ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Cédric TARQUINI

Feuilletages conformes

Tome 54, nº 2 (2004), p. 453-480.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_2_453_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
54, 2 (2004), 453–480

FEUILLETAGES CONFORMES

par Cédric TARQUINI

Introduction.

Les feuilletages conformes ont été introduits par Vaisman (voir [21]) comme une généralisation des feuilletages riemanniens. C'est encore le point de vue que nous allons adopter ici en comparant les structures riemanniennes aux structures conformes. Dans le cas des variétés la question est de comparer le groupe des difféomorphismes conformes pour une certaine métrique g, aux groupes d'isométries pour les métriques dans la classe conforme de g. Le résultat est connu sous la forme du :

THÉORÈME (Ferrand-Obata). — *Soit $(\mathcal{M}, g)$ une variété de dimension $n \geqslant 2$, connexe et non conformément équivalente à la sphère ronde $\mathbb{S}^n$ ou à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Le groupe des difféomorphismes conformes de $(\mathcal{M}, g)$ est réduit au groupe des isométries d'une métrique dans la classe conforme de g.*

Ce théorème, motivé par une conjecture de A. Lichnerowicz, a été démontré par M. Obata [14] pour la composante neutre du groupe conforme d'une variété compacte et par Jacqueline Ferrand [5], [6] dans le cas général. Notre but est de montrer un théorème équivalent transversalement à un feuilletage en répondant à la :

Mots-clés : Feuilletages – Pseudogroupes – Géométrie différentielle conforme.
Classification math. : 53C12 – 58H05 – 53A20.

Question. — Tout feuilletage conforme sur une variété compacte est-il nécessairement riemannien ou transversalement Möbius ?

Cependant les méthodes utilisées dans les articles de M. Obata et de J. Ferrand sont globales et s'adaptent mal au cas des feuilletages. Le problème est de redémontrer ce résultat non plus pour les groupes conformes mais pour les pseudogroupes de difféomorphismes conformes. Nous apportons la réponse suivante :

THÉORÈME 0.0.1. — *Tout feuilletage $\mathcal{F}$ conforme, transversalement analytique, de codimension supérieure ou égale à trois, sur une variété compacte connexe est transversalement Möbius ou riemannien.*

La seule hypothèse restrictive et peut-être inutile est l'analyticité. Elle n'est utilisée au cours de la preuve que pour se ramener au cas où le lieu d'annulation du tenseur de courbure conforme est d'intérieur vide. Lorsque la codimension égale 2, les feuilletages conformes sont les feuilletages transversalement holomorphes ou antiholomorphes. La réponse à la question précédente est négative. Un contre-exemple peut être donné par le feuilletage induit sur $\mathbb{S}^3$ au voisinage d'une singularité d'un champ de vecteur holomorphe sur $\mathbb{C}^2$ dont les valeurs propres de sa partie linéaire sont dans le domaine de Poincaré (voir [1]). En général un tel feuilletage n'est pas riemannien et il n'est pas non plus transversalement Möbius. En effet un feuilletage transversalement Möbius sur $\mathbb{S}^3$ donne une application développante $d : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ qui est une submersion, donc une fibration par un théorème dû à C. Ehresmann. Il est en particulier riemannien.

Cependant, de par les articles de M. Brunella [4] et de É. Ghys [10], c'est le seul exemple, à quotient fini près, de feuilletage transversalement holomorphe orientable, sur une 3-variété connexe compacte, qui ne soit ni riemannien, ni transversalement Möbius.

Plan de la preuve.

Soit Γ un pseudogroupe d'holonomie d'un feuilletage sur une variété compacte associé à une transversale totale T. Il est bien connu que l'on peut supposer Γ engendré par un nombre fini d'éléments et qu'il suffit d'étudier la restriction de Γ à un ouvert rencontrant toutes les feuilles et relativement compact dans T. On dit dans ce cas que (Γ, T) est un pseudogroupe à génération compacte (voir la définition 1.1.2). Ainsi si le pseudogroupe est formé d'un ensemble d'applications uniforméments équicontinues (on dit alors que le pseudogroupe est équicontinu voir 1.2), nous pouvons en un certain sens étendre les applications d'holonomie et montrer que le pseudogroupe est complet (notion rappelée en 1.3). Sous ces conditions et si Γ est supposé quasi-analytique, sa fermeture devient un pseudogroupe d'homéomorphismes de T engendré par les limites uniformes des éléments de Γ et le stabilisateur d'un point s'identifie à un groupe compact d'homéomorphismes d'un voisinage de ce point (voir le paragraphe 1.4).

À l'aide d'une adaptation d'un résultat de R. Schoen [18], nous montrons au début de la deuxième partie, que la fermeture C^0 d'un pseudogroupe conforme complet est constitué de difféomorphismes. Cela nous permet d'utiliser le théorème d'É. Salem [17], généralisé par R. Wolak [22] pour montrer que la fermeture d'un pseudogroupe complet de difféomorphismes conformes est de Lie (voir la proposition 2.2.1). Qualitativement cela signifie que les éléments proches de l'identité dérivent d'une algèbre de Lie de dimension finie de champs de vecteurs. Dès lors nous pouvons entreprendre la construction d'une métrique invariante par le pseudogroupe pour montrer le :

THÉORÈME 2.0.1. — *Tout feuilletage équicontinu, conforme, de codimension supérieure ou égale à trois, sur une variété compacte, est riemannien.*

Cette construction s'inspire des travaux de R.S. Palais [15] et utilise l'étude préliminaire des fermetures de pseudogroupes équicontinus (paragraphe 1.4) pour construire un voisinage tubulaire de l'adhérence d'une orbite.

La troisième partie est dédiée à la démonstration du :

THÉORÈME 3.0.1. — *Un feuilletage conforme $\mathcal{F}$ sur une variété compacte de codimension supérieure ou égale à 3 et dont le lieu d'annulation du tenseur de courbure conforme transverse est d'intérieur vide, est équicontinu.*

Ce dernier théorème ajouté au théorème 2.0.1 implique le résultat principal, le théorème 0.0.1. Sa preuve nécessite la démonstration d'un lemme 3.1.1 préparatoire dit de distorsion bornée. Tout feuilletage conforme sur une variété compacte, de codimension au moins 3, possède un pseudogroupe d'holonomie ne déformant pas trop les boules. On utilise un théorème de stabilité de Liouville pour les applications $(1 + \varepsilon)$-quasiconforme (voir [19]).

Nous savons déjà qu'un feuilletage conforme (sur une variété compacte, de codimension supérieure ou égale à 3) est riemannien sur l'intérieur du support du tenseur de courbure conforme transverse (voir [7]) et que sur le complémentaire de ce support, il devient transversalement Möbius. Si le feuilletage est transversalement analytique (i.e. la structure conforme transverse est donnée par une métrique analytique réelle) il ne reste plus qu'à étudier le cas où le tenseur de courbure conforme s'annule en certains points et a un support total. Le lemme de distorsion bornée permet alors de montrer que le feuilletage est équicontinu ce qui démontre les théorèmes 3.0.1 et 0.0.1 et plus généralement la :

PROPOSITION 3.2.3. — *Un feuilletage conforme $\mathcal{F}$ sur une variété compacte de codimension supérieure ou égale à 3 et dont le lieu d'annulation du tenseur de courbure conforme transverse est d'intérieur vide, est riemannien.*

La dernière partie traite d'une généralisation d'un théorème de T. Asuke [2] donnée par le lemme de distorsion bornée.

THÉORÈME 4.0.1. — *Tout feuilletage conforme sur une variété compacte de codimension au moins 3 et possédant une « bonne mesure » transverse invariante est riemannien.*

Nous pouvons remarquer que tous ces résultats peuvent être énoncés dans le cadre des pseudogroupes à générations compactes.

1. Définitions et outils.

1.1. Rappels généraux.

Soit $(\mathcal{M}, F)$ une variété feuilletée, (U_i) un recouvrement de $\mathcal{M}$ par des ouverts feuilletés trivialement, i.e. difféomorphes à $V_i \times T_i$, où les V_i sont des boules euclidiennes ouvertes de $\mathbb{R}^p$ (p dimension des feuilles) et les T_i des boules euclidiennes ouvertes deux à deux disjointes de $\mathbb{R}^q$ (q la codimension). Nous noterons $f_i : U_i \to T_i \subset \mathbb{R}^q$ les projections, $T = \cup_i T_i$ la transversale totale et $(\gamma_{i,j})$ le cocycle associé à ce recouvrement ($\forall i, j$, $f_i = \gamma_{i,j} \circ f_j$ sur $U_i \cap U_j$). Le pseudogroupe d'holonomie (Γ, T) est le pseudogroupe engendré par les $\gamma_{i,j}$.

DÉFINITION 1.1.1. — *Nous dirons que le feuilletage $\mathcal{F}$ est conforme si la transversale T possède une métrique riemannienne g pour laquelle les $\gamma_{i,j}$ sont des difféomorphismes conformes locaux, i.e. pour laquelle ${\gamma_{i,j}}^* g = e^{\sigma_{i,j}} g$, où $\sigma_{i,j}$ est une fonction à valeurs réelles définie sur le domaine de définition de $\gamma_{i,j}$.*

Exemple 1.1.1. — En codimension 2 les feuilletages conformes sont les feuilletages transversalement holomorphes ou antiholomorphes.

