ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Frédéric BAYART & Augustin MOUZE

Division et composition dans l'anneau des séries de Dirichlet analytiques

Tome 53, nº 7 (2003), p. 2039-2060.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2003__53_7_2039_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
53, 7 (2003), 2039–2060

DIVISION ET COMPOSITION DANS L'ANNEAU DES SÉRIES DE DIRICHLET ANALYTIQUES

par F. BAYART & A. MOUZE

---

1. Introduction.

Ce travail se situe à l'intersection de la géométrie analytique locale et de la théorie des séries de Dirichlet. Son but est d'appliquer des méthodes classiques de la première (théorèmes de division et de préparation de Weierstrass) dans le cadre de l'anneau des séries de Dirichlet analytiques, afin d'en étudier les propriétés.

On rappelle qu'une série de Dirichlet (formelle) est une série de la forme $\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite complexe et s un complexe. Le produit (formel) de deux séries de Dirichlet est défini par

$$\Big(\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 1} b_n n^{-s}\Big) = \sum_{n\geqslant 1}\Big(\sum_{ij=n} a_i b_j\Big) n^{-s}.$$

En particulier, l'ensemble des séries de Dirichlet $\mathcal{D}[[s]]$ est muni d'une structure d'anneau. Les propriétés arithmétiques de cet anneau ont déjà été bien étudiées : on sait ainsi qu'il est local et factoriel ([6], [9]).

On dira qu'une série de Dirichlet $f(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ est analytique s'il existe un $s \in \mathbb{C}$ tel que la série converge. Par des résultats classiques (voir par exemple [12]), ceci est équivalent au fait que *l'abscisse de convergence de* f, définie par

$$\sigma_c(f) = \inf\Big\{\sigma \in \mathbb{R}\ ;\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\sigma} \text{ converge}\Big\}$$

Mots-clés : Séries de Dirichlet – Géométrie analytique locale – Anneau arithmétique.
Classification math. : 13F15 – 30B50 – 32B05.

est différente de $+\infty$. Alors, la série de Dirichlet converge pour $\Re(s) > \sigma_c(f)$ et diverge pour $\Re(s) < \sigma_c(f)$. En outre, si on a l'inégalité $\Re(s) > \sigma_c(f)+1$, la convergence est absolue. Pour θ réel, on note $\mathbb{C}_\theta$ le demi-plan

$$\mathbb{C}_\theta = \{s \in \mathbb{C} \ ; \ \Re(s) > \theta\}.$$

Le produit formel de deux séries de Dirichlet est aussi le produit de Cauchy des deux séries là où elles convergent absolument. L'ensemble des séries de Dirichlet analytiques, noté dