ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HEINZ BAUER

Propriétés fines des fonctions hyperharmoniques dans une théorie axiomatique du potentiel

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 1 (1965), p. 137-154

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_1_137_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 1 (1965), 137-154.

PROPRIÉTÉS FINES DES FONCTIONS HYPER-HARMONIQUES DANS UNE THÉORIE AXIOMATIQUE DU POTENTIEL (1)

par Heinz BAUER

Introduction.

Ce travail représente la troisième contribution à une série d'articles concernant l'étude d'une théorie axiomatique du potentiel. Le point de départ de cette théorie est la notion d'un faisceau de fonctions « harmoniques ». Les applications concernent des équations aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique et parabolique.

On s'intéresse ici surtout aux propriétés des fonctions hyper-harmoniques qui, dans le cas classique, sont liées à la topologie fine et au théorème de convergence dû à H. Cartan. On aperçoit dans cette partie de la théorie pour la première fois des différences essentielles entre le cas elliptique, représenté par la théorie de Brelot [5], et le cas parabolique, englobé dans notre théorie. Les différences s'expriment par l'apparition des ensembles semi-polaires qui généralisent les ensembles polaires et coïncident avec eux dans le cas elliptique de Brelot.

Le résultat central concerne la notion d'effilement faible introduit par Brelot [6], [7]. On montrera que l'effilement faible d'un ensemble E en un point $x \notin E$ équivaut à l'effilement ordinaire de E en x. Notre première démonstration de ce résultat, valable seulement pour E analytique et exposée au Colloque, utilisait un théorème de Meyer [11] permettant l'application des méthodes probabilistes de la théorie de Hunt [10]. La démonstration donnée ici est basée sur un résultat de Boboc, Constantinescu et Cornea [4] et due à ces

(1) Développement d'un exposé présenté au Colloque International du C.N.R.S. sur la Théorie du Potentiel. Ce travail a été effectué pendant un séjour de l'auteur à l'Université de Paris comme professeur d'échange au printemps 1964.

auteurs. Une conséquence de la première démonstration est maintenant le point de départ de la nouvelle présentation : On montre l'égalité de la réduite R_u^E et de la balayée $\hat{R}_u^E$ dans le complémentaire de E.

L'étude comparée des deux notions d'effilement montre en particulier que, même pour $x \in E$, l'effilement faible de E en x est la « bonne » notion d'effilement. On aperçoit ensuite d'après un théorème de Brelot [6] le théorème de convergence cherché dans cette théorie. Les applications de ce théorème concernent surtout des compléments à la théorie du problème de Dirichlet.

Dans une première partie du travail, on donnera un autre aspect de la notion d'un ensemble absorbant, introduite antérieurement. Cet aspect permettra une caractérisation de la théorie de Brelot en termes de la nôtre et une étude approfondie des ensembles polaires.

On utilisera dans tout l'article l'axiome de convergence de Doob. Mais une certaine partie du travail reste valable même avec l'axiome K_1 introduit dans [1].

Les notations seront les mêmes que dans les travaux antérieurs [1], [2]. En particulier, $\mathscr{C}(T)$ désignera l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur un espace topologique T.

1. Les axiomes de la théorie.

Rappelons brièvement les bases d'une théorie axiomatique des fonctions harmoniques et hyperharmoniques développée dans deux publications antérieures [1], [2].

On se donne un espace X *localement compact* et une application $U \to \mathscr{H}_U$ qui associe à tout ouvert $U \subset X$ un *sous-espace vectoriel* $\mathscr{H}_U$ de $\mathscr{C}(U)$. Les éléments de $\mathscr{H}_U$ sont appelés les *fonctions harmoniques* dans U. On définit ensuite les notions suivantes :

Un ouvert $V \subset X$ relativement compact avec frontière $V^* \neq \emptyset$ est dit *régulier* si toute fonction $f \in \mathscr{C}(V^*)$ se prolonge d'une seule manière en une fonction de $\mathscr{C}(\bar{V})$ dont la restriction H_f^V à V est harmonique dans V et $\geqslant 0$ pour toute $f \geqslant 0$. Pour tout point $x \in V$, il existe alors une seule mesure de Radon $\mu_x^V \geqslant 0$ sur V^*, appelée la *mesure harmonique* associée à V et x, telle que l'on ait

$$(1) \qquad H_f^V(x) = \int f \, d\mu_x^V \qquad \text{pour toute } f \in \mathscr{C}(V^*).$$

Une fonction u: $U \to]-\infty, +\infty]$ semi-continue inférieurement, définie dans un ouvert $U \subset X$ est dit *hyperharmonique* si

$$\int^{*} u \, d\mu_x^{V} \leqslant u(x) \tag{2}$$

quels que soient V régulier dans U (c'est-à-dire avec $\bar{V} \subset U$) et $x \in V$. On dénotera par $\mathscr{H}_U^*$ l'ensemble des fonctions hyperharmoniques dans U.

Les axiomes de la théorie s'énoncent alors de la manière suivante:

I) $U \to \mathscr{H}_U$ *est un faisceau* (*de fonctions continues réelles*) *sur* X. *Il existe une fonction* $h_0 \in \mathscr{H}_X$ *strictement positive partout.*

II) *Les ensembles réguliers forment une base de la topologie de* X.

III) *L'ensemble des fonctions* $\dfrac{u}{h_0}$ *avec* $u \in \mathscr{H}_X^*$ *et* $u \geqslant 0$ *sépare les points de* X.

IV) *Pour tout ouvert* $U \subset X$ *et tout ensemble non vide* $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}_U$ *filtrant à droite dont l'enveloppe supérieure* sup $\mathscr{F}$ *est finie sur une partie partout dense dans* U, *on a* $\sup \mathscr{F} \in \mathscr{H}_U$.

