ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUIDO STAMPACCHIA

Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 1 (1965), p. 189-257

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_1_189_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 1 (1965), 189-258.

LE PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS DISCONTINUS [1]

par Guido STAMPACCHIA

On se donne un opérateur elliptique du second ordre à structure de divergence

$$\text{(0.1)} \qquad \mathrm{L}u = -(a_{ij}u_{x_i})_{x_j}$$

où les coefficients $a_{ij}(a_{ij} = a_{ji})$ sont des fonctions mesurables et bornées dans un ouvert borné Ω de R^n, qui satisfont à la condition d'ellipticité suivante :

$$\text{(0.2)} \qquad \nu^{-1}|\xi|^2 \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \nu|\xi|^2 ; \qquad |\xi|^2 = \xi_i\xi_i$$

ν étant une constante $\geqslant 1$. Les symboles de sommation sont toujours sous-entendus.

L'opérateur L coïncide avec l'opérateur de Laplace si $\nu = 1$. Le but de la théorie est l'étude des généralisations aux opérateurs L des problèmes qui se posent pour les fonctions harmoniques ou sous-harmoniques dans la théorie du potentiel.

On va considérer le problème de Dirichlet. Grâce à la théorie variationnelle des problèmes aux limites pour les équations du type elliptique, développée d'une façon très générale au cours de ces dernières années, on peut résoudre, dans un sens faible, le problème de Dirichlet, quel que soit l'ouvert borné Ω.

Soit $\partial\Omega$ la frontière de Ω et $\bar{\Omega}$ sa fermeture. Soit $\mathrm{H}^1(\Omega)$ le complété de l'espace des fonctions continûment dérivables dans $\bar{\Omega}$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} = \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)},$$

[1] Travail subventionné en partie par U.S. Air Force Office (Grant AF EOAR 65–42)

et soit $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ des fonctions de $\mathscr{D}(\Omega)$, indéfiniment dérivables à support compact dans Ω.

Le problème de Dirichlet, dans la théorie variationnelle, a la forme suivante:

On se donne une fonction h de $H^1(\Omega)$ et l'on cherche une fonction de $H^1(\Omega)$ (solution faible) telle que:

$$\int_\Omega a_{ij} u_{x_i} \phi_{x_j}\, dx = 0 \qquad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

de façon que $u - h \in H_0^1(\Omega)$.

Soit u une distribution qui appartient à $H_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)$ (i.e., la restriction de u à chaque ouvert Ω' relativement compact de Ω appartient à $H^1(\Omega')$). On dit que $u \in H^1(\Omega)[\in H_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)]$ est une sous-solution [locale] par rapport à l'opérateur L si, quelle que soit $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, positive dans Ω, on a

$$\int_\Omega a_{ij} u_{x_i} \phi_{x_j}\, dx \leqslant 0.$$

$u \in H^1(\Omega)[\in H_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)]$ est une sur-solution [locale] si $-u$ est une sous-solution [locale]. Si u est, en même temps, une sous-solution locale et une sur-solution locale, on dit que u est une solution locale de l'équation $\mathrm{L}u = 0$.

Grâce à un théorème de De Giorgi [3], une solution locale de $\mathrm{L}u = 0$ est une fonction continue dans Ω.

Soit maintenant h définie sur $\partial\Omega$ et continue $[h \in C^0(\partial\Omega)]$. Il existe une application $u = \mathrm{B}(h)$ qui à chaque $h \in C^0(\partial\Omega)$ fait correspondre une solution locale (et donc continue dans Ω) qui satisfait aux conditions suivantes

i) Principe du maximum, c'est-à-dire:

$$\min_{\partial\Omega} h \leqslant \min_{\Omega} \mathrm{B}(h) \leqslant \max_{\Omega} \mathrm{B}(h) \leqslant \max_{\partial\Omega} h.$$

ii) Si h peut être prolongée sur Ω à une fonction de $H^1(\Omega)$ (il suffit, en fait, de $C^1(\bar{\Omega})$), alors la solution locale correspondante coïncide avec la solution donnée par la méthode variationnelle.

L'application $\mathrm{B}(h)$ résout le problème de Dirichlet au sens de la théorie du potentiel.

On dit qu'un point $y \in \partial\Omega$ est régulier par rapport à l'opérateur L si l'on a:

$$\lim_{x \to y} \mathrm{B}(h)(x) = h(y)$$

quelle que soit la fonction h continue sur $\partial\Omega$.

On démontre qu'un point $y \in \partial\Omega$ est régulier par rapport à l'opérateur L si et seulement si y est régulier par rapport à l'opérateur de Laplace.

Ce résultat a été démontré dans un article paru en 1963 par W. Littman, G. Stampacchia et H. Weinberger [8].

Dans cet article, en considérant la régularité fine des solutions faibles d'un problème aux limites des équations elliptiques du second ordre, on a été conduit à étudier plusieurs problèmes de la théorie du potentiel.

On a, par exemple, démontré qu'il existe une fonction de Green $g(x, y)$ pour le problème de Dirichlet relatif à l'opérateur L. La fonction de Green a une singularité polaire, au point $y = x$, d'ordre $n - 2$ $(n > 2)$ comme dans le cas de l'opérateur de Laplace.

Les potentiels

$$\int g(x, y)\, d\mu(y),$$

μ étant une fonction d'ensemble, à variation bornée, se présentent comme des solutions faibles (d'une manière à préciser), nulles sur $\partial\Omega$, du problème de Dirichlet pour l'équation :

$$\mathrm{L}u = \mu.$$

Il se présente, d'une facon très naturelle, le problème de généraliser ces résultats à un opérateur elliptique du second ordre du type

$$\mathrm{L}u = -(a_{ij}u_{x_i} + d_j u)_{x_j} + (b_i u_{x_i} + cu). \tag{0.3}$$

Les coefficients satisfont aux hypothèses suivantes

$$\nu|\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \qquad \nu > 0, \qquad \xi \in \mathbf{R}^n, \tag{0.4}$$

$$\begin{aligned} &|a_{ij}(x)| \leqslant \mathrm{M}, && b_i(x) \in \mathrm{L}^{n+\varepsilon}(\Omega), \\ &d_i(x) \in \mathrm{L}^{n+\sigma}(\Omega), && c(x) \in \mathrm{L}^{(n/2)+\sigma}(\Omega) \end{aligned} \tag{0.5}$$

où ε et σ sont des nombres positifs ou nuls, mais dans quelques théorèmes un ou tous les deux doivent être positifs.

On peut considérer, dans ces hypothèses, comme auparavant, les solutions dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, les solutions locales, les sous-solutions et les sur-solutions.

(Ces définitions sont précisées dans le paragraphe 1).

Mais dans cette généralisation, des difficultés nouvelles surgissent parce que la forme bilinéaire associée à l'opérateur (0.3) est coercitive seulement si les normes des coefficients b_i, d_i, c sont petites, (en particulier si la mesure de Ω est petite).

Pour étudier le cas général il faut utiliser aussi la théorie de Riesz-Fredholm.

Dans le paragraphe 3 on démontre le

Principe du maximum. Soit L *l'opérateur* (0.3) *satisfaisant aux conditions* (0.4) (0.5) (*avec* $\varepsilon = \sigma = 0$) *et tel, en plus, que l'on ait, au sens des distributions,*

$$c - (d_i)_{x_i} \geqslant c_0 > 0.$$

Alors une sous-solution [*resp. une sur-solution*] *vérifie l'inégalité suivante*

$$\max_{\Omega} u \leqslant \max(\max_{\partial\Omega} u, 0)$$

$$[\textit{resp.} \min_{\Omega} u \geqslant \min(\min_{\partial\Omega} u, 0)],$$

c_0 *pouvant être aussi nul si les normes des coefficients* b_i, d_i, c *dans* (0·5) *sont petites* (*ou si la mesure de* Ω *est petite*).

Dans le même paragraphe 3 on introduit la notion de capacité d'un ensemble par rapport à une forme bilinéaire et coercitive qui n'est pas nécessairement symétrique.

Dans le paragraphe 4 on revient sur des inégalités « a priori » pour les normes dans $L^p(\Omega)(2 \leqslant p < +\infty)$ des solutions du problème de Dirichlet pour l'équation $Lu = T$ qui ont été démontrées ailleurs par Stampacchia [14], [16], [17] et par Miranda [9] en donnant quelques précisions nouvelles.

Dans le paragraphe 5 on démontre des majorations locales des solutions (ou sous-solutions) des équations soit à l'intérieur, soit au bord de Ω. Ces majorations sont démontrées avec l'hypothèse (0.5) où $\varepsilon = \sigma = 0$ si l'on a $c - (d_i)_{x_i} \geqslant 0$ et où $\varepsilon = 0$, $\sigma > 0$ autrement.

Dans le paragraphe 7 on démontre la continuité hölderienne des solutions soit à l'intérieur, soit au bord de Ω en supposant que dans (0.5) on a $\varepsilon = 0$, $\sigma > 0$. On généralise ainsi le théorème de De Giorgi [3] et d'autres — de Morrey [10], de Stampacchia [15] et de Ladyzenskaja-Uralt'seva [7].

Dans les mêmes hypothèses on démontre dans le paragraphe 8 l'inégalité de Harnack pour les solutions positives en généralisant le théorème de Moser [11].

Dans le paragraphe 9 on démontre qu'il existe une fonction de Green $g(x, y)$ pour le problème de Dirichlet relatif à l'opérateur L. La fonction de Green est positive si $c - (d_i)_{x_i} \geqslant c_0 > 0$ et elle a une singularité polaire au point $x = y$ d'ordre $n - 2 (n > 2)$ comme dans le cas de l'opérateur de Laplace. On peut aussi introduire les potentiels

$$\int g(x, y)\, d\mu(y)$$

μ étant une fonction d'ensemble, à variation bornée.

Ici les techniques sont les mêmes que celles qui sont utilisées dans l'article de W. Littman, G. Stampacchia et H. F. Weinberger avec la seule différence que l'on utilise la notion de capacité généralisée auparavant.

En suivant alors la méthode de l'article précité on peut résoudre le problème de Dirichlet, au sens de la théorie du potentiel, aussi pour l'opérateur général (0.3) et on arrive encore à la conclusion qu'un point $y \in \partial\Omega$ est régulier par rapport à l'opérateur (0.3) si et seulement si y est régulier par rapport à l'opérateur de Laplace.

Plusieurs démonstrations sont données ici avec beaucoup de détails. J'ai utilisé un exposé fait l'année passée au Collège de France [21].

Il faut dire que dans les majorations du texte on indique souvent par la même lettre des constantes différentes.

Après la rédaction de cet article j'ai reçu une copie d'un article (à paraître) de Mme R. M. Hervé [4′] où elle a démontré que les solutions locales de $Lu = 0$ où L est donné par (0.1) constituent un système de fonctions harmoniques satisfaisant à l'axiomatique de M. Brelot.

On peut alors résoudre le problème de Dirichlet par la méthode de Perron–Wiener–Brelot. La solution ainsi obtenue coïncide avec celle construite dans l'article de Littman, Stampacchia et Weinberger.

Le même problème pourrait se poser a propos du présent article.

Je dois dire que, en même temps, j'ai reçu une copie d'un article [13′] par James Serrin, faisant suite à un travail qui vient de paraître sur l'allure locale des solutions d'équations quasi-linéaires [13].

Dans l'article à paraître [13′] l'équation (0.3) est considérée comme cas particulier des équations quasi-linéaires envisagées.

Dans ce cas, quelques résultats du présent article sont communs avec ceux de Serrin.

1. Quelques définitions.

a) On considérera toujours des fonctions à valeurs réelles et les espaces de Banach considérés seront toujours des espaces de Banach réels.

Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ et de fermeture $\bar{\Omega}$.

$\mathscr{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω, avec la topologie usuelle.

$C^0(\bar{\Omega})$ est l'espace (de Banach) des fonctions continues dans $\bar{\Omega}$, normé par

$$\|u\|_{C^0(\Omega)} = \max_{\bar{\Omega}} |u|.$$

$C_\alpha(\bar{\Omega})$ est l'espace (de Banach) des fonctions qui satisfont à une condition d'Hölder d'exposant α, $0 < \alpha \leqslant 1$, avec la norme

$$\|u\|_{C_\alpha(\bar{\Omega})} = \max_{\bar{\Omega}} |u| + [u]_{\alpha,\Omega}$$

où

$$[u]_{\alpha,\Omega} = \sup_{x',x''\in\bar{\Omega}} \frac{|u(x') - u(x'')|}{|x' - x''|^\alpha}.$$

$C^k(\bar{\Omega})$ est l'espace (de Banach) des fonctions continues dans $\bar{\Omega}$ ainsi que ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant k$.

$C_0^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $C^k(\Omega)$ à support compact dans Ω.

$L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ sommables sur Ω. On pose:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega |u|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

$H^{1,p}(\Omega)(p \geqslant 1)$ est l'espace (de Banach) complété de $C^1(\bar{\Omega})$ pour la topologie induite par la norme:

$$\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)} ;$$

$H_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence de $C_0^1(\Omega)$ dans $H^{1,p}(\Omega)$. Les deux normes

$$\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)} \equiv \|u\|_{H_0^{1,p}(\Omega)} \text{ et } \|u\|_{H^{1,p}(\Omega)}$$

sont équivalentes.

$H_0^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable et réflexif dont le dual $H^{-1,p'}(\Omega)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$ est isomorphe à l'espace des distributions qui sont dérivées premières de fonctions dans $L^p(\Omega)$.

$H_{loc}^{1,p}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω telles que pour chaque ouvert Ω' avec $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, la restriction de u à $\Omega' : u/\Omega'$, appartient à $H^{1,p}(\Omega')$.

Si $p = 2$ on écrit aussi $H^1(\Omega)$ (resp. $H_0^1(\Omega)$, $H_{loc}^1(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$) au lieu de $H^{1,2}(\Omega)$ (resp. $H_0^{1,2}(\Omega)$, $H_{loc}^{1,2}(\Omega)$, $H^{-1,2}(\Omega)$).

DÉFINITION 1.1. — *Soit* E *un sous-ensemble de* Ω; *on dira que* $u \in H^{1,p}(\Omega)$ *satisfait à l'inégalité* $u \geqslant 0$ *sur* E *au sens de* $H^{1,p}(\Omega)$ *s'il existe une suite (de Cauchy)* $\{u_m\}$ *de* $C^1(\bar{\Omega})$ *qui converge vers* u *dans* $H^{1,p}(\Omega)$ *et telle que* $u_m \geqslant 0$ *sur* E.

En général, cette définition ne coïncide pas avec la notion de fonction *positive presque-partout* (p.p). Si toutefois, E est p. ex., une boule contenue dans Ω, alors, par régularisation, « positive p.p.. sur E » entraîne « positive au sens de $H^{1,p}(\Omega)$ sur E ».

Evidemment pour $k \in \mathbf{R}$, on dira que $u \geqslant k$ sur E au sens de $H^{1,p}(\Omega)$ si $u - k \geqslant 0$ sur E au sens de $H^{1,p}(\Omega)$, et on dira $u \leqslant k$ sur E au sens de $H^{1,p}(\Omega)$ si $-u \geqslant -k$ sur E au sens de $H^{1,p}(\Omega)$; on dira aussi que $u = k$ sur E au sens de $H^{1,p}(\Omega)$ si à la fois $u \geqslant k$ et $u \leqslant k$ sur E au sens de $H^{1,p}(\Omega)$.

On aura besoin du lemme suivant.

LEMME 1.1. — *Si* $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ *et si* $t \to G(t)$ *est une fonction uniformément lipschitzienne* (c.à.d.: $|G(t') - G(t'')| \leqslant K|t' - t''|$) *définie pour* $t \in \mathbf{R}$, *telle* que $G(0) = 0$, *alors* $G(u) \in H_0^{1,p}(\Omega)$ *et*

$$[G(u)]_{x_i} = G'(u)u_{x_i}.$$

La démonstration du lemme se trouve, p. ex., dans [21].

DÉFINITION 1.2. — *On dira que une fonction* $u(x) \in H^{1,p}(\Omega)$ *est bornée sur* $\partial\Omega$ *par* $\Phi(\in \mathbf{R})$ *si* $u \leqslant \Phi$ *sur* $\partial\Omega$ *au sens de* $H^{1,p}(\Omega)$. *Le plus petit des nombres* Φ *tels que* $u \leqslant \Phi$ *sur* $\partial\Omega$ *au sens de* $H^{1,p}(\Omega)$ *sera le maximum de u sur* $\partial\Omega$ *au sens de* $H^{1,p}(\Omega)$.

REMARQUE 1.1. — *Soit* $u \in H^{1,p}(\Omega)$ *avec* $|u| \leqslant d$ *sur* $\partial\Omega$ *au sens de* $H^{1,p}(\Omega)$; *si* $G(t)$ *est une fonction uniformément lipschitzienne définie pour* $t \in \mathbf{R}$ *telle que* $G(t) = 0$ *pour* $|t| \leqslant d$, *alors la conclusion du lemme* 1.1 *est encore vraie.*

Si $u(x) \in L^p(\Omega)$ et k est un nombre réel, on définit *les fonctions tronquées*

$$\{u\}^k = \begin{cases} u & \text{si} \quad u(x) \leqslant k \\ k & \text{si} \quad u(x) \geqslant k. \end{cases}$$

$$\{u\}_k = \begin{cases} u & \text{si} \quad u(x) \geqslant k \\ k & \text{si} \quad u(x) \leqslant k. \end{cases}$$

On a évidemment $\{u\}^k = \min(u, k)$, $\{u\}_k = \max(u, k)$ et donc, grâce au lemme 1.1, on a

LEMME 1.2.— i) *Si* $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $k \geqslant 0$ *alors* $\{u\}^k \in H_0^{1,p}(\Omega)$. ii) *Si* $u \in H^{1,p}(\Omega)$ *et* $u \leqslant \Phi$ *sur* $\partial\Omega$ *au sens de* $H^{1,p}(\Omega)$, *alors, pour* $k \geqslant \Phi$, $\{u\}^k - u$ *appartient à* $H_0^{1,p}(\Omega)$.

Dans la suite on indiquera par p' et p^* les nombres définis resp. par

$$\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}\,, \qquad p > 1$$

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}\,, \qquad 1 \leqslant p < n.$$

On utilisera les lemmes bien connus

LEMME 1.3.— *Si* $u \in H_0^{1,p}(\Omega)(1 \leqslant p < n)$ *alors* $u \in L^{p^*}(\Omega)$ *et*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant S \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}$$

où S *ne dépend pas de* Ω, *mais seulement de* p *et* n. Pour la démonstration voir [4], [12].

LEMME 1.4.— *Si* $u \in H^{1,p}(\Omega)(1 < p < n)$ *et* Ω *satisfait à la condition de cône (voir* [1]) *alors* $u \in L^{p^*}(\Omega)$ *et il existe une constante* C *telle que, l'on ait*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant C\left\{\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}\right\}.$$

b) Considérons l'opérateur différentiel (²)

$$(1.1) \qquad Lu = -(a_{ij}u_{x_i} + d_j u)_{x_j} + (b_i u_{x_i} + cu)$$

où a_{ij} sont fonctions à valeurs réelles, mesurables et bornées dans Ω. On suppose L *uniformément elliptique*, c.à.d. il existe une constante $\nu \geqslant 0$, telle que

$$(1.2) \qquad \nu|\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \qquad (x \in \Omega, \xi \in \mathbf{R}^n).$$

(²) Les sommes seront toujours sous-entendues.

On suppose que

$$(1.3)\qquad \begin{cases} |a_{ij}(x)| \leqslant M, \\ b_i(x), d_i(x) \in L^n(\Omega), & (i = 2, \dots, n) \\ c(x) \in L^{n/2}(\Omega). \end{cases}$$

On pose

$$(1.4)\qquad a(u, v) = \int_\Omega \{(a_{ij}u_{x_i} + d_j u)v_{x_j} + (b_i u_{x_i} + cu)v\}\, dx$$

et l'on démontre

LEMME 1.5.— i) *$a(u, v)$ est une forme bilinéaire dans*

$$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

ii) *Si Ω satisfait la condition de cône, alors $a(u, v)$ est une forme bilinéaire sur* $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Démonstration. — *i)* En effet, en utilisant le lemme 1.3 on a

$$\left|\int_\Omega a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}\, dx\right| \leqslant M\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

$$\left|\int_\Omega d_j u v_{x_j}\, dx\right| \leqslant \|d_j\|_{L^n(\Omega)}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\leqslant S\|d_j\|_{L^n(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

$$\left|\int_\Omega b_i u_{x_i} v\, dx\right| \leqslant S\|b_i\|_{L^n(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

$$\left|\int_\Omega cuv\, dx\right| \leqslant \|c\|_{L^{n/2}(\Omega)}\|u\|_{L^{2^*}}\|v\|_{L^{2^*}}$$

$$\leqslant S^2\|c\|_{L^{n/2}(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Donc il existe une constante K telle que,

$$(1.5)\qquad |a(u, v)| \leqslant K\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)},\ \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

ii) Puisque Ω satisfait à la condition de cône, on peut utiliser le lemme 1.4 et l'on a, d'une manière analogue :

$$|a(u, v)| \leqslant K\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

où K dépend de M, $\|b_i\|_{L^n}$, $\|d_i\|_{L^n}$, $\|c\|_{L^{n/2}}$ et de Ω.

COROLLAIRE DU LEMME 1.5.— *Soit* $u \in H^1(\tilde{\Omega})$ *fixé,* $\tilde{\Omega}$ *étant un ouvert borné de* $\mathbf{R}^n$ *tel que* $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$. *Alors* $a(u, v)$ *est une forme linéaire sur* $H_0^1(\Omega)$.

