi(x)) | x \in U\}$ et soit G_0 le sous-groupe de G_1 engendré par V. Munissons G_0 d'une topologie invariante par translation et telle que $x \to (x, \varphi(x))$ soit un homéomorphisme de U sur V. Cette topologie, unique, est une topologie de groupe (localement compact) car φ prolonge un isomorphisme local de H vers H′.

Soit $\alpha : G_0 \to H$ définie par $\alpha = p \circ i$, i étant l'injection $G_0 \to G_1$ et p la première projection $G_1 \to H$. α est un homomorphisme, surjectif car $\alpha(V) = U$ et U engendre H. Soit N le noyau de α; $N \cap V = \{0\}$, donc N est discret. La restriction de α à V est un homéomorphisme $V \to U$. Ceci entraîne que les groupes H et G_0/N sont topologiquement isomorphes.

On verrait de même que H′ et G_0/N' sont topologiquement isomorphes.

Lemme 2. — *Soit* G′ *un sous-groupe ouvert de* G, $U = U' = G'$, φ *l'application identique* $U \to U'$.

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $\mu_G \in M_0(U)$;

b) $\mu_{G'} \in M_0(U')$.

Γ étant le groupe dual de G, soit Λ l'annihilateur de G′ dans Γ. Le dual de G′ est Γ/Λ et Λ, dual du groupe discret G/G', est compact.

Soit α la surjection canonique $\Gamma \to \Gamma/\Lambda$.

μ_G étant concentrée sur G′, $\hat{\mu}_G$ est constante sur les classes de Γ selon Λ, de sorte que l'on a

$$\hat{\mu}_G = \hat{\mu}_{G'} \circ \alpha$$

(à un facteur constant près, que l'on peut prendre égal à 1 en ajustant convenablement les mesures de Haar de G et G′).

A) Supposons $\mu_G \in M_0(G)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $L \subset \Gamma$ tel que si $\chi \in \Gamma$, $\chi \notin L$, on ait

$$|\hat{\mu}_G(\chi)| < \varepsilon.$$

Soit $L' = \alpha(L)$, et soit $\psi \in \Gamma/\Lambda$, $\psi \notin L'$.
Soit alors $\chi \in \Gamma$ tel que $\psi = \alpha(\chi)$. On a

$$|\hat{\mu}_{G'}(\psi)| = |\hat{\mu}_G(\chi)| < \varepsilon.$$

Comme L′ est compact, ceci entraîne $\mu_{G'} \in M_0(G')$.

B) Supposons maintenant $\mu_{G'} \in M_0(G')$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $L' \in \Gamma/\Lambda$ tel que si $\psi \in \Gamma/\Lambda$, $\psi \notin L'$, on ait

$$|\hat{\mu}_{G'}(\psi)| < \varepsilon.$$

Soit V un voisinage compact de 0 dans Γ; $V' = \alpha(V)$ est alors un voisinage compact de 0 dans Γ/Λ et il existe des $\psi_i \in \Gamma/\Lambda$ $(i = 1, \ldots, n)$ tels que

$$L' \subset \bigcup_{i=1,\ldots,n} (\psi_i + V').$$

Soit $\chi_i \in \Gamma$ tel que $\psi_i = \alpha(\chi_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Posons

$$L = \bigcup_{i=1,\ldots,n} (\chi_i + V), \qquad L_0 = L + \Lambda.$$

L est compact, ainsi que Λ. Donc L_0 est également compact et contient $\alpha^{-1}(L')$.

Soit alors $\chi \in \Gamma$, $\chi \notin L_0$; $\psi = \alpha(\chi) \notin L'$, donc

$$|\hat{\mu}_G(\chi)| = |\hat{\mu}_{G'}(\psi)| < \varepsilon,$$

ce qui montre bien que $\mu_G \in M_0(G)$.

Lemme 3. — *Avec les hypothèses du lemme 2, l'application* $\mu_G \to \mu_{G'}$ *de* $M_0(U)$ *sur* $M_0(U')$ *est une isométrie au sens des normes* $\| \ \|_{pm}$.

Avec les notations ci-dessus, on a

$$\hat{\mu}_G = \hat{\mu}_{G'} \circ \alpha,$$

d'où

$$\|\mu_G\|_{pm} = \|\mu_{G'}\|_{pm}.$$

Lemme 4. — *Soit* G *un groupe abélien localement compact,* N *un sous-groupe discret de* G, $G' = G/N$, α *la surjection canonique* $G \to G'$. *Soit* U *un voisinage de* 0 *dans* G *tel que* $(U - U) \cap N = \{0\}$, $U' = \alpha(U)$, φ *la restriction de* α *à* U, φ *est alors un isomorphisme local prolongé de* G *vers* G'.

Alors, si μ_G *et* $\mu_{G'}$ *sont à supports compacts, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\mu_G \in M_0(U)$;

b) $\mu_{G'} \in M_0(U')$.

Ce résultat est établi, dans le cas $G = R$, $G' = T$, dans Salem.

Γ étant le groupe dual de G, soit Λ l'annihilateur de N dans Γ. Λ, sous-groupe de Γ, est le dual de G' et Γ/Λ, dual de N, est compact.

On peut ajuster les mesures de Haar des divers groupes en jeu de telle sorte que $\hat{\mu}_{G'}$ soit la restriction de $\hat{\mu}_G$ à Λ.

A) Supposons $\mu_G \in M_0(U)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $L \subset \Gamma$ tel que si $\chi \in \Gamma$, $\chi \notin L$, on ait

$$|\hat{\mu}_G|(\chi)| < \varepsilon.$$

Soit $L' = L \cap \Lambda$. L' est un compact de Λ et si $\psi \in \Lambda$, $\psi \notin L'$, on a $\psi \notin L$ donc

$$|\hat{\mu}_{G'}(\psi)| = |\hat{\mu}_G(\psi)| < \varepsilon,$$

ce qui montre que $\mu_{G'} \in M_0(U')$.

B) Supposons maintenant $\mu_{G'} \in M_0(U')$.

Soit

$$K_\varepsilon = \{\chi \in \Gamma \,\big|\, |\hat{\mu}_G(\chi)| \geqslant \varepsilon\}.$$

Il s'agit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, K_ε est compact.

Comme $\hat{\mu}_G$ est une fonction uniformément continue sur Γ, il existe un voisinage compact de 0 dans Γ, V, tel que pour tout $\chi \in \Gamma$ l'oscillation de $\hat{\mu}_G$ sur $\chi + V$ soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$.

Désignons par β la surjection canonique $\Gamma \to \Gamma/\Lambda$, et posons $L_\varepsilon = \beta(K_\varepsilon)$.

L_ε, sous-ensemble fermé de Γ/Λ, est compact; il existe donc des $\psi_i \in L_\varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ tels que l'on ait

$$L_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1,\ldots,n} (\psi_i + \beta(V)).$$

Soit (pour $i = 1, \ldots, n$) $\chi_i \in K_\varepsilon$ tel que $\psi_i = \beta(\chi_i)$ et soit

$$K_i = (\psi_i + V + \Lambda) \cap K_\varepsilon.$$

Comme on a

$$K_\varepsilon = \bigcup_{i=1,\ldots,n} K_i,$$

il suffit de montrer que chaque K_i est compact.

Soit $\chi \in K_i$; on peut écrire

$$\chi = \chi_i + \alpha + \lambda, \qquad \alpha \in V, \qquad \lambda \in \Lambda.$$

On en déduit que

$$|\hat{\mu}_G(\chi_i + \lambda)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Désignons par K, compact de G, le support de μ_G. Soit h_G la fonction égale au produit de (χ_i, x) par la fonction caractéristique de K. K étant compact, le théorème de Stone-Weierstrass implique que, pour tout $\eta > 0$, on peut trouver des nombres complexes $c_1, \ldots, c_p$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \Lambda$ tels que

$$\left| h_{G'}(x') - \sum_1^p c_k(\lambda_k, x') \right| < \eta \qquad \text{si} \qquad x' \in K' = \varphi(K),$$

ou encore

$$\left| (\chi_i, x) - \sum_1^p c_k(\lambda_k, x) \right| < \eta \qquad \text{si} \qquad x \in K.$$

Nous avons, puisque le support de μ_G est K,

$$\hat{\mu}_G(\chi_i + \lambda) = \int_G h_G(x)\,(\lambda, x)\,d\mu_G(x) = \int_G \sum_1^p c_k(\lambda_k + \lambda, x)\,d\mu_G(x)$$
$$+ \int_K \left[h_G(x) - \sum_1^p c_k(\lambda_k, x)\right](\lambda, x)\,d\mu_G(x).$$

Choisissons d'abord

$$\eta = \frac{\varepsilon}{4\|\mu_G\|}.$$

Les c_k et λ_k sont alors déterminés par χ_i et η.

Soit

$$\Lambda_k = \left(K_{\frac{\varepsilon}{4\,|c_j|}} \cap \Lambda\right) - \lambda_k \quad (k = 1, \ldots, p).$$

Comme $\mu_{G'} \in M_0(G')$, $K_{\frac{\varepsilon}{4\Sigma|c_j|}} \cap \Lambda$ est compact, donc aussi Λ_k, et si l'on pose

$$\Lambda_0 = \bigcup_{k=1,\ldots,p} \Lambda_k,$$

Λ_0 est compact.

On a $\lambda \in \Lambda_0$: sinon on aurait, en vertu de l'expression de $\hat{\mu}_G(\chi_i + \lambda)$ donnée plus haut,

$$|\hat{\mu}_G(\chi_i + \lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite,

$$K_i \subset \chi_i + V + \Lambda_0,$$

ce qui implique que K_i est compact.

Le lemme 4 est donc établi.

LEMME 5. — *Avec les notations et hypothèses du lemme 4, soit* K *compact,* $K \subset U$; $K' = \varphi(K)$.

L'application $\mu_G \to \mu_{G'}$ *de* $M_0(K)$ *sur* $M_0(K')$ *est, au sens des normes* $\| \quad \|_{pm}$, *un isomorphisme topologique d'espaces vectoriels normés.*

Avec les notations utilisées dans la démonstration du lemme 4 on a

$$\hat{\mu}_{G'} = \hat{\mu}_{G|\Lambda},$$

donc

$$\|\mu_{G'}\|_{pm} \leqslant \|\mu_G\|_{pm}.$$

Nous allons montrer qu'il existe une constante k ne dépendant que de K telle que

$$\|\mu_G\|_{pm} \leqslant k\|\mu_{G'}\|_{pm}.$$

Soit $\chi_0 \in \Gamma$ un point où $|\hat{\mu}_G|$ atteint son maximum et soit ν_G la mesure produit de μ_G par la fonction (χ_0, x). $|\hat{\nu}_G|$ atteint son maximum en 0 et $\hat{\nu}_G$ se déduit de $\hat{\mu}_G$ par translation, de sorte que

$$\|\nu_{G'}\|_{pm} = \|\nu_G\|_{pm} = \|\mu_G\|_{pm}.$$

Il est facile de montrer, à partir de la définition d'un isomorphisme local prolongé, que, K étant compact, il existe un voisinage compact V de 0 dans G tel que

$$K - V + V \subset U,$$
$$\forall x \in K, \qquad \forall y \in V, \qquad \forall z \in V,$$
$$\varphi(x - y + z) = \varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(z).$$

Si $u_G \in L^2(V)$ et $v_G \in L^2(K - V)$, alors $u_G * v_G \in C(U)$ et si l'on pose $w_G = u_G * v_G$, on a $w_{G'} = u_{G'} * v_{G'}$ d'après la remarque 2 faite au début.

Soit u_G le produit de (χ_0, x) par la fonction caractéristique de V et soit v_G le produit de (χ_0, x) par la fonction caractéristique de $K - V$.

Posons

$$h = u_{G'} * v_{G'}.$$

Comme $u_{G'}$ et $v_{G'}$ appartiennent à $L^2(G')$, h est dans $A(G')$. Si $x' \in K'$, on a

$$h(x') = \int_{V'} (\chi_0, \varphi'(y)) \cdot (\chi_0, \varphi'(x') - \varphi'(y))\, dy = (\chi_0, \varphi'(x)) m(V'),$$

$m(V')$ étant la mesure de Haar de la partie $V' = \varphi(V)$ de G'.

Soit

$$h_{G'} = \frac{h}{m(V')}.$$

Sur K, la fonction h_G coïncide avec (χ_0, x). On a donc

$$\nu_{G'} = h_{G'}\mu_{G'}$$

d'où

$$|\hat{\nu}_{G'}(\chi)| = \left|\int_\Lambda \hat{h}_{G'}(\psi)\hat{\mu}_{G'}(\chi - \psi)\, d\psi\right| \leqslant \|\mu_{G'}\|_{pm} \int_\Lambda |\hat{h}_{G'}(\psi)|\, d\psi.$$

Les formules de Schwarz et de Parseval donnent

$$\begin{aligned}\int_\Lambda |\hat{h}_{G'}(\psi)|\, d\psi &= \frac{1}{m(V')}\int_\Lambda |\hat{u}_{G'}(\psi).\hat{v}_{G'}(\psi)|\, d\psi \\ &\leqslant \frac{1}{m(V')}\left[\int_\Lambda |\hat{u}_{G'}(\psi)|^2\, d\psi \int_\Lambda |\hat{v}_{G'}(\psi)|^2\, d\psi\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{m(V')}\left[\int_{G'} |u_{G'}(x)|^2\, dx \int_{G'} |v_{G'}(x)|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{m(K' - V')}{m(V')}}.\end{aligned}$$

On a donc trouvé une constante k, soit $\sqrt{\frac{m(K' - V')}{m(V)}}$, telle que

$$|\hat{v}_{G'}(\chi)| \leqslant k\|\mu_{G'}\|_{pm}$$

d'où

$$\|\mu_G\|_{pm} = \|v_{G'}\|_{pm} \leqslant k\|\mu_{G'}\|_{pm}.$$

Le lemme 5 est donc bien démontré.

La démonstration des propositions 3 et 4 est maintenant immédiate.

La proposition 3 découle des lemmes 1, 2 et 4.

La proposition 4 découle des lemmes 1, 3 et 5.

Proposition 5. — *Si f_G et $f_{G'}$ sont à supports compacts, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $f_G \in A(U)$;

b) $f_{G'} \in A(U')$.

Soit $K \subset U$ le support de f_G, $K' = \varphi(K)$ celui de $f_{G'}$.

Supposons $f_G \in A(U)$, c'est-à-dire $f_G \in A(K)$.

Les propositions 2 et 4 impliquent que les applications

$$\begin{array}{llll} \mu_{G'} \to \mu_G & \text{de} \quad M_0(V') & \text{sur} & M_0(V), \\ \mu_G \to f_G\mu_G = \nu_G & \text{de} \quad M_0(V) & \text{dans} & M_0(V), \\ \nu_G \to \nu_{G'} = f_{G'}\mu_{G'} & \text{de} \quad M_0(V) & \text{sur} & M_0(V'), \end{array}$$

$V \subset U$ désignant un voisinage compact de K, $V' = \varphi(V)$, sont bornées au sens des normes $\| \quad \|_{pm}$. Il en est donc ainsi de leur composée $\mu_{G'} \to f_{G'}\mu_{G'}$ de $M_0(V')$ dans $M_0(V')$, ce qui, en vertu de la proposition 2, implique

$$f_{G'} \in A(U').$$

Proposition 6. — *Soit* K *compact*, $K \subset U$, $K' = \varphi(K)$.

L'application $f_G \to f_{G'}$ *de* A(K) *sur* A(K') *est un isomorphisme topologique d'espaces vectoriels normés.*

Il suffit de montrer qu'il existe une constante M, ne dépendant que de K, telle que l'on ait

$$\|f_{G'}\| \leqslant M\|f_G\|.$$

Soit V un voisinage compact de K, contenu dans U, choisi une fois pour toutes, et soit $V' = \varphi(V)$, voisinage de K', contenu dans U'.

D'après la proposition 2, il existe une constante m (resp. m') dépendant uniquement de K et de V telle que la norme N (resp. N') de l'application

$$\begin{array}{llll} \mu_G \to f_G\mu_G & \text{de} \quad M_0(V) & \text{dans} & M_0(V) \\ (\text{resp. } \mu_{G'} \to f_{G'}\mu_{G'} & \text{de} \quad M_0(V') & \text{dans} & M_0(V')) \end{array}$$

vérifie

$$m\|f_G\| \leqslant N \leqslant \|f_G\|$$
$$(\text{resp. } m'\|f_{G'}\| \leqslant N' \leqslant \|f_G\|).$$

D'après la proposition 4, il existe des constantes k et k' ne dépendant que de V, telles que l'on ait

$$\begin{array}{l} \|\mu_G\|_{pm} \leqslant k\|\mu_{G'}\|_{pm} \\ \|\mu_{G'}\|_{pm} \leqslant k'\|\mu_G\|_{pm} \end{array} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \mu_G \in M_0(V) \\ \mu_{G'} \in M_0(V'). \end{cases}$$

On a alors

$$N = \sup_{M_0(V)} \frac{\|f_G\mu_G\|_{pm}}{\|\mu_G\|_{pm}} \geqslant \sup_{M_0(V')} \frac{1}{kk'} \frac{\|f_{G'}\mu_{G'}\|_{pm}}{\|\mu_{G'}\|_{pm}} = \frac{N'}{kk'}.$$

On en déduit

$$N' \leqslant kk'N$$

soit

$$m'\|f_{G'}\| \leqslant N' \leqslant kk'N \leqslant kk'\|f_G\|.$$

On a donc bien trouvé une constante $M = \dfrac{kk'}{m'}$ telle que

$$\|f_{G'}\| \leqslant M\|f_G\|.$$

Ceci démontre la proposition 6.

Nous allons maintenant donner quelques conséquences des propositions établies ci-dessus. Les notations G, G', U, U', φ sont conservées.

Proposition 7. — *Soit* K *compact*, $K \subset U$, $K' = \varphi(K)$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) K *est un ensemble de Helson dans* G;

b) K' *est un ensemble de Helson dans* G'.

On dit qu'un compact K d'un groupe G est de Helson si toute fonction continue $K \to C$ est la restriction à K d'une fonction de A(G).

Supposons que K soit de Helson.

Soit f' une fonction continue sur K', et $f = f' \circ \varphi_{|K}$. f est continue sur K, donc il existe $g \in A(G)$ telle que

$$f = g_{|K}.$$

On peut trouver $\alpha \in A(G)$ à support compact, telle que $\alpha = 1$ sur K, $\alpha = 0$ hors de U. La fonction $h_G = \alpha g$ appartient à A(U) et est à support compact.

On a

$$f = h_{G|K}, \qquad f' = h_{G'|K'}.$$

Comme, d'après la proposition 5, $h_{G'}$ appartient à A(U'), il en résulte que K' est de Helson.

Proposition 8. — *Soit* K *compact*, $K \subset U$, $K' = \varphi(K)$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) K *est un ensemble de synthèse spectrale dans* G;

b) K' *est un ensemble de synthèse spectrale dans* G'.

Soit I(K) l'idéal fermé de A(G) formé des fonctions nulles sur K, et soit $I_0(K)$ l'idéal (non fermé en général) des fonctions de A(G) nulles au voisinage de K. Soient de même K′, I(K′), $I_0(K')$.

Dire que K est de synthèse spectrale équivaut à dire que

$$\overline{I_0(K)} = I(K).$$

Supposons K de synthèse spectrale.

Soit $f' \in I(K')$: il faut montrer que l'on a $f' \in \overline{I_0(K')}$.

Soit V un voisinage compact de K, $V \subset U$, $V' = \varphi(V)$, et soit W un voisinage compact de V, $W \subset U$, $W' = \varphi(W)$.

On peut trouver $\alpha_{G'} \in A(G')$, à support compact, égale à 1 sur V et à 0 hors de W.

Alors $f' - \alpha_{G'}f' \in I_0(K')$, et il suffit de montrer que la fonction (à support dans W′) $g_{G'} = \alpha_{G'}f'$ appartient à $\overline{I_0(K')}$.

D'après la proposition 5, $g_G \in I(K)$. Il existe donc une suite $\{g^{(n)}\}$ de fonctions de $I_0(K)$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} ||g^{(n)} - g_G|| = 0,$$

ce qui entraîne, en posant $h_G^{(n)} = \alpha_G g^{(n)}$,

$$\lim_{n\to\infty} ||h_G^{(n)} - \alpha_G g_G|| = 0,$$

d'où, en remarquant que $h_G^{(n)} \in A(W)$ et en appliquant la proposition 6,

$$\lim_{n\to\infty} ||h_{G'}^{(n)} - \alpha_{G'} g_{G'}|| = 0.$$

On a d'autre part $h_G^{(n)} \in I_0(K)$, donc $h_{G'}^{(n)} \in I_0(K')$ et la dernière relation écrite signifie que $\alpha_{G'}g_{G'} \in \overline{I_0(K')}$. Or on a

$$g_{G'} = \alpha_{G'}g_{G'} + (1 - \alpha_{G'})g_{G'}.$$

Comme $(1 - \alpha_{G'})g_{G'} \in I_0(K')$, il en résulte que l'on a bien $g_{G'} \in \overline{I_0(K')}$, donc $f' \in \overline{I_0(K')}$.

Ceci démontre que le compact K′ est un ensemble de synthèse spectrale dans G′.

PROPOSITION 9. — *Soient* G *et* G′ *deux groupes abéliens localement compacts localement isomorphes. Soit* $I_0(G)$ (*resp.* $I_0(G')$) *l'idéal — non fermé en général — de* A(G) (resp. A(G′)) formé des fonctions nulles au voisinage de 0.

Alors les algèbres $A_0(G) = A(G)/I_0(G)$ *et* $A_0(G')/I_0(G')$ *sont isomorphes.*

Remarquons que $A_0(G)$ et $A_0(G')$ ne sont pas considérées comme les algèbres topologiques.

Soient U et U′ des voisinages ouverts de 0 dans G et G′ respectivement, φ un homéomorphisme $U \to U'$ définissant un isomorphisme local de G vers G′.

Soit K un voisinage compact de 0 dans G, $K \subset U$, $K' = \varphi(K)$.

On peut trouver une fonction $\alpha \in A(G)$ à support contenu dans K, égale à 1 au voisinage de 0.

Quelle que soit $f \in A(G)$, on a $\alpha f \in A(K)$ et $f - \alpha f \in I_0(G)$, donc f et αf définissent le même élément dans $A_0(G)$.

Il en résulte que l'on a un isomorphisme entre

$$A_0(G) = A(G)/I_0(G) \qquad \text{et} \qquad A(K)/I_0(G) \cap A(K).$$

D'après la proposition 5, l'application $f_G \to f_{G'}$ est un isomorphisme de A(K) sur A(K′). De plus, on voit immédiatement que si $f_G \in I_0(G) \cap A(K)$, alors $f_{G'} \in I_0(G') \cap A(K')$.

De là résulte que les algèbres $A_0(G)$ et $A_0(G')$ sont isomorphes.

Il serait intéressant de savoir si la réciproque de cette proposition est vraie, c'est-à-dire si chaque fois que les algèbres $A_0(G)$ et $A_0(G')$ sont isomorphes, les groupes G et G′ sont localement isomorphes.

On voit assez facilement qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $A_0(G)$ soit isomorphe à C, corps des nombres complexes, est que le groupe G soit discret. Comme deux groupes discrets sont toujours localement isomorphes, la réciproque de la proposition 9 est vraie dans ce cas particulier.

BIBLIOGRAPHIE

N. Bourbaki, Intégration, chapitre 7, Hermann, Paris (1963).

L. Pontrjagin, Topological Groups, *Princeton University Press*, 1946.

W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, *Interscience Publishers*, New York (1962).

R. Salem, Algebraic Numbers and Fourier Analysis, *Heath Mathematical Monographs*, Boston (1963).

N. Wiener, The Fourier Integral and certain of its Applications, *Cambridge University Press* (1933).

N. B. — Après avoir achevé la rédaction de ce travail, j'ai appris que certains résultats en rapport avec ceux présentés ici avaient été obtenus par Karel De Leeuw et Carl Herz. Ils ont fait l'objet d'une note (*C. R. Acad. Sci.*, Paris, T. 257, 1963, p. 3110) et doivent paraître dans *Illinois Journal of Mathematics* sous le titre : « An Invariance Property of Spectral Synthesis ».

Manuscrit reçu le 14 janvier 1965

René Spector,
5, Villa des Gobelins,
Paris (13e).