L'espace X est alors *non compact* et *localement connexe*; sa *compactification d'Alexandrov* est *connexe* [1], [3]. Les domaines réguliers forment une base de la topologie: Si V est un ensemble régulier, toute composante connexe W de V est aussi un ensemble régulier et on a

$$\mu_x^{W} = \mu_x^{V} \qquad \text{pour tout } x \in W. \tag{3}$$

Pour une démonstration, il suffit de considérer pour $f \in \mathscr{C}(W^*)$ un prolongement $\bar{f} \in \mathscr{C}(V^*)$ de f et de remarquer que H_f^W est la restriction de $H_{\bar{f}}^V$ à W.

Dans la suite on supposera toujours que $U \to \mathscr{H}_U$ satisfasse aux axiomes I, II, III, IV. Comme X est la somme topologique de ses composantes connexes, on pourrait même supposer que X soit connexe. On ne le fera pas sauf mention contraire.

2. Ensembles absorbants et supports surharmoniques.

Dans [2] nous avons introduit une notion dont l'apparition est typique pour une théorie axiomatique permettant aussi l'étude d'équations paraboliques: Un ensemble $A \subset X$ est dit *absorbant* si A est fermé et si, pour tout $x \in A$ et tout voisinage régulier V de x, la mesure harmonique μ_x^V est portée par A. Pour qu'un ensemble $A \subset X$ soit absorbant, il faut et il suffit que l'on ait $A = u^{-1}(0)$ pour au moins une fonction $u \geqslant 0$ de $\mathscr{H}^*_X$. Nous nous proposons de caractériser ces ensembles par une propriété « duale ».

Soit $u \in \mathscr{H}^*_X$ une fonction hyperharmonique dans X, non nécessairement $\geqslant 0$. Il existe un plus grand ensemble ouvert $G_u \subset X$ dans lequel on a $u(x) = +\infty$ $(x \in G_u)$; G_u est l'ensemble des $x \in X$ tels que u soit constante égale à $+\infty$ dans un voisinage de x. On appellera

$$A_u = \complement G_u$$

le *support surharmonique* de u. Il est caractérisé par l'égalité

$$A_u = \overline{\{x \in X : u(x) < +\infty\}}. \tag{4}$$

La restriction de u à l'intérieur de A_u est donc une fonction surharmonique au sens de [2].

THÉORÈME 1. — *Il y a identité entre les ensembles absorbants et les supports surharmoniques des fonctions de* $\mathscr{H}^*_X$.

Démonstration. — Pour un ensemble absorbant A, la fonction

$$u(x) = \begin{cases} +\infty, & x \in \complement A \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

est hyperharmonique dans X (voir [2]). Le support surharmonique de cette fonction est A.

Soit inversement $A = A_u$ le support surharmonique d'une fonction $u \in \mathscr{H}^*_X$. Soit V un voisinage régulier d'un point $x \in X$ tel que le support $S\mu_x^V$ de la mesure harmonique μ_x^V possède une intersection non vide avec $G = \complement A$. La partie G étant ouverte, il en résulte, comme on le démontrera plus loin, que $S\mu_y^V \setminus A \neq \emptyset$ pour les points y d'un voisinage de x. Dans ce même voisinage on a

$$u(y) \geqslant \int^* u \, d\mu_y^V = +\infty,$$

donc $u(y) = +\infty$. Un tel point x n'appartient alors pas à A ce qui prouve que A est absorbant.

Il reste à démontrer que la relation $S\mu_x^V \cap G \neq \emptyset$ pour un ouvert G entraîne $S\mu_y^V \cap G \neq \emptyset$ pour les points y d'un voisinage de x. Soit f une fonction de $\mathscr{C}_+(V^*)$ telle que l'on ait $V^* \setminus G \subset f^{-1}(0)$ et $f(z) > 0$ pour au moins un point $z \in S\mu_x^V \cap G$. La solution H_f^V du problème de Dirichlet est alors >0 au point x, donc strictement positive dans un voisinage W de x. En vertu de $H_f^V(y) = \int f \, d\mu_y^V > 0$

pour $y \in W$ on constate que f ne peut pas être nulle sur $S\mu_y^W$. En utilisant la relation $V^* \setminus G \subset f^{-1}(0)$ il en résulte $S\mu_y^W \cap G \neq \emptyset$ pour tout $y \in W$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. — *Une fonction $u \in \mathscr{H}_X^*$ égale à $+\infty$ en dehors d'un compact $K \subset X$ est la fonction constante $+\infty$.*

Démonstration. — Comme A_u est contenu dans K, le support surharmonique A_u de u est compact. D'après [2; p. 209] l'ensemble vide est le seul ensemble absorbant compact. On a donc $A_u = \emptyset$ ce qui prouve que $u(x) = +\infty$ pour tout $x \in X$.

Nous donnerons deux applications du théorème 1 dans les deux paragraphes suivants.

Remarque. — Les résultats et démonstrations de ce paragraphe restent valables si on remplace les axiomes III et IV par les axiomes T et K_1 de [1].

3. Relations avec la théorie de M. Brelot.

Il est bien connu que l'axiomatique rappelée dans § 1 généralise la théorie de Brelot [5], [10]. Cette dernière utilise surtout un axiome de convergence plus fort que IV, à savoir

IV_B) *Pour tout domaine $D \subset X$ et tout ensemble non vide $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}_D$ filtrant à droite, l'enveloppe $\sup \mathscr{F}$ est ou bien la fonction constante égale à $+\infty$ ou bien harmonique dans D.*

Le théorème 1 permet de clarifier les relations entre les deux théories :

THÉORÈME 2. — *Soit $U \to \mathscr{H}_U$ une application satisfaisant aux axiomes I, II, III. Les deux énoncés suivants sont alors équivalents :*

(*a*) *L'axiome IV est valable. Tout point $x \in X$ possède un système fondamental de voisinages réguliers V tels que le support $S\mu_x^V$ de μ_x^V soit toute la frontière V^* de V.*

(*b*) *L'axiome IV_B est valable et l'espace X est localement connexe.*

Démonstration. — (a) $\Rightarrow$ (b) : Nous avons déjà remarqué que X est localement connexe. Il suffira donc de montrer que, pour tout domaine D, les ensembles $\emptyset$ et D sont les seuls ensembles absorbants dans D (c'est à dire par rapport à la restriction de $U \to \mathscr{H}_U$ aux parties ouvertes de D). En effet, soit $\mathscr{F}$ non vide $\subset \mathscr{H}_D$ filtrant à droite et soit $u = \sup \mathscr{F}$ différente de la fonction constante $+\infty$.

Le support surharmonique de u dans D sera alors non vide, donc égal à D. La fonction u est par conséquent finie sur une partie dense dans D. L'axiome IV entraîne donc l'harmonicité de u dans D.

Pour montrer que $\emptyset$ et D sont les seuls ensembles absorbants dans D, il suffira de supposer X connexe et de traiter le cas $D = X$. Considérons alors un ensemble absorbant $A \neq X$ et une composante connexe G de l'ouvert $\complement A$. L'ensemble G étant ouvert il suffira de montrer que G est aussi fermé. La connexion de X entraînera alors $G = X$ et par conséquent $A = \emptyset$. Supposons donc par l'absurde l'existence d'un point $x \in \bar{G} \setminus G$ qui appartient nécessairement à A. Soit V un voisinage régulier de x tel que $S\mu_x^V = V^*$ et tel que G ne soit pas contenu dans V. L'ensemble A étant absorbant, on a $V^* = S\mu_x^V \subset A$ ce qui prouve que $V \cap G$ est à la fois ouvert et fermé relativement à G; l'intersection $V \cap G$ est aussi non vide car x est adhérent à G. La connexion de G implique alors $V \cap G = G$ ce qui est une contradiction à notre hypothèse $G \not\subset V$. L'ensemble G est donc fermé.

(b) $\Rightarrow$ (a): C'est bien connu [5]. En effet, dans toute composante connexe de X les axiomes de la théorie de Brelot sont satisfaits.

Remarquons encore que la propriéte (*b*) *caractérise* dans toute composante connexe de X la théorie de Brelot avec les axiomes 1, 2, 3, l'existence d'un potentiel >0 et d'une fonction harmonique >0 (au sens des notations de [5]).

4. Quelques propriétés des ensembles polaires.

Une fonction $s \in \mathcal{H}_X^*$ est dite *surharmonique* dans X si s est finie sur une partie partout dense dans X (donc, si $A_s = X$). Un ensemble $P \subset X$ est dit *polaire* s'il existe une fonction surharmonique $s \geqslant 0$ dans X telle que $P \subset s^{-1}(+\infty)$. L'étude des ensembles polaires dans cette théorie a été commencée dans [2].

Le lemme suivant prépare une autre application du théorème 1:

LEMME 1. — *L'ensemble vide est le seul ensemble* P *à la fois absorbant et polaire.*

Démonstration. — Soit s une fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans X telle que l'on ait $P \subset s^{-1}(+\infty)$. D'après [2], s est μ_x^V-intégrable pour tout ouvert regulier V et tout $x \in V$. Par conséquent μ_x^V ne peut pas être portée par P. L'ensemble P étant aussi absorbant, il en résulte $P = \emptyset$.

L'application annoncée concerne une propriété des ensembles polaires connue déjà dans la théorie de Brelot:

PROPOSITION 1. — *Le complémentaire* $\complement$ P *de tout ensemble polaire fermé* P *est connexe pourvu que l'espace* X *soit aussi connexe.*

Démonstration. — Supposons l'existence de deux ouverts G_1, G_2 non vides, disjoints tels que l'on ait $\complement P = G_1 \cup G_2$. L'intérieur de P étant vide, on a $\bar{G}_1 \cup \bar{G}_2 = X$. Nous avons supposé X connexe; il en résulte donc $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 \neq \emptyset$. L'ensemble P étant polaire, il existe une fonction surharmonique $s \geqslant 0$ dans X telle que $P \subset s^{-1}(+\infty)$. Considérons les deux fonctions s_i $(i = 1, 2)$ définies de la manière suivante:

$$s_i(x) = \begin{cases} s(x), & x \in P \cup G_i \\ +\infty, & x \in G_j \qquad (j \neq i, j = 1, 2). \end{cases}$$

Il s'agit de fonctions hyperharmoniques $\geqslant 0$ dans X. La fonction s_i étant finie sur une partie dense dans G_i et égale à $+\infty$ en dehors de G_i, son support surharmonique A_{s_i} est égale à $\bar{G}_i$. D'après le théorème 1 les ensembles $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$, donc aussi $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2$ sont absorbants. Mais comme $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 \subset P$, l'intersection $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2$ est aussi polaire. Nous avons donc trouvé un ensemble absorbant et polaire $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2$ qui n'est pas vide. Le lemme 1 montre alors que notre hypothèse initiale est contradictoire.

Les résultats suivants seront utiles dans la suite. Rappelons d'abord que nous avons défini dans [1], pour toute partie A de X et toute fonction numérique $\varphi \geqslant 0$ dans X, la *réduite* R_φ^A et la *balayée* $\hat{R}_\varphi^A$ de φ sur A. Si l'espace X possède une base dénombrable, les ensembles polaires P sont caractérisés par la validité de $\hat{R}_u^P = 0$ pour toute fonction $u \geqslant 0$ de $\mathscr{H}_X^*$. La proposition suivante donne un résultat plus précis:

PROPOSITION 2. — *Supposons que l'espace* X *possède une base dénombrable. Pour tout ensemble polaire* P *et toute fonction numérique* $\varphi \geqslant 0$ *définie dans* X, *on a alors*

$$R_\varphi^P(x) = 0 \qquad \textit{quel que soit } x \in \complement P. \tag{5}$$

Démonstration.— Pour $x \in \complement P$ donné, il suffira de montrer l'existence d'une fonction hyperharmonique $u \geqslant 0$ dans X telle que l'on ait $P \subset u^{-1}(+\infty)$ et $u(x) < +\infty$. Soit $s \geqslant 0$ une fonction surharmonique dans X telle que $P \subset s^{-1}(+\infty)$ et soit $(V_n)_{n=1,2,\ldots}$ une suite de voisinages réguliers de x dont l'intersection est $\{x\}$. La fonction s_{V_n} définie par

$$s_{V_n}(y) = \begin{cases} \int s\, d\mu_y^{V_n}, & y \in V_n \\ s(y), & y \in \complement V_n \end{cases}$$

est surharmonique dans X et finie en x d'après [2; p. 200]. Pour terminer la démonstration, il suffit de définir $u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n s_{V_n}$, où (α_n) est une suite de nombres réels >0 telle que $u(x)$ soit finie. En effet, u est hyperharmonique et $\geqslant 0$ dans X et, pour tout $y \in P$, il existe un voisinage V_n ne contenant pas y. Il en résulte

$$u(y) = s(y) = s_{V_n}(y) = +\infty.$$

PROPOSITION 3. — *Supposons que l'espace* X *possède une base dénombrable. Pour tout ensemble polaire fermé* P, *il existe alors une fonction surharmonique* $s \geqslant 0$ *dans* X *telle que l'on ait* $P = s^{-1}(+\infty)$.

Démonstration. — Soit v une fonction surharmonique dans X, finie et strictement positive, par exemple: $v = h_0$. D'après la proposition précédente on a $R_v^P(x) = 0$ quel que soit le point $x \in \complement P$. Pour un tel x et tout $\varepsilon > 0$, il existe donc une fonction surharmonique $u \geqslant 0$ dans X avec les propriétés suivantes: $u \leqslant v$, $u(y) = v(y)$ pour tout $y \in P$, et $u(x) < \varepsilon$. On peut même supposer que u est continue en x, il suffit de remplacer u par u_V (voir la démonstration précédente), où V est un voisinage régulier de x disjoint de l'ensemble fermé P. Pour tout compact $K \subset \complement P$, il en résulte facilement l'existence d'une fonction surharmonique $u_K \geqslant 0$ dans X telle que $u_K \leqslant v$, $u_K(y) = v(y)$ pour tout $y \in P$, et $u_K(x) < \varepsilon$ pour tout $x \in K$.

Soit maintenant $(\varepsilon_n)_{n=1,2,\ldots}$ une suite de nombres >0 telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$, et soit $(K_n)_{n=1,2,\ldots}$ une suite croissante de compacts $\subset \complement P$ telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \complement P$. Pour tout n, il existe une fonction surharmonique $u_n = u_{K_n} \geqslant 0$ dans X avec les propriétés suivantes: $u_n \leqslant v$, $u_n = v$ dans P, et $\sup u_n(K_n) \leqslant \varepsilon_n$. La fonction $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ répond alors à la question. Elle est hyperharmonique $\geqslant 0$ dans X, égale à $+\infty$ sur P et finie dans $\complement P$. En effet, pour tout $x \in \complement P$, il existe un $m = 1, 2, \ldots$ tel que x appartienne à K_m; il en résulte $s(x) \leqslant (m-1)v(x) + \sum_{n=m}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$. L'intérieur de P étant vide, on voit que s est même une fonction surharmonique.

Le résultat suivant utilise plusieurs propriétés des réduites et balayées démontrées pour $u \geqslant 0$ surharmonique par l'auteur [2] et pour $u \geqslant 0$ hyperharmonique par Boboc, Constantinescu et Cornea [4]:

Pour toute $u \geqslant 0$ de $\mathscr{H}_X^*$, la balayée $\hat{R}_u^E$ est *hyperharmonique* dans X quel que soit $E \subset X$. Pour toute $u \geqslant 0$ de $\mathscr{H}_X^*$, les fonctions $E \to R_u^E$ et $E \to \hat{R}_u^E$ définies sur l'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ des parties de X sont *fortement sous-additives*, à savoir:

$$R_u^{E\cup F} + R_u^{E\cap F} \leqslant R_u^E + R_u^F \tag{6}$$

$$\hat{R}_u^{E\cup F} + \hat{R}_u^{E\cap F} \leqslant \hat{R}_u^E + \hat{R}_u^E. \tag{7}$$

Le résultat anoncé est bien connu dans la théorie de Brelot:

THÉORÈME 3. — *Pour toute fonction $u \in \mathscr{H}_X^* \cap \mathscr{C}_+(X)$ et tout $x \in X$, l'application*

$$K \to R_u^K(x)$$

définie sur les compacts de X est une capacité forte de Choquet. L'application

$$E \to R_u^E(x)$$

est la capacité extérieure correspondante.

Démonstration. — D'après le lemma 10 de [2], on a

$$R_u^E = \inf_{\substack{E \subset U \\ U \text{ ouvert}}} R_u^U \qquad (E \subset X). \tag{8}$$

Il en résulte que $K \to R_u^K$ (K compact) est continue à droite, donc une capacité forte de Choquet d'après (6). Le reste de l'assertion résultera de (8) et de la formule suivante, valable pour tout ouvert U:

$$R_u^U = \sup_{\substack{K \subset U \\ K \text{ compact}}} R_u^K. \tag{9}$$

Elle se démontre de la manière suivante: $(\hat{R}_u^K)_{K\ \text{compact} \subset U}$ est une famille de fonctions hyperharmoniques, filtrante à droite, donc avec une enveloppe supérieure u_0 hyperharmonique dans X majorée par $\hat{R}_u^U = R_u^U$. Pour tout $x \in U$ et tout voisinage compact $K \subset U$ de x,

[2] Cf. l'exposé de ce travail présenté au Colloque International de la Théorie du Potentiel, Orsay (1964).

on a $\hat{R}_u^K(x) = u(x)$, ce qui entraîne $u_0(x) = u(x)$ quel que soit $x \in U$. On a donc $R_u^U \leqslant u_0$ et par conséquent l'égalité (9).

Le corollaire suivant généralise également un résultat de la théorie de Brelot [5]. Un ensemble $P \subset X$ est dit *intérieurement polaire* si toute partie compacte K de P est polaire.

COROLLAIRE. — *Si* X *est à base dénombrable, tout ensemble analytique* $P \subset X$ *intérieurement polaire est polaire.*

Démonstration. – Soit u une fonction de $\mathscr{H}_X^* \cap \mathscr{C}_+(X)$. D'après le théorème 5 de [2], il suffit de montrer $\hat{R}_u^P = 0$. En appliquant le théorème de capacitabilité de Choquet [8] à la capacité du théorème 3, on trouve

$$R_u^P = \sup_{\substack{K \subset P \\ K \text{ compact}}} R_u^K.$$

P étant intérieurement polaire, il en résulte

$$R_u^P(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in \complement P. \tag{10}$$

En effet, pour tout compact $K \subset P$, on a $\hat{R}_u^K = 0$ et $R_u^K(x) = \hat{R}_u^K(x)$ quel que soit $x \in \complement K$.

Pour déduire $\hat{R}_u^P = 0$ de (10), il suffit de montrer que $\complement P$ soit partout dense dans X ou que l'on ait même $\mu_x^V(P) = 0$ pour tout ouvert régulier V et tout $x \in V$. En appliquant le théorème de capacitabilité à la mesure μ_x^V, on obtient

$$\mu_x^V(P) = \sup_{\substack{K \subset P \\ K \text{ compact}}} \mu_x^V(K)$$

Tout tel compact K est polaire; on a donc $\mu_x^V(K) = 0$ d'après [2; p. 227]. Il en résulte finalement $\mu_x^V(P) = 0$.

5. Effilement faible et fort.

Dans tout ce paragraphe, on supposera l'espace X *à base dénombrable.*

Soit φ une fonction de $\mathscr{C}(X)$ strictement positive sur X et soit $\mathfrak{V}(x)$ le filtre des voisinages d'un point $x \in X$. Pour tout ensemble $E \subset X$ et tout $x \notin E$, l'inégalité

$$\inf_{V \in \mathfrak{V}(x)} R_\varphi^{E \cap V}(x) < \varphi(x) \tag{11}$$

caractérise alors l'effilement de l'ensemble E en x (voir Brelot [6]).

Partant de cette remarque, Brelot [6], [7] a étudié deux autres notions d'effilement, à savoir:

Soit E une partie de X et x un point de X. On dit que E est *faiblement effilé* en x (même pour $x \in E$) si on a

$$\inf_{V \in \mathfrak{V}(x)} \hat{R}_{\varphi}^{E \cap V}(x) < \varphi(x). \tag{12}$$

Pour $x \notin E$, on dit que E est *fortement effilé* en x si on a

$$\inf_{V \in \mathfrak{V}(x)} R_{\varphi}^{E \cap V}(x) = 0. \tag{13}$$

Les trois notions d'effilement sont indépendantes du choix de la fonction φ. En particulier on peut choisir $\varphi = 1$ ou $\varphi = h_0$.

Il est évident que, pour $x \notin E$, l'effilement fort entraîne l'effilement (ordinaire) qui, à son tour, entraîne l'effilement faible. Tout ensemble E est fortement effilé en tout $x \in \complement \bar{E}$ puisque $E \cap V = \emptyset$ pour $V \in \mathfrak{V}(x)$ assez petit. D'après la proposition 3, un ensemble polaire P est fortement effilé en tout $x \in \complement P$. Un tel ensemble est faiblement effilé en tout $x \in X$ selon [2, p. 206].

Étudions maintenant de plus près les relations entre les trois types d'effilement.

THÉORÈME 3.— *Soient* E *une partie de* X *et* $u \geqslant 0$ *une fonction de* $\mathcal{H}_X^*$, *on a alors*

$$\hat{R}_u^E(x) = R_u^E(x) \qquad \textit{quel que soit } x \in \complement E. \tag{14}$$

Démonstration ([3]). — Soit $(V_n)_{n=1,2,\dots}$ une suite décroissante de voisinages de $x \in E$ dont l'intersection est x. Le point x n'étant pas adhérent à $E \setminus V_n$, on a

$$\hat{R}_u^{E \setminus V_n}(x) = R_u^{E \setminus V_n}(x). \tag{15}$$

En effet, c'est bien connu [1; p. 56] si u est localement bornée. Dans le cas général, on applique ce résultat à la suite des fonctions $u_n = \inf(nh_0, u)$ de $\mathcal{H}_X^*$ $(n = 1, 2, \dots)$. Grâce à un résultat de [4], on peut arriver à (15) par un passage à la limite. La suite $(E \setminus V_n)$ étant croissante et $\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus V_n)$ étant égale à E, on démontre (14) en appliquant un autre théorème de convergence de [4].

([3]) Ce théorème a été énoncé au Colloque International de la Théorie du Potentiel (Orsay, 1964) pour E analytique et pour $x \in \complement E$ satisfaisant à une des hypothèses (16) ou (17). La démonstration utilisait la théorie des processus de Hunt. Le théorème dans le cas général et sa démonstration sont dus à MM. Boboc, Constantinescu et Cornea.

Une conséquence immédiate de ce théorème est le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Pour qu'une partie* E *de* X *soit effilée en un point* $x \in \complement E$, *il faut et il suffit qu'elle soit faiblement effilée en* x.