Soit $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Par partition de l'unité on peut choisir des fonctions α_s à support dans $\tilde{\Omega}$ telles que sur Ω l'on ait : $1 = \Sigma\alpha_s$. Alors

$$a(u, \varphi) = \Sigma a(\alpha_s u, \varphi).$$

Du lemme 1.5 *i*), on a

$$|a(\alpha_s u, \varphi)| \leqslant K \|\alpha_s u\|_{H_0^1(\tilde{\Omega})} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Donc, il existe une constante K′ telle que

$$|a(u, \varphi)| \leqslant K' \|u\|_{H^1(\tilde{\Omega})} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'où le corollaire. La forme $a(u, v)$ est dite la forme associée à l'opérateur L. L'opérateur L* dont la forme associée $a^*(u, v)$ est $a(v, u)$ est dit *l'opérateur adjoint de* L ; on trouve

$$(1.6) \qquad L^*u = -(a_{ji}u_{x_i} + b_j u)_{x_j} + (d_i u_{x_i} + cu).$$

Il faut remarquer que l'opérateur L* satisfait aux mêmes hypothèses (1.2), (1.3) que l'opérateur L.

Soit $T \in H^{-1}(\Omega)$; alors il existe $f_i \in L^2(\Omega)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) de façon que $T = -\sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$.

DÉFINITION 1.3.— *Soit* $T \in H^{-1}(\Omega)$; *alors la fonction* $u \in H^1(\Omega)$ *est dite une solution de l'équation*

$$(1.7) \qquad Lu = T = -\Sigma(f_i)_{x_i}$$

si, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, *on a*

$$(1.8) \qquad a(u, \varphi) = \int_\Omega f_i \varphi_{x_i}\, dx.$$

DÉFINITION 1.4.— *Une fonction* $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ *est une solution locale de* (1.7) *si pour toute* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *on a* (1.8).

DÉFINITION 1.5.— *Une fonction* $u \in H^1(\Omega)$ *est dite une sous-solution par rapport à l'équation* (1.7), *si pour tout* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *avec* $\varphi(x) \geqslant 0$ *sur* Ω, *on a*

$$(1.9) \qquad a(u, \varphi) \leqslant \int_\Omega f_i \varphi_{x_i}\, dx.$$

DÉFINITION 1.5′.— *Si* $f_i \equiv 0$ *on dira que* u *est une sous-solution par rapport à* L.

DÉFINITION 1.6.— *Une fonction* $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ *est dite une sous-solution locale de* (1.7) *si pour toute* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *et non négative dans* Ω, *on a* (1.9).

DÉFINITION 1.6'.— *Si* $f_i \equiv 0$ *on dira que* u *est une sous-solution locale par rapport à* L.

DÉFINITION 1.7.— *Une fonction* $u \in H^1(\Omega)[H^1_{loc}(\Omega)]$ *est dite une sur-solution* [*locale*] *de* (1.7) *si pour toute* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *et non négative dans* Ω, *on a*

$$a(u, \varphi) \geqslant \int_\Omega f_i \varphi_{x_i}\, dx. \tag{1.10}$$

DÉFINITION 1.7'. — u *est une sur-solution par rapport à* L *si* $-u$ *est une sous-solution.*

2. Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes.

Soit X un espace de Hilbert réel et soit U un sous-ensemble convexe fermé de X. Si $u \in U$, l'on indique par V_u le cône convexe qui projette, de l'origine de X, l'ensemble convexe $U - u$:

$$V_u \equiv \{v \in X | \exists \varepsilon > 0 : u + \varepsilon v \in U\}.$$

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire réelle, continue sur $X \times X$ et coercitive dans X, c.à.d.

$$a(v, v) \geqslant c\|v\|^2_X \qquad \forall v \in X \tag{2.1}$$

où c est une constante positive.

Soit f un point de X' (dual fort de X), $\langle f, v\rangle$ désignant la valeur de f en v.

THÉORÈME 2.1.— *Il existe un point* u *de* V *et un seul tel que*

$$a(u, v) \geqslant \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in V_u. \tag{2.2}$$

La démonstration du théorème est donnée dans [20].

COROLLAIRE DU THÉORÈME 2.1. — *Soit* $a(u, v)$ *une forme bilinéaire dans* $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, *telle que, pour* $g \in H^1(\Omega)$ *fixé,* $a(g, v)$ *soit continue sur* $H^1_0(\Omega)$ *et* $a(u, v)$ *soit coercitive sur* $H^1_0(\Omega)$, c.à.d.

$$a(v, v) \geqslant c \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Soit U *un ensemble convexe fermé de fonctions de* $H^1(\Omega)$ *telles que* $u - g \in H_0^1(\Omega)$. *Soit* $f \in H^{-1}(\Omega)$. *Alors il existe une fonction* $u \in U$ *et une seule telle qu'on ait*

$$a(u, v) \geqslant \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in V_u. \tag{2.3}$$

Démonstration. — L'ensemble $\tilde{U} = U - g$ est convexe et fermé dans $H_0^1(\Omega)$. La forme $\langle F, v \rangle = a(g, v) + \langle f, v \rangle$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$. Si $u \in U$ alors: $V_u \equiv \tilde{V}_{(u-g)}$, où $\tilde{V}_u$ est le cône qui projette $\tilde{U} - u$ de l'origine de $H_0^1(\Omega)$; en effet

$$\begin{aligned} V_u &= \{v \in H^1(\Omega) | \exists \varepsilon > 0 : u + \varepsilon v \in U\} \\ &= \{w \in H_0^1(\Omega) | \exists \varepsilon > 0 : u - g + \varepsilon w \in \tilde{U}\} = \tilde{V}_{(u-g)}. \end{aligned}$$

Grâce au théorème 2.1, il existe une fonction $\xi \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$a(\xi, \varphi) \geqslant \langle F, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \tilde{V}_\xi.$$

En posant $u = \xi - g$, on a

$$a(u, v) \geqslant \langle f, v \rangle \qquad \forall v \,\varepsilon\, V_u.$$

Donc le corollaire est démontré.

3. Application du théorème précédent.

a) Considérons l'opérateur (1.1) et la forme associée $a(u, v)$ définie par (1.4); les hypothèses (1.2) et (1.3) étant satisfaites.

On a alors les théorèmes suivantes.

THÉORÈME 3.1. — *Si* $\|b_i\|_{L^n(\Omega)}$, $\|d_i\|_{L^n(\Omega)}$, $\|c\|_{L^{n/2}(\Omega)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *sont suffisamment petits* (en particulier si la mesure de Ω est suffisamment petite), *la forme* $a(u, v)$ *est coercitive sur* $H_0^1(\Omega)$.

THÉORÈME 3.2. — *Il existe* $\bar{\lambda} > 0$ *tel que, pour chaque* $\lambda > \bar{\lambda}$, *la forme*

$$a(u, v) + \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)} \tag{3.1}$$

est coercitive sur $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration du théorème 3.1. — Soit $v \in H_0^1(\Omega)$; en utilisant l'inégalité de Hölder on a:

$$\begin{aligned} a(v, v) \geqslant \nu \|v_x\|_{L^2}^2 &- \|d_i\|_{L^n} \cdot \|v\|_{L^{2^*}} \cdot \|v_x\|_{L^2} \\ &- \|b_i\|_{L^n} \cdot \|v\|_{L^{2^*}} \cdot \|v_x\|_{L^2} - \|c\|_{L^{n/2}} \cdot \|v\|_{L^{2^*}}^2. \end{aligned}$$

où

$$\|v_x\|_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce aux inégalités de Sobolev (lemme 1.3) on a :

$$a(v, v) \geqslant \left\{ v - S \sum_{i=1}^{n} \|d_i\|_{L^n} - S \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_{L^n} - S^2 \|c\|_{L^{n/2}} \right\} . \|v_x\|_{L^2}^2.$$

Donc, si l'on a :

$$S\Sigma\|d_i\|_{L^n} + S\Sigma\|b_i\|_{L^n} + S^2\|c\|_{L^{n/2}} < \frac{v}{2}$$

(en particulier si la mesure de Ω est petite) on en déduit l'inégalité

$$a(v, v) \geqslant \frac{v}{2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \tag{3.2}$$

Le théorème 3.1 est démontré.

Pour la démonstration du théorème 3.2 nous avons besoin du lemme suivant

LEMME 3.1. — *Soit* $f \in L^p(\Omega) (p > 1)$ *et soit* ε *un nombre positif fixé; alors on peut écrire*

$$f = f' + f'' \tag{3.3}$$

avec f' *borné et* $f'' \in L^p(\Omega)$ *où*

$$\|f''\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon \text{ et } \sup |f'| < K(\varepsilon) \tag{3.4}$$

K *étant une fonction finie de* ε *pour* $\varepsilon > 0$.

Démonstration. — On pose

$$f' = \{f\}_{-k}^{k} = \begin{cases} k \text{ si } f \geqslant k \\ f \text{ si } |f| \leqslant k \\ -k \text{ si } f \leqslant -k \end{cases}$$

et $f'' = f - f'$. Puisque

$$\left\{ \int_\Omega |f''|^p \, dx \right\}^{1/p} \leqslant 2 \left\{ \int_{\{|f| \geqslant k\}} |f|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

on peut choisir $k = k(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\|f''\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$$

et, par conséquent,

$$\sup_\Omega |f'| \leqslant k(\varepsilon).$$

Remarque 3.1. — La fonction $K(\varepsilon)$ dépend de la fonction f, et pas seulement de la norme de f dans $L^p(\Omega)$. On peut choisir $K(\varepsilon)$ indépendant de f si f demeure dans un ensemble de fonctions « également sommables » de $L^p(\Omega)$. Ceci est verifié si f demeure dans $L^q(\Omega)$ avec $q > p$. En effet, puisque

$$\left(\int_\Omega |f''|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant 2\| f \|_{L^q} \cdot (\operatorname{mes}\{|f| \geqslant k\})^{1/p-1/q}$$

et

$$\operatorname{mes}\{|f| \geqslant k\} \leqslant \left(\frac{\|f\|_{L^q}}{k}\right)^q$$

on peut choisir $k = k(\varepsilon)$ dépendant seulement de

$$\|f\|_{L^q(\Omega)}.$$

Démonstration du théorème 3.2. — (cfr. [17]; voir aussi [9]). En utilisant le lemme précédent, on peut écrire les fonctions $b_i \in L^n(\Omega)$, $d_i \in L^n(\Omega)$, $c \in L^{n/2}(\Omega)$, comme sommes des fonctions b_i', d_i', c' bornées et de fonctions ayant respectivement des normes dans $L^n(\Omega)$, $L^n(\Omega)$ et $L^{n/2}(\Omega)$ plus petites que ε, ε étant un nombre positif que l'on fixera plus tard. Par conséquent on peut décomposer la forme $a(u, v)$ en deux: $a'(u, v)$ et $a''(u, v)$ où $a'(u, v)$ est la forme qu'on obtient en remplaçant b_i, d_i, c par les fonctions bornées b_i', d_i', c' et

$$a''(u, v) = a(u, v) - a'(u, v).$$

Alors on a, pour chaque $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$a''(v, v) \leqslant 2\varepsilon \|v\|_{L^{2^*}} \cdot \|v_x\|_{L^2} + \varepsilon \|v\|_{L^{2^*}}^2.$$

et, d'après les inégalités de Sobolev (lemme 1.3)

$$|a''(v, v)| \leqslant \varepsilon(2S\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + S^2\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2) = \varepsilon S(2 + S)\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

On peut alors fixer ε de façon que

$$(3.5) \qquad |a''(v, v)| \leqslant \frac{\nu}{4} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

ε étant ainsi fixé, la forme $a'(u, v)$, à coefficients bornés, est aussi fixée. La démonstration du théorème 3.2 sera achevée, si l'on démontre qu'il existe $\bar{\lambda}$ tel que $\lambda > \bar{\lambda}$ on a

$$(3.6) \qquad a'(v, v) + \lambda(v, v)_{L^2(\Omega)} \geqslant \frac{\nu}{2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En effet, si l'on a (3.6), alors, d'après (3.5), l'on en déduit

$$a(v,v) + \lambda(v,v)_{L^2(\Omega)} \geqslant \frac{\nu}{4}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Soient B, C, D des nombres tels que

$$|b_i'| \leqslant B,\ |c'| \leqslant C,\ |d_i'| \leqslant D \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Alors, on a :

$$\int_\Omega a_{ij} v_{x_i} v_{x_j}\, dx \geqslant \nu \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

et

$$\left|\int_\Omega (b_i' + d_i') v v_{x_i} \,.\, dx\right| \leqslant (B + D)\|v\|_{L^2} \,.\, \|v_x\|_{L^2}$$

$$\leqslant \frac{\nu}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{4\nu}(B + D)^2\|v\|^2_{L^2},$$

$$\left|\int_\Omega c' v^2\, dx\right| \leqslant C\|v\|^2_{L^2}.$$

Par conséquent

$$a'(v, v) + \lambda(v, v)_{L^2(\Omega)} \geqslant \frac{\nu}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

$$+\left\{\lambda - C - \frac{1}{4\nu}(B + D)^2\right\}\|v\|^2_{L^2}.$$

Donc, (3.6) a lieu si

$$\lambda > \bar{\lambda} = C + \frac{1}{4\nu}(B + D)^2. \tag{3.7}$$

D'après les théorèmes 3.1, 3.2 et le corollaire du théorème 2.1 on peut vérifier le théorème suivant :

THÉORÈME 3.3. — *Soit* $g \in H^1(\tilde{\Omega})$ *avec* $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$, $T \in H^{-1}(\Omega)$ *(donc*

$$T = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$$

avec $f_i \in L^2(\Omega)$*) et* Lu *l'opérateur elliptique* (1.1), *les hypothèses* (1.2), (1.3) *étant vérifiées ; alors il existe une solution* $u \in H^1(\Omega)$ *et une seule* *du problème de Dirichlet (au sens variationnel)*

$$(3.8)\qquad \begin{cases} Lu + \lambda u = \Sigma(f_i)_{x_i} = T \\ u - g \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

si l'on a l'une ou l'autre des hypothèses suivantes:

i) λ *est plus grand qu'une constante convenable* $\bar{\lambda}$,

ii) λ *est quelconque, mais la mesure de* Ω *est suffisamment petite.*

Démonstration. — La forme $a(u, v) + \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)}$, associée à l'opérateur $Lu + \lambda u$, est bilinéaire dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et, grâce au corollaire du lemme 1.5, $a(g, v) + \lambda(g, v)_{L^2(\Omega)}$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

D'après les théorèmes 3.1 et 3.2, $a(u, v) + \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)}$ est aussi coercitive sur $H_0^1(\Omega)$. On peut utiliser le corollaire du théorème 2.1 avec $U \equiv \{v : v - g \in H_0^1(\Omega)\}$ où $V_u \equiv H_0^1(\Omega)$. On démontre le théorème, en remarquant que, $V_u \equiv H_0^1(\Omega)$ étant un espace vectoriel, au lieu de (2.3), on trouve

$$(3.9)\qquad a(u, v) + \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)} = \langle T, v\rangle \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Grâce au théorème précédent (pour $g = 0$) on vient de définir un opérateur G_λ linéaire et continu de $H^{-1}(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$ qui résoudra le problème de Dirichlet pour l'équation $Lu + \lambda u = T$, avec des données nulles au bord, c.à.d.

$$(3.10)\qquad \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ a(u, v) + \lambda(u, v)_{L^2} = \langle T, v\rangle. \end{cases}$$

Cet opérateur est défini, jusqu'à présent, si i) λ est suffisamment grand ou ii) λ est quelconque, mais les normes

$$\|b_i\|_{L^n}, \qquad \|d_i\|_{L^n}, \qquad \|c\|_{L^{n/2}}$$

sont suffisamment petites.

Le problème (3.10) est équivalent au problème suivant

$$(3.11)\qquad \begin{cases} u \in L^2(\Omega) \\ u + (\lambda - \bar{\lambda})G_{\bar{\lambda}}u = G_{\bar{\lambda}}T. \end{cases}$$

De (3.10) on déduit (3.11) par l'opérateur $G_{\bar{\lambda}}$. De (3.11) on déduit, d'abord, que $u \in H_0^1(\Omega)$ et, ensuite, par l'opérateur $L + \lambda$ on obtient (3.10). Puisque l'opérateur $G_{\bar{\lambda}}$ est complètement continu dans $L^2(\Omega)$, la théorie de Riesz-Fredholm est applicable à (3.11). Donc on a

THÉORÈME 3.4. — *Les hypothèses* (1.2), (1.3) *étant vérifiées, l'équation elliptique*

$$\mathrm{L}u + \lambda u = \mathrm{T}$$

admet une solution unique $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *quel que soit* T *dans* $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, *si* λ *n'appartient pas à un ensemble discret et dénombrable* Λ *de valeurs propres.*

Si $\lambda \in \Lambda$, *les problèmes homogènes*

$$\mathrm{L}u + \lambda u = 0, \qquad u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \tag{3.12}$$

$$\mathrm{L}^*u + \lambda u = 0, \qquad u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \tag{3.12'}$$

ont des solutions $\not\equiv 0$, *les deux espaces formés de ces solutions ayant la même dimension finie. Pour tout* λ, *le théorème de l'alternative est valable.*

Remarque 3.2. — Le problème de Dirichlet (3.11) admet une solution et une seule, pour $\mathrm{T} \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, si et seulement si le problème (3.12) ou le problème (3.12′) admet seulement la solution nulle.

Remarque 3.3 — Le problème de Dirichlet (3.8) admet une solution et une seule, si $\lambda \notin \Lambda$. En effet, si l'on pose $v = u - g$ on est ramené à résoudre le problème

$$\begin{cases} \mathrm{L}v + \lambda v = \mathrm{T} - (\mathrm{L}g + \lambda g) \\ v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.13}$$

b) On démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 3.5. — *Soit* L *un opérateur elliptique* (1.1) *satisfaisant à* (1.2), (1.3) *et tel que la forme* $a(u, v)$ *associée soit coercitive sur* $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ (*voir théorèmes* 3.1, 3.2). *Si* u *et* v *sont deux sous-solutions par rapport à* L *alors*

$$w = \max(u, v)$$

est une sous-solution par rapport à L.

Démonstration. — Soit U l'ensemble des $\vartheta \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ telles que $\vartheta(x) \leqslant w(x)$ dans Ω et $\vartheta(x) = w(x)$ sur $\partial\Omega$. U est convexe et fermé. Grâce au corollaire du théorème 2.1, il existe un $\eta \in \mathrm{U}$ et un seul tel que

$$a(\eta, \varphi) \geqslant 0 \qquad \forall \varphi \in \mathrm{V}_\eta. \tag{3.14}$$

Evidemment $V_\eta \in H_0^1(\Omega)$ contient le cône des fonctions $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ avec $\psi(x) \leqslant 0$ sur Ω; alors de (3.14) on déduit

$$a(\eta, \varphi) \leqslant 0 \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

avec $\varphi(x) \geqslant 0$ dans Ω et donc η est une sous-solution par rapport à L, avec $\eta \leqslant w$. Si l'on pose $\zeta = \max(u, \eta) \in U$ alors l'on a: $\eta = \zeta$. En effet, puisque $\zeta \in U$ on a $\zeta - \eta \in V_\eta \subset H_0^1(\Omega)$ et

$$a(\eta, \zeta - \eta) \geqslant 0.$$

Mais on a aussi

$$a(\zeta, \zeta - \eta) = a(u, \zeta - \eta) \leqslant 0$$

puisque, si $\zeta \geqslant \eta$ il découle $\zeta = u$ et u est une sous-solution. Par conséquent

$$a(\zeta - \eta, \zeta - \eta) \leqslant 0$$

d'où $\zeta = \eta$. Donc $u \leqslant \eta$. D'une manière analogue, l'on trouve $v \leqslant \eta$ et, par conséquent: $w = \max(u, v) \leqslant \eta$. Il en découle $w = \eta$ et le théorème est démontré.

On a le corollaire suivant

COROLLAIRE DU THÉORÈME 3.5. — *Soit u une sous-solution par rapport à l'opérateur elliptique* L; *on suppose que les hypothèses du théorème* 3.5 *soient vérifiées et, de plus, que, au sens des distributions, on ait*

$$c - \sum (d_i)_{x_i} \geqslant 0.$$

Alors, pour chaque k non négatif:

$$\{u\}_k - k = u - \{u\}^k = \max(u - k, 0)$$

est une sous-solution par rapport à L.

Il suffit de démontrer qu'une constante k positive est une sur-solution. En effet, on a

$$a(k, \varphi) = k \int_\Omega \{c\varphi + d_i \varphi_{x_i}\} \, dx = k\langle c - (d_i)_{x_i}, \varphi \rangle \geqslant 0$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $\varphi(x) \geqslant 0$ sur Ω. Donc $L(u - k) = Lu - Lk \leqslant 0$. On peut déduire une première forme du principe du maximum.

THÉORÈME 3.6. — *On se place dans les hypothèses du corollaire du théorème* 3.5; *si u est une sous-solution par rapport à* L, *alors on a*

$$\max_\Omega u \leqslant \max(\max_{\partial\Omega} u, 0).$$

Démonstration. — Soit $\Phi = \max(\max_{\partial\Omega} u, 0)$, alors grâce au corollaire précédent $\{u\}_\Phi - \Phi$, qui appartient à $H_0^1(\Omega)$ (voir lemme 1.2), est une sous-solution par rapport à L. Alors

$$a(\{u\}_\Phi - \Phi, \varphi) \leqslant 0$$

$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ avec $\varphi \geqslant 0$ sur Ω et, en prolongeant par continuité, on a aussi

$$a(\{u\}_\Phi - \Phi, \{u\}_\Phi - \Phi_x) \leqslant 0.$$

Donc, par la coercitivité sur $H_0^1(\Omega)$:

$$\|\{u\}_\Phi - \Phi\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$$

d'où $\{u\}_\Phi = \Phi$, c'est à dire

$$u \leqslant \Phi.$$

Avec le même raisonnement on a:

THÉORÈME 3.7. — *Dans les hypothèses du théorème précédent, si u est une sur-solution par rapport à* L, *alors on a*

$$\min_\Omega u \geqslant \min(\min_{\partial\Omega} u, 0).$$

Le principe du maximum peut être amélioré de la manière suivante.