Exemple 1.1.2. — Tout feuilletage riemannien est conforme.

Exemple 1.1.3. — Si la métrique g est la métrique euclidienne et si la codimension est supérieure ou égale à 3, en vertu du théorème de rigidité de Liouville, les éléments du pseudogroupe d'holonomie sont des restrictions d'applications de Möbius. Nous dirons dans ce cas que le feuilletage est transversalement Möbius.

A. Heafliger (voir [11]) a montré que tout pseudogroupe d'holonomie d'un feuilletage sur une variété compacte vérifiait la condition suivante :

DÉFINITION 1.1.2. — *Le pseudogroupe (Γ, T) est à génération compacte s'il existe n ouverts de T : $O_1, \cdots, O_n$ et n éléments de Γ : $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ vérifiant :*

1. *l'ouvert O_i est relativement compact dans le domaine de γ_i, et $T' = \cup_i O_i$ rencontre toutes les orbites de Γ,*
2. *le pseudogroupe Γ' engendré par les $\gamma_i' = \gamma_i|_{O_i}$ et agissant sur T' est égal à la restriction de Γ à T'.*

Nous dirons que (Γ', T') est un pseudogroupe réduit de (Γ, T) s'il vérifie les conditions 1. et 2.

Remarque 1.1.1. — La première condition signifie que Γ et $\Gamma_{|T'}$ sont équivalents au sens des pseudogroupes (voir [11]). De manière générale si U est un ouvert de T rencontrant toutes les orbites de Γ alors Γ et $\Gamma_{|U}$ sont équivalents (la notation $\Gamma_{|U}$ désigne la restriction de Γ à l'ensemble U, i.e. l'ensemble des éléments de Γ de domaine et d'image inclus dans U).

Dans la définition 1.1.2 nous pouvons toujours supposer (et nous le ferons par la suite) que l'ensemble des $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ est équilibré i.e. stable par passage à l'inverse.

Une stratégie de la démonstration du théorème 0.0.1 est de trouver des «réductions» adéquates du pseudogroupe d'holonomie de $\mathcal{F}$. Nous allons donc raisonner en changeant fréquemment de pseudogroupe d'holonomie. Dans la suite (Γ, T) désignera toujours un pseudogroupe agissant sur l'ouvert T de $\mathbb{R}^q$.

1.2. Feuilletages équicontinus.

Notons d la distance euclidienne de $\mathbb{R}^q$ et $B(t,\varepsilon)$ la boule de centre t et de rayon ε. Dans cet article, le terme «boule» désignera toujours une boule euclidienne. En s'inspirant de l'article d'É. Ghys [9] nous donnons la :

DÉFINITION 1.2.1. — *Le pseudogroupe* (Γ, T) *est équicontinu si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un* $\eta > 0$ *tel que pour tout élément* γ *de* Γ *et toute boule* B *de rayon inférieur à* η *contenue dans le domaine de* γ, *le diamètre de l'image de* B *par* γ *est inférieur à* ε.

En fait il s'agit plus d'uniforme équicontinuité. Tout feuilletage riemannien sur une variété compacte a un pseudogroupe d'holonomie équicontinu. Nous dirons qu'un feuilletage est équicontinu s'il possède un pseudogroupe d'holonomie équicontinu.

Nous allons donner une propriété de prolongement de l'holonomie pour un feuilletage équicontinu $\mathcal{F}$. Pour ce faire, fixons un pseudogroupe (Γ, T) équicontinu et à génération compacte. Soit (Γ', T') un pseudogroupe réduit de (Γ, T) (voir la définition 1.1.2). Les arguments du lemme suivant sont présents dans les articles de Sacksteder (voir [16]), d'É. Ghys (voir [9]) et de T. Asuke (voir [2]).

LEMME 1.2.1. — *Il existe un* η_0 *tel que pour tout point* t *de* T', *tout germe d'un élément* γ' *de* Γ' *de source* t *est le germe en* t *d'un élément* γ *de* Γ *défini sur la boule de centre* t *et de rayon* η_0.

Preuve. — Ce lemme se démontre par récurrence sur la longueur des éléments de Γ' comme mots en les $\{\gamma_i'\}$. Rappelons que Γ' est engendré par n applications $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ qui se prolongent (respectivement) en n applications $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Nous supposons que l'ensemble $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ est stable par passage à l'inverse. Notons $\Gamma'_k = \{\gamma'_{i_1} \circ \cdots \circ \gamma'_{i_k}\}$ l'ensemble des éléments de Γ' composés de k générateurs.

Pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, l'ouvert $O_i = \mathrm{Dom}(\gamma'_i)$ est par définition relativement compact dans $\mathrm{Dom}\gamma_i$. Il existe donc un $\varepsilon_i > 0$ tel que tout point de O_i est au moins à distance ε_i des points de $T \setminus \mathrm{Dom}(\gamma_i)$. Posons $\varepsilon = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \varepsilon_i$ et prenons pour η_0 le η associé à cet ε par l'équicontinuité de Γ sur T. Nous pouvons le supposer inférieur à ε. Pour tout t dans $\mathrm{Dom}\gamma'_i = O_i$, γ_i est bien défini sur $B(t, \eta_0)$.

- Pour $k = 1$ c'est à dire si $\gamma' \in \{\gamma'_1, \dots, \gamma'_n\}$ le lemme est vérifié car $\eta_0 \leqslant \varepsilon$.

- Si le lemme a été démontré au rang k, alors soit $\gamma' \in \Gamma'_{k+1}$, par exemple $\gamma' = \gamma'_1 \circ \delta'$ où $\delta' \in \Gamma'_k$. Par hypothèse de récurrence, δ' se prolonge en δ sur $B(t, \eta_0)$ et l'équicontinuité donne l'inclusion $\delta(B(t, \eta_0)) \subset B(\delta'(t), \varepsilon)$. Par définition de ε l'application γ_1 est définie sur $B(\delta'(t), \varepsilon)$, donc $\gamma = \gamma_1 \circ \delta$ est définie sur $B(t, \eta_0)$ et prolonge γ'. $\square$

1.3. Complétude d'un pseudogroupe.

La complétude d'un pseudogroupe est une notion qui apparaît dans l'article de Sacksteder (voir [16]) mais elle a été approfondie par É. Salem (voir [17]).

Définition 1.3.1. — *Un pseudogroupe Γ d'homéomorphismes locaux d'un espace topologique T est complet si pour tout couple de point (s, t) de T il existe des voisinages V_s de s, V_t de t dans T tels que tout germe d'un élément de Γ de source dans V_s et de but dans V_t est le germe d'un élément de Γ défini sur V_s tout entier.*

Remarque 1.3.1. — Une remarque classique pour un pseudogroupe Γ complet est que pour tout point t de T, il existe un voisinage U de t, tel que tout germe d'élément de Γ de source et de but dans U est le germe d'un élément défini sur U tout entier. En effet il suffit de prendre l'intersection des voisinages donnés par la définition précédente pour $s = t$. Un tel ouvert sera dit ouvert de complétude pour Γ.

Remarque 1.3.2. — Nous pouvons toujours supposer, et nous le ferons par la suite, que les voisinages de complétude V_t et V_s donnés par la définition précédente sont connexes.

PROPOSITION 1.3.1. — *Tout pseudogroupe équicontinu et à génération compacte est complet.*

Nous pouvons remarquer que l'équicontinuité seule ne suffit pas, par exemple les pseudogroupes riemanniens ne sont pas toujours complets.

Exemple 1.3.1. — Considérons l'ensemble des translations $r_t :]0,1[\to]t, t+1[$. Il suffit de prendre le pseudogroupe Γ engendré par une translation r_t sur $]0,2[$ ($t \in]0,1]$ fixé) pour avoir un pseudogroupe non complet puisque r_t ne se prolonge pas au voisinage de 1 en un élément de Γ.

Preuve de la proposition 1.3.1. — Soit (Γ, T) un pseudogroupe équicontinu à génération compacte et soit (Γ', T') un de ses pseudogroupes réduits.

Soient x, y deux points de T, il existe γ, δ, deux éléments de Γ tels que $s = \gamma(x)$ et $t = \delta(y)$ appartiennent à T'. D'après le lemme 1.2.1, il existe un η_0 (ne dépendant que de Γ') tel que tout germe d'un élément de Γ' en s est le germe d'un élément de Γ défini sur $B(s, \eta_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $B(t, 2\varepsilon)$ soit contenue dans $\mathrm{Im}\delta$. L'équicontinuité donne un $\eta > 0$ associé à ε, quitte à le diminuer nous pouvons supposer que $B(s, \eta) \subset \mathrm{Im}\gamma$ et $2\eta < \eta_0$. Posons alors $V_x = \gamma^{-1}(B(s, \eta))$ et $V_y = \delta^{-1}(B(t, \varepsilon))$. Ce sont deux voisinages de complétude pour x et y.