L'effilement faible d'une partie $E \subset X$ en un point $x \in E$ entraîne donc en particulier l'effilement de $E \setminus \{x\}$ en x. Inversement, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 4. — *Soit* x *un point polaire* (4) *d'une partie* $E \subset X$. *L'effilement de* $E \setminus \{x\}$ *en* x *entraîne alors l'effilement faible de* E *en* x.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que la balayée $\hat{R}_u^A$ ne change pas si on remplace A par $A \cup P$ où P est un ensemble polaire [2 ; p. 206].

Remarque. — Dans la théorie de Brelot, on définit l'effilement d'une partie $E \subset X$ en un point $x \in E$ par les deux propriétés : le point x est polaire et $E \setminus \{x\}$ est effilé en x. Dans ce sens l'effilement de E en $x \in E$ entraîne l'effilement faible de E en x. La réciproque est vraie dans la théorie de Brelot si on suppose l'axiome (D) de [5]. En effet, l'effilement faible de E en x entraîne $\hat{R}_1^{\{x\}}(x) < 1$ ce qui montre [5 ; p. 135] que le point x est polaire.

Nous allons voir que l'effilement faible est la bonne notion d'effilement dans notre théorie.

Passons maintenant à l'effilement fort :

THÉORÈME 4. — *Soit* $E \subset X$ *effilé en un point* $x \in \bar{E} \setminus E$. *Alors l'effilement est fort sous chacune des hypothèses suivantes :*

(16) *Le point* x *est polaire.*

(17) *Tout potentiel localement borné sur* X *et harmonique dans* $\complement \{x\}$ *est continu en* x.

Démonstration. — En utilisant surtout le théorème de décomposition [2 ; p. 226], on montre, comme dans la théorie de Brelot [9 ; p. 46], l'existence d'une fonction $u \geqslant 0$ dans $\mathscr{H}_X^*$ telle que l'on ait

$$+\infty = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in E}} u(y) > u(x).$$

En multipliant u avec un nombre $\lambda > 0$, on peut supposer $u(x) \leqslant \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ donné. Il existe alors un voisinage V de x tel que

(4) C'est-à-dire que l'ensemble $\{x\}$ est polaire.

la fonction constante 1 soit majorée par u sur $E \cap V$. Par conséquent, on a

$$R_1^{E \cap V}(x) \leqslant u(x) \leqslant \varepsilon$$

d'où résulte l'assertion.

Remarquons que ce résultat s'applique immédiatement aux équations de Laplace et de la chaleur grâce à la condition (16).

6. Théorème de convergence de Brelot et conséquences.

Aussi dans tout ce paragraphe, on supposera l'espace X *à base dénombrable.*

DÉFINITION. — *On appellera un ensemble* $E \subset X$ *totalement effilé si* E *est faiblement effilé en tout point* x *de l'espace* X. *Toute réunion dénombrable d'ensembles totalement effilés sera appelée un ensemble semi-polaire.*

D'après la proposition 2, tout ensemble polaire est totalement effilé. Evidemment tout ensemble totalement effilé est semi-polaire. Dans la théorie de Brelot munie de l'axiome (D), les trois types d'ensembles coïncident [5; p. 142]. On verra bientôt que ce n'est pas le cas dans notre théorie.

Toute réunion dénombrable d'ensembles semi-polaires et toute partie d'un ensemble semi-polaire sont semi-polaires.

Le théorème de convergence suivant est dû à Brelot [6] et valable sous des conditions beaucoup plus générales. Par exemple, il n'est pas nécessaire de supposer l'existence d'une base dénombrable. L'importance de ce théorème dans notre axiomatique vient du fait que nous avons constaté des relations étroites entre l'effilement faible et l'effilement ordinaire.

THÉORÈME 5 (M. Brelot). — *Pour toute famille* $(u_i)_{i\in I}$ *de fonctions hyperharmoniques* $\geqslant 0$ *dans* X, *l'ensemble*

$$\{x \in X : \widehat{\inf_{i \in I} u_i}(x) < \inf u_i(x)\} \tag{18}$$

est semi-polaire.

Les deux corollaires suivants sont immédiats:

COROLLAIRE 1. — *Pour tout ensemble* $E \subset X$ *et toute fonction numérique* $\varphi \geqslant 0$ *définie dans* X, *l'ensemble*

$$\{x \in X : \hat{R}_\varphi^E(x) < R_\varphi^E(x)\} \tag{19}$$

est semi-polaire.

Pour $\varphi \in \mathscr{H}_X^*$, $\varphi \geqslant 0$, l'ensemble (19) est une partie de E selon le théorème 3. Autrement dit :

COROLLAIRE 2.— *Pour tout ensemble* $E \subset X$ *et toute fonction* $u \geqslant 0$ *de* $\mathscr{H}_X^*$, *l'ensemble*

$$\{x \in E : \hat{R}_u^E(x) < u(x)\} \tag{20}$$

est semi-polaire.

COROLLAIRE 3.— *L'ensemble* E_e *des points* x *d'un ensemble* $E \subset X$, *où cet ensemble est faiblement effilé, est semi-polaire.*

Démonstration. — C'est une conséquence du corollaire 2. Il suffit de remarquer que l'on a

$$E_e = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} \{x \in E \cap B : \hat{R}_{h_0}^{E \cap B}(x) < h_0(x)\}$$

où $\mathscr{B}$ désigne une base dénombrable de l'espace X.

Discutons enfin les conséquences de ces résultats pour le problème de Dirichlet pour un ouvert relativement compact U de X. D'après les théorèmes 39 et 40 de [1], on sait que l'ensemble U_i^* des points irréguliers de U^* est identique à l'ensemble des $z \in U^*$ où $\complement U$ est faiblement effilé. On a donc l'égalité

$$U_i^* = (\complement U)_e. \tag{21}$$

Cela conduit immédiatement au corollaire suivant :

COROLLAIRE 4. — *Pour tout ouvert relativement compact* U *de* X, *l'ensemble* U_i^* *des points irréguliers de la frontière* U^* *est semi-polaire.*

On sait de [1 ; p. 51] que l'on a toujours $U_i^* \neq U^*$.