THEORÈME 3.8. — *Supposons que les hypothèses* (1.2) *et* (1.3) soient *satisfaites et qu'en plus, on ait:*

$$c - \sum (d_i)_{x_i} \geqslant c_0 > 0 \qquad (c_0 = \text{constante}).$$

Alors une sous-solution [une sur-solution] par rapport à L *satisfait au principe du maximum*

$$\max_\Omega u \leqslant \max(\max_{\partial\Omega} u, 0)$$

$$\left[\min_\Omega u \geqslant \min(\min_{\partial\Omega} u, 0)\right].$$

Remarque. — On démontre le théorème en supposant que u soit borné supérieurement. Dans la suite on démontrera cela (théorème 4.1).

Avant de démontrer le théorème on a besoin du lemme suivant:

LEMME 3.2. — *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème* 3.8, *si u est une sous-solution, non négative et bornée, par rapport à* L, *de* $H_0^1(\Omega)$, *alors* $v = u^p$ $(p > 2)$ *est une sous-solution par rapport à l'opérateur*

$$-(a_{ij}v_{x_i})_{x_j} + (b_i - d_i)v_{x_i} + pc_0 v.$$

Démonstration. — Puisque u est non négative et bornée on a: $u^{p-1} \in H_0^1(\Omega)$ et pu^{p-1} $Lu \leqslant 0$. Mais, on a

$$pu^{p-1}Lu = -(a_{ij}pu^{p-1}u_{x_i})_{x_j} + p(p-1)a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} \,.\, u^{p-2}$$

$$+ p(b_i - d_i)u^{p-1}u_{x_i} + p[c - (d_i)_{x_i}]u^p \leqslant 0$$

et donc

$$-(a_{ij}v_{x_i})_{x_j} + (b_i - d_i)v_{x_i} + p[c - (d_i)_{x_i}]v$$

$$\leqslant -p(p-1)a_{ij}u^{p-2}u_{x_i}u_{x_j} \leqslant 0.$$

Par conséquent

$$-(a_{ij}v_{x_i})_{x_j} + (b_i - d_i)v_{x_i} + pc_0 v \leqslant 0.$$

Démonstration du théorème 3.8. — D'une manière analogue à la démonstration du théorème 3.6, on considère la fonction

$$w = \{u\}_\Phi - \Phi, \qquad \text{où} \qquad \Phi = \max(\max_{\partial\Omega} u, 0),$$

qui est non négative et appartient à $H_0^1(\Omega)$. On suppose, en plus, qu'elle est bornée. La fonction w est, sur chaque ensemble de mesure petite, une sous-solution par rapport à L. Par partition de l'unité elle est aussi une sous-solution sur Ω.

Grace au lemme 3.2, $v = w^p$ est une sous-solution par rapport à l'opérateur

$$\tilde{M}(v) = -(a_{ij}v_{x_i})_{x_j} + (b_i - d_i)v_{x_i} + pc_0 v.$$

La forme $\tilde{a}(u, v)$ associée à l'opérateur $\tilde{M}(v)$ est coercitive sur $H_0^1(\Omega)$ si p est suffisamment grand. Donc

$$\tilde{a}([\{u\}_\Phi - \Phi]^p, \varphi) \leqslant 0 \qquad \forall \varphi \geqslant 0, \in \mathscr{D}(\Omega)$$

d'où, par continuité et en posant $\varphi = [\{u\}_\Phi - \Phi]^p \in H_0^1(\Omega)$, on déduit

$$\{u\}_\Phi = \Phi,$$

c.à.d.

$$u \leqslant \Phi.$$

Même raisonnement si u est une sur-solution. La question reste ouverte de savoir si le théorème 3.8 est vrai en supposant

$$c - \sum (d_i)_{x_i} \geqslant 0.$$

c) Considérons encore l'opérateur elliptique (1.1) satisfaisant à (1.2), (1.3) et tel que la forme $a(u, v)$ associée soit bilinéaire et coercitive sur $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ (voir théorèmes 3.1 et 3.2). On suppose $c - (d_i)_{x_i} \geqslant 0$. Étant donné un ensemble E de Ω, soit U l'ensemble convexe et fermé, que nous supposerons non vide, des fonctions de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ telles que, au sens de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, l'on ait :

$$u \geqslant 1 \qquad \text{sur E}.$$

$$\mathrm{U} \equiv \{u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) : u \geqslant 1 \text{ sur E}\}.$$

Grâce au théorème 2.1 il existe un $u \in \mathrm{U}$ et un seul tel que

$$a(u, v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in \mathrm{V}_u$$

où

$$\mathrm{V}_u = \{v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) | \exists \varepsilon > 0 : u + \varepsilon v \in \mathrm{U}\}.$$

Puisque les fonctions non négatives de $\mathscr{D}(\Omega)$ sont contenues dans V_u, on peut déduire qu'il existe une mesure positive μ, à support dans $\bar{\mathrm{E}}$, telle que

$$a(u, \varphi) = \int \varphi \, d\mu \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

On pose

$$\zeta = \{u\}^1 = \min(u, 1).$$

Puisque $\zeta \in \mathrm{U}$, alors $\zeta - u \in \mathrm{V}_u$ et donc, on a

$$a(u, \zeta - u) \geqslant 0.$$

D'autre part, puisque $\zeta \leqslant u$ et $\zeta = u$ si $u \leqslant 1$, on a

$$a(\zeta, \zeta - u) = a(1, \zeta - u) = \int_\Omega [c - (d_i)_{x_i}](\zeta - u) \, dx \leqslant 0.$$

Alors, il en découle

$$a(\zeta - u, \zeta - u) \leqslant 0$$

d'où

$$\{u\}^1 = u.$$

Donc on peut affirmer que

$$u = 1 \qquad \text{sur E} \qquad (\text{au sens de } H_0^1(\Omega)).$$

On a démontré

THÉORÈME 3.9.— *Etant donné* $E \subset \Omega$, *si l'ensemble*

$$U = \{u \in H_0^1(\Omega) | u \geqslant 1 \text{ sur } E\}$$

n'est pas vide, il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ *et une mesure positive* μ, *ayant son support dans* $\bar{E}$ *telles que*

i) $\qquad u = 1 \qquad$ *sur* E $\qquad$ (au sens de $H_0^1(\Omega)$),

ii) $\qquad a(u, \varphi) = \int \varphi \, d\mu \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

DÉFINITION 3.1.— *Le nombre* $\int d\mu = \mu(\bar{E})$ *est dit la capacité de* E *par rapport à l'opérateur* L. *La fonction u est dite le potentiel capacitaire de* E.

Si u est le potentiel capacitaire de E, et μ la mesure associée, on a, puisque $u \in V_u$:

$$\text{cap } E = \int d\mu = \int u \, d\mu = a(u, u) = \alpha(u, u),$$

où $\alpha(u, v)$ est la partie symétrique de la forme $a(u, v)$:

$$\alpha(u, v) = \frac{a(u, v) + a(v, u)}{2}.$$

Si l'on pose

$$a(u, v) = \alpha(u, v) + \beta(u, v),$$

on a encore le théorème suivant:

THÉORÈME 3.10.— *Si* $E_1 \subset E_2 \subset \Omega$, *on a*

$$\text{cap } E_1 \leqslant \left(1 + \frac{M}{\nu}\right)^2 \text{cap } E_2,$$

où

$$M = \sup \beta(u, v) \qquad \textit{pour} \qquad \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \ \|v\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$$

et

$$\nu = \inf \alpha(u, u) \qquad \textit{pour} \qquad \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = 1,$$

$\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$ *étant respectivement la partie symétrique et la partie anti-symétrique de* $a(u, v)$.

Démonstration. — Soient u et η les potentiels capacitaires de E_1 et E_2 respectivement. Puisque $\eta \geqslant 1$ sur E_1 on a $\eta - u \in V_u$ et alors

$$a(u, \eta - u) \geqslant 0,$$

d'où

$$\alpha(u, u) = a(u, u) \leqslant a(u, \eta) = \alpha(u, \eta) + \beta(u, \eta)$$
$$\leqslant [\alpha(u, u)]^{\frac{1}{2}}[\alpha(\eta, \eta)]^{\frac{1}{2}} + M\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\eta\|_{H_0^1(\Omega)}$$

et encore, puisque $\nu\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \alpha(u, u)$:

$$\alpha(u, u) \leqslant \left(1 + \frac{M}{\nu}\right)[\alpha(u, u)]^{\frac{1}{2}}[\alpha(\eta, \eta)]^{\frac{1}{2}}$$

et donc

$$\operatorname{cap} E_1 = \alpha(u, u) \leqslant \left(1 + \frac{M}{\nu}\right)^2 \alpha(\eta, \eta) = \left(1 + \frac{M}{\nu}\right)^2 \operatorname{cap} E_2.$$

Remarque. — La capacité est une fonction d'ensemble croissante si L est autoadjoint.

THÉORÈME 3.11. — *Soient* L *et* $\bar{L}$ *deux opérateurs dont les formes associées* $a(u, v)$ *et* $\bar{a}(u, v)$ *sont coercitives sur* $H_0^1(\Omega)$. *Pour chaque ensemble* E *contenu dans* Ω, *soient* cap E *et* $\overline{\operatorname{cap}}$ E *les capacités par rapport aux deux formes. Alors il existe une constante* K, *indépendante de* E, *telle que*

$$K^{-1} \operatorname{cap} E \leqslant \overline{\operatorname{cap}}\, E \leqslant K \operatorname{cap} E. \tag{3.15}$$

Démonstration. — Soient u et $\bar{u}$ les potentiels capacitaires de E par rapport aux deux formes. Puisque, à la fois, $u \geqslant 1$ et $\bar{u} \geqslant 1$ sur E, on a $\bar{u} - u \in V_u$ et $u - \bar{u} \in V_{\bar{u}}$. Alors

$$a(u, \bar{u} - u) \geqslant 0, \qquad a(\bar{u}, u - \bar{u}) \geqslant 0.$$

Soient $\alpha, \bar{\alpha}$ et $\beta, \bar{\beta}$ les parties symétriques et les parties anti-symétriques des deux formes. Il existe deux constantes ν, $M > 0$, telles que, quels que soient v et $w \in H_0^1(\Omega)$, on ait

$$\nu\|v\|^2_{H_0^1} \leqslant \min[\alpha(v, v), \bar{\alpha}(v, v)]; \max[\beta(v, w), \bar{\beta}(v, w)] \leqslant M\|v\|_{H_0^1} \cdot \|w\|_{H_0^1}.$$

Donc

$$\alpha(u, u) = a(u, u) \leqslant a(u, \bar{u}) = \alpha(u, \bar{u}) + \beta(u, \bar{u})$$
$$\leqslant [\alpha(u, u)]^{\frac{1}{2}}[\alpha(\bar{u}, \bar{u})]^{\frac{1}{2}} + M\|u\|_{H_0^1}\|\bar{u}\|_{H_0^1}$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{M}{\nu}\right)[\alpha(u, u)]^{\frac{1}{2}}[\alpha(\bar{u}, \bar{u})]^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent

$$\operatorname{cap} E = \alpha(u,u) \leqslant \left(1 + \frac{M}{\nu}\right)^2 \alpha(\bar{u},\bar{u}) \leqslant K\left(1 + \frac{M}{\nu}\right)^2 \bar{\alpha}(\bar{u},\bar{u})$$

$$= K\left(1 + \frac{M}{\nu}\right)^2 \overline{\operatorname{cap}} E$$

et, en échangeant u avec $\bar{u}$:

$$\overline{\operatorname{cap}} E \leqslant K\left(1 + \frac{M}{\nu}\right)^2 \operatorname{cap} E$$

d'où (3.15).

Avant de finir ce paragraphe il faut remarquer que la technique des démonstrations des théorèmes 3.5 et 3.6 est analogue à celle qu'on utilise dans la théorie des espaces de Dirichlet étudiée par A. Beurling et J. Deny (voir [2]).

4. Majorations dans L^p.

Nous aurons besoin du lemme suivant, dont la démonstration se trouve dans [16], [19].

Lemme 4.1. — *Soit $\varphi(t)$ une fonction définie pour $t \geqslant k_0$, non négative et non décroissante telle que si $h > k \geqslant k_0$ l'on ait:*

$$\varphi(h) \leqslant \frac{C}{(h-k)^\alpha}[\varphi(k)]^\beta \tag{4.1}$$

C, α, β étant des constantes positives. Alors

i) *si $\beta > 1$, l'on a*

$$\varphi(k_0 + d) = 0 \tag{4.2}$$

où

$$d^\alpha = C[\varphi(k_0)]^{\beta-1} 2^{\alpha\beta/(\beta-1)}; \tag{4.3}$$

ii) *si $\beta = 1$, l'on a*

$$\varphi(h) \leqslant e \,.\, \exp[-\zeta(h-k_0)]\varphi(k_0) \tag{4.4}$$

où

$$\zeta = (eC)^{-1/\alpha};$$

iii) *si* $\beta < 1$ *et* $k_0 > 0$ *l'on a*

$$\varphi(h) \leqslant 2^{\mu/(1-\beta)}\{C^{1/(1-\beta)} + (2k_0)^{\mu}\varphi(k_0)\} \,.\, h^{-\mu} \tag{4.5}$$

où

$$\mu = \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

Soit $u(x)$ une sous-solution dans $H_0^1(\Omega)$ par rapport à l'équation (1.7), donc on a:

$$\begin{aligned} a(u, \varphi) &= \int_\Omega \{a_{ij}u_{x_i}\varphi_{x_j} + b_i u_{x_i}\varphi + d_j u\varphi_{x_j} + cu\varphi\}\, dx \\ &\leqslant \int_\Omega f_i \varphi_{x_i}\, dx \end{aligned} \tag{4.6}$$

pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ avec $\varphi(x) \geqslant 0$ sur Ω.

Supposons que

i) les hypothèses (1.2) et (1.3) soient verifiées,
ii) $f_i \in L^p(\Omega) (i = 1, 2, \ldots, n)$ avec $p > n$,
iii) au sens des distributions: $c - \Sigma(d_i)_{x_i} \geqslant c_0 > -\infty$,
iv) $\max\limits_{\partial\Omega} u \leqslant \Phi < +\infty$.

Alors on a

THÉORÈME 4.1. — *Sous les hypothèses* i), ii), iii), iv), *il existe deux constantes* K *et* N, *dont* K *ne dépend pas de* Ω, *telles que*

$$\begin{aligned} \max_\Omega u \leqslant \max(0, \max_{\partial\Omega} u) &+ K\Sigma\|f_i\|_{L^p(\Omega)}(\text{mes}\,\Omega)^{1/n - 1/p} \\ &+ N\|u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

La constante N *est nulle si la forme* $a(u, \varphi)$ *est coercitive sur* $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. — On fixe $\bar\lambda$ $(> -c_0)$ de façon que la forme

$$a(u, v) + \bar\lambda(u, v)_{L^2}$$

soit coercitive sur $H_0^1(\Omega)$ (cfr. théorème 3.2). On peut écrire, au lieu de (4.6)

$$a(u, \varphi) + \bar\lambda(u, \varphi)_{L^2} \leqslant \int_\Omega (f_i\varphi_{x_i} + \bar\lambda u\varphi)\, dx.$$

La fonction $v = \{u\}_k - k = \max(u - k, 0)$ avec $k > \Phi$ est non négative et appartient à $H_0^1(\Omega)$ et si $v \neq 0$ on a:

$$v = u - k, \qquad v_{x_i} = u_{x_i}.$$

Donc on a

$$\int_\Omega \{a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} + b_i v_{x_i} v + d_i u v_{x_i} + cuv + \bar{\lambda} uv\}\, dx \leqslant \int_\Omega (f_i v_{x_i} + \bar{\lambda} uv)\, dx$$

et encore, de iv) et du fait que $\bar{\lambda} > -c_0$

$$a(v, v) + \bar{\lambda}(v, v)_{L^2} \leqslant \int_\Omega (f_i v_{x_i} + \bar{\lambda} uv)\, dx. \tag{4.8}$$

En utilisant la coercitivité de $a(u, v) + \bar{\lambda}(u, v)_{L^2}$, l'inégalité de Cauchy et celle de Sobolev; il découle de (4.8) qu'il existe une constante K telle que

$$\|v_x\|_{L^2}^2 \leqslant K\left[\int_{A(k)} f_i^2 dx + \bar{\lambda}\left(\int_{A(k)} u^{2^{*'}} dx\right)^{2/2^{*'}}\right]$$

où

$$A(k) = \{x \in \Omega : u(x) \geqslant k\}.$$

En utilisant, à gauche, l'inégalité de Sobolev et, à droite, celle de Hölder on a

$$\left(\int_{A(k)} (u - k)^{2^*}\, dx\right)^{2/2^*} \leqslant K[\|f_i\|_{L^p}^2 (\text{mes } A(k))^{1-2/p} + \bar{\lambda}\|u\|_{L^r}^2 (\text{mes } A(k))^{2/2^{*'} - 2/r}]$$

où $r > 2^{*'} = \dfrac{2n}{n+2}$, et K est une constante convenable. Soit maintenant $h > k > \Phi$; alors $A(h) \subset A(k)$ et l'on a

$$(h - k)^2 [\text{mes } A(h)]^{2/2^*} \leqslant K[\|f_i\|_{L^p}^2 (\text{mes } A(k))^{1-2/p} + \bar{\lambda}\|u\|_{L^r}^2 (\text{mes } A(k))^{2/2^{*'} - 2/r}].$$

On peut écrire

$$\text{mes } A(h) \leqslant \frac{K}{(h - k)^{2^*}} (\|f_i\|_{L^p}^2 + \bar{\lambda}\|u\|_{L^r}^2)^{2^*} (\text{mes } A(k))^\beta \tag{4.9}$$

où

$$\beta = \min\left(1 - \frac{2}{p}, \frac{n+2}{n} - \frac{2}{r}\right) \Big/ \left(1 - \frac{2}{n}\right).$$

Puisque $u \in L^2(\Omega)$, de (4.8) avec $r = 2$ et grâce au lemme 4.1 (iii), il découle que $u \in L^{t_1}(\Omega)$ avec $t_1 > 2$. Encore de (4.8) avec $r = t_1$ et grâce au lemme 4.1 (iii) il découle que $u \in L^{t_2}(\Omega)$ avec $t_2 > t_1 > 2$. Par itération on a $u \in L^r(\Omega)$ avec

$$\frac{n+2}{n} - \frac{2}{r} > 1 - \frac{2}{p}.$$

Alors $\beta > 1$ et grâce au lemme 4.1 (i) il s'en suit que $u \in L^\infty(\Omega)$ et que (4.7) est valable.

Remarque 4.1. — Le théorème 4.1 complète la démonstration du principe du maximum (théorème 3.8).

Remarque 4.2. — On peut aussi se débarrasser de l'hypothèse iii) dans le cas où $c \in L^{r/2}$, $d_i \in L^r$ avec $r > n$. Considérons maintenant une solution du problème de Dirichlet

$$\text{(4.10)} \qquad \begin{cases} Lu = T = \Sigma(f_i)_{x_i} \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et supposons que

i) les hypothèses (1.2) et (1.3) soient verifiées

ii) $f_i \in L^p(\Omega)$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ avec $p \geqslant 2$

iii) au sens des distributions: $c - \Sigma(d_i)_{x_i} \geqslant c_0 > -\infty$. On a alors

THÉORÈME 4.2.— *Sous les hypothèses* i), ii), iii) *il existe deux constantes* K, N, K *ne dépendant pas de* Ω, *telles que*

a) *si* $p > n$ *on a*

$$\text{(4.11)} \qquad \max_{\Omega} |u| \leqslant K\Sigma\|f_i\|_{L^p(\Omega)}(\text{mes}\,\Omega)^{1/n - 1/p} + N\|u\|_{L^2(\Omega)};$$

b) *si* $2 \leqslant p < n$ *on a*

$$\text{(4.12)} \qquad \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant K\Sigma\|f_i\|_{L^p(\Omega)} + N\|u\|_{L^2(\Omega)}, (1/p^* = 1/p - 1/n)$$

La constante N *est nulle si la forme* $a(u, v)$ *est coercitive sur* $H_0^1(\Omega)$.

La technique de la démonstration est analogue à celle du théorème 4.1. Voir [17] et [9]. On peut améliorer le théorème 4.2 de la manière suivante.

THÉORÈME 4.3. — *Dans l'énoncé du théorème précédent la constante* N *est nulle si on a*

$$\text{(4.13)} \qquad c - \sum(d_i)_{x_i} \geqslant c_0 > 0.$$

Démonstration. — L'opérateur de Green G_0, définie au n.3, qui résout le problème de Dirichlet (4.10), fait correspondre à l'origine de $H^{-1}(\Omega)$ seulement l'origine de $L^2(\Omega)$, grâce au principe du maximum 3.8. Puisque G_0 est un opérateur fermé, il est continu, donc $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ peut être majoré par

$$\Sigma \| f_i \|_{L^p(\Omega)} \qquad (p \geqslant 2).$$

THÉORÈME 4.4 — *L'opérateur* G_0 *est donc, en supposant* (4.13), *un opérateur linéaire et continu de* $H^{-1,p}(\Omega)$ *dans* $L^{p^*}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *si* $2 \leqslant p < n$ *et de* $H^{-1,p}(\Omega)$ *dans* $L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *si* $p > n$.

Pour le cas $p = n$ voir [19]. Soit G_0^* l'opérateur adjoint de G_0. Le théorème 4.3 entraîne par dualité

THÉORÈME 4.5. — G_0^* *est un opérateur linéaire et continu de* $L^q(\Omega)$ *avec* $1 < q \leqslant \dfrac{2n}{n+2}$ *dans* $H_0^{1,q^*}(\Omega)$ *et de* $L^1(\Omega)$ *dans* $H_0^{1,r}(\Omega)$ *avec* $1 < r < \dfrac{n}{n-1}$.

Nous venons de résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation

$$L^*u = f \tag{4.14}$$

avec des données nulles au bord, L^* étant défini par (1.6) en supposant que

$$c - \Sigma(d_i)_{x_i} \geqslant c_o > 0.$$

Le sens qu'il faut donner ici au mot « solution » est différent de celui donné par la définition 1.3. Ici (4.14) signifie que

$$\int_\Omega u L\varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{avec} \qquad L\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

ou, ce qui revient au même

$$\int_\Omega u\psi \, dx = \int_\Omega f G_0 \psi \, dx \qquad \forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Avec cette définition le problème de Dirichlet admet une seule solution.

Remarque 4.3. — En utilisant la remarque 4.2, on peut se débarrasser de l'hypothèse iii) en supposant que $c \in L^{r/2}$ et $d_i \in L^r$ avec $r > n$.

En effet on peut écrire

$$Lu = \bar{L}u + cu - (d_i u)_{x_i}$$

où $\bar{L}u = -(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + b_i u_{x_i}$ et on peut utiliser le théorème 4.2 pour l'équation

$$\bar{L}u = \Sigma(\bar{f}_i)_{x_i}$$

où $\bar{f}_i = f_i + d_i u + V_{x_i}$, V étant une solution de l'équation $\Delta V = -cu$. Alors par itération, comme l'on a fait à la fin de la démonstration du théorème 4.1, on démontre (4.11) et (4.12).

Remarque 4.4. — Dans le théorème 4.2 on peut aussi considérer une sous-solution positive par rapport à l'équation $Lu = \Sigma(f_i)_{x_i}$, c.à.d. une fonction u de $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$Lu \leqslant \Sigma(f_i)_{x_i}$$

En effet puisque u est positive, il suffit d'obtenir une inégalité du type (4.9) avec $\beta \gtrless 1$ pour déduire (4.12).

Remarque 4.5. — Si l'on considère l'opérateur $L + \lambda$ au lieu de L et si l'on suppose que $d_i \in L^r$, $c \in L^{r/2}$ avec $r > n$ on peut conclure que dans l'énoncé du théorème 4.2 la constante N est nulle si $\lambda \notin \Lambda$, Λ étant le spectre de L.

Remarque 4.6. — Les énoncés des théorèmes 4.4 et 4.5 sont valables aussi pour G_λ (opérateur de Green pour $L + \lambda$) et G_λ^* (adjoint de G_λ) si λ n'appartient pas au spectre Λ.

5. Majorations locales.

Considérons l'opérateur elliptique

$$Lu = -(a_{ij}u_{x_i} + d_j u)_{x_j} + (b_i u_{x_i} + cu) \tag{5.1}$$

et supposons dans ce paragraphe que les hypothèses (1.2), (1.3) soient verifiées et, en plus, que, au sens des distributions, l'on ait

$$c - \Sigma(d_i)_{x_i} \geqslant 0. \tag{5.2}$$

Soit $I(x, \rho)$ la boule de centre x et rayon ρ ; on pose

$$\Omega(x, \rho) = \Omega \cap I(x, \rho),$$

de façon que $\Omega(x, \rho) \equiv I(x, \rho)$ si $I(x, \rho) \subset \Omega$. On démontre les théorèmes suivants.

THÉORÈME 5.1.—*Soit $u(x)$ une sous-solution locale par rapport à* L (définition 1.6′) *et soit* $I(x_0, R) \subset \Omega$ *avec* R *suffisamment* *petit; alors il existe une constante* K, *dépendant de* v, b_i, c, d_i, M, *telle que*

$$(5.3)\qquad \max_{\Omega(x_0,R/2)} u(x) \leqslant K\left\{\frac{1}{R^n}\int_{\Omega(x_0,R)} |u|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

De ce théorème on déduit immédiatement.

Corollaire 5.1. — *Soit* $u(x)$ *une sur-solution locale par rapport à* L (définition 1.7′) *et soit* $I(x, R) \subset \Omega$; *alors on a, au lieu de* (5.3)

$$(5.4)\qquad \min_{\Omega(x,R/2)} u(x) \geqslant -K\left\{\frac{1}{R^n}\int_{\Omega(x,R)} |u|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

et, le

Corollaire 5.2.— *Si* $u(x)$ *est une solution locale de* $Lu = 0$ (définition 1.4) *et* $I(x, R) \subset \Omega$, *alors on a:*

$$(5.5)\qquad \max_{\Omega(x,R/2)} |u(x)| \leqslant K\left\{\frac{1}{R^n}\int_{\Omega(x,R)} |u|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

On peut donner une généralisation du théorème 5.1 de la manière suivante.

Théorème 5.2.— *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème* 5.1 *on a, au lieu de* (5.3), *l'inégalité suivante:*

$$(5.6)\qquad \max_{\Omega(x_0,R/2)} u(x) \leqslant k_0 + K\left\{\frac{1}{R^n}\int_{A(k_0,R)} (u-k_0)^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{\frac{\operatorname{mes} A(k_0, R)}{R^n}\right\}^{(\theta-1)/2}$$

où k_0 *est un nombre réel non négatif,*

$$A(k, R) \equiv \{y \in \Omega(x_0, R); u(y) \geqslant k\} \qquad et \qquad \vartheta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{n}}\cdot$$

On peut aussi envisager le cas $x_0 \in \partial\Omega$. On a, en effet, le théorème suivant.

Théorème 5.3.— *Soit* $x_0 \in \partial\Omega$ *et soit* $u(x) \in H^1(\Omega(x_0, R_0))$ *une sous-solution par rapport à* L (définition 5.1′) *telle que* $u \leqslant \Phi$ *au sens de* $H^1(\Omega(x_0, R_0))$ *sur* $\partial\Omega \cap \Omega(x_0, R_0)$. *Il existe une constante* K *telle que, si* R $(<R_0)$ *est suffisamment petit, on a l'inégalité* (5.6) *si* $k_0 > \max(\Phi, 0)$.

Pour démontrer ces théorèmes, nous utiliserons le lemme suivant, voisin du lemme 4.1 (i).

LEMME 5.1.— *Si $\varphi(h, \rho)$ est une fonction réelle, non négative, définie pour $h > k_0$ et $\rho < R_0$, non croissante en h pour ρ fixé, et non décroissante en ρ pour h fixé, telle que*

$$(5.7) \qquad \varphi(h, \rho) \leqslant \frac{C}{(h-k)^{\alpha}(R-\rho)^{\gamma}}[\varphi(k, R)]^{\beta};$$

$$h > k > k_0, \qquad \rho < R < R_0$$

C, α, β, γ *étant constantes positives avec* $\beta > 1$; *alors, pour chaque* σ *avec* $0 < \sigma < 1$, *on a*

$$(5.8) \qquad \varphi(k_0 + d, R_0 - \sigma R_0) = 0$$

où

$$(5.9) \qquad d^{\alpha} = \frac{2^{(\alpha+\beta)\beta/(\beta-1)}C[\varphi(k_0, R)]^{\beta-1}}{\sigma^{\gamma}R_0^{\gamma}}.$$

Le lemme se démontre par itération (cfr. [21]). On démontre maintenant le lemme suivant:

LEMME 5.2.— *Si v est une sous-solution locale,* (définition 1.4) *non négative, en particulier si v est une solution locale par rapport à* L (définition 1.6′) *et si $\alpha \in C_0^1(\Omega)$, il existe une constante* K *telle que*

$$(5.10) \qquad \int_{\Omega} \alpha^2 v_x^2\, dx \leqslant K \int_{\Omega} (\alpha^2 + \alpha_x^2) v^2\, dx.$$

Démonstration. — De la relation

$$a(v, \varphi) \leqslant 0 \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \qquad \text{avec} \qquad \varphi \geqslant 0 \qquad [\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)],$$

en posant $\varphi = \alpha^2 v$, on a

$$(5.11) \qquad a(v, \alpha^2 v) \leqslant 0.$$

Considérons chaque terme de (5.11). On a

$$(5.12) \qquad \int_{\Omega} a_{ij}(x) v_{x_i} (\alpha^2 v)_{x_j}\, dx \geqslant \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} \alpha^2 v_x^2\, dx - \frac{2M^2}{\nu} \int_{\Omega} \alpha_x^2 v^2\, dx.$$

En utilisant le lemme 3.1, pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut écrire

$$b_i = b_i' + b_i'', \qquad d_i = d_i' + d_i'', \qquad c = c' + c''$$

avec

$$\|b_i''\|_{L^n} < \varepsilon, \qquad \|d_i''\|_{L^n} < \varepsilon, \qquad \|c''\|_{L^{n/2}} < \varepsilon$$

et

$$|b_i'| \leqslant B_\varepsilon, \qquad |d_i'| \leqslant D_\varepsilon, \qquad |c'| \leqslant C_\varepsilon,$$

où B_ε, D_ε, C_ε sont des constantes convenables. Alors S étant la constante du lemme 1.3, on a

$$(5.13) \quad \int_\Omega b_i v_{x_i} \alpha^2 v \, dx \leqslant B_\varepsilon \|\alpha v\|_{L^2} \|\alpha v_x\|_{L^2} + \varepsilon \|\alpha v_x\|_{L^2} \|\alpha v\|_{L^{2^*}}$$

$$\leqslant B_\varepsilon \|\alpha v\|_{L^2} \|\alpha v_x\|_{L^2} + \varepsilon S \|\alpha v_x\|_{L^2} \|(\alpha v)_x\|_{L^2}$$

$$\leqslant \varepsilon \|\alpha v_x\|^2_{L^2} + \frac{B_\varepsilon^2}{4\varepsilon} \|\alpha v\|^2_{L^2} + \varepsilon S \|\alpha v_x\|_{L^2} (\|\alpha_x v\|_{L^2} + \|\alpha v_x\|_{L^2})$$

$$\leqslant (\varepsilon + 2\varepsilon S) \|\alpha v_x\|^2_{L^2} + \frac{B_\varepsilon^2}{4\varepsilon} \|\alpha v\|^2_{L^2} + \frac{\varepsilon S}{4} \|\alpha_x v\|^2_{L^2}.$$

$$(5.14) \quad \int_\Omega d_i v (\alpha^2 v)_{x_i} \, dx = \int_\Omega d_i v \alpha^2 v_{x_i} \, dx + 2 \int_\Omega d_i \, \alpha \alpha_{x_i} v^2 \, dx$$

$$\leqslant D_\varepsilon \|\alpha v\|_{L^2} \|\alpha v_x\|_{L^2} + \varepsilon \|\alpha v\|_{L^{2^*}} \cdot \|\alpha v_x\|_{L^2}$$

$$+ 2D_\varepsilon \|\alpha v\|_{L^2} \|\alpha_x v\|_{L^2} + \varepsilon \|\alpha v\|_{L^{2^*}} \cdot \|\alpha_x v\|_{L^2}$$

$$\leqslant \varepsilon \|\alpha v_x\|^2_{L^2} + \frac{D_\varepsilon^2}{4\varepsilon} \|\alpha v\|^2_{L^2} + D_\varepsilon \|\alpha v\|^2_{L^2} + D_\varepsilon \|\alpha_x v\|^2_{L^2}$$

$$+ 2S\varepsilon (\|\alpha v_x\|^2_{L^2} + \|\alpha_x v\|^2_{L^2})$$

$$\leqslant (\varepsilon + 2S\varepsilon) \|\alpha v_x\|^2_{L^2} + \left(\frac{D_\varepsilon^2}{4\varepsilon} + D_\varepsilon \right) \|\alpha v\|^2_{L^2}$$

$$+ (D_\varepsilon + 2S\varepsilon) \|\alpha_x v\|^2_{L^2}.$$

$$(5.15) \qquad \int_\Omega c \alpha^2 v^2 \, dx \leqslant C_\varepsilon \|\alpha v\|^2_{L^2} + \varepsilon \|\alpha v\|^2_{L^{2^*}}$$

$$\leqslant \varepsilon \|\alpha v_x\|^2_{L^2} + C_\varepsilon \|\alpha v\|^2_{L^2} + \varepsilon \|\alpha_x v\|^2_{L^2}.$$

Donc, en utilisant (5.11), (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), on a

$$(5.15') \qquad 0 \geqslant a(v, \alpha^2 v) \geqslant \left[\frac{\nu}{2} - 2(\varepsilon + 2\varepsilon S)n - \varepsilon\right]\|\alpha v_x\|^2_{L^2} - K(\varepsilon)[\|\alpha v\|^2_{L^2} + \|\alpha_x v\|^2_{L^2}]$$

où $K(\varepsilon)$ est une fonction convenable de ε.

On fixe maintenant ε de façon que

$$[2(1 + 2S)n + 1]\varepsilon < \frac{\nu}{4};$$

le lemme en découle.

COROLLAIRE 5.3. — *Avec les mêmes hypothèses que dans le lemme 5.2 on a*

$$(5.16) \qquad \left(\int_\Omega (\alpha v)^{2^*}\, dx\right)^{2/2^*} \leqslant 2S(K + 1) \int_\Omega (\alpha^2 + \alpha_x^2)v^2\, dx.$$

En effet, en utilisant le lemme 1.3, on a

$$\left(\int_\Omega (\alpha v)^{2^*}\, dx\right)^{2/2^*} \leqslant S^2 \int_\Omega (\alpha^2 v_x^2 + \alpha_x v^2)\, dx \leqslant 2S^2(K + 1) \int_\Omega (\alpha^2 + \alpha_x^2)v^2\, dx.$$

COROLLAIRE 5.4. — *Aves les mêmes hypothèses que dans le lemme 5.2 on a*

$$(5.17) \qquad \int_\Omega \alpha^2 v^2\, dx \leqslant C \int_\Omega (\alpha^2 + \alpha_x^2)v^2\, dx\, .\, [\mathrm{mes}\{x \in \Omega\,;\, \alpha v \neq 0\}]^{2/n}$$

où la constante $C = 2S(K + 1)$ *qui intervient ne dépend pas de* Ω.

Il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder

$$\int_\Omega \alpha^2 v^2\, dx \leqslant \left(\int_\Omega (\alpha v)^{2^*}\, dx\right)^{2/2^*}[\mathrm{mes}\{x \in \Omega\,;\, \alpha v \neq 0\}]^{1 - 2/2^*}.$$

LEMME 5.3. — *Soit* $x_0 \in \partial\Omega$. *Si* v *est une sous-solution par rapport à* L, *dans* $H^1(\Omega(x_0, R_0))$ (définition 1.5′), *non négative et nulle sur* $\partial\Omega \cap I(x_0, R_0)$ *et si* $\alpha \in C_0^1(I(x_0, R_0))$, *alors on a* (5.10), (5.16) *et* (5.17). La démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme 5.2 et des corollaires 5.3 et 5.4:

Démonstration du théorème 5.1. — Soit $x_0 \in \Omega$. On considère $R_0(<1)$ suffisamment petit de façon que $\Omega(x_0, R_0) \subset \Omega$ et que, de plus, la forme $a(u, v)$ associée à L soit coercitive sur $H_0^1(\Omega(x_0, R_0))$ (voir théorème 3.1).

Alors, u étant une sous-solution par rapport à L,

$$\{u\}_k - k = u - \{u\}^k = \max(u - k, 0)$$

est une sous-solution non négative sur $\Omega(x_0, R)$ si $k \geqslant 0$ et si $R < R_0$ (voir corollaire du théorème 3.5). Soit $\alpha \in C_0^1(\Omega)$ avec $\alpha \equiv 1$ dans $\Omega(x_0, \rho)$ et $\alpha \equiv 0$ hors de $\Omega(x_0, R)$ et telle que $|\alpha| \leqslant 1$ et $|\alpha_x| \leqslant \dfrac{2}{R - \rho}$ dans $\Omega(x_0, R)$. Grâce au corollaire 5.4, il existe une constante K telle que

$$\int_{A(k,\rho)} (u - k)^2\, dx \leqslant \frac{K}{(R - \rho)^2} \int_{A(k,R)} (u - k)^2\, dx\,.\,[\text{mes}\, A(k, R)]^{2/n}$$

où $A(k, \rho) \equiv \{y \in \Omega(x_0, \rho)\,; u(y) \geqslant k\}$.

Si $y > k$ on a aussi

$$(h - k)^2 \,\text{mes}\, A(h, \rho) \leqslant \int_{A(h,\rho)} (u - k)^2\, dx \leqslant \int_{A(k,\rho)} (u - k)^2\, dx.$$

Si l'on pose

$$a(h, \rho) = \text{mes}\, A(h, \rho)$$

$$u(h, \rho) = \int_{A(h,\rho)} (u - h)^2\, dx$$

alors on a

$$(5.18) \qquad \begin{cases} u(h, \rho) \leqslant \dfrac{K}{(R - \rho)^2} u(k, R)\,[a(k, R)]^{2/n} \\[2ex] a(h, \rho) \leqslant \dfrac{1}{(h - k)^2} u(k, R) \end{cases}$$

Soient ξ, η deux nombres > 0 que l'on fixera plus tard. On a de (5.18)

$$(5.19) \quad |u(h, \rho)|^\xi |a(h, \rho)|^\eta \leqslant \frac{K^\xi}{(R - \rho)^{2\xi}(h - k)^{2\eta}} [u(k, R)]^{\xi + \eta} [a(k, R)]^{2\xi/n}.$$

On choisit ξ et η de façon que

$$\xi + \eta = \vartheta\xi, \qquad \frac{2\xi}{n} = \vartheta\eta\,;$$

ϑ doit alors satisfaire l'équation $\vartheta^2 - \vartheta - \frac{2}{n} = 0$ qui a une racine $\vartheta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{n}} > 1$. On peut alors fixer $\eta = 1$, $\xi = \frac{n\vartheta}{2}$ et en posant

$$\varphi(h, \rho) = |u(h, \rho)|^{\xi} |a(h, \rho)|^{\eta}$$

(5.19) peut s'écrire

$$\varphi(h, \rho) \leqslant \frac{\mathrm{K}^{\xi}}{(\mathrm{R} - \rho)^{2\xi}(h - k)^{2\eta}} [\varphi(k, \mathrm{R})]^{\vartheta} \tag{5.20}$$

où $k > k \geqslant 0$, $\rho < \mathrm{R}$ et $\vartheta > 1$. Grâce au lemme 5.1, pour $\sigma = \frac{1}{2}$, $k_0 = 0$, $\mathrm{R}_0 = \mathrm{R} < \mathrm{dist.}(x, \partial\Omega)$:

$$\varphi\left(d, \frac{\mathrm{R}}{2}\right) = 0 \tag{5.21}$$

avec $d = \dfrac{\mathrm{K}[\varphi(0, \mathrm{R})]^{(\vartheta - 1)/2}}{(\mathrm{R}/2)^{(n\vartheta)/2}}$ où K dépend seulement des hypothèses sur L. De (5.21) on a (5.3) et la démonstration est achevée.

Démonstration du théorème 5.2. — On reprend la démonstration du théorème 5.1 jusqu'à l'inégalité (5.20) ; on utilise alors le lemme 5.1 avec k_0 non négatif (au lieu de prendre $k_0 = 0$) et l'on obtient (5.6).

Démonstration du théorème 5.3. — Il suffit de remarquer que la démonstration du théorème 5.1 est encore valable si l'on suppose $k_0 \geqslant \max(\Phi, 0)$ de façon que $u - \{u\}^k$ soit une sous-solution nulle sur $\partial\Omega \cap \mathrm{I}(x_0, \mathrm{R})$. On utilise dans ce cas le lemme 5.3.

Avec les mêmes hypothèses sur l'opérateur L (5.1) nous considérons maintenant les solutions de l'équation elliptique

$$\mathrm{L}u = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i} \tag{5.22}$$

avec $f_i \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, $p \geqslant 2$. On a alors le théorème suivant qui généralise le théorème 5.1.

THÉORÈME 5.4. — *Si* $u(x)$ *est une solution locale de* (5.22) (définition 1.4), *alors, si* $\mathrm{I}(x_0, \mathrm{R}) \subset \Omega$, *avec* R *suffisamment petit, il existe une* *constante* K *telle que l'on ait, si* $2 \leqslant p < n$

$$\text{(5.23)}\quad \|u\|_{L^{p^*}(\Omega(x_0,R/2))} \leqslant K\left\{\left(\frac{1}{R^{n(1-2/p^*)}}\int_{\Omega(x_0,R)}|u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L^p(\Omega(x_0,R))}\right\}$$

avec $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$ *et, si* $p > n$

$$\text{(5.24)}\quad \max_{\Omega(x_0,R/2)}|u| \leqslant K\left\{\left(\frac{1}{R^n}\int_{\Omega(x_0,R)}|u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \sum\|f_i\|_{L^p(\Omega(x_0,R))}R^{1-n/p}\right\}.$$

Démonstration. — Soit v la solution dans $H_0^1(\Omega(x_0, R))$ de l'équation (5.1) et posons

$$u = v + w$$

où w est une solution dans $\Omega(x_0, R)$ de l'équation $Lw = 0$. Grâce au théorème 4.2 on a

$$\text{(5.25)}\quad \|v\|_{L^{p^*}(\Omega(x_0,R))} \leqslant K\sum\|f_i\|_{L^p(\Omega(x_0,R))}$$

si $2 \leqslant p < n$ et

$$\text{(5.26)}\quad \max_{\Omega(x_0,R)}|v| \leqslant K\sum\|f_i\|_{L^p(\Omega(x_0,R))}R^{1-n/p}$$

si $p > n$.

D'autre part, on a (corollaire 5.2)

$$\text{(5.27)}\quad \begin{aligned}\max_{\Omega(x_0,R/2)}|w| &\leqslant K\left\{\frac{1}{R^n}\int_{\Omega(x_0,R)}|w|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant K\left\{\left(\frac{1}{R^n}\int_{\Omega(x_0,R)}|u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{R^n}\int_{\Omega(x_0,R)}|v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et (5.25), (5.26), on a, si $2 \leqslant p < n$

$$\text{(5.28)}\quad \left(\int_{\Omega(x_0,R)}|v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant K\sum\|f_i\|_{L^p}[\text{mes}\,\Omega(x_0, R)]^{1/2-1/p^*}$$

et si $p > n$

$$\text{(5.29)}\quad \left(\int_{\Omega(x_0,R)}|v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant K\sum\|f_i\|_{L^p}R^{1-n/p}[\text{mes}\,\Omega(x_0, R)]^{\frac{1}{2}}.$$

Si $2 \leqslant p < n$, on a

$$\|w\|_{L^{p^*}(\Omega(x_0,R/2))} \leqslant \max_{\Omega(x_0,R/2)} |w| \,.\, [\text{mes}\, \Omega(x_0, R)]^{1/p^*};$$

en tenant compte de (5.27) et (5.28), on obtient (5.23).

Si $p > n$, en utilisant (5.27) et (5.29) on obtient (5.24). Avec la même démonstration on a

THÉORÈME 5.5.— *Soit* $x_0 \in \partial\Omega$ *et soit* $u(x) \in H^1(\Omega(x_0, R_0))$ *une solution de l'équation* 5.22, *nulle sur* $\partial\Omega \cap I(x_0, R_0)$; *alors si* $R(<R_0)$ *est suffisamment petit, les inégalités* (5.23) *et* (5.24) *sont valables.*

THÉORÈME 5.6.— (5.23) *et* (5.24) *sont encore valables si* $u(x)$ *est une solution locale positive par rapport à l'équation* (5.22) (définition 1.6).

Démonstration. — On peut écrire $u = v + w$ où $Lv = \Sigma(f_i)_{x_i}$ et $v - u \in H_0^1(\Omega(x_0, R))$; alors $Lw \leqslant 0$ avec $w \in H_0^1(\Omega(x_0, R))$. Grâce au principe du maximum (théorème 3.6) on a dans $\Omega(x_0, R)$: $w \leqslant 0$, donc

$$0 \leqslant u \leqslant v.$$

Alors pour tout exposant $1 \leqslant q \leqslant +\infty$ on a

$$\|u\|_{L^q} \leqslant \|v\|_{L^q}.$$

Grâce au théorème 5.4 on peut alors majorer

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega(x_0,\rho))} \quad \text{par} \quad \|v\|_{L^2(\Omega(x_0,R))} \quad \text{et} \quad \|f_i\|_{L^p(\Omega(x_0,R))} \quad \text{si} \quad \rho < R.$$

Puisque $Lw = Lu - \Sigma(f_i)_{x_i}$ avec $w \in H_0^1(\Omega(x_0, R))$ on peut majorer sur $\Omega(x_0, R)$, grâce à la coercitivité de $a(u, v)$,

$$\|w\|_{L^2} \quad \text{par} \quad \|u\|_{L^2} + \|u_x\|_{L^2} + \Sigma\|f_i\|_{L^2}.$$

Donc, en tenant compte de

$$\|v\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{L^2} + \|w\|_{L^2},$$

on peut majorer sur $\Omega(x_0, R)$

$$\|v\|_{L^2} \quad \text{par} \quad \|u\|_{L^2} + \|u_x\|_{L^2} + \Sigma\|f_i\|_{L^2}.$$

On a ainsi majoré

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega(x_0,\rho))} \quad \text{par} \quad \|u\|_{L^2(\Omega(x_0,R))} + \sum\|f_i\|_{L^p(\Omega(x_0,R))} + \|u_x\|_{L^2(\Omega(x_0,R))}.$$

Donc le théorème sera démontré si on peut majorer

$$\|u_x\|_{L^2(\Omega(x_0,R))} \quad \text{par} \quad \|u\|_{L^2(\Omega(x_0,R'))} + \sum\|f_i\|_{L^2(\Omega(x_0,R'))}$$

avec $R < R'$. Cela découle du lemme suivant qui généralise le lemme 5.2 et d'un argument de homogénéité.

LEMME 5.5. — *Si v est une sous-solution locale non négative de l'équation* (5.22) (définition 1.6) *et si $\alpha \in C_0^1(\Omega)$, il existe une constante* K *telle que*

$$(5.30) \quad \int_\Omega \alpha^2 v_x^2\, dx \leqslant K\left\{\int_\Omega (\alpha^2 + \alpha_x^2)v^2\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \alpha^2 f_i^2\, dx\right\}$$

Démonstration. — Puisque

$$a(v, \varphi) \leqslant \int_\Omega f_i \varphi_{x_i}\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \qquad \varphi \geqslant 0$$

on a :

$$(5.31) \qquad a(v, \alpha^2 v) \leqslant \int_\Omega f_i(\alpha^2 v)_{x_i}\, dx.$$

Mais de (5.15′) on déduit

$$(5.32) \qquad \frac{v}{4}\|\alpha v_x\|_{L^2}^2 \leqslant a(v, \alpha^2 v) + K(\|\alpha v\|_{L^2}^2 + \|\alpha_x v\|_{L^2}^2).$$

D'après (5.31) et (5.32) on a

$$\frac{v}{4}\|\alpha v_x\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{v}{8}\|\alpha v_x\|_{L^2}^2 + K'(\|\alpha v\|_{L^2}^2 + \|\alpha_x v\|_{L^2}^2 + \|\alpha f_i\|_{L^2}^2)$$

d'où le lemme.

Remarque 5.1. — On démontre maintenant que dans l'énoncé du théorème 5.1 l'inégalité (5.5) est encore valable si l'hypothèse (5.2) n'est plus vérifiée, mais si l'on suppose que

$$(5.33) \qquad c \in L^{r/2}(\Omega),\ d_i \in L^r(\Omega) \qquad \text{avec} \qquad r > n.$$

En effet si u est une sous-solution de l'équation $Lu = 0$ on peut écrire

$$(5.34) \qquad \tilde{L}u \leqslant (d_i u)_{x_i} - cu = (d_i u + V_{x_i})_{x_i}$$

où

$$\tilde{L}u = -(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + b_i u_{x_i} \qquad \text{et} \qquad V = \omega_n \int \frac{c(t)u(t)}{|x - t|^{n-2}}\, dt$$

ω_n étant une constante convenable. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d_i \in L^{n/(1-\varepsilon)}$,

$c \in L^{n/(2-\varepsilon)}$. Puisque $u \in L^2$ dans une boule $\Omega(x_0, \rho_0)$, on a $d_i u \in L^{t_0}$, $cu \in L^{s_0}$ où

$$\frac{1}{t_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n}, \quad \frac{1}{s_0} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n} - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Grâce à l'inégalité de Sobolev on a $V_{x_i} \in L^{t_0}$. Du théorème 5.6 on peut déduire que $u \in L^{t_0^*}$ où

$$\frac{1}{t_0^*} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{n}$$

dans une boule $\Omega(x_0, \rho_1)$ avec $\rho_1 < \rho_0$. Alors

$$d_i u + V_{x_i} \in L^{t_1} \qquad \text{où} \qquad \frac{1}{t_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - 2\frac{\varepsilon}{n}.$$

Donc $u \in L^{t_1^*}$ où

$$\frac{1}{t_1^*} = \frac{1}{2} - 2\frac{\varepsilon}{n} \qquad \text{dans} \qquad \Omega(x_0, \rho_2) \qquad \text{avec} \qquad \rho_2 < \rho_1.$$

En répétant le même raisonnement on démontre que l'inégalité (5.5) est valable.

6. Une famille de sous-ensembles de Ω.

DÉFINITION 6.1. — *Soit Ω un ouvert de R^n et soit β une constante positive. On désigne par $\mathscr{P}(\beta, \Omega)$ la famille des ensembles $E \subset \bar{\Omega}$ tels que, pour chaque $v \in C^1(\bar{\Omega})$, nulle sur E, l'on ait*

$$(6.1) \qquad |v(x)| \leqslant \beta \int \frac{|v_x(t)|}{|x-t|^{n-1}}\, dt \qquad \forall x \in \Omega.$$

Remarque. — Si $E \in \mathscr{P}(\beta, \Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ et $v = 0$ sur E, alors (6.1) est valable presque partout dans Ω.

On admet ici le théorème suivant.

THÉORÈME 6.1. — *Si $v \in H^1(\Omega)$ et $v = 0$ sur E avec $E \subset \mathscr{P}(\beta, \Omega)$, alors il existe une constante $\beta' = \beta'(\beta, n)$, telle que*

$$(6.2) \qquad \operatorname{mes}\{x \in \Omega ; |v| > \sigma\} \leqslant \beta' \left(\frac{\int_\Omega |v_x(t)|\, dt}{\sigma} \right)^{n/(n-1)}$$

En effet le théorème 6.1 est une conséquence de la définition 6.1 et du résultat suivant de la théorie du potentiel.

Soit μ une mesure positive à support compact et soit

$$U_1^\mu(x) = \int \frac{d\mu(t)}{|x-t|^{n-1}}$$

le potentiel engendré par μ. Alors il existe une constante $C = C(n)$, telle que

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathbf{R}^n ; U_1^\mu(x) > \sigma\} \leqslant \left(\frac{C\int|d\mu|}{\sigma}\right)^{n/(n-1)}$$

Pour la démonstration de ce résultat on peut voir [5], [22], [14; Appendice].

THÉORÈME 6.2. — *Soit* Ω *un ensemble convexe. Soit* $M(\vartheta)$ *la famille des sous-ensembles de* Ω *tels que*

$$\operatorname{mes} E \geqslant \vartheta \operatorname{mes} \Omega \qquad (0 < \vartheta \leqslant 1). \tag{6.3}$$

Alors il existe une constante $\beta = \beta(n, \Omega)$ *telle que*

$$M(\vartheta) \subset \mathscr{P}\left(\frac{\beta}{\vartheta}, \Omega\right).$$

Démonstration. — Soit $v \in C^1(\bar{\Omega})$ nulle sur E; si $x \in E$, alors la formule (6.1) est évidemment vraie. Soit $x \notin E$; alors on considère la fonction $r \to v(x + r\xi)$ avec $\xi \in S^n$, où S^n est l'hyper-surface de la sphère unitaire. Soit $\Sigma \equiv \{\xi \in S^n ; \exists R : x + R\xi \in E\}$.

Pour chaque $\xi \in \Sigma$ on a

$$v(x) - v(x + r\xi) = \int_r^0 \frac{dv}{dr} dr$$

et si R est tel que $x + R\xi \in E$, l'on a

$$|v(x)| \leqslant \int_0^{2R} |v_x| \, dr$$

donc, si $d\omega$ est la mesure sur S^n, puisque $|x - t|^{n-1} dr \, d\omega = dt$, l'on a

$$\int_\Sigma |v(x)| \, d\omega \leqslant \int_0^{\operatorname{diam}\Omega} \int_\Sigma |v_x| \, dr \, d\omega \leqslant \int_\Omega \frac{|v_x(t)|}{|x-t|^{n-1}} dt. \tag{6.4}$$

Il suffit alors de démontrer que la mesure $(n-1)$-dimensionelle de Σ, soit $|\Sigma|$, est bornée inférieurement.

En effet, on a:

$$\vartheta \operatorname{mes} \Omega \leqslant \operatorname{mes} E \leqslant \int_\Sigma d\omega \int_0^{\operatorname{diam}\Omega} r^{n-1} \, dr = \frac{(\operatorname{diam} \Omega)^n}{n} |\Sigma|.$$

Donc

$$|\Sigma| \geqslant \vartheta n \frac{\text{mes}\,\Omega}{(\text{diam}\,\Omega)^n}$$

De (6.4) il découle alors

$$|v(x)| \leqslant \frac{1}{\vartheta n} \frac{(\text{diam}\,\Omega)^n}{\text{mes}\,\Omega} \int_\Omega \frac{|v_x(t)|}{|x-t|^{n-1}}\,dt$$

c'est-à-dire: $\mathrm{E} \in \mathscr{P}\left(\frac{\beta}{\vartheta}, \Omega\right)$ avec

$$\beta = \frac{1}{n} \frac{(\text{diam}\,\Omega)^n}{\text{mes}\,\Omega}.$$

THÉORÈME 6.3.— *Soit* $u(x) \in \mathrm{H}^1(\mathrm{I}(x_0, \mathrm{R})$ *et soit*

$$\mathrm{A}(k, \mathrm{R}) = \{x \in \mathrm{I}(x_0, \mathrm{R}); u(x) \geqslant k\};$$

s'il existe deux constantes k_0 *et* ϑ, *avec* $0 \leqslant \vartheta < 1$, *telles que*

$$\text{mes}\,\mathrm{A}(k_0, \mathrm{R}) < \vartheta\,\text{mes}\,\mathrm{I}(x_0, \mathrm{R});$$

alors, si $h > k > k_0$, *on a*

$$(6.5)\quad (h-k)[\text{mes}\,\mathrm{A}(h, \mathrm{R})]^{(n-1)/n} \leqslant \mathrm{C} \int_{[\mathrm{A}(k,\mathrm{R})-\mathrm{A}(h,\mathrm{R})]} |u_x(t)|\,dt$$

avec $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\vartheta, n)$.

Démonstration. — Si $k > k_0$, alors $v = \{u\}^h - \{u\}^k \in \mathrm{H}^1(\mathrm{I}(x_0, \mathrm{R}))$ et

$$\text{mes}\{x \in \mathrm{I}(x_0, \mathrm{R}); v = 0\} = \text{mes}\{\mathrm{I}(x_0, \mathrm{R}) - \mathrm{A}(k, \mathrm{R})\}$$
$$> (1-\vartheta)\,\text{mes}\,\mathrm{I}(x_0, \mathrm{R}).$$

Grâce aux théorèmes 6.1 et 6.2, en posant $\sigma = h - k - \varepsilon$ et en faisant $\varepsilon \to 0$, l'on a

$$\text{mes}\,\mathrm{A}(h, \mathrm{R}) \leqslant \beta' \left(\frac{\int_{\mathrm{A}(k,\mathrm{R})-\mathrm{A}(h,\mathrm{R})} |u_x(t)|\,dt}{h-k}\right)^{n/(n-1)}$$

d'où le théorème.

En utilisant l'inégalité de Schwarz on a:

COROLLAIRE 6.1.— *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème* 6.3 *on a*

$$(6.4)\quad (h-k)^2[\text{mes}\,\mathrm{A}(h, \mathrm{R})]^{(2n-2)/n}$$
$$\leqslant \mathrm{C} \int_{\mathrm{A}(k,\mathrm{R})} |u_x(t)|^2\,dt\,.\,\{\text{mes}\,\mathrm{A}(k, \mathrm{R}) - \text{mes}\,\mathrm{A}(h, \mathrm{R})\}.$$

DÉFINITION 6.2. — *Un ouvert borné* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *est dit* $H_0^1(\Omega)$-*admissible s'il existe deux constantes* β *et* ρ_0, *telles que pour* $\rho < \rho_0$ *et* $x \in \partial\Omega$ *l'on ait* [15]

$$\partial\Omega \cap I(x_0, \rho) \in \mathscr{P}(\beta, \Omega(x_0, \rho)).$$

On peut aussi dire que Ω est $H_0^1(\Omega)$-admissible si pour chaque $\rho < \rho_0$ et $x_0 \in \partial\Omega$ et pour chaque $u(x) \in C^1(\overline{\Omega(x_0, \rho)})$ nulle sur $\partial\Omega \cap I(x_0, \rho)$ on a

$$|u(x)| \leqslant \beta \int_{\Omega(x_0,\rho)} \frac{|u_x(t)|}{|x - t|^{n-1}} dt.$$

DÉFINITION 6.3. — *On dit qu'un ouvert borné* Ω *de* $\mathbf{R}^n$ *est de classe* S_α *s'il existe deux constantes* α, *avec* $0 < \alpha < 1$, *et* ρ_0 *telles que, pour chaque* $x_0 \in \partial\Omega$ *et chaque* $\rho < \rho_0$ *on ait* [10]

$$\text{mes}\{I(x_0, \rho) - \Omega(x_0, \rho)\} > \alpha \,\text{mes}\, I(x_0, \rho).$$

Grâce au théorème 6.2 on voit que s'il existe α avec $0 < \alpha < 1$ tel que Ω soit de classe S_α alors Ω est $H_0^1(\Omega)$-admissible.

Les démonstrations du théorème 6.3 et du corollaire 6.1 prouvent le théorème suivant.

THÉORÈME 6.4. — *Soit* $u(x) \in H^1(\Omega(x_0, R))$ *avec* $x_0 \in \partial\Omega$ *et soit* Ω $H_0^1(\Omega)$-*admissible; si* $u(x)$ *est nulle sur* $\partial\Omega \cap I(x_0, R)$ *alors les formules* (6.5) *et* (6.6) *sont valables pour* $h > k > 0$.

En utilisant les inégalités de Sobolev pour les potentiels on a

THÉORÈME 6.5. — *Si* $v \in H^{1,p}(\Omega)(1 < p < n)$ *et* $v = 0$ *sur* E *avec* $E \in \mathscr{P}(\beta, \Omega)$, *alors il existe une constante* $\beta' = \beta'(\beta, n, p)$ *telle que*

$$\|v\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leqslant \beta' \Sigma \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)} \tag{6.5}$$

où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

On démontre maintenant une inégalité qui généralise l'inégalité, bien connue, de Poincaré.

THÉORÈME 6.6. — *Soit* A *un ouvert convexe et borné de* $\mathbf{R}^n$ *et soit* $u(x)$ *une fonction de* $H^{1,p}(A)(1 < p < n)$; *alors il existe une constante* $K = K(n, p)$, *telle que*

$$\left\{\int_A |u - u_A|^{p^*} dx\right\}^{1/p^*} \leqslant K \frac{(\text{diam A})^n}{\text{mes A}} \left\{\int_A |u_x|^p dx\right\}^{1/p} \tag{6.6}$$

où u_A *est la valeur moyenne de* u *sur* A.

Démonstration. — On peut se borner à supposer que $u \in C^1(\bar{A})$, parce que, par continuité l'on obtient (6.6) si $u \in H^{1,p}(\Omega)$.

Soit γ un nombre tel que

$$\operatorname{mes}\{x \in A\,;\, u \geqslant \gamma\} \geqslant \tfrac{1}{2} \operatorname{mes} A$$
$$\operatorname{mes}\{x \in A\,;\, u \leqslant \gamma\} \geqslant \tfrac{1}{2} \operatorname{mes} A.$$

Puisque

$$u(x) - \gamma = [\{u\}_\gamma - \gamma] + [\{u\}^\gamma - \gamma]$$

et les mesures des ensembles où $\{u\}_\gamma - \gamma$ et $\{u\}^\gamma - \gamma$ sont nulles sont $\geqslant \frac{1}{2}$ mes A, on a, grâce aux théorèmes 6.2 et 6.5

$$\|u(x) - \gamma\|_{L^{p^*}(A)} \leqslant K \frac{(\operatorname{diam} A)^n}{\operatorname{mes} A} \|u_x\|_{L^p(A)}$$

où $K = K(n, p)$.

Mais, puisque

$$|u_A - \gamma| \leqslant |(u - \gamma)_A| \leqslant \|u - \gamma\|_{L^{p^*}(A)} (\operatorname{mes} A)^{-(1/p^*)}$$

et, aussi, parce que

$$\|u - u_A\|_{L^{p^*}(A)} \leqslant \|u - \gamma\|_{L^{p^*}(A)} + \|u_A - \gamma\|_{L^{p^*}(A)}$$

on obtient (6.6).

COROLLAIRE 6.2. — *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème* 6.6, *il existe une constante* $K = K(n, p)$ *telle que l'on ait :*

$$(6.7) \qquad \int_A |u(x) - u_A|^p \, dx \leqslant K \left[\frac{(\operatorname{diam} A)^n}{(\operatorname{mes} A)^{1-(1/n)}} \right]^p \int_A |u_x|^p \, dx.$$

Il suffit d'utiliser d'inégalité de Hölder, pour déduire (6.7) de (6.6).

7. Continuité hölderienne des solutions.

On considère encore l'opérateur elliptique

$$(7.1) \qquad Lu = -(a_{ij} u_{x_i} + d_j u)_{x_j} + (b_i u_{x_i} + cu).$$

On suppose que l'hypothèse (1.2) est vérifiée, mais ici, au lieu de (1.3), on suppose que

$$(7.2) \qquad \begin{cases} |a_{ij}(x)| \leqslant M \\ b_i(x) \in L^n(\Omega) \\ d_i(x) \in L^r(\Omega), \qquad c(x) \in L^{r/2}(\Omega) \text{ avec } r > n. \end{cases}$$

On utilise encore les mêmes notations que dans § 5 et, en plus, on pose, pour $x_0 \in \bar{\Omega}$:

$$(7.3) \qquad m(r) = \inf_{\Omega(x_0,r)} u(x), \qquad M(r) = \sup_{\Omega(x_0,r)} u(x)$$

et

$$(7.4) \qquad \omega(r) = M(r) - m(r).$$

On peut remarquer que $m(r)$ et $M(r)$ sont finis si u est une solution de (5.22) ($p > n$) grâce aux théorèmes 5.4 et 5.5.

On démontrera les théorèmes suivants.