Tout germe de source $x' \in V_x$ et de but $y' \in V_y$ défini, en composant par γ^{-1} à droite et par δ à gauche, le germe d'un élément de Γ' de source $s' = \gamma(x') \in B(s, \eta)$ et de but $t' = \delta(y') \in B(t, \varepsilon)$. D'après le lemme 1.2.1, il est donc le germe en s' d'un élément $\lambda \in \Gamma$ défini sur $B(s', \eta_0)$. Or par choix de η, la boule $B(s', \eta_0)$ contient la boule $B(s, \eta)$ et par équicontinuité $\lambda(B(s, \eta))$ est contenue dans une boule de diamètre inférieur à ε intersectant $B(t, \varepsilon)$ (par exemple en $t' = \lambda(s')$). Donc $\lambda(B(s, \eta)) \subset B(t, 2\varepsilon) \subset \mathrm{Im}\,\delta$. L'application $\delta^{-1} \circ \lambda \circ \gamma$ est définie sur V_x, est un élément de Γ et son germe en x' égale le germe initial. □

1.4. Fermeture de pseudogroupes.

DÉFINITION 1.4.1. — (voir page 533 de [3]) *La fermeture d'un pseudogroupe* (Γ, T) *pour la topologie* C^k, *noté* $\overline{\Gamma}^k$ *(sauf dans le cas* C^0 *où nous le noterons simplement* $\overline{\Gamma}$*) est l'ensemble des homéomorphismes d'un ouvert de* T *à valeurs dans un ouvert de* T *qui sont localement limites* C^k *d'une suite d'éléments de* Γ. *Ainsi un homéomorphisme sur son image,* γ, *est dans* $\overline{\Gamma}^k$ *si* $\operatorname{Dom}\gamma$ *et* $\operatorname{Im}\gamma$ *sont inclus dans* T *et si pour tout point* t *de* $\operatorname{Dom}\gamma$ *il existe un voisinage* V *de* t *inclu dans* $\operatorname{Dom}\gamma$ *et une suite d'éléments* γ_n *de* Γ *définis sur* V *qui converge vers* $\gamma|_V$ *pour la topologie* C^k.

Nous allons supposer que le pseudogroupe Γ est quasi-analytique c'est-à-dire que chacun de ses éléments défini sur un connexe est uniquement déterminé par son germe en un point de son domaine de définition. Cela est automatiquement vérifié dans le cas conforme puisque deux applications conformes définies sur un ouvert U connexe ayant même 2-jet en un point de U sont égales (voir le paragraphe 2.2).

L'ensemble $\overline{\Gamma}$ est un pseudogroupe mais en général il n'est pas égal à l'ensemble des limites uniformes des suites d'éléments de Γ. En reprenant un travail de M. Kellum (voir [12]), nous allons montrer la :

PROPOSITION 1.4.1. — *Soit* (Γ, T) *un pseudogroupe quasi-analytique, équicontinu et à génération compacte, il vérifie les propriétés suivantes :*

1) $(\overline{\Gamma}, T)$ *est un pseudogroupe complet d'homéomorphismes engendré par les limites uniformes des suites d'éléments de* Γ *;*

2) tout point t_0 *a un voisinage* $\mathcal{V}_0$ *connexe tel que les germes des éléments de* $\overline{\Gamma}_{t_0}$ *en* t_0 *se prolongent à* $\mathcal{V}_0$ *en un groupe d'homéomorphismes (noté* G_0*), compact pour la topologie* C^0.

L'ensemble $\overline{\Gamma}_{t_0}$ désigne le stabilisateur du point t_0 dans $\overline{\Gamma}$ qui est défini par $\overline{\Gamma}_{t_0} = \{\gamma \in \overline{\Gamma} \text{ tel que } t_0 \in \operatorname{Dom}\gamma \text{ et } \gamma(t_0) = t_0\}$.

Les propriétés à démontrer sont invariantes par équivalence entre pseudogroupes équicontinus. Nous allons les montrer pour une réduction (Γ', T') de (Γ, T) à l'aide de la suite de lemmes suivante. Pour toute boule ouverte B de T' formons l'ensemble $\Gamma'_B = \{\gamma \in \Gamma' \text{ tel que } B = \operatorname{Dom}\gamma\}$. L'ensemble $\overline{\Gamma'_B}$ désignera l'ensemble des limites C^0 des suites de Γ'_B, en particulier tous ses éléments ont pour domaine B mais sont à valeurs dans $\overline{T'}$.

LEMME 1.4.1. — *Pour toute boule ouverte B de T', l'ensemble $\overline{\Gamma'_B}$ est compact.*

C'est juste une application du théorème d'Ascoli puisque $\overline{T'}$ est compact et puisque B étant une boule, l'équicontinuité de la définition 1.2.1 pour Γ'_B est égale à l'équicontinuité usuelle.

LEMME 1.4.2. — *Soit B une boule ouverte de T' et soit γ un élément de $\overline{\Gamma'_B}$, alors γ appartient à $\overline{\Gamma'}$ ainsi que γ^{-1}. En particulier $\overline{\Gamma'_B}$ est inclu dans $\overline{\Gamma'}$.*

Preuve. — Soit s un point de B. L'application γ est une limite uniforme sur les compacts de B d'une suite (γ_n) d'éléments de Γ'_B. La suite de points $(\gamma_n(s))$ tend vers $t = \gamma(s) \in \overline{T'} \subset T$.

La complétude de Γ (proposition 1.3.1) donne deux voisinages connexes V_t de t et V_s de s qui peuvent être supposer des boules ouvertes de T (quitte à les diminuer). Pour tout entier n assez grand, $\gamma_n(s)$ appartient à V_t et le germe de γ_n^{-1} en $\gamma_n(s)$ est le germe d'un élément δ_n de Γ défini sur V_t. Par quasi-analyticité, si nous notons $C_{\gamma_n(s)}$ la composante connexe de $\gamma_n(s)$ dans $\mathrm{Im}\gamma_n \cap V_t$, δ_n est un prolongement de la restriction de γ_n^{-1} à $C_{\gamma_n(s)}$.

Nous affirmons qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que pour n assez grand, la boule $B(t, \alpha)$ est contenue dans $C_{\gamma_n(s)}$. Pour cela nous utilisons le lemme topologique suivant : si λ est une application de la boule euclidienne $B(s, 2r)$ dans $\mathbb{R}^q$ vérifiant : λ est un homéomorphisme sur son image, il existe un réel $\alpha > 0$ et un point t dans $\mathbb{R}^q$ tel que $d(\lambda(s), t) < \alpha$ et $\forall u \in B(s, 2r)$ tel que $d(u, s) = r$ on a $d(\lambda(u), t) > \alpha$, alors $\mathrm{Im}\,\lambda \supset B(t, \alpha)$. Donc si l'affirmation était fausse, il existerait une suite extraire (γ_{k_n}) et une suite de points u_n de $\gamma_{k_n}^{-1}(C_{\gamma_{k_n}(s)})$ telles que $d(s, u_n) = r$, $d(\gamma_{k_n}(u_n), t) < 1/n$, et $d(\gamma_{k_n}(s), t) < 1/n$ (où r est choisi indépendamment de k_n tel que $B(s, 2r)$ soit incluse dans B). Cela contredit l'uniforme équicontinuité de (δ_{k_n}).

Par conséquent t appartient à T', i.e. $\mathrm{Im}\gamma \subset T'$ et nous pouvons supposer que V_s et V_t sont des boules ouvertes de T', donc que les δ_n sont dans Γ'.

Montrons que l'application γ est injective. Si s' est un point de B tel que $\gamma(s) = \gamma(s') = t$, alors, pour n assez grand et d'après ce qui précède, t appartient à $C_{\gamma_n(s)}$ et à $C_{\gamma_n(s')}$. Donc $C_{\gamma_n(s)} = C_{\gamma_n(s')}$ et $\delta_n = \gamma_n^{-1}$ sur $C_{\gamma_n(s)}$. L'uniforme équicontinuité de (δ_n) et le fait que $d(\gamma_n(s), \gamma_n(s'))$ ait pour limite 0 implique que la limite de $d(\delta_n \circ \gamma_n(s), \delta_n \circ \gamma_n(s')) = d(s, s')$ soit nulle, donc que $s = s'$.