7. Propriétés équivalentes au théorème fort de convergence.

Dans la théorie de Brelot, on montre à l'aide de l'axiome supplémentaire (D) un *théorème fort de convergence*, analogue au théorème de H. Cartan, à savoir :

(C) Pour toute famille $(u_i)_{i \in I}$ de fonctions hyperharmoniques $\geqslant 0$ dans X, l'ensemble des points $x \in X$, où $\widehat{\inf u_i}(x) < \inf u_i(x)$, est polaire.

M. Brelot et D. Sibony ont remarqué qu'un axiome supplémentaire analogue à l'axiome (D) permet la démonstration de (C) aussi dans la théorie exposée ici. Malheureusement, déjà pour l'équation de la chaleur, la propriété (C) n'est pas vraie comme le montre le théorème suivant.

THÉORÈME 6. — *Sous l'hypothèse que* X *possède une base dénombrable, la propriété* (C) *est équivalente à chacune des propriétés suivantes:*

(C_1) *Pour tout compact* $K \subset X$ *et toute fonction* $u \geqslant 0$ *de* $\mathcal{H}^*_X$, *l'ensemble* $\{x \in K : \hat{R}^K_u(x) < u(x)\}$ *est polaire.*

(C_2) *Pour tout compact* $K \subset X$ *non polaire et tout potentiel* $p \in \mathcal{C}(X)$, *on a* $\hat{R}^K_p(x) = p(x)$ *en au moins un point* $x \in K$.

(C_3) *Pour tout compact* $K \subset X$ *non polaire d'intérieur vide et tout ouvert relativement compact* $U \supset K$, *il existe un point* $x_0 \in K$ *régulier par rapport à* $U \setminus K$.

(C_4) *Pour tout ouvert relativement compact* $U \subset X$ *et tout* $x \in U$, *on a* $\mu^U_x(U^*_i) = 0$, *où* U^*_i *désigne l'ensemble des points irréguliers de* U^*.

(C_5) *Pour tout ouvert relativement compact* $U \subset X$, *l'ensemble* U^*_i *est polaire.*

(C_6) *Pour tout ouvert relativement compact* $U \subset X$ *et toute fonction* $u \in \mathcal{H}^*_U$ *bornée inférieurement, la relation* $\liminf_{x \to z,\, x \in U} u(x) \geqslant 0$ *en tout point régulier* $z \in U^*$ *entraîne* $u \geqslant 0$.

Démonstration (5). — Elle se fera d'après le schéma

$$\begin{tikzcd}
& & C \arrow[dl, Rightarrow] & \\
& C_5 \arrow[d, Rightarrow] & & C_1 \arrow[ul, Rightarrow] \\
C_6 \arrow[r, Leftrightarrow] & C_4 \arrow[dr, Rightarrow] & & C_2 \arrow[u, Rightarrow] \\
& & C_3 \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

(C) $\Rightarrow$ (C_5): Il suffit de répéter des passages de Brelot [5], surtout dans les démonstrations des propositions 23, 25 et théorèmes 31, 32.

(C_5) $\Rightarrow$ (C_4): C'est une conséquence du fait [2; p. 205] que tout ensemble polaire est négligeable.

(C_4) $\Rightarrow$ (C_3): D'après le théorème 22 de [2], on a $\mu^W_x(K) > 0$ pour au moins au point $x \in W = U \setminus K$. Il en résulte que $K \setminus U^*_i$ est non vide.

(C_3) $\Rightarrow$ (C_2): Si l'intérieur $\mathring{K}$ de K est non vide, tout $x \in \mathring{K}$ possède la propriété en question. Il suffit donc d'examiner le cas $\mathring{K} = \emptyset$. On le fait avec le même raisonnement que dans [9; p. 115].

(5) Dans la théorie de Brelot, l'équivalence de (C), (C_1), ..., (C_5) a été démontrée par Mme. Hervé [9].

$(C_2) \Rightarrow (C_1)$: Même démonstration que dans [9], lemme 27.3.

$(C_1) \Rightarrow (C)$: Même démonstration que dans [9], théorème 27.1.

$(C_4) \Rightarrow (C_6)$: Soit φ la fonction indicatrice de U_i^* par rapport à U^*. La fonction u étant bornée inférieurement, il existe un $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait

$$\liminf_{x \to z} u(x) \geqslant \lambda\varphi(z) \qquad \text{pour tout } z \in U^*.$$

D'après [1 ; p. 37], il en résulte

$$u(x) \geqslant \bar{H}_{\lambda\varphi}(x) = \int^* \lambda\varphi \, d\mu_x^U = \lambda\mu_x^U(U_i^*) = 0$$

pour tout $x \in U$.

$(C_6) \Rightarrow (C_4)$: La démonstration se fait en plusieures étapes:

a) Pour toute $f \in \mathscr{C}(U^*)$, on a $H_f = H_{\tilde{f}}$ dans U, où la fonction $\tilde{f}$ est définie sur U^* par $\tilde{f}(z) = \liminf\limits_{x \to z} H_f(x)$ $(z \in U^*)$. En effet, pour toute $u \in \mathscr{H}_U^*$ bornée inférieurement et satisfaisant à $\liminf\limits_{x \to z} u(x) \geqslant \tilde{f}(z)$ en tout $z \in U^*$, on a

$$\liminf_{x \to z} (u - H_f)(x) \geqslant \liminf_{x \to z} u(x) - \tilde{f}(z) \geqslant 0$$

en tout point régulier z de U^*. D'après (C_6), il en résulte $u \geqslant H_f$, d'où $\bar{H}_{\tilde{f}} \geqslant H_f$. La définition de $\tilde{f}$ donne l'inégalité duale. La fonction $\tilde{f}$ étant bornée et semi-continue inférieurement, on a aussi $\bar{H}_{\tilde{f}} = H_{\tilde{f}}$ d'après [1 ; p. 36].