THÉORÈME 7.1.— *Soit* $u(x)$ *une solution de* $Lu = 0$ (définition 1.4). *Alors* $u(x)$ *vérifie une condition de Hölder dans chaque compact de* Ω: *il existe deux constantes* K *et* λ *avec* $0 < \lambda < 1$, *telles que si* $x \in \Omega$ *et* $0 < \rho < R < \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$, *on ait:*

$$(7.5) \qquad \omega(\rho) \leqslant K \left(\frac{\int_{\Omega(x,R)} u^2\, dx}{R^n} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\lambda}.$$

THÉORÈME 7.2.— *Soit* $u(x)$ *une solution locale de l'équation*

$$(7.7) \qquad Lu = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$$

avec $f_i \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *pour* $p > n$. *Alors il existe deux constantes* K *et* $\lambda\,(0 < \lambda < 1)$ *telles que si* $x \in \Omega$ *et* $0 < \rho < R < \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ *on ait*

$$(7.8) \qquad \omega(\rho) \leqslant K \left\{ \left(\int_{\Omega(x,R)} |u|^2\, dx \right)^{1/2} + \Sigma \| f_i \|_{L^p(\Omega(x,R))} \right\} \rho^{\lambda}$$

THÉORÈME 7.3.— *Soit* G *un ouvert borné et soit* $u(x)$ *une solution dans* $H^1(G \cap \Omega)$ *de l'équation* (7.7) *avec* $f_i \in L^p(G \cap \Omega)$ *pour* $p > n$ *nulle sur* $\partial\Omega \cap G$. *Si* $G \cap \Omega$ *est* $H^1_0(\Omega)$*-admissible* (définition 6.2) *alors* $u(x)$ *vérifie une condition de Hölder sur* $G \cap \bar{\Omega}$ c.à.d. *il existe deux constantes* K *et* λ $(0 < \lambda < 1)$ *telles que, si* $x \in G \cap \bar{\Omega}$ *et* $\Omega(x, R) \subset G$, *on ait* (7.8).

Si $G \supset \bar{\Omega}$, *de façon que* $G \cap \Omega = \Omega$, *on a, au lieu de* 7.8, *l'inégalité suivante*

$$(7.9) \qquad \omega(\rho) \leqslant K \sum_{i=1}^{n} \| f_i \|_{L^p} \rho^{\lambda}$$

toutes les fois que pour le problème de Dirichlet il y a unicité.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 7.1. — *Soit* $\varphi(h)$ *une fonction positive et non croissante, définie pour* $h \in [k_0, M]$, *telle que si* $k_0 < k < h < M$, *l'on ait*

$$(h - k)^\alpha |\varphi(h)|^\beta \leqslant C[M - k]^\alpha [\varphi(k) - \varphi(h)] \tag{7.10}$$

où α, β, C *sont des constantes positives. Alors on a*

$$\lim_{h \to M} \varphi(h) = 0 \tag{7.11}$$

et, en plus, si l'on pose $k_s = M - \frac{M - k_0}{2^s}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ *l'on a*

$$\varphi(k_s) \leqslant \left(2^\alpha C \frac{\varphi(k_0)}{s}\right)^{1/\beta}. \tag{7.12}$$

Démonstration. — Puisque

$$k_s - k_{s-1} = \frac{M - k_0}{2^s}, \qquad M - k_{s-1} = \frac{M - k_0}{2^{s-1}}$$

de (7.10) on déduit

$$\varphi(k_s) \leqslant C 2^\alpha [\varphi(k_{s-1}) - \varphi(k_s)];$$

en sommant pour $s = 1, 2, \ldots, N$ et en remarquant que $\varphi(k_s) \geqslant \varphi(k_N)$ l'on a

$$N|\varphi(k_N)|^\beta \leqslant 2^\alpha C[\varphi(k_0) - \varphi(k_N)]$$

d'où (7.12).

Nous démontrerons d'abord le théorème 7.1 dans le cas $c \equiv d_i \equiv 0$. Dans ce cas, on a

LEMME 7.2. — *Soit* $u(x)$ *une solution locale de l'équation elliptique* $Lu = 0$ (définition 1.4).

Si, pour $x_0 \in \Omega$ *et* $2R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, *on a*

$$\operatorname{mes} A(k_0, R) < \tfrac{1}{2} \operatorname{mes} \Omega(x_0, R) \tag{7.13}$$

où $k_0 = \frac{M(2R) + m(2R)}{2}$, *alors*

$$\lim_{h \to M(2R)} \operatorname{mes} A(h, R) = 0. \tag{7.14}$$

Démonstration. — Puisque $c = d_i = 0$, du corollaire du théorème 3.5 il découle que $v = \max(u - k, 0)$ est une sous-solution non négative par rapport à L. Il faut remarquer que, grâce aux condition

$c = d_i = 0$, k peut être un nombre quelconque, positif, nul ou négatif.

Alors, d'après le lemme 5.2, en prenant $\alpha \in C_0^1(\Omega(x_0, 2R))$ avec $\alpha \equiv 1$ dans $\Omega(x_0, R)$ et $|\alpha_x| \leqslant \frac{2}{R}$, on a

$$\int_{A(k,R)} |u_x|^2 \, dx \leqslant \frac{C}{R^2} \int_{A(k,2R)} (u - k)^2 \, dx \leqslant C'[M(2R) - k]^2 R^{n-2}.$$

D'aprés le corollaire 6.1, on a aussi pour $h > k > k_0$

$$(h - k)^2 \operatorname{mes}[A(h, R)]^{(2n-2)/n} \leqslant C[M(2R) - k]^2 R^{n-2}[\operatorname{mes} A(k, R) - \operatorname{mes} A(h, R)]$$

Alors grâce au lemme 7.1 on a (7.14).

LEMME 7.3. — *Soit $u(x)$ une solution locale de l'équation elliptique* $Lu = 0$; *alors il existe une constante $\eta < 1$ telle que si $x \in \Omega$, et $\rho < \rho_0$, l'on ait*

$$\omega(\rho) \leqslant \eta\omega(4\rho) \tag{7.15}$$

Démonstration. — Puisque $c = d_i = 0$, on peut toujours supposer que (7.13) est vérifié; en effet si (7.13) n'est pas verifié alors la solution $v = -u$, satisfera à (7.13) car

$$\operatorname{mes}\{x \in \Omega(x_0, R);\, u(x) \geqslant k\} + \operatorname{mes}\{x \in \Omega(x_0, R);\, u(x) \leqslant k\} \geqslant \operatorname{mes} \Omega(x_0, R).$$

Grâce au théorème 5.2 où, au lieu de k_0, on pose

$$k_N = M(2R) - \frac{M(2R) - m(2R)}{2^{N+1}}$$

on a

$$M\left(\frac{R}{2}\right) \leqslant k_N + K[M(2R) - k_N]\left[\frac{\operatorname{mes} A(k_N, R)}{R^n}\right]^{(\vartheta-1)/2}$$

avec $\vartheta > 1$. Mais, grâce au lemme 7.2, on peut choisir N suffisamment grand de façon que

$$K\left[\frac{\operatorname{mes} A(k_N, R)}{R^n}\right]^{(\vartheta-1)/2} < \frac{1}{2}$$

et alors, on a

$$\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{R}}{2}\right) \leqslant \mathrm{M}(2\mathrm{R}) - \frac{\mathrm{M}(2\mathrm{R}) - m(2\mathrm{R})}{2^{\mathrm{N}+2}}$$

d'où, en remarquant que : $m\left(\frac{\mathrm{R}}{2}\right) \geqslant m(2\mathrm{R})$, on a

$$\omega\left(\frac{\mathrm{R}}{2}\right) \leqslant \omega(2\mathrm{R})\left(1 - \frac{1}{2^{\mathrm{N}+2}}\right)$$

et le lemme est démontré.

LEMME 7.4. — *Soit* G *un ouvert borné et soit une solution dans* $\mathrm{H}^1(\mathrm{G} \cap \Omega)$ *de l'équation* $\mathrm{L}u = 0$, *nulle sur* $\partial\Omega \cap \mathrm{G}$. *Si* $\mathrm{G} \cap \Omega$ *est* $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$-*admissible* (définition 6.2), *alors si* $x_0 \in \mathrm{G} \cap \partial\Omega$ *il existe une constante* $\eta < 1$ *telle que l'on ait* (7.15).

On peut répéter la démonstration du lemme 7.3, en remarquant que l'on peut toujours supposer, en changeant éventuellement u en $-u$, $k_0 = \dfrac{\mathrm{M}(2\mathrm{R}) + m(2\mathrm{R})}{2} > 0$; alors on utilise le théorème 5.3 au lieu du théorème 5.2.

LEMME 7.5. — *Si* $\omega(\rho) \leqslant \eta\omega(4\rho)$ $(\rho < \mathrm{R})$ *avec* $\eta < 1$, *alors il existe* $\lambda(0 < \lambda < 1)$ *et* K *tels que*

$$\omega(\rho) \leqslant \mathrm{K}\rho^{\lambda}.$$

Ce lemme est un cas particulier du lemme suivant

LEMME 7.6. — *Si, pour* $\eta < 1$, $\mathrm{H} > 0$, $\alpha > 0$, *on a*

$$\omega(\rho) \leqslant \eta\omega(4\rho) + \mathrm{H}\rho^{\alpha}, \qquad \rho < \rho_0 < 1\,;$$

alors il existe $\lambda(0 < \lambda < 1)$ *et* K *tels que*

$$\omega(\rho) \leqslant \mathrm{K}\rho^{\lambda}.$$

Démonstration [15]. — Soit a tel que $\eta < a < 1$ et soit β tel que $4^{\beta}\eta = a < 1$; on pose alors $\lambda = \min(\alpha, \beta)$.

Si $\dfrac{\mathrm{R}}{4} \leqslant \rho \leqslant \mathrm{R} < \rho_0$ on a, en posant

$$\mathrm{M} = \sup_{(\mathrm{R}/4,\mathrm{R})} \frac{\omega(\rho)}{\rho^{\lambda}}$$

$$\omega(\rho) \leqslant \mathrm{M}\rho^{\lambda}.$$

Donc, si $\frac{R}{4^2} \leqslant \rho \leqslant \frac{R}{4}$, on a, compte tenu de $\rho^\lambda \geqslant \rho^\alpha$,

$$\omega(\rho) \leqslant \eta 4^\lambda M \rho^\lambda + H\rho^\lambda$$

et, en général, si $\frac{R}{4^{i+1}} \leqslant \rho \leqslant \frac{R}{4^i}$, on a

$$\omega(\rho) \leqslant \left\{ M(4^\lambda \eta)^i + H \sum_{s=0}^{i-1} (4^\lambda \eta)^s \right\} \rho^\lambda$$

$$\leqslant \left(Ma^i + \frac{H}{1-a} \right) \rho^\lambda \leqslant \left(M + \frac{H}{1-a} \right) \rho^\lambda.$$

Démonstration du théorème 7.1 *dans le cas* $c = d_i = 0$. — Le théorème découle du lemme 7.3 et du lemme 7.5.

Démonstration du théorème 7.2 *dans le cas* $c = d_i = 0$. — On pose $u = v + w$ où v est la solution dans $H_0^1(\Omega(x, 8\rho))$ de l'équation (7.7); alors w est une solution de $Lw = 0$. On utilise le théorème 7.1 et le théorème 4.2 [où N est nul puisque si ρ est petit, la forme $a(u, v)$ est coercitive sur $H_0^1(\Omega(x, 8\rho))$] et l'on obtient l'inégalité

$$\omega(\rho) \leqslant \eta\omega(4\rho) + H\rho^{1-(n/p)}.$$

Alors grâce au lemme 7.6, on démontre le théorème.

Démonstration du théorème 7.3 *dans le cas* $c = d_i = 0$. — La démonstration est pareille à celle du théorème précédent.
Il faut utiliser le théorème 5.3 au lieu du théorème 5.1.

Démonstration des théorèmes 7.1, 7.2 *et* 7.3. — On peut se ramener aux théorèmes 7.2 et 7.3 dans le cas $c = d_i = 0$. En effet on peut écrire

$$Lu = \bar{L}u + cu + (d_i u)_{x_i}$$

où

$$\bar{L} = -(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + b_i u_{x_i}.$$

Puisque u est borné, grâce aux théorèmes du § 5 on a : $cu \in L^{r/2}$, $d_i u \in L^r$ avec $r > n$. Donc une solution de l'équation (7.7) est aussi solution de l'équation

$$\bar{L}u = \sum_{i=1}^{n} (\bar{f}_i)_{x_i}$$

où $\bar{f}_i \in L^p$ avec $p > n$. En effet

$$\bar{f}_i = f_i + d_i u + V_{x_i}$$

où V est une solution de l'équation $\Delta V = cu$ (donc $V_{x_i} \in L^{rn/(2n-r)}$).

Enfin (7.9) est conséquence de (7.8) et du fait que, puisque l'on suppose l'unicité du problème de Dirichlet, on peut majorer $\|u\|_{L^2}$ par $\Sigma\|f_i\|_{L^2}$ (Remarque 4.5).

8. L'inégalité de Harnack.

On considère encore l'opérateur elliptique (5.1)

$$\text{(8.1)} \qquad Lu = -(a_{ij}u_{x_i} + d_j u)_{x_j} + (b_i u_{x_i} + cu)$$

et on suppose, dans ce paragraphe que les hypothèses (1.2) et (7.2) sont vérifiées.

On désigne pour $Q(x, \rho)$ le cube de centre x et de côté ρ.

On démontre ici le théorème suivant (qui généralise un théorème de Moser [11]).

THÉORÈME 8.1. — *Soit u une solution locale de l'équation* $Lu = 0$ (définition 1.4) *positive dans* Ω.

Alors pour chaque compact G *tel que* $G \subset \Omega$ *il existe une constante positive* K, *indépendante de u, telle que*

$$\text{(8.2)} \qquad \max_G u \leqslant K \min_G u.$$

La constante K *dépend de* ν, M, c, b_i, d_i, G, Ω.

La démonstration de ce théorème sera faite dans la suite.

THÉORÈME 8.2. — *Soit u une solution locale* (définition 1.4) *positive dans* Ω *de l'équation* $Lu = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$ *où* $f_i \in L^p(\Omega)$ *avec* $p > n$. *Il existe une constante* K *telle que, si* $x_0 \in \Omega$ *et* ρ *est suffisamment petit on a:*

$$\text{(8.3)} \qquad \max_{Q(x_0,\rho)} u \leqslant K\left(\min_{Q(x_0,\rho)} u + \Sigma\|f_i\|_{L^p(\Omega)}\rho^{1-(n/p)}\right).$$

Démonstration. — Le théorème 8.2 découle du théorème 8.1 et du théorème 4.2.

Soit x_0 un point quelconque de Ω et $\delta = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$.

Soit $R < \delta$ et suffisamment petit de façon que la forme $a(u, v)$ associée à L soit coercitive sur $H_0^1(Q(x_0, R))$ (voir théorème 3.1).

Si $2\rho < R$ on pose $u = v + w$ où w est la solution dans $H_0^1(Q(x_0, 2\rho))$ de l'équation $Lw = \Sigma(f_i)_{x_i}$; v est une solution de l'équation homogène $Lv = 0$ avec $v = u$ sur $\partial Q(x_0, 2\rho)$. Grâce au principe du maximum (théorème 3.6) v est positive dans $Q(x_0, 2\rho)$. Alors d'aprés le théorème 8.1 on a

$$\max_{Q(x_0,\rho)} v \leqslant K \min_{Q(x_0,\rho)} v.$$

Mais on a

$$\min v + \min w \leqslant \min u \leqslant \max u \leqslant \max v + \max w$$

donc

$$\max_{Q(x_0,\rho)} u \leqslant \max_{Q(x_0,\rho)} v + \max_{Q(x_0,\rho)} w \leqslant K \min_{Q(x_0,\rho)} v + \max_{Q(x_0,\rho)} w$$

$$\leqslant K\Big(\min_{Q(x_0,\rho)} u - \min_{Q(x_0,\rho)} w\Big) + \max_{Q(x_0,\rho)} w \leqslant K \min_{Q(x_0,\rho)} u + K \max_{Q(x_0,\rho)} |w|.$$

Mais, d'aprés le théorème 4.2, on a

$$\max_{Q(x_0,\rho)} |w| \leqslant K'\Sigma\|f_i\|_{L^p(\Omega)}\rho^{1-(n/p)}$$

d'où le théorème.

COROLLAIRE 8.1.— *Si l'opérateur* L *vérifie* (1.2), (7.2), *alors les solutions non négatives de* $Lu = 0$ *sont positives ou identiquement nulles.*

Soit Ω' un ouvert avec $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. En effet, si $\min_{\Omega'} u = 0$, alors $v = u + \varepsilon(\varepsilon > 0)$ est une solution de l'équation

$$Lv = \varepsilon[c - (d_i)_{x_i}].$$

D'après le théorème 8.2 on a,

$$\max_{\Omega'} v \leqslant K\varepsilon(1 + \|c\|_{L^{r/2}} + \|d_i\|_{L^r}).$$

Donc, $\max_{\Omega'} u \equiv 0$.

COROLLAIRE 8.2 (*Principe fort du maximum*). — *Si l'opérateur* L *vérifie* (1.2), (1.3) *et* $c \equiv (d_i)_{x_i} \equiv 0$, *alors une solution de l'équation* $Lu = 0$ *qui atteint son maximum ou son minimum en un point de* Ω *est constante.*

En effet soit M la valeur du maximum, atteinte au point $x_0 \in \Omega$. Alors dans $Q(x_0, 2\rho)$ la fonction

$$v = M - u + \varepsilon$$

est, pour chaque $\varepsilon > 0$, positive et $\min\limits_{Q(x_0,\rho)} v = \varepsilon$. Puisque $c = (d_i)_{x_i} = 0$, v est solution de l'équation $\mathrm{L}v = 0$, donc

$$\mathrm{M} - \min_{Q(x_0,\rho)} u = \max_{Q(x_0,\rho)} v \leqslant \mathrm{K}\varepsilon$$

d'où le corollaire.

Pour démontrer le théorème 8.1, nous aurons besoin des lemmes suivants.

LEMME 8.1. — *Soit u une solution locale positive de* $\mathrm{L}u = 0$ *et soit* $p \in \mathbf{R}$; *alors la fonction* $v = u^p$ *satisfait à l'équation non linéaire*

$$(8.3)\quad -(a_{ij}v_{x_i})_{x_j} + (b_i - d_i)v_{x_i} + p[c - (d_i)_{x_i}]v = \left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{1}{v}a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}$$

et il existe une constante $\mathrm{K}(p)$, *finie pour* $p \neq \frac{1}{2}$, *telle qu'on ait*

$$(8.4)\qquad \int_\Omega \alpha^2 v_{x_i}^2\,dx \leqslant \mathrm{K}(p)\int_\Omega (\alpha^2 + \alpha_x^2)v^2\,dx$$

et,

$$(8.5)\qquad \left(\int_\Omega (\alpha v)^{2^*}\,dx\right)^{2/2^*} \leqslant \mathrm{K}(p)\int_\Omega (\alpha^2 + \alpha_x^2)v^2\,dx.$$

Démonstration. — Pour démontrer (8.3) il suffit de faire une vérification. En multipliant (8.3) par $\alpha^2 v$ on a

$$\left(2 - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega a_{ij}\alpha^2 v_{x_i}v_{x_j}\,dx = -2\int_\Omega a_{ij}\alpha\alpha_{x_j}vv_{x_i}\,dx - \int_\Omega (b_i - d_i)\alpha^2 vv_{x_i}\,dx$$
$$-p\int_\Omega c\alpha^2v^2\,dx - p\int_\Omega d_i(\alpha^2v^2)_{x_i}\,dx.$$

Donc, en prenant les valeurs absolues, on a

$$v\left|2 - \frac{1}{p}\right|\int_\Omega \alpha^2 v_x^2\,dx \leqslant 2\int_\Omega |a_{ij}\,\alpha v\,\alpha_{x_j}|\,.\,|v_{x_i}|\,dx + \int_\Omega |b_i - d_i|\alpha^2 v|v_{x_i}|\,dx$$
$$+ |p|\int_\Omega |c|\alpha^2v^2\,dx + |p|\int_\Omega |d_i|\,|(\alpha^2v^2)_{x_i}|\,dx.$$

En utilisant les inégalites (5.12), (5.13), (5.14), (5.15) on obtient (8.4). De (8.4), grâce aux inégalités de Sobolev, on déduit (8.5).

Lemme 8.2. — *Soit u une solution locale positive de* $\mathrm{L}u = 0$; *alors la fonction* $v = \log u$ *satisfait à l'équation non linéaire*

$$(8.6)\qquad -(a_{ij}v_{x_i})_{x_j} + (b_i - d_i)v_{x_i} + c - (d_i)_{x_i} - a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} = 0.$$

Il existe une constante K *telle que, si* $x_0 \in \Omega$ *et* $2\rho < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ *l'on ait :*

$$(8.7)\qquad \int_{\mathrm{Q}(x_0,\rho)} |v - v_{\mathrm{Q}}|^2\, dx \leqslant \mathrm{K}\rho^n$$

où v_{Q} *indique la valeur moyenne de* v *sur* $\mathrm{Q}(x_0, \rho)$.

Démonstration. — Il est facile de vérifier (8.6). En multipliant par α^2, avec $\alpha \in \mathrm{C}_0^1(\Omega)$ et en faisant l'intégration par parties on a

$$(8.8)\qquad \begin{aligned} \int_\Omega a_{ij}\alpha^2 v_{x_i}v_{x_j}\, dx = 2\int_\Omega a_{ij}v_{x_i}\alpha\alpha_{x_j}\, dx + \int_\Omega (b_i - d_i)\alpha^2 v_{x_i} \\ + \int_\Omega \alpha^2 c\, dx + 2\int_\Omega d_i\alpha\alpha_{x_i}\, dx. \end{aligned}$$

Soit $\alpha \equiv 1$ dans $\mathrm{Q}(x_0, \rho)$, $\alpha \equiv 0$ hors de $\mathrm{Q}(x_0, 2\rho)$ et $|\alpha_x| \leqslant \dfrac{2}{\rho}$. De (8.8) on déduit qu'il existe une constante K telle que

$$\int_{\mathrm{Q}(x_0,\rho)} v_x^2\, dx \leqslant \mathrm{K}\rho^{n-2}.$$

D'où, grâce à l'inégalité de Poincaré (6.7) on obtient (8.7).