D'après le lemme précédent Γ'_{V_t} est relativement compact. La suite (δ_n) a une valeur d'adhérence : δ qui vérifie $\gamma \circ \delta = \mathrm{id}$ sur $B(t, \alpha)$ et $\delta \circ \gamma = \mathrm{id}$ sur un voisinage de s . Cela montre que γ est un homéomorphisme local injectif donc un homéomorphisme sur son image. De même δ est dans $\overline{\Gamma'}$ donc γ et γ^{-1} le sont aussi. □

LEMME 1.4.3. — *L'ensemble $\overline{\Gamma'}$ est un pseudogroupe.*

Preuve. — Le lemme précédent montre que $\overline{\Gamma'}$ est stable par passage à l'inverse. Il ne reste plus qu'à montrer qu'il est stable par composition. Soient γ et δ deux éléments de $\overline{\Gamma'}$ tels que $\delta \circ \gamma$ soit définit. Fixons s dans le domaine de γ, alors $t = \gamma(s)$ est dans le domaine de δ. Il existe un voisinage de s, U_s, et une suite d'éléments de Γ', (γ_n), définis sur U_s et convergente vers $\gamma|_{U_s}$. De même il existe un voisinage de t, U_t, et une suite d'éléments de Γ', (δ_n), définis sur U_t et convergente vers $\delta|_{U_t}$. L'existence d'un n_0 tel que l'intersection $W_s = \bigcap_{n \geqslant n_0} \gamma_n^{-1}(U_t)$ soit un voisinage de s, est assurée par la convergence uniforme des γ_n. D'où pour n assez grand $\delta_n \circ \gamma_n$ est défini sur W_s et converge unformément vers $\delta \circ \gamma|_{W_s}$. □

LEMME 1.4.4. — *Le pseudogroupe $\overline{\Gamma'}$ est complet.*

Preuve. — Fixons deux points s et t de T'. Soient V_s et respectivement V_t des voisinages connexes de s et t donnés par la complétude de Γ', quitte à les diminuer on peut supposer que ce sont des boules ouvertes. Soient s' un point de V_s, t' un point de V_t et γ un élément de $\overline{\Gamma'}$ défini en s' et vérifiant $\gamma(s') = t'$.

Il existe une suite d'éléments γ_n de Γ' qui converge uniformément vers γ sur V, un voisinage connexe de s' inclu dans V_s. Pour n assez grand l'ensemble $\mathrm{Im}(\gamma_n)$ intersecte V_t. Donc par complétude et quasi-analyticité les γ_n se prolongent à V_s. Il ne reste plus qu'à utiliser la compacité de $\overline{\Gamma'_{V_s}}$ pour extraire une sous-suite convergente vers une application δ définie sur V_s appartenant à $\overline{\Gamma'}$ (d'après le lemme 1.4.2) et égale à γ sur V. □

Désormais nous allons fixer un point t_0 de T' et une boule ouverte $B = B(t_0, r)$ avec r suffisamment petit pour que B soit de complétude pour $\overline{\Gamma'}$. La démonstration du lemme 1.4.4 montre le

Lemme 1.4.5. — *Le germe d'un élément de $\overline{\Gamma'}$ de source et de but dans B est le germe d'un élément de $\overline{\Gamma'_B}$. En particulier le germe en t_0 d'un élément de $\overline{\Gamma'}_{t_0}$ s'étend en un élément de $\overline{\Gamma'_B}$.*

Formons $H_0 = \overline{\Gamma'}_{t_0} \cap \overline{\Gamma'_B}$ l'ensemble de ces extensions.

Lemme 1.4.6. — *Il existe un voisinage $\mathcal{V}_0$ de t_0 connexe, H_0-invariant et tel que G_0, l'ensemble des restrictions à $\mathcal{V}_0$ des éléments de H_0, est un groupe compact d'homéomorphismes de $\mathcal{V}_0$.*

Preuve. — Fixons ε ($0 < \varepsilon < r$ avec r tel que $B = B(t_0, r)$), et notons $H_\varepsilon = \{\gamma \in \overline{\Gamma'_B}$ tel que $\gamma(t_0) \in B(t_0, \varepsilon)\}$, c'est un ouvert de $\overline{\Gamma'_B}$ contenant H_0. Posons $\mathcal{V}_0$ égal à la composante connexe de t_0 dans $\bigcap_{\delta \in H_\varepsilon} \delta^{-1}(B)$. Si $\mathcal{V}_0$ n'était pas un voisinage de t_0, il existerait une suite (δ_n) d'éléments de H_ε telle que $\cap_n \delta_n^{-1}(B)$ ne soit pas un voisinage de t_0. Par compacité de $\overline{\Gamma'_B}$, cette suite aurait une valeur d'adhérence δ telle que $\delta^{-1}(B)$ ne soit pas un voisinage de t_0 et telle que $\delta(t_0) \in \overline{B(t_0, \varepsilon)} \subset B$ d'où une contradiction.

Les ensembles H_0 et G_0 sont compacts d'après le lemme 1.4.1, reste à montrer l'invariance de $\mathcal{V}_0$ par H_0. Soient γ un élément de H_0 et δ un élément de H_ε. Il existe deux suites (γ_n) et (δ_n) de Γ'_B qui convergent respectivement vers γ et δ. Pour n assez grand γ_n est dans H_ε donc $\gamma_n(\mathcal{V}_0) \subset B$ et $\delta_n \circ \gamma_n$ est défini sur $\mathcal{V}_0$. Par complétude et quasi-analyticité, il existe une application τ_n de Γ'_B égale à $\delta_n \circ \gamma_n$ en restriction à $\mathcal{V}_0$. Par compacité de $\overline{\Gamma'_B}$, on peut supposer que la suite τ_n converge vers τ dont la restriction à $\mathcal{V}_0$ est égale à $\delta \circ \gamma$. L'application τ est dans H_ε (car $\tau(t_0) = \delta(t_0) \in B(t_0, \varepsilon)$) ce qui montre l'inclusion $\delta \circ \gamma(\mathcal{V}_0) = \tau(\mathcal{V}_0) \subset B$ et donc $\gamma(\mathcal{V}_0) \subset \delta^{-1}(B)$. □

2. Feuilletages conformes équicontinus.

Cette partie a pour but de démontrer le :

Théorème 2.0.1. — *Tout feuilletage équicontinu, conforme, de codimension supérieure ou égale à trois, sur une variété compacte, est riemannien.*

Dans ce paragraphe les difféomorphismes et la classe conforme sont de classe C^∞. Mais le théorème précedent reste vrai pour une classe de différentiabilité C^3. En effet dans ce cas la preuve de la proposition 2.1.1 suivante montre encore l'égalité $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}^2$ (énoncée pour un pseudogroupe complet de difféomorphismes conformes). On conclut de même.

2.1. Égalité des topologies.

PROPOSITION 2.1.1. — *Tout pseudogroupe de difféomorphismes conformes, complet et fermé pour la topologie compacte ouverte, est fermé pour la topologie C^∞.*

Montrer cette proposition revient à montrer une adaption la proposition 1.1 de Schoen dans [18].

PROPOSITION 2.1.2. — *Soit $\gamma_n : U \to T$ une suite de difféomorphismes conformes locaux tous définis sur l'ouvert U et qui converge, uniformément sur tout compact, vers un homéomorphisme $\gamma : U \to T$, alors γ est C^∞ et la suite converge en topologie C^∞.*

La preuve nécessite l'utilisation du laplacien conforme qui, sur une variété riemannienne $(\mathcal{M}, g)$ de dimension $q \geqslant 3$, est l'opérateur défini par

$$L_g(u) = \Delta_g u + \frac{q-2}{4(q-1)} \mathrm{Scal}_g.u$$

où u est une fonction de $C^2(\mathcal{M})$ et Scal_g la courbure scalaire associée à la métrique g. Le changement conforme de métrique $g_1 = \lambda^{4/(q-2)} g$ donne

$$L_{g_1}(u) = \lambda^{\frac{q+2}{q-2}} L_g(u\lambda).$$

En particulier si v est solution de $L_g(v) = 0$ sur un ouvert, alors la métrique $g_1 = v^{\frac{4}{q-2}} g$ est à courbure scalaire nulle. En effet, $L_{g_1}(1) = v^{\frac{q+2}{q-2}} L_g(1.v) = 0$, d'où $\Delta_{g_1}(1) + \frac{q-2}{4(q-1)} \mathrm{Scal}_{g_1}.1 = 0$ et $\mathrm{Scal}_{g_1} = 0$.

Preuve de la proposition 2.1.2. — Il suffit de recopier la démonstration de R. Schoen en remarquant que pour un point t de U fixé, la suite $\gamma_n(t)$ converge vers $s = \gamma(t)$ et pour tout $\alpha > 0$ assez petit, il existe un $\beta > 0$ tel que pour n assez grand :

$$\gamma_n(B(t,\beta)) \subset B(s,\alpha) \qquad \text{et} \qquad B(s,\beta) \subset \gamma_n(B(t,\alpha)).$$

La première inclusion provient de la convergence uniforme sur un voisinage compact de t, la seconde peut se démontrer ainsi : si l'inclusion n'a pas lieu, alors il existe une constante α, une suite extraite γ_{k_n} et une suite de points t_n tels que $d(t_n, t) = \alpha$ et $d(s, \gamma_{k_n}(t_n)) \leqslant 1/n$; quitte à réextraire nous pouvons supposer que t_n tend vers u avec $d(t, u) = \alpha$ donc $\gamma_{k_n}(t_n)$ tend simultanément (par convergence uniforme) vers $\gamma(u)$ et vers $s = \gamma(t)$ d'où une contradiction.