b) Montrons maintenant que, pour tout $f \in \mathscr{C}(U^*)$ et $x_0 \in U$ donnés, la limite $\lim H_f(x)$ existe pour $\mu_{x_0}^U$ – presque tout $z \in U^*$. Soit $\tilde{f}$ définie comme dans *a*) et soit $\tilde{\tilde{f}} = -(\widetilde{-f})$. D'après *a*), on a $H_f = H_{\tilde{f}} = H_{\tilde{\tilde{f}}}$ ce qui entraîne $\int(\tilde{\tilde{f}} - \tilde{f})\, d\mu_{x_0}^U = 0$. Comme $\tilde{\tilde{f}} - \tilde{f} \geqslant 0$, il en résulte le résultat annoncé.

c) Pour tout $x \in U$, le support $S\mu_x^U$ est contenu dans l'adhérence de l'ensemble U_r^* des points réguliers de U^*. En effet, pour toute $f \in \mathscr{C}(U^*)$ telle que $f(U_r^*) = \{0\}$, on a $H_f = 0$ d'après (C_6).

d) L'espace X étant à base dénombrable, il existe une suite $(f_n)_{n=1,2,\ldots}$ dense dans $\mathscr{C}(U^*)$ pour la topologie de la convergence uniforme. Pour tout $x \in U$, l'ensemble $S_n(x)$ des points $z \in U^*$, pour lesquels $\lim\limits_{y \to z} H_{f_n}(y)$ n'existe pas, est de μ_x^U-mesure nulle d'après *b*). Pour $S(x) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n(x)$, on a donc $\mu_x^U(S(x)) = 0$. Remarquons maintenant que, pour $f \in \mathscr{C}(U^*)$ et $\varepsilon > 0$, la relation $|f - f_n| \leqslant \varepsilon h_0$

entraîne $|H_f - H_{f_n}| \leqslant \varepsilon h_0$ dans U. Il en résulte aisément que

$$\lim_{y \to x} H_f(y)$$

existe pour tout $z \in U^* \setminus S(x)$ quelle que soit la fonction $f \in \mathscr{C}(U^*)$. L'ensemble des $z \in U^*$, où $\lim_{y \to z} H_f(y)$ existe pour toute $f \in \mathscr{C}(U^*)$, est donc égale à $U^* \setminus S(x)$. Il en résulte que $S = S(x)$ est indépendant de $x \in U$ et que l'on a $U_r^* \subset U^* \setminus S$. Pour toute $f \in \mathscr{C}(U^*)$ la fonction $\tilde{f}$ (resp. $\tilde{\tilde{f}}$) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement); la coïncidence de $\tilde{f}$ et $\tilde{\tilde{f}}$ avec f sur U_r^* entraîne donc $f(z) = \tilde{f}(z) = \tilde{\tilde{f}}(z)$ pour tout $z \in \overline{U_r^*} \setminus S$. Autrement dit, on a $\overline{U_r^*} \setminus S \subset U_r^* \subset U^* \setminus S$ ce qui prouve l'égalité $U_r^* = \overline{U_r^*} \setminus S$. Nous avons déjà vu que μ_x^U est portée par $\overline{U_r^*}$ et $U^* \setminus S$. La mesure μ_x^U est donc portée par U_r^* pour tout $x \in U$, ce qui achève la démonstration.

Pour l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

dans l'espace $X = \mathbf{R}^2$, le théorème fort de convergence ne peut pas être valable. En effet, considérons les rectangles

$$U = \{(\xi, t) : 0 < \xi < 1, 0 < t < 1\}$$

et

$$V = \{(\xi, t) : 0 < \xi < 1, 1 < t < 2\}.$$

On a

$$U_i^* = \{(\xi, t) : 0 < \xi < 1, t = 1\}$$

et $\mu_x^V(U_i^*) > 0$ pour tout $x \subset V$. On voit donc que U_i^* ne peut pas être polaire; la propriété (C_5) n'a pas lieu.

D'après le corollaire de la proposition 5, U_i^* est un exemple d'un ensemble semi-polaire qui n'est pas polaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Bauer, Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, *Math. Annalen*, 146 (1962), 1-59.

[2] H. Bauer, Weiterführung einer axiomatischen Potentialtheorie ohne Kern (Existenz von Potentialen), *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 1 (1963), 197-229.

[3] H. Boboc, C. Constantinescu and A. Cornea, Axiomatic theory of harmonic functions. — Non-negative superharmonic functions, *Annales Inst. Fourier*, 15 (1965), fasc. 1 (Colloque de Théorie du Potentiel).

[4] H. Boboc, C. Constantinescu and A. Cornea, Axiomatic theory of harmonic functions — Balayage, *Annales Inst. Fourier,* 15 (1965) (à l'impression).

[5] M. Brelot, Lectures on potential theory, *Tata Inst. of Fundamental Research, Bombay* (1960).

[6] M. Brelot, Quelques propriétés et applications nouvelles de l'effilement, *Séminaire de Théorie du Potentiel,* 6 (fasc. 1), no. 1c, 14 pp. (1961/62), Institut H. Poincaré, Paris.

[7] M. Brelot, Introduction axiomatique de l'effilement, *Annali di Matematica,* sér. 4, 57 (1962), 77-95.

[8] G. Choquet, Theory of capacities, *Annales Inst. Fourier,* 5 (1953/54), 131-295.

[9] R. M. Hervé, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Annales Inst. Fourier,* 12 (1962), 415-571.

[10] G. A. Hunt, Markoff processes and potentials I, *Illinois J. Math.,* 1 (1957), 44-93.

[11] P. A. Meyer, Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory, *Annales Inst. Fourier,* 13, fasc. 2 (1963), 357-372.

Heinz Bauer,
Mathematisches Seminar der Universität,
Rothenbaumchaussee 67/69,
Hamburg 13 (Allemagne Fédérale).