Lemme 8.3. — *Soit u une solution locale de* $\mathrm{L}u = 0$ *et positive. Il existe deux constantes positives α et β telles que, si* $x_0 \in \Omega$ *et*

$$2\rho < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega),$$

l'on ait

$$(8.9)\qquad \left(\frac{1}{\rho^n}\int_{\mathrm{Q}(x_0,\rho)} |u|^\alpha\, dx\right)^{1/\alpha} \leqslant \beta\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{\mathrm{Q}(x_0,\rho)} |u|^{-\alpha}\, dx\right)^{-1/\alpha}.$$

Démonstration. — On pose $v = \log u$ et l'on a, du lemme 8.2

$$\int_{\mathrm{Q}(x_0,\rho)} |v - v_{\mathrm{Q}}|\, dx \leqslant \left(\int_{\mathrm{Q}(x_0,\rho)} |v - v_{\mathrm{Q}}|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{n/2} \leqslant \mathrm{K}\rho^n.$$

Alors, grâce à un théorème de F. John et L. Nirenberg [6] il existe deux constantes positives α et β telles que

$$\int_{Q(x_0,\rho)} e^{\alpha|v - v_Q|K^{-1}}\, dx \leqslant \beta\rho^n$$

d'où

$$\int_{Q(x_0,\rho)} e^{-\alpha(v - v_Q)K^{-1}}\, dx \leqslant \beta\rho^n,$$

$$\int_{Q(x_0,\rho)} e^{\alpha(v - v_Q)K^{-1}}\, dx \leqslant \beta\rho^n$$

et, en multipliant, il s'en suit

$$\int_{Q(x_0,\rho)} e^{\alpha v K^{-1}}\, dx \,.\int_{Q(x_0,\rho)} e^{-\alpha v K^{-1}}\, dx \leqslant \beta^2\rho^{2n}.$$

En remplaçant αK^{-1} par α, β^2 par β et en posant $v = \log u$ on obtient (8.9).

Lemme 8.4. — *Soit u une solution locale positive de* $Lu = 0$; *alors si* $x_0 \in \Omega$, $2\rho < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, *on a*

$$\text{(8.10)} \quad \max_{Q(x_0,\rho)} u \leqslant K\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(x_0,2\rho)} u^q\, dx\right)^{1/q} \quad si \quad q \geqslant 2$$

$$\text{(8.11)} \quad \min_{Q(x_0,\rho)} u \geqslant K\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(x_0,2\rho)} u^q\, dx\right)^{1/q} \quad si \quad q < 0$$

où la constante K *dépend de q et de v, b_i, $\|c\|_{L^{r/2}}$, $\|d_i\|_{L^r}$.*

Démonstration. — Du lemme 8.1 on déduit que si $p < 0$ ou $p \geqslant 1$ la fonction $v = u^p$ est une sous-solution locale par rapport à l'opérateur

$$-(a_{ij}v_{x_i})_{x_j} + (b_i - d_i)v_{x_i} + p[c - (d_i)_{x_i}]v.$$

Alors en utilisant la remarque 5.1 relative au théorème 5.1 on a, si $p < 0$ ou $p > 1$

$$\max_{Q(x_0,\rho)} u^p \leqslant K\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{Q(x_0,2\rho)} u^{2p}\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En posant $q = 2p$ si $p \geqslant 1$ et $q = -2p$ si $p \leqslant 0$ l'on obtient (8.10) et (8.11).

Démonstration du théorème 8.1. — Du lemme 8.4 et du lemme 8.3 on déduit qu'il existe deux constantes positive K et α telles que

$$\min_{Q(x_0,\rho_1)} u \geqslant K\left(\frac{1}{\rho_1^n}\int_Q u^\alpha\,dx\right)^{1/\alpha}. \tag{8.12}$$

D'autre part, d'après le lemme 8.4 on a

$$\max_{Q(x_0,\rho_2)} u \leqslant K\left(\frac{1}{\rho_2^n}\int |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8.13}$$

Pour achever la démonstration il suffit de démontrer qu'il existe une constante K telle que, pour $\rho_2 > \rho_1$, l'on ait

$$\left(\frac{1}{\rho_1^n}\int_{Q(x_0,\rho_1)} u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant K\left(\frac{1}{\rho_2^n}\int_{Q(x_0,\rho_2)} u^\alpha\,dx\right)^{1/\alpha}. \tag{8.14}$$

Si (8.14) est valable on a avec une constante K convenable

$$\max_{Q(x_0,\rho_1)} u \leqslant K \min_{Q(x_0,\rho_2)} u \leqslant K \min_{Q(x_0,\rho_1)} u\,; \tag{8.15}$$

le passage de (8.15) à (8.2) se fait alors de façon standard par recouvrement fini.

Pour démontrer (8.14), on pose $\chi = \dfrac{n}{n-2} = \dfrac{2^*}{2}$ et on suppose que l'exposant α à droite de (8.14) soit tel que $\alpha\chi^s \neq 1$ pour s entier (il suffit éventuellement de prendre α un peu plus petit). Soit h un entier tel que $\alpha\chi^h \geqslant 2$. On pose $q_s = \alpha\chi^s$ et $r_s = \rho_2 - s\dfrac{\rho_2-\rho_1}{h}$ et l'on utilise le lemme 8.1 avec $\alpha = 1$ sur $Q(x_0, r_{s+1})$ et $\alpha \equiv 0$ hors de $Q(x_0, r_s)$ et $|\alpha_x| \leqslant \dfrac{2}{r_{s+1}-r_s} = \dfrac{2h}{\rho_2-\rho_1}$.

On obtient

$$\left(\int_{Q(x_0,r_{s+1})} u^{q_{s+1}}\,dx\right)^{1/(q_{s+1})} \leqslant \frac{C}{(\rho_2-\rho_1)^{2/q_s}}\left(\int_{Q(x_0,r_s)} u^\alpha\,dx\right)^{1/\alpha}$$

et en multipliant pour $s = 0, 1, \ldots, h-1$, on a

$$\left(\frac{1}{\rho_1^n}\int_{Q(x_0,\rho_1)} u^{q_h}\,dx\right)^{1/q_h} \leqslant \frac{c'\rho_2^{n/\alpha}\rho_1^{-n/q_h}}{(\rho_2-\rho_1)^{(n/\alpha)(1-\chi^{-n})}}\left(\frac{1}{\rho_2^n}\int_{Q(x_0,\rho_2)} u^\alpha\,dx\right)^{1/\alpha}$$

d'où (8.14) si $\dfrac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2} \geqslant r > 0$.

Remarque 8.1. — Du théorème 8.1 et du théorème 8.2 on peut déduire les théorèmes 7.1 et 7.2 [11]. La raison pour laquelle nous avons donné les démonstrations de § 7 est seulement que la méthode utilisée là donne aussi la régularité des solutions au bord de Ω.

Il suffit de démontrer le théorème 7.2 dans le cas où $c \equiv d_i \equiv 0$ parce que le cas général s'en déduit.

Dans ce cas les fonctions $v = \mathrm{M}(2\rho) - u$ et $w = u - m(2\rho)$ sont solutions positives dans $\mathrm{Q}(x_0, 2\rho)$ des équations

$$\bar{\mathrm{L}}v = -\sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}$$

$$\bar{\mathrm{L}}w = \sum_{i=1}^{n} (f_i)_{x_i}.$$

Grâce au théorème 8.2 on a alors

$$\text{(8.16)} \qquad \mathrm{M}(2\rho) - m(\rho) \leqslant \mathrm{K}[\mathrm{M}(2\rho) - \mathrm{M}(\rho)] + \mathrm{H}\sum \|f_i\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\rho^{1-(n/p)}$$

$$\text{(8.17)} \qquad \mathrm{M}(\rho) - m(2\rho) \leqslant \mathrm{K}[m(\rho) - m(2\rho)] + \mathrm{H}\sum \|f_i\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\rho^{1-(n/p)}.$$

Les constantes K et H peuvent être majorées uniformément par rapport à ρ pour $\rho \leqslant \rho_0$, car par homothétie on peut réduire $\mathrm{Q}(x_0, \rho)$ à $\mathrm{Q}(x_0, \rho_0)$ en obtenant une équation dont les coefficients sont bornés par des fonctions indépendamment de ρ.

En faisant la somme de (8.16) et de (8.17) on a :

$$\omega(2\rho) + \omega(\rho) \leqslant \mathrm{K}[\omega(2\rho) - \omega(\rho)] + 2\mathrm{H} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\rho^{1-(n/p)}$$

d'où

$$\omega(\rho) \leqslant \frac{\mathrm{K} - 1}{\mathrm{K} + 1}\omega(2\rho) + \mathrm{H}'\|f_i\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\rho^{1-(n/p)}$$

et la conclusion suit du lemme 7.3.

9. La fonction de Green.

Le but de ce paragraphe est d'étudier l'existence et les propriétés de la fonction de Green pour le problème de Dirichlet relatif à l'opérateur (1.1).

On suppose dans cette section que (1.2) est vérifié, que

$$\text{(9.1)} \qquad \begin{cases} |a_{ij}(x)| \leqslant \mathrm{M} \\ b_i(x) \in \mathrm{L}^n(\Omega),\ d_i(x) \in \mathrm{L}^r(\Omega) \qquad (i = 1; 2, \ldots, n) \\ c(x) \in \mathrm{L}^{r/2}(\Omega) \qquad \text{avec} \qquad r > n, \end{cases}$$

que Ω est $H_0^1(\Omega)$-admissible (définition 6.2 ou 6.3) et, en plus, que

$$c - (d_i)_{x_i} \geqslant c_0 > 0. \tag{9.2}$$

Il faut remarquer que si, au lieu de L, on considère l'opérateur adjoint L^*, il faut échanger b_i avec d_i.

Donc dans (9.1) il faut supposer

$$b_i(x) \in L^r(\Omega), \qquad d_i(x) \in L^n(\Omega) \tag{9.1'}$$

et au lieu de (9.2) il faut supposer

$$c - (b_i)_{x_i} \geqslant c_0 > 0. \tag{9.2'}$$

On a déjà défini dans la § 3 l'opérateur de Green G_λ par rapport à l'opérateur $L + \lambda$. Soit $\lambda \notin \Lambda$; les théorèmes 4.4, 4.5 et la remarque 4.6 donnent des propriétés d'inclusion pour G_λ et G_λ^*.

On peut maintenant, grâce au théorème 7.3, affirmer que, si Ω est $H_0^1(\Omega)$-admissible, G_λ est un opérateur linéaire et continu de $H^{-1,p}(\Omega)$ avec $p > n$ dans $C^0(\bar{\Omega})$ et donc G_λ^* est un opérateur linéaire et continu de l'espace des mesures à variation bornée dans $H_0^{1,q}$ avec $q < \dfrac{n}{n-1}$. Donc on pose

DÉFINITION 9.1.— *Si μ est une mesure à variation bornée, à support dans Ω, on dit que la fonction $u \in L^1(\Omega)$ est une solution faible de l'équation*

$$Lu = \mu \tag{9.3}$$

qui s'annule sur $\partial\Omega$, si

$$\int_\Omega u L^* \varphi \, dx = \int_\Omega \varphi \, d\mu \tag{9.4}$$

pour chaque fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ telle que $L^*\varphi \in C^0(\bar{\Omega})$; L^* est l'opérateur (1.6) *adjoint à* L.

Puisque Ω est $H_0^1(\Omega)$-admissible, la classe des fonctions φ est non vide (théorème 7.3).

Il serait mieux de dire « solution faible du problème de Dirichlet » plutôt que solution faible de l'équation (9.3).

THÉORÈME 9.1.— *Si Ω est $H_0^1(\Omega)$-admissible* (définition 6.2) *et si μ est une fonction d'ensemble à variation bornée, il existe une solution* *faible u et une seule, nulle sur $\partial\Omega$* (définition 9.1) *de l'équation*

$$Lu + \lambda u = \mu \tag{9.5}$$

si $\lambda \notin \Lambda$, Λ étant le spectre de L.

La solution u appartient à $H_0^{1,q}(\Omega)$ si $q < \dfrac{n}{n-1}$ et il existe une constante K telle que

$$\|u\|_{H_0^{1,q}(\Omega)} \leqslant K \int |d\mu| \qquad \left(q < \frac{n}{n-1}\right) \tag{9.6}$$

où $\int |d\mu|$ indique la variation totale de μ.

Démonstration. — Si $\lambda \notin \Lambda$, G_λ^* est un opérateur linéaire et continu de $H^{-1,p}(\Omega)$ avec $p > n$ dans $C^0(\bar{\Omega})$, et l'on a (théorème 4.3), pour toute fonction $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$:

$$\max_{\bar{\Omega}} |G_\lambda^* \psi| \leqslant K \|\psi\|_{H^{-1,p}} \qquad (p > n). \tag{9.7}$$

Mais, si u est une solution faible de l'équation

$$Lu + \lambda u = \mu$$

qui s'annule sur $\partial\Omega$, on a

$$\int_\Omega u\psi \, dx = \int_\Omega G_\lambda^*(\psi) \, d\mu \tag{9.8}$$

pour tout $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$.

Évidemment il existe au plus une fonction qui satisfait à ces conditions. De (9.4) et (9.5) on a, pour chaque $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$:

$$\left| \int_\Omega u\psi \, dx \right| \leqslant K \|\psi\|_{H^{-1,p}} \cdot \int |d\mu|.$$

Puisque $C^0(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^{-1,p}(\Omega)$, on obtient (9.6).

Remarque 9.1. — *Si μ est une mesure positive et si, au lieu de* (9.1) *et* (9.2) *on suppose* (9.1') *et* (9.2'), *alors la solution de* (9.5) *est non négative sur Ω si $\lambda \geqslant 0$.* •

En effet, puisque le principe du maximum est valable dans cette hypothèse pour l'opérateur $L^* + \lambda$, on a

$$G_\lambda^*(\psi) \geqslant 0 \quad \text{si} \quad \psi \geqslant 0.$$

Donc de (9.8) résulte la remarque.

Nous démontrerons maintenant que la solution u peut être approchée par une suite de solutions d'équations à coefficients continus.

Considérons une suite de régularisantes $\alpha_s(x)$ ayant les propriétés suivantes

(i) $$\alpha_s(x) \in C^\infty(R^n)$$

(ii) $$\alpha_s(x) \geqslant 0$$

(iii) $$\alpha_s(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \geqslant \frac{1}{s}$$

(iv) $$\int_{\mathbf{R}^n} \alpha_s(x)\, dx = 1.$$

Soit $\tilde{a}_{ij}(x)$ le prolongement de $a_{ij}(x)$ à $\mathbf{R}^n$ défini par $\tilde{a}_{ij}(x) = \nu \cdot \delta_{ij}$ hors de Ω; et soient $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}$, $\tilde{d}_i$ les prolongements de b_i, c, d_i à $\mathbf{R}^n$ définis par $\tilde{b}_i = \tilde{d}_i = 0$, $\tilde{c} = c_0$, hors de Ω. Posons

$$\alpha^{(s)} = \tilde{a}_{ij} * \alpha_s, \qquad b_i^{(s)} = \tilde{b}_i * \alpha_s, \qquad c^{(s)} = \tilde{c} * \alpha_s, \qquad d_i^{(s)} = \tilde{d}_i * \alpha_s$$

et soit

$$\text{(9.9)} \qquad L^{(s)}u = -(a_{ij}^{(s)}u_{x_i} + d_j^{(s)}u)_{x_j} + (b_i^{(s)}u_{x_i} + c^{(s)}).$$

Evidemment les coefficients de $L^{(s)}$ satisfont aux mêmes hypothèses (1.2), (9.1) et donc, si $\lambda > \bar{\lambda}$ où $\bar{\lambda}$ est suffisamment grand, la forme associée à $L^{(s)} + \lambda$ est coercitive sur $H_0^1(\Omega)$ ($\bar{\lambda}$ peut être choisi indépendant de s).

On peut alors considérer la solution faible $u^{(s)}$ de l'équation

$$\text{(9.10)} \qquad (L^{(s)} + \lambda)u^{(s)} = \mu.$$

On a alors le théorème:

THÉORÈME 9.2. — *Soit μ une mesure à variation bornée et soit $u^{(s)}$ la solution faible* (définition 9.1) *de* (9.10) *avec $\lambda > \bar{\lambda}$* (*convenable*). *Alors la suite $\{u^{(s)}\}$ converge vers la solution faible u de*

$$\text{(9.11)} \qquad (L + \lambda)u = \mu$$

faiblement dans $H_0^{1,q}$ si $q < \dfrac{n}{n-1}$ et, par conséquent, fortement dans $L^{q^*}(\Omega)$ où $q^* < \dfrac{n}{n-2}$.

i) *Si* $\mu = \psi\, dx$ *avec* $\psi \in L^p$, *où* $1 < p \leqslant \dfrac{2n}{n+1}$, *alors la suite* $\{u^{(s)}\}$ *converge faiblement dans* H_0^{1,p^*} *et fortement dans* $L^{p^{**}}(\Omega)$ *vers* u.

ii) *Si* $\mu = \psi\, dx$ *avec* $\psi \in L^p$, *où* $p \geqslant \dfrac{2n}{n+1}$, *alors* $\{u^{(s)}\}$ *converge faiblement dans* $H_0^1(\Omega)$ *et fortement dans* $L^{p^{**}}(\Omega)$ *vers* u $\left(\dfrac{1}{p^{**}} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{n}\right)$.

iii) *Si* $\mu = \psi\, dx$ *avec* $\psi \in L^p$, *où* $p > \dfrac{n}{2}$, *alors* $\{u^{(s)}\}$ *converge faiblement dans* $H_0^1(\Omega)$ *et uniformément vers* u.

Démonstration. — On considère, d'abord, le cas iii). Alors la solution $u^{(s)}$ est une solution dans $H_0^1(\Omega)$ au sens de la définition 1.3 c.à.d. satisfait la relation

$$a^{(s)}(u^{(s)}, \varphi) + \lambda(u^{(s)}, \varphi) = \int_\Omega \psi\varphi\, dx$$

où $a^{(s)}(u, v)$ est la forme associée à l'opérateur $L^{(s)}$.

Il découle du théorème 3.3 que $\|u^{(s)}\|_{H_0^1(\Omega)}$ est uniformément bornée et du théorème 7.3 que les fonctions $\{u^{(s)}\}$ satisfont uniformément à une condition de Hölder.

Donc, il existe une suite s_ν telle que $u^{(s_\nu)}$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et uniformément sur $\bar{\Omega}$ vers une fonction u continue qui satisfait à une condition de Hölder. À la limite, pour $s_\nu \to +\infty$, on trouve

$$a(u, \varphi) + \lambda(u, \varphi) = \int_\Omega \psi\varphi\, dx \qquad \forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Donc u est la solution dans $H_0^1(\Omega)$ de $(L + \lambda)u = \psi$.

Puisque cette solution est unique, la suite $\{u^{(s)}\}$ elle-même doit converger.

Les cas i) et ii) se démontrent d'une façon analogue.

Considérons le cas où μ est une mesure. La fonction $u^{(s)}$ vérifie la relation

$$\int_\Omega u^{(s)}\psi\, dx = \int_\Omega \varphi^{(s)}\, d\mu \tag{9.12}$$

où $\varphi^{(s)}(\in H_0^1(\Omega))$ est la solution de l'équation

$$(L^{(s)*} + \lambda)\varphi^{(s)} = \psi$$

pour $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$.

On a démontré déjà que $\varphi^{(s)}$ converge vers φ uniformément sur $\bar{\Omega}$ et faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers la solution φ de $(L^* + \lambda)\varphi = \psi$. Grâce à (9.6) $\|u^{(s)}\|_{H_0^{1,q}(\Omega)}$ avec $q < \dfrac{n}{n-1}$ est uniformément borné; donc il existe une sous-suite qui converge faiblement vers une fonction $u \in H_0^{1,q}(\Omega)$ $q < \dfrac{n}{n-1}$. En passant à la limite dans (9.12) on a

$$\int_\Omega u\psi \, dx = \int_\Omega \varphi \, d\mu = \int_\Omega G_\lambda^*(\psi) \, d\mu$$

pour tout $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$. Donc u est la solution faible au sens de la définition 9.1 de $(L + \lambda)u = \mu$.

Évidemment c'est toute la suite $\{u^{(s)}\}$ qui converge.

THÉORÈME 9.3.— *Soit u la solution faible de* (9.11), *avec $\lambda \geqslant 0$, où μ est une mesure positive et soit* E *le support de μ. Si au lieu de* (9.1) *et* (9.2) *l'on suppose:* (9.1′) *et* (9.2′), *alors on a*

$$u \in H_{loc}^1(\Omega - E) \cap C^0(\Omega - E). \tag{9.13}$$

Démonstration. — On considère la suite $\{u^{(s)}\}$ des solutions des équations approchées (9.10).

Grâce à la remarque (9.1) on a: $u^{(s)} \geqslant 0$.

D'autre part, pour tout φ de $\mathscr{D}(\Omega - E)$, on a

$$a^{(s)}(u^{(s)}, \varphi) + \lambda(u^{(s)}, \varphi) = 0.$$

Donc $u^{(s)}$ est une solution locale positive dans $H_{loc}^1(\Omega - E)$. D'après l'inégalité de Harnack on a, si $\bar{\Omega}' \subset \Omega$:

$$\max_{\Omega'} u^{(s)} \leqslant K \min_{\Omega'} u^{(s)}, \tag{9.14}$$

où la constante K ne dépend pas de s. La remarque 8.1 entraîne que

$$u^{(s)} \in C_\alpha^0(\Omega') \qquad (0 < \alpha < 1)$$

uniformément et donc $u \in C_\alpha^0(\Omega')$.