Maintenant pour α assez petit, la plus petite valeur propre du laplacien conforme $-L_g$ sur $B(s, \alpha)$ est positive, il y a donc une unique solution positive au problème de Dirichlet :

$$L_g v = 0 \quad \text{dans} \quad B(s, \alpha), \qquad v = 1 \quad \text{sur} \quad \partial B(s, \alpha).$$

Posons $g_1 = v^{\frac{4}{q-2}} g$ sur $B(s, \alpha)$, c'est une métrique de courbure scalaire nulle. Et pour n assez grand nous avons $\gamma_n^* g_1 = u_n^{\frac{4}{q-2}} g$ où $u_n = (v \circ \gamma_n) \|\gamma_n'\|^{\frac{q-2}{2}}$ (norme pour g). La fonction u_n est une solution de $L_g u_n = 0$ dans $B(t, \alpha)$ $(0 = L_{\gamma_n^* g_1}(1) = u_n^{\frac{4}{q-2}} L_g(1.u_n))$ et comme le volume de $(B(s, \alpha), g_1)$ est borné :

$$\int_{B(t,\beta)} u_n^{\frac{2q}{q-2}} \, \mathrm{d}\mu_g \leqslant c$$

L'ellipticité du laplacien donne une borne uniforme des fonctions u_n et donc des normes $|\gamma_n'|$ sur $B(t, \beta/2)$. En raisonnant de manière identique pour la suite (γ_n^{-1}) nous pouvons majorer et minorer uniformément la suite $(|\gamma_n'|)$ sur tout compact de B. Cela nous permet à nouveau de majorer et minorer uniformément les fonctions u_n sur $B(t, \beta)$. Les fonctions u_n ainsi que toutes leurs dérivées partielles à l'ordre k sont uniformément bornées sur $B(t, \beta/2)$. En reprenant l'égalité $\gamma_n^* g_1 = u_n^{\frac{4}{q-2}} g$ nous voyons que les dérivées partielles de la métrique $\gamma_n^* g_1$ sont bornées. Comme γ_n est une isométrie de $(B(t, \beta/2), \gamma_n^* g_1) \to (B(s, \alpha), g_1)$, les applications γ_n sont uniformément bornées en norme C^k au voisinage de t.

Cela montre que la suite γ_n converge vers γ en topologie C^{k-1} ceci pour k quelconque. □

2.2. Faisceau des transformations infinitésimales.

Soit (Γ, T) un pseudogroupe complet de difféomorphismes conformes, où T est un ouvert de $\mathbb{R}^q$ ($q \geqslant 3$). La proposition 2.1.1 montre l'égalité $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}^2$. Rappelons qu'à ce dernier pseudogroupe nous pouvons associer son faisceau des transformations infinitésimales (voir [17]) :

Pour tout ouvert U de T, $\mathcal{G}(U)$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs ξ définis sur U vérifiant : pour tout point t de U, il existe un voisinage V_t et un réel $\varepsilon > 0$ tels que pour tout temps α, $0 \leqslant |\alpha| < \varepsilon$, le flot au temps α de ξ est défini sur V_t et appartient à $\overline{\Gamma}$.

Comme la dimension de T est supérieure à 3, sa structure conforme donne un parallélisme sur le fibré principal des 2-jets des germes de difféomorphismes de $(\mathbb{R}^q, 0)$ dans T. Ce parallélisme est invariant par les difféomorphismes conformes locaux (ils agissent à gauche par leur 2-jet), donc en particulier par les éléments de $\overline{\Gamma}$ (voir par exemple [13] chapitre 4 paragraphe 6 pour plus de précisions). Le pseudogroupe Γ est ainsi quasi-analytique (voir paragraphe 1.4). Le théorème d'É. Salem [17] généralisé par R. Wolak [22] donne directement la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2.1. — *Soit* (Γ, T) *un pseudogroupe complet de difféomorphismes conformes, où* T *est de dimension au moins* 3, *alors le faisceau des transformations infinitésimales du pseudogroupe* $(\overline{\Gamma}, T)$ *est localement constant. De plus les éléments de* $\overline{\Gamma}$ *proches de l'identité pour la topologie* C^0 *sont les temps* 1 *des flots de sections locales de celui-ci.*

C'est-à-dire en chaque point t de T, il existe un voisinage ouvert U, une algèbre de Lie $\mathcal{G}(U)$ de dimension finie de champs de vecteurs de T et $\mathcal{U}$ un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}(U)$ tels que les éléments de $\overline{\Gamma}$ définis au voisinage de t et proches de l'identité sont les temps 1 des flots des éléments de $\mathcal{U}$.

2.3. Construction de la métrique.

La démonstration du théorème 2.0.1 consiste à construire une métrique invariante par un pseudogroupe d'holonomie particulier du feuilletage. Elle est basée sur une étude d'un voisinage tubulaire de l'adhérence d'une orbite. C'est une méthode qui a été introduite dans l'article de R. S. Palais (voir [15]) pour obtenir une métrique invariante par un groupe qui agit proprement.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage vérifiant les hypothèses du théorème 2.0.1. Il possède un pseudogroupe d'holonomie, (Γ, T), à génération compacte et équicontinu.

Posons (Γ', T') un pseudogroupe réduit de (Γ, T) (définition 1.1.2). Rappelons que Γ' est complet et que T' est relativement compact dans T. Soit t_0 un point de T', nous noterons $\Gamma(t_0)$ l'orbite de t_0 pour Γ (de même pour Γ' et $\overline{\Gamma}$) et $\overline{\Gamma}_{t_0}$ l'ensemble des éléments de $\overline{\Gamma}$ fixant t_0.

Reprenons $\mathcal{V}_0$ le voisinage connexe de t_0 et G_0 le groupe d'homéomorphismes de $\mathcal{V}_0$ donnés par la proposition 1.4.1. Deux remarques importantes sont à faire ici :

• G_0 est un groupe de difféomorphismes car d'après la proposition 2.1.1, $(\overline{\Gamma}, T)$ est un pseudogroupe formé de difféomorphismes.

• Par quasi-analyticité de $\overline{\Gamma}$ (voir le paragraphe précédent), les éléments de $\overline{\Gamma}_{t_0}$ définis sur un connexe se prolongent à $\mathcal{V}_0$ en des éléments de G_0 (et plus seulement leurs germes).

1^re^ étape . — *Étude locale de l'orbite* $\overline{\Gamma}(t_0)$*, nous allons montrer que c'est une sous-variété de T localement homogène.*

D'après la proposition 1.4.1, $\overline{\Gamma}$ est complet, donc d'après la proposition 2.2.1, quitte à diminuer $\mathcal{V}_0$, il existe une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de dimension finie de champs de vecteurs sur $\mathcal{V}_0$ et un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathcal{G}$ tels que les éléments de $\overline{\Gamma}$, définis au voisinage de t_0, de domaine inclus dans $\mathcal{V}_0$ et proches de l'identité, sont les temps 1 des flots des champs de vecteurs appartenant à $\mathcal{U}$.

La distribution de plans définie par $\mathcal{G}$, i.e. $\mathcal{G}(t) = \{\xi(t),\ \xi \in \mathcal{G}\}$ pour t appartenant à $\mathcal{V}_0$, est invariante par $\overline{\Gamma}$ et intégrable (éventuellement de dimension variable). Le flot de ξ fixe t_0 si et seulement si $\xi(t_0) = 0$, ainsi les éléments de G_0 proches de l'identité sont de la forme ϕ_ξ avec $\xi(t_0) = 0$ (où ϕ_ξ désigne le flot de ξ au temps 1). Appelons $\mathcal{G}_0$ la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ des champs de vecteurs s'annulant en t_0.

Soit $\mathcal{H}$ un supplémentaire de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}$, si deux éléments ξ et ξ' de $\mathcal{H}$ vérifient l'égalité $\xi(t_0) = \xi'(t_0)$ alors $\xi - \xi'$ est dans $\mathcal{G}_0$ et donc $\xi = \xi'$.

Quitte à diminuer $\mathcal{U}$, l'application exponentielle

$$\begin{array}{llll} \varphi : \mathcal{H} & \to & T \\ \quad \xi & \to & \varphi(\xi) = \phi_\xi(t_0) \end{array}$$

est un difféomorphisme de $\mathcal{U} \cap H$ sur $O = \varphi(\mathcal{U} \cap H)$.

LEMME 2.3.1. — *Il existe un voisinage connexe V de t_0 dans T vérifiant $\{\gamma(t_0)$ avec $\gamma \in \overline{\Gamma}$ tel que* $\mathrm{Dom}\gamma = V$ *et $\gamma(V) \cap V \neq \varnothing\} \subset O$.*

Preuve. — On peut supposer que $\mathcal{V}_0$ est de complétude pour t_0 (c'est ainsi qu'il a été construit), soit B une boule ouverte de centre t_0 contenue dans $\mathcal{V}_0$. Si le lemme est faux, il existe une suite d'éléments γ_n de $\overline{\Gamma}$ définis sur $B(t_0, 1/n)$ et une suite de points t_n de T tels que $\gamma_n(t_0) \notin O$, $d(t_0, t_n) < 1/n$ et $d(t_0, \gamma_n(t_n)) < 1/n$. D'après le lemme 1.4.5 et la quasi-analyticité de $\overline{\Gamma}$, les applications γ_n s'étendent en des applications de $\overline{\Gamma_B}$. Par compacité de cet ensemble (lemme 1.4.1) on peut supposer que la suite converge vers $\gamma \in \overline{\Gamma}$. Cette application est définie sur B et vérifie par passage à la limite $\gamma(t_0) = t_0$. Pour n assez grand $\gamma_n \circ \gamma^{-1}$ égale le temps 1 d'un flot ϕ_ξ (pour un $\xi \in \mathcal{U}$) et $\gamma_n(t_0) = \phi_\xi \circ \gamma(t_0) = \phi_\xi(t_0)$ est dans O. D'où la contradiction. $\square$

LEMME 2.3.2. — *L'ensemble O est un voisinage de t_0 dans $\overline{\Gamma}(t_0)$.*

En effet s'il existe un suite d'éléments γ_n de $\overline{\Gamma}$ telle que $\gamma_n(t_0)$ converge vers t_0, d'après le lemme 2.3.1 $\gamma_n(t_0)$ appartient à O pour n assez grand.

2^e étape . — *Construction du voisinage tubulaire invariant par le pseudogroupe.*

PROPOSITION 2.3.1. — *Il existe une tranche (S, χ) («slice») en t_0, c'est-à-dire une variété S invariante par G_0, transverse à $\overline{\Gamma}(t_0)$ et un difféomorphisme χ de $O \times S$ dans un voisinage ouvert V de t_0 dans T qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Tout germe d'un élément $\bar{\gamma}$ de $\overline{\Gamma}$ de source et de but dans V s'étend à V.*

2. *Tout germe d'un élément γ' de Γ' de source dans V se prolonge en un élément γ de Γ défini sur V tout entier.*

3. *Tout élément $\bar{\gamma}$ de $\overline{\Gamma}$ défini sur S et tel que $\bar{\gamma}(S) \cap S \neq \varnothing$ est, en restriction à un voisinage connexe de S, égale à un élément de G_0.*

Preuve. — Choisissons une métrique invariante par G_0 sur $\mathcal{V}_0$. L'ensemble des géodésiques de cette métrique, orthogonales à $\overline{\Gamma}(t_0)$ en t_0, définissent une transversale locale S invariante par G_0.

L'application χ est définie par $\chi(o,s) = \phi_{\varphi^{-1}(o)}(s)$. Quitte à diminuer O et S, nous pouvons supposer les choses suivantes :

- χ est un difféomorphisme de $O \times S$ sur son image V.
- L'ouvert V est de complétude (c'est la 1^re^ assertion).
- Tout germe d'un élément γ' de Γ' défini en un point de V se prolonge en un élément γ de Γ défini sur V tout entier (voir lemme 1.2.1).

Il nous reste à montrer la 3^e^ assertion. Prenons $\bar{\gamma}$ un élément de $\overline{\Gamma}$ défini sur un connexe contenant S et vérifiant $\bar{\gamma}(S) \cap S \neq \varnothing$. Il existe s et s' dans S tels que $\bar{\gamma}(s) = s'$. L'application $\bar{\gamma}$ se prolonge à V (par complétude et quasi-analyticité), nous noterons encore $\bar{\gamma}$ se prolongement. D'après le lemme 2.3.1, $\bar{\gamma}$ satisfait $\bar{\gamma}(t_0) \in O$. Donc il existe $\xi \in \mathcal{H} \cap \mathcal{U}$ tel que $\varphi(\xi) = \phi_\xi(t_0) = \bar{\gamma}(t_0)$. Le germe de $\phi_\xi^{-1} \circ \bar{\gamma}$ en t_0 est le germe d'un élément λ de G_0. Par définition de V, ϕ_ξ est définie sur S et $\lambda(S) \subset S$ donc $\bar{\gamma} = \phi_\xi \circ \lambda$ sur un voisinage de S. Cela implique $s' = \phi_\xi(\lambda(s))$ avec $\lambda(s) \in S$ ce qui s'écrit aussi $\chi(t_0, s') = \chi(\phi_\xi(t_0), \lambda(s))$. Comme χ est un difféomorphisme il vient que $\phi_\xi(t_0) = t_0$ donc $\xi = 0$ et $\bar{\gamma} = \lambda$ au voisinage de S. □

PROPOSITION 2.3.2. — *L'orbite $\overline{\Gamma}(t_0)$ possède un voisinage tubulaire invariant par Γ' sur un voisinage de $\overline{T'}$.*

Preuve. — Reprenons l'application χ et son image, V, données par la proposition précédente. Posons comme voisinage tubulaire, l'ensemble des images de V par les éléments de Γ définis sur V.

Il est invariant par Γ', en effet soit t un point de T' dans ce voisinage tubulaire, et soit δ un élément de Γ' défini en t. Par construction, Il existe un γ dans Γ et un point s dans V tels que $t = \gamma(s)$. Mais s et t sont dans T' et Γ' est la restriction de Γ à T', donc le germe de γ en s est dans Γ'. D'après la proposition précédente, le germe de $\delta \circ \gamma$ en s se prolonge en un élément τ de Γ défini sur V. Ainsi $\delta(t) = \tau(s)$ est dans le voisinage tubulaire. □

3^{e} étape. — Conclusion.

PROPOSITION 2.3.3. — *Le pseudogroupe Γ' est un pseudogroupe riemannien.*

Preuve. — Nous allons construire une métrique riemannienne sur T' invariante par Γ' en utilisant les voisinages tubulaires des $\overline{\Gamma}(t_0)$ ($t_0 \in T'$) donnés par la proposition précédente.

L'ensemble de ces voisinages tubulaires forme un recouvrement du compact $\overline{T'}$; nous pouvons donc en extraire un sous-recouvrement fini.

Rappelons que la tranche S définissant le voisinage tubulaire de $\overline{\Gamma}(t_0)$ est invariante par G_0 qui est compact. Nous pouvons choisir une métrique G_0-invariante sur T' le long de S et la pousser en avant par les éléments de $\overline{\Gamma}$ pour obtenir une métrique invariante par Γ' sur ce voisinage tubulaire. Quitte à multiplier cette métrique au départ par une fonction positive, G_0-invariante, nulle sur le bord de S et non nulle ailleurs, la métrique obtenue se prolonge à T' en une métrique singulière nulle sur le complémentaire du voisinage tubulaire.

Il ne reste plus qu'à sommer ces métriques (somme finie par choix du recouvrement) pour obtenir une métrique Γ'-invariante sur T'. □

Remarque 2.3.1. — La technique utilisée donne une structure riemannienne au plus C^{∞}. Cette métrique peut être construite de manière à rester dans la classe conforme initiale.

3. Un théorème de Ferrand-Obata feuilleté.

Nous donnons dans le paragraphe 3.2 la preuve du théorème 0.0.1 et du :

THÉORÈME 3.0.1. — *Un feuilletage conforme $\mathcal{F}$ sur une variété compacte de codimension supérieure ou égale à 3 et dont le lieu d'annulation du tenseur de courbure conforme transverse est d'intérieur vide, est équicontinu.*

3.1. Un lemme de distorsion bornée.

La démonstration du théorème ci-dessus nécessite le lemme suivant. L'idée essentielle est que les applications conformes pour une métrique fixée deviennent quasi-conformes pour la métrique euclidienne. Rappelons que toutes les boules sont euclidiennes. Pour un ensemble E de $\mathbb{R}^q$, nous appellerons diamètre extérieur de E (noté $\mathrm{diamext}(E)$) l'infimum des diamètres des boules contenant E et diamètre intérieur de E (noté $\mathrm{diamint}E$) le supremum des diamètres des boules contenues dans E.

LEMME 3.1.1 (dit de distorsion bornée). — *Soit $(\mathcal{M}, F)$ un feuilletage conforme sur une variété compacte. Il existe une constante C et un pseudogroupe d'holonomie (Γ, T) tels que pour toute application γ dans Γ et toute boule euclidienne B incluse dans* $\mathrm{dom}\gamma$ *on ait*

$$\frac{\mathrm{diamext}(\gamma(B))}{\mathrm{diamint}(\gamma(B))} \leqslant C.$$

Une application différentiable f d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est K-quasi-conforme si en tout point de son domaine de définition, elle vérifie (voir [20]) :

$$\frac{\sup_{||X||=1} ||d_s f(X)||}{\inf_{||X||=1} ||d_s f(X)||} \leqslant K$$

où $||.||$ est la norme euclidienne.

DÉFINITION 3.1.1. — *Nous dirons qu'un feuilletage est K-quasi-conforme si on peut lui trouver un pseudogroupe d'holonomie constitué d'applications toutes K-quasi-conformes.*

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage conforme sur une variété compacte. Tout pseudogroupe d'holonomie (Γ, T) de ce feuilletage est formé d'applications conformes (pour une certaine métrique g définie sur la transversale totale $T \subset \mathbb{R}^q$) et est à génération compacte. Ainsi nous pouvons restreindre les éléments de Γ à un ouvert relativement compacte de T. Sur cet ouvert la métrique g est bornée par rapport à la métrique euclidienne.