Puisque, de (9.14) et (9.6) on déduit

$$\max_{\Omega'} u^{(s)} \leqslant K' \|u^{(s)}\|_{L^{q^*}(\Omega)} \leqslant K'' \int |d\mu|$$

où $q^* < \dfrac{n}{n-2}$, grâce au lemme 5.2, le théorème en découle.

DÉFINITION 9.2. — *On appelle fonction de Green* $g_\lambda(x, y)$ *pour le problème de Dirichlet relative à l'opérateur* L + λ *au point* y, *la solution faible, au sens de la définition* 9.1, *de l'équation*

$$(\mathrm{L}^* + \lambda)u = \delta_y$$

où δ_y *est la mesure de Dirac au point* y.

Le théorème 9.1 entraîne que $g_\lambda(x, y)$ existe pour $\lambda \notin \Lambda$ et

$$g_\lambda(x, y) \in \mathrm{H}_0^{1,q}(\Omega) \qquad \text{avec} \qquad q < \frac{n}{n-1}.$$

De la remarque 9.1 il suit que, pour $\lambda \geqslant 0$, on a

$$g_\lambda(x, y) \geqslant 0. \tag{9.15}$$

La solution $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{C}^0(\bar{\Omega})$ de l'équation

$$\mathrm{L}^*u + \lambda u = \psi$$

avec $\psi \in \mathrm{C}^0(\bar{\Omega})$ est évidemment donnée par la formule

$$u(y) = \int_\Omega g_\lambda(x, y)\psi(x)\,dx.$$

THÉORÈME 9.4. — *Pour chaque mesure* μ, *à variation bornée, l'intégrale*

$$u(x) = \int_\Omega g_\lambda(x, y)\,d\mu(y) \tag{9.16}$$

est finie p.p. *si* $\lambda \geqslant 0$ *et, si l'on suppose vérifié* (9.2′) *au lieu de* (9.2), *elle donne la solution faible* (définition 9.1) *de l'équation*

$$\mathrm{L}u + \lambda u = \mu. \tag{9.17}$$

Démonstration. — On peut supposer que μ est une mesure positive. Soit $\psi \in \mathrm{C}^0(\bar{\Omega})$ et non négatif et soit φ la solution dans

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{C}^0(\bar{\Omega})$$

de l'équation

$$(\mathrm{L}^* + \lambda)\varphi = \psi.$$

La fonction φ est positive et elle est donnée par la formule

$$\varphi(y) = \int_\Omega g_\lambda(x, y)\psi(x)\,dx.$$

Alors, grâce au théorème de Fubini, l'intégrale

$$\int_{\Omega} g_{\lambda}(x, y)\, d\mu(y)$$

existe p.p. et l'on a

$$\int_{\Omega} \varphi(y)\, d\mu(y) = \int_{\Omega}\int_{\Omega} g_{\lambda}(x, y)\psi(x)\, d\mu(y) = \int_{\Omega} \psi(x)u(x)\, dx\,;$$

cette identité est valable pour chaque $\psi \in C^0(\bar{\Omega})$ et donc la fonction $u(x)$, donnée par (9.16), est la solution faible, au sens de la définition 9.1, de l'équation (9.17).

Remarque 9.2. — La fonction de Green $g_{\lambda}^*(x, y)$ relative à l'opérateur $L^* + \lambda$ est donnée par la formule

$$g_{\lambda}^*(x, y) = g_{\lambda}(y, x).$$

THÉORÈME 9.5. — *Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles au sens de la définition* 9.1 de

$$L^*u_1 + \lambda u_1 = \mu_1 \qquad \text{et} \qquad Lu_2 + \lambda u_2 = \mu_2$$

où $\lambda > 0$; on suppose à la fois (9.2) *et* (9.2')*; alors on a*

$$(9.18)\quad \int_{\Omega} u_1(y)\, d\mu_2(y) = \int_{\Omega} u_2(x)\, d\mu_1(x) = \iint_{\Omega\times\Omega} g_{\lambda}(x, y)\, d\mu_1(x)\, d\mu_2(y)$$

dans le sens que si l'une des intégrales existe, l'autre aussi existe et elles sont égales.

Le théorème est une conséquence du théorème 9.4, de la remarque 9.2 et du théorème de Fubini.

Supposons maintenant que L soit à coefficients $\in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ et soit $\lambda > \bar{\lambda}$ de façon que la forme $a(u, v) + \lambda(u, v)_{L^2}$ soit coercitive sur $H_0^1(\Omega)$. Soit $g_{\lambda}(x, y)$ la fonction de Green au point y; pour $y \in \Omega$ soit

$$(9.19)\qquad J_a \equiv \{x \in \Omega\,; g_{\lambda}(y, x) \geqslant a\}.$$

Puisque les coefficients $\in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, J_a contient un voisinage de y.

LEMME 9.1. — *On a*

$$(9.20)\qquad \operatorname{cap} J_a = \frac{1}{a}$$

où cap J_a est la capacité par rapport à la forme $a(u, v) + \lambda(u, v)_{L^2}$ (définition 3.1).

Démonstration. — Le potentiel capacitaire u de J_a est $= 1$ au point y et il satisfait à l'équation $Lu + \lambda u = \mu$, où μ a son support sur ∂J_a. Donc on a

$$1 = u(y) = \int g_\lambda(y, x)\, d\mu(x),$$

et, puisque $g_\lambda(y, x) = a$ sur ∂J_a, on a (9.20) et le lemme est démontré.

Soit Σ_γ la boule de centre y et de rayon γ, et soit

$$a = \min_{\partial\Sigma_\gamma} g_\lambda(y, x);$$

alors, grâce au principe du maximum, on a $\Sigma_\gamma \subset J_a$ (il faut utiliser la remarque 9.1 pour l'opérateur adjoint). Alors du théorème 3.10 on déduit

$$\frac{1}{K} \operatorname{cap} \Sigma_\gamma \leqslant \operatorname{cap} J_a = \frac{1}{a} = \frac{1}{\min\limits_{\partial\Sigma_\gamma} g_\lambda(y, x)}$$

D'une façon analogue, si

$$\max_{\partial\Sigma_\gamma} g_\lambda(y, x)$$

l'on a

$$K \operatorname{cap} \Sigma_\gamma \geqslant \operatorname{cap} J_b = \frac{1}{b} = \frac{1}{\max\limits_{\partial\Sigma_\gamma} g_\lambda(y, x)}$$

Donc, on a

$$\text{(9.21)} \quad K^{-1} \min_{\partial\Sigma_\gamma} g_\lambda(y, x) \leqslant (\operatorname{cap} \Sigma_\gamma)^{-1} \leqslant K \max_{\partial\Sigma_\gamma} g_\lambda(y, x).$$

Mais $g_\lambda(y, x)$ est une solution locale positive dans $\Omega - \{y\}$ de l'équation $(L^* + \lambda)g_\lambda = 0$ (voir théorème 9.3 pour l'opérateur adjoint), donc, grâce à l'inégalité de Harnack, il existe une constante K_1 telle que

$$\text{(9.22)} \qquad \max_{\partial\Sigma_\gamma} g_\lambda(y, x) \leqslant K_1 \min_{\partial\Sigma_\gamma} g_\lambda(y, x).$$

Il faut remarquer que la constante K_1 peut être choisie indépendante de γ parce que, par homothétie, on peut réduire Σ_γ à une boule fixée en obtenant une équation dont les coefficients sont bornés indépendamment de γ.

De (9.21) et (9.22) il découle, qu'il existe une constante K telle que, sur $\partial\Sigma_\gamma$, on a :

$$K^{-1}(\operatorname{cap} \Sigma_\gamma)^{-1} \leqslant g_\lambda(y, x) \leqslant K(\operatorname{cap} \Sigma_\gamma)^{-1}.$$

Soit maintenant $\bar{L}$ un autre opérateur à coefficients $\in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, elliptique et satisfaisant aux mêmes hypothèses que L. Soit $\bar{g}_{\lambda_1}(x, y)$ la fonction de Green de $\bar{L} + \lambda_1$ et soit $\overline{\mathrm{cap}}\, E$ la capacité de E par rapport à la forme bilinéaire associée à $\bar{L} + \lambda_1$.

Le nombre λ_1 est choisi suffisamment grand pour que la forme associée soit coercitive sur $H_0^1(\Omega)$. Alors on a

$$K^{-1}(\overline{\mathrm{cap}}\, \Sigma_y)^{-1} \leqslant \bar{g}_{\lambda_1}(y, x) \leqslant K(\overline{\mathrm{cap}}\, \Sigma_y)^{-1}.$$

En utilisant le théorème 3.11 il s'en suit qu'il existe une constante K telle que

$$K^{-1}\bar{g}_{\lambda_1}(y, x) \leqslant g_\lambda(y, x) \leqslant K\bar{g}_{\lambda_1}(x, y).$$

En particulier si, pour $n \geqslant 3$, on considère l'opérateur L et l'opérateur de Laplace (dont la forme associée est coercitive), on en déduit que la fonction de Green $g_\lambda(x, y)$ par rapport à $L + \lambda$, avec λ suffisamment grand, vérifie, dans un voisinage de y, les inégalités:

$$\frac{K^{-1}}{|x - y|^{n-2}} \leqslant g_\lambda(y, x) \leqslant \frac{K}{|x - y|^{n-2}}. \tag{9.23}$$

En utilisant le théorème 9.3 pour l'opérateur L^* on en déduit que

$$g_\lambda(y, x) \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega - \{y\}) \cap C^0(\Omega - \{y\}).$$

En utilisant enfin le théorème de convergence 9.2, on démontre le théorème suivant.

THÉORÈME 9.6.— *Si l'opérateur* L *vérifie les hypothèses* (1.2), (9.1), (9.2) *et si* Ω *est* $H_0^1(\Omega)$*-admissible, alors il existe une fonction de Green* $g_\lambda(y, x)$ *par rapport à l'opérateur* $L + \lambda$ *avec* λ *suffisamment grand* (*pour que la forme associée soit coercitive sur* $H_0^1(\Omega)$).

La fonction $g_\lambda(y, x)$ *appartient à* $H_0^{1,q}(\Omega)$ *avec* $q < \dfrac{n}{n-1}$ et *si* $n \geqslant 3$, *elle vérifie, dans un voisinage de* y, *les inégalités* (9.23), *elle est continue* (*hölderienne*) *dans* $\Omega - \{y\}$ *et appartient à* $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega - \{y\})$.

On démontre maintenant.

THÉORÈME 9.7.— *Les conclusions du théorème précédent sont vraies pour* $g_\lambda(y, x)$ *si* $\lambda \geqslant 0$.

Démonstration. — Si la mesure de Ω est suffisamment petite on peut choisir dans le théorème précédent $\bar{\lambda} = 0$ et donc le théorème 9.7 est contenu dans le théorème 9.6.

Si $\bar{\lambda} > 0$, soit $0 < \lambda < \bar{\lambda}$. Alors $v = g_\lambda(y, x)$ satisfait à l'équation

(9.24) $$v + (\lambda - \bar{\lambda})G^*_{\bar{\lambda}} v = G^*_{\bar{\lambda}}\delta_y = g_{\bar{\lambda}}(y, x)$$

qui est une équation de Riesz-Fredholm dans L^{q^*} avec $q^* < \dfrac{n}{n-2}$ car $G^*_{\bar{\lambda}}$ est un opérateur compact de L^{q^*} dans lui même.

Puisque $v \in L^{q^*}$, alors $w = G^*_\lambda v \in L^s$ où $s < \dfrac{n}{n-4}$ si $n > 4$, s est un nombre quelconque si $n = 4$, et w est borné si $n < 4$.

Dans ce dernier cas le théorème se démontre aisément. Soit $n \geqslant 4$. La fonction $w = G^*_\lambda v$ est, grâce au théorème 3.8, positive et elle est une solution locale continue dans $\Omega - \{y\}$ (théorème 9.3).

On pose $M(\rho) = \max\limits_{|y-x|=\rho} g_\lambda(y, x)$. Il existe $\sigma > 0$ $(<\rho)$ tel que

$$\max_{\rho-\sigma \leqslant |y-x| \leqslant \rho+\sigma} g_\lambda(y, x) \leqslant M(\rho) + 1.$$

De (9.23) et (9.24) on tire alors

$$M(\rho) \leqslant \frac{K}{\rho^{n-2}} + (\bar{\lambda} - \lambda) \max G^*_\lambda v.$$

Mais, du théorème 8.2, il découle

(9.25) $$\max_{|y-x|=\rho} w \leqslant K\left[\min_{|y-x|=\rho} w + (M(\rho) + 1)\rho^n\right]$$

avec K indépendant de ρ.

D'autre part, si $w \in L^s$ avec $s < \dfrac{n}{n-4}$, on doit avoir pour ρ petit:

$$\min_{|y-x|=\rho} w \leqslant \frac{1}{\rho^{n-3}}.$$

De là et de (9.25) résulte

$$M(\rho) \leqslant \frac{K'}{\rho^{n-2}}.$$

D'une façon analogue on démontre que

$$\min_{|y-x|=\rho} g_\lambda(y, x) \geqslant \frac{K''}{\rho^{n-2}}$$

et le théorème est ainsi démontré.

Nous ne considérons pas ici le cas $\lambda < 0$ avec $\lambda \notin \Lambda$, où Λ est le spectre de L.

10. Problème de Dirichlet et points réguliers.

Soit L l'opérateur elliptique (1.1); on suppose que les hypothèses (1.2), (9.1), (9.2) sont vérifiées.

Considérons maintenant le problème de Dirichlet suivant.

PROBLÈME 10.1.— *Si* $h \in C^0(\partial\Omega)$, *chercher u continue telle que, dans un sens à fixer,* $Lu = 0$ *dans* Ω *et* $u = h$ *sur* $\partial\Omega$.

Il est bien connu, même si les coefficients de l'opérateur elliptique L et Ω sont très réguliers, que l'on ne peut pas résoudre le problème (10.1) dans $H^1(\Omega)$.

(Il y a un exemple classique d'Hadamard.)

D'autre part, si $\mathscr{C}$ est l'espace des traces sur $\partial\Omega$ des $u \in H^1(\tilde{\Omega})$ avec $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$, on a démontré que (remarque 3.3 et théorème 4.3) pour $h \in \mathscr{C}$ il existe u unique dans $H^1(\Omega)$ telle que le problème 10.1 est vérifié.

On peut alors définir une application linéaire et continue $h \to Bh$ de $\mathscr{C}$ dans $H^1(\Omega)$ qui à $h \in \mathscr{C}$ fait correspondre la solution Bh du problème 10.1.

Grâce au principe du maximum (théorème 3.8) on a

$$\max_{\Omega}|Bh| \leqslant \max_{\partial\Omega}|h| \tag{10.1}$$

et, grâce au lemme 5.2, on a aussi

$$|||Bh||| \leqslant K \max_{\partial\Omega}|h| \tag{10.2}$$

où K est une constante dépendante de l'équation et de Ω et

$$|||g||| = \sup_{\bar{\Omega}' \subset \Omega}\left(\delta^2 \int_{\Omega'} |g_x|^2\,dx\right) + \max_{\Omega}|g| \tag{10.3}$$

δ étant la distance entre $\bar{\Omega}'$ et $\partial\Omega$.

Chaque fonction $h \in C^0(\partial\Omega)$ est limite uniforme d'une suite $\{h_n\}(h_n \in \mathscr{C})$ (il suffit de prolonger h à $\mathbf{R}^n$ et d'utiliser le théorème de Weierstrass sur l'approximation uniforme des fonctions continues par des polynômes); donc on peut prolonger par continuité l'application B à $C^0(\partial\Omega)$.

L'application ainsi obtenue fait correspondre à chaque $h \in C^0(\partial\Omega)$ une fonction u et une seule telle que

i) $$|||u||| < +\infty$$

ii) u est une solution locale de $Lu = 0$

iii) $$\max_{\Omega} |u| \leqslant \max_{\partial\Omega} |h|.$$

Cette application a donc résolu le problème de Dirichlet 10.1 dans le sens suivant.

A chaque fonction $h \in C^0(\partial\Omega)$ on fait correspondre une fonction u, satisfaisant à i), ii), iii) de façon que si h est la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction $\tilde{h} \in C^1(\bar{\Omega})$ alors $u = Bh \in H^1(\Omega)$ et elle est la solution (variationnelle) dans $H^1(\Omega)$ (remarque 3.3) du problème de Dirichlet.

D'une façon naturelle on se pose le problème suivant.

Problème 10.2.— *Peut-on dire que pour $y \in \partial\Omega$ on a*

(10.4) $$\lim_{\substack{x \to y \\ x \in \Omega}} Bh = h(y)?$$

Il est bien connu, grâce à un exemple classique de Lebesgue, que même pour le laplacien le problème 10.2 n'admet pas toujours une réponse affirmative.

Définition 10.1.— *Un point $y \in \partial\Omega$ est dit régulier par rapport à l'opérateur* L *si pour chaque $h \in C^0(\partial\Omega)$ on a* (10.4).

Un point non régulier est dit irrégulier.

Soit $y \in \partial\Omega$ et soit $E_\rho = \complement\Omega \cap I(y, \rho)(\rho < \rho_0)$. On peut prolonger L en posant hors de $\Omega : L = \nu\Delta$.

Soit $\sum$ une boule qui contient E_{ρ_0} et assez petite pour que la forme associée à l'opérateur L soit coercitive sur $H_0^1(\Sigma)$ (théorème 3.1). Alors on peut considérer les potentiels capacitaires u_ρ des ensembles E_ρ (théorème 3.9) par rapport à cette forme et à Σ.

On peut démontrer le théorème suivant.

Théorème 10.1.— *Un point $y \in \partial\Omega$ est régulier si et seulement si les potentiels u_ρ des ensembles $E_\rho = \complement\Omega \cap I(y, \rho)$ sont continus au point y.*

La démonstration de ce théorème s'obtient en répétant les mêmes raisonnements que dans les lemmes (3.1), (3.2), (3.3) de [8] en utilisant le fait que les potentiels capacitaires u_ρ sont les solutions des problèmes

$$\begin{aligned} Lu_\rho &= 0 \quad \text{dans} \quad \Sigma = E_\rho \\ u_\rho &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Sigma \\ u_\rho &= 1 \quad \text{sur} \quad \partial E_\rho \end{aligned}$$

On peut répéter aussi les raisonnements des n.n. 8 et n.n. 9 de [8] et l'on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 10.2. — *Le point y est régulier par rapport à un opérateur elliptique* L *si et seulement si y est régulier par rapport à l'opérateur de Laplace.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. COURANT and D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 2, New York (1962), 233.

[2] J. DENY, Sur les espaces de Dirichlet *Séminaire de Théorie du Potentiel* (1958) (n° 5).

[3] E. DE GIORGI, Sulla differenziabilità e l'analicità delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Accad. Sc. Torino Cl. Sci. Fis. Mat.* (3), 3 (1957), 25–43.

[4] E. GAGLIARDO, Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili *Ricerche di Matematica*, vol. VII (1958), 102–137.

[4'] R. M. HERVÉ, Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme

$$Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0,$$

Annales de l'Institut Fourier, 14, 2 (1964), 493-508.

[5] L. HÖRMANDER, Estimates for translation invariant operators in L_v spaces, *Acta Math.*, 104 (1960), 93-140.

[6] F. JOHN and L. NIRENBERG, On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 14 (1961), 415-426.

[7] O. A. LADYZENSKAJA and N. N. URALT'SEVA, Quasi-linear elliptic equations and variational problems with many independent variables, *Uspehi Matem. Nauk.*, vol. 16 (1961), transl. vol. 1, 17-91.

[8] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA and H. F. WEINBERGER, Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa*, vol. 17 (1963), 43-77.

[9] C. MIRANDA, Alcune osservazioni sulla maggiorazione in L^v delle soluzioni deboli delle equazioni ellittiche del secondo ordine, *Ann. di Matematica*, vol. 61 (1963), 151-170.

[10] C. B. MORREY, JR., Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity, *Math. Z.*, (1959), 146-164.

[11] J. MOSER, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. XIV (1961), 577-591.

[12] L. NIRENBERG, On elliptic partial differential equations, *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa*, vol. 13 (1959), 116-162.

[13] J. SERRIN, Local behavior of solutions of quasi-linear equations, *Acta Mathematica*, vol. III (1964), 247-302.

[13'] J. SERRIN, Isolated singularities of solutions of quasi-linear equations (à paraitre).

[14] G. STAMPACCHIA, Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni del secondo ordine ellittiche, *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa,* serie III, vol. XII, fasc. III (1958), 223-245.

[15] G. STAMPACCHIA, Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni holderiane, *Ann. Mat. Pura Appl.,* 51 (1960), 1-38.

[16] G. STAMPACCHIA, Régularisation des solutions de problèmes aux limites elliptiques à données discontinues, *Inter. Symp. on Lin. Spaces,* Jerusalem (1960), 399-408.

[17] G. STAMPACCHIA, Équations elliptiques à données discontinues, *Séminaire Schwartz* (1960/61) (n° 4).

[18] G. STAMPACCHIA, On some regular multiple integrale problems in the calculus of variations, *Comm. Pure Appl. Math.,* vol. XVI (1963), 383-421.

[19] G. STAMPACCHIA, Some limit cases of L^p-estimates for solutions of second order elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.,* vol. XVI (1963), 505-510.

[20] G. STAMPACCHIA, Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes, *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 258 (1964), 4413-4416.

[21] G. STAMPACCHIA, Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus, Séminaire sur les équations aux dérivées partielle, Collège de France (Mai 1964).

[22] A. ZYGMUND, On a théorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations, *Journal de Mathématiques,* t. 35 (1956), 223-248.

Guido STAMPACCHIA,
Faculté des Sciences,
Université de Pise,
Pisa (Italie).