Tout feuilletage conforme sur une variété compacte est K-quasi-conforme pour un réel K supérieur à 1. Mais un choix judicieux d'un représentant du pseudogroupe d'holonomie nous permet de démontrer le résultat suivant :

LEMME 3.1.2. — *Tout pseudogroupe de difféomorphismes de $\mathbb{R}^q$, conforme et à génération compacte est équivalent à un pseudogroupe $(1+\varepsilon)$-quasi-conforme, pour tout $\varepsilon > 0$.*

Preuve. — Soit (Γ, T) un pseudogroupe à génération compacte et U un ouvert relativement compact de T rencontrant toutes les orbites de Γ. Les éléments de Γ agissent sur T et sont conformes pour la métrique g définie sur T.

Si nous fixons un $\varepsilon > 0$, par continuité de g et relative compacité de U dans T, nous pouvons recouvrir $\overline{U}$ par un nombre fini de boules $(B_\alpha)_{\alpha=1,\cdots,k}$ de centres respectifs $(t_\alpha)_{\alpha=1,\cdots,k}$ telles que pour tout point s de B_α et pour tout vecteur X non nul de $\mathbb{R}^q$ on ait :

$$\left|\frac{g_s(X,X)}{g_\alpha(X,X)} - 1\right| < \varepsilon$$

où g_α est la métrique constante sur B_α égale à g_{t_α} au point t_α et où l'on identifie à $\mathbb{R}^q$ l'espace tangent à T en s.

Il existe k isomorphismes affines $S_1, \cdots, S_k$ tels que $S_\alpha(B_\alpha) \cap S_\beta(B_\beta) = \varnothing$ si $\alpha \neq \beta$, et tels que $S_\alpha^* g_\alpha$ soit la métrique euclidienne.

Soit Γ' le pseudogroupe équivalent à Γ par les applications S_α (Γ' est formé des éléments $\gamma' = S_\alpha \circ \gamma \circ S_\beta^{-1}$ pour γ dans Γ quand le produit est défini). Il est conforme pour la métrique g' poussée en avant de g par les S_α, et est $\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$-quasi-conforme. En effet, tout point s de $S_\alpha(B_\alpha)$ vérifie l'inégalité :

$$\left|\frac{g'_s(X,X)}{< X, X >} - 1\right| < \varepsilon$$

où X est un vecteur non nul et où $<,>$ est la métrique euclidienne. Maintenant si γ est un élément de Γ' défini en s, alors quelque soit le vecteur tangent X, nous avons :

$$(1-\varepsilon)||X||^2 \leqslant g'_s(X,X) \leqslant (1+\varepsilon)||X||^2$$

$$(1-\varepsilon)||d_s\gamma(X)||^2 \leqslant (\gamma^* g')_s(X,X) \leqslant (1+\varepsilon)||d_s\gamma(X)||^2$$

or $(\gamma^* g')_s = ||d_s\gamma||^2_{g'} g'_s$ donc

$$\begin{aligned} ||d_s\gamma||^2_{g'}(1-\varepsilon)||X||^2 &\leqslant (1+\varepsilon)||d_s\gamma(X)||^2 \\ (1-\varepsilon)||d_s\gamma(X)||^2 &\leqslant ||d_s\gamma||^2_{g'}(1+\varepsilon)||X||^2 \end{aligned}$$

$$\sup_{||X||=1} ||d_s\gamma(X)|| \leqslant \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/2} ||d_s\gamma||_{g'}$$

$$\inf_{||X||=1} ||d_s\gamma(X)|| \geqslant \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{1/2} ||d_s\gamma||_{g'}$$

finalement

$$\frac{\sup_{||X||=1} ||d_s\gamma(X)||}{\inf_{||X||=1} ||d_s\gamma(X)||} \leqslant \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

□

Le lemme de distorsion bornée est une conséquence directe du lemme précédent et de la proposition suivante. Malgré le caractère naturel de cette proposition, nous n'en avons pas trouvé de preuve élémentaire. Tout d'abord il faut remarquer qu'elle est fausse en dimension 2, puisque tout domaine simplement connexe du plan autre que le plan lui même est biholomorphe au disque unité. La preuve utilise un théorème de stabilité de Liouville (voir par exemple [19]).

Proposition 3.1.1. — *Soient $q \geqslant 3$, il existe une constante C et un $\varepsilon_0 > 0$ ne dépendant que de q tels que pour toute boule B de $\mathbb{R}^q$ et pour toute application $(1+\varepsilon_0)$-quasi-conforme $f : B \to \mathbb{R}^q$ avec $f(B)$ relativement compact dans $\mathbb{R}^q$ nous avons :*

$$\frac{\operatorname{diamext}(f(B))}{\operatorname{diamint}(f(B))} \leqslant \frac{1}{1-2C\varepsilon_0}.$$

Preuve. — Quitte à composer par des similitudes à la source et au but, ce qui ne change pas le facteur de distorsion, nous pouvons nous restreindre à montrer la proposition pour B la boule unité de $\mathbb{R}^q$ et pour $f : B \to B$ avec $\operatorname{diamext}(f(B)) = 2$.

Par un théorème de stabilité de Liouville (voir par exemple [19]) il existe deux constantes $\varepsilon_0 > 0$ et C avec $2\varepsilon_0 C < 1$ telles que pour toute application $(1+\varepsilon_0)$-quasi-conforme, $f : B \to B$ avec $\mathrm{diamext}(f(B)) = 2$, il existe une application de Möbius φ vérifiant : $|\varphi - f| \leqslant C\varepsilon_0$, en tout point de B.

La boule $\varphi(B)$ est contenue dans $B(0, 1 + C\varepsilon_0)$ et de diamètre (qui est son diamètre intérieur ou extérieur) supérieur à $2 - 2C\varepsilon_0$ ce qui montre que le diamètre intérieur de $f(B)$ est supérieur à $2 - 4C\varepsilon_0$, d'où l'inégalité. □

3.2. Feuilletages conformes transversalement analytiques.

Nous dirons que le feuilletage $\mathcal{F}$ possède une structure transverse conforme analytique réelle, s'il a un pseudogroupe d'holonomie (Γ, T) dont les éléments sont des difféomorphismes locaux conformes pour une métrique riemannienne analytique réelle, g, définie sur T. Rappelons quelques notions de géométrie conforme.

Définition 3.2.1. — *La variété conforme $(T, [g])$ de dimension q est dite conformément plate si en tout point t de T, il existe un voisinage V_t de t et un difféomorphisme conforme $\varphi_t : V_t \to \varphi_t(V_t) \subset \mathbb{R}^q$ (c'est à dire φ_t envoie la classe conforme $[g]$ sur la classe conforme de la métrique euclidienne).*

La platitude conforme se mesure grâce à un tenseur de courbure conforme. Rappelons ses propriétés :

Proposition 3.2.1. — (voir [8]) *Soit $(T, [g])$ une variété conforme,*

- *Si* $\dim T = 2$ *alors T est conformément plate.*
- *Si* $\dim T = 3$ *alors le tenseur de Weyl de (T, g) est nul et T est conformément plate si et seulement si le tenseur de Schouten est identiquement nul.*
- *Si* $\dim T \geqslant 4$ *alors T est conformément plate si et seulement si le tenseur de Weyl est identiquement nul.*

Nous allons raisonner en codimension supérieure ou égale à 4, le tenseur de courbure conforme est égal au tenseur de Weyl, W. En codimension 3 les résultats sont encore vrais (voir la remarque finale 3.2.1). Formons l'ensemble

$$Z(W) = \{t \in T / W(t) = 0\}.$$

L'invariance conforme du tenseur de Weyl donne le résultat suivant :

LEMME 3.2.1. — *$Z(W)$ est un fermé invariant par* Γ.

La forme quadratique $h = \|W\|g$ est elle aussi invariante par les difféomorphismes conformes locaux de T. Ainsi, le pseudogroupe d'holonomie du feuilletage est, en restriction à $U(W) = T \setminus Z(W)$, un pseudogroupe d'isométries pour h. Le théorème 3.0.1 peut se reformuler comme suit :

PROPOSITION 3.2.2. — *Si $Z(W)$ est d'intérieur vide alors le pseudogroupe Γ est équivalent à un pseudogroupe équicontinu.*

Preuve. — Quitte à changer de pseudogroupe d'holonomie, nous pouvons supposer que (Γ, T) est donné par le lemme 3.1.1 de distorsion bornée, il vient avec une constante C. Ce pseudogroupe est à génération compacte, soit K un compact de T rencontrant toutes les orbites de Γ.

L'existence de h permet de construire une distance à $Z(W)$ invariante par Γ (voir [7]), nous la noterons $\mathrm{d}_Z : T \to \mathbb{R}_+$. L'équicontinuité de Γ est évidente sur un compact inclus dans $U(W)$ puisqu'il est riemannien sur cet ouvert. Ainsi pour tout α, la restriction du pseudogroupe à $F_\alpha = \{t \in K / d_Z(t) \geqslant \alpha\}$ est équicontinue.

Sur un voisinage de $Z(W)$ ce qui peut se produire a priori c'est l'aplatissement des boules le long de $Z(W)$. Pour montrer l'équicontinuité il faut borner le diamètre extérieur de $\gamma(B(t,\eta))$ indépendamment de t et de γ.

Les ensembles $V_n = \{t \in T / d_Z(t) \leqslant 1/n\}$ sont Γ-invariants et forment un système fondamental de voisinages de $Z(W)$. Comme l'intérieur de $Z(W)$ est vide, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que le diamètre intérieur de tout ouvert inclus dans $V_{n_0} \cap K$ soit inférieur à ε/C. (Sinon il y aurait une suite de boule B_n de diamètre minoré par une constante avec $B_n \subset V_n$, par compacité de K on pourrait trouver une boule dans $Z(W)$). Pour toute boule B incluse dans V_{n_0} et toute application γ du pseudogroupe Γ définie sur B et telle que $\gamma(B)$ soit contenue dans K, le diamètre intérieur de $\gamma(B)$ est inférieur à ε/C. Donc d'après l'inégalité du lemme 3.1.1 le diamètre extérieur de $\gamma(B)$ est inférieur à ε.

L'équicontinuité de Γ sur $F_{1/(2n_0)}$ et l'intersection non vide de $F_{1/(2n_0)}$ avec V_{n_0} nous permettent de choisir un η d'équicontinuité associé à ε sur K. Ce qui montre l'équicontinuité de la restriction de Γ à K. □

La proposition précédente et le théorème 2.0.1 implique la :

Proposition 3.2.3. — *Tout feuilletage conforme $\mathcal{F}$ de codimension supérieure ou égale à 3 sur une variété compacte, dont le lieu d'annulation du tenseur de courbure conforme transverse est d'intérieur vide, est riemannien.*

Pour finir la preuve du théorème 0.0.1 il suffit d'étudier les trois cas suivants :

• L'ouvert $U(W)$ est vide, i.e. (T, g) est conformément plate. Quitte à changer le pseudogroupe d'holonomie, le théorème de rigidité de Liouville assure que le feuilletage est transversalement Möbius.

• L'ouvert $U(W)$ égale T. La métrique h est non singulière et Γ-invariante. Le feuilletage est alors riemannien.

• L'ouvert $U(W)$ et le fermé $Z(W)$ sont non vides. L'analyticité implique alors que $Z(W)$ est d'intérieur vide. La proposition précédente permet de conclure.

Remarque 3.2.1. — La discussion ci-dessus expose la démonstration dans le cas de la codimension supérieure à 4. En codimension 3, il faut utiliser le tenseur de Schouten, S. En posant $h = \|S\|_g^{\frac{2}{3}} g$ la démonstration est identique.

4. Un autre résultat : feuilletages conformes mesurés.

Le lemme 3.1.1 de distorsion bornée donne la généralisation suivante d'un théorème de T. Asuke :

Théorème 4.0.1. — *Tout feuilletage conforme C^3, sur une variété compacte, de codimension au moins 3 et possédant une « bonne mesure » transverse invariante, est riemannien.*

Le théorème de T. Asuke exposé dans [2], s'énonce ainsi

Théorème (T. Asuke). — *Soit $(\mathcal{M}, F)$ un feuilletage transversalement Möbius sur une variété fermée $\mathcal{M}$. Si le feuilletage $\mathcal{F}$ possède une « bonne mesure transverse invariante » alors il est riemannien.*

Rappelons qu'une mesure transverse invariante μ est une bonne mesure si

a) supp(μ)= $\mathcal{M}$,

b) μ est borélienne, sans atome,

c) μ est localement finie (i.e. finie sur les compacts).

Cela implique en particulier que pour tout pseudogroupe d'holonomie (Γ, T) du feuilletage, la transversale totale T a une «bonne mesure» invariante par Γ.

Preuve. — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage vérifiant les hypothèses du théorème et supposons que $\mathcal{F}$ ne soit pas équicontinu.

Soient C une constante et (Γ, T) un pseudogroupe d'holonomie de $\mathcal{F}$ donnés par le lemme 3.1.1. Choisissons un pseudogroupe réduit de (Γ, T) : (Γ', T'). Par hypothèse Γ a une mesure invariante, μ, finie sur les compacts, chargeant tous les ouverts de T et sans atome.

Le pseudogroupe Γ' n'est pas équicontinu. Ainsi il existe un $\alpha > 0$, une suite de boule $B(t_n, 1/n)$ de T' et une suite d'éléments γ_n de Γ' tels que pour tout n, γ_n est défini sur $B(t_n, 1/n)$ et $\gamma_n(B(t_n, 1/n))$ n'est pas inclus dans une boule de diamètre α.

Le diamétre extérieur des ensembles $\gamma_n(B(t_n, 1/n))$ est supérieur à α, donc d'après le lemme 3.1.1, leur diamètre intérieur est supérieur à $\alpha_0 = \alpha/C$. Par compacité de $\overline{T'}$ et quitte à extraire une sous suite, nous pouvons supposer qu'il existe un point s de T tel que pour n assez grand, chaque ensemble $\gamma_n(B(t_n, 1/n))$ contient la boule $B(s, \alpha_0/3)$.

$$\text{Ainsi pour } n \text{ assez grand,} \quad \mu(B(t_n, 1/n)) \geqslant \mu(B(s, \alpha_0/3)) > 0.$$

Quitte à passer à une sous suite, la suite t_n tend vers un point t de $\overline{T'}$. Le point t est un atome pour μ. Cette contradiction montre que $\mathcal{F}$ est équicontinu et donc riemannien d'après le théorème 2.0.1. □

Remerciements. — Je tiens à remercier Gaël Meigniez pour m'avoir donné ce sujet de recherche. Une partie des résultats de cet article a été développée lors de mon séjour à Barcelone, merci à l'UAB et tout particulièrement à Marcel Nicolau pour leur accueil. J'exprime ma gratitude pour P. Koskela, son indication (l'article [19] de Trotsenko) m'a été précieuse. Enfin merci à Abdelghani Zeghib pour ses remarques et l'attention qu'il a portée à cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. ARNOLD, Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, édition Mir, Moscou, 1980.

[2] T. ASUKE, On transversaly flat conformal foliations with good measures II, Hiroshima Math. J., 28 (1998), 523-525.

[3] M. BELLIART, On the dynamics of certain actions of free groups on closed real analytic manifolds, Commentarii Mathematici Helvetici, 77 (2002), 524-548.

[4] M. BRUNELLA, On transversely holomorphic flows I, Inventiones Mathematicae, 126, 2 (1996), 265-279.

[5] J. FERRAND, Transformations conformes et quasi conformes des variétés riemanniennes : application à la démonstration d'une conjecture de A. Lichnerowicz, C.R.Acad.Sci. Paris, Série A, 269 (1969), 583-586.

[6] J. FERRAND, The action of conformal transformations on a Riemannian manifold, Mathematische Annalen, 304 (1996), 277-291.

[7] C. FRANCES, C. TARQUINI, Autour du théorème de Ferrand-Obata, Annals of Global Analysis and Geometry, 21 (2002), 51-62.

[8] S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, Riemannian Geometry, Universitext, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987, 1990.

[9] É. GHYS, Flots transversalement affines et tissus feuilletés, Mémoire de la Société Mathématiques de France (N.S), 46 (1991), 123-150.

[10] É. GHYS, On transversaly holomorphic flows II, Inventiones Mathematicae, 126 (1996), 281-286.

[11] A. HAEFLIGER, Pseudo-groupes of locales isometries, Proceeding Vth Coll. in Diff. Geom., 131 (1985), 174-197.

[12] M. KELLUM, Uniform lipschitz distortion, invariant measures and foliations, Geometric study of foliations (Tokyo, 1993) (1994), 313-326, World Sci. Publishing, River Edge, NJ.

[13] S. KOBAYASHI, Transformation groups in differential geometry, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[14] M. OBATA, The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds, J. Differential Geom., 6 (1971), 247-258.

[15] R. PALAIS, On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, Annals of Mathematics, 73-2 (1961), 295-323.

[16] R. SACKSTEDER, Foliations and pseudogroups, American journal of Mathematics, 87 (1967), 79-101.

[17] É. SALEM, Une généralisation du théorème de Myers-Steenrod aux pseudogroupes d'isométries locales, Annales de l'institut Fourier, 38-2 (1988), 185-200.

[18] R. SCHOEN, On the conformal and CR automorphism groups, Geometric and functional analysis, 5-2 (1995), 464-481.

[19] D. TROTSENKO, Continuation from a domain and the approximation of space quasiconformal mappings with small distortion coefficient, Soviet mathematics, Doklady, 27-3 (1983), 777-780.

[20] J. VÄISÄLÄ, Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1988.

[21] I. VAISMAN, Conformal foliations, Kodai Math. Journal, 2 (1979), 26-37.

[22] R.A. WOLAK, Foliated G-structures and Riemannian foliations, Manuscripta Mathematica, 66 (1989), 45-59.

Manuscrit reçu le 10 avril 2003,
révisé le 18 septembre 2003,
accepté le 9 décembre 2003.

Cédric TARQUINI
École Normale Supérieure de Lyon
U.M.P.A. 46 allée d'Italie
CNRS-UMR 5669
69364 Lyon cedex 07 (France).

Cedric.Tarquini@umpa.ens-lyon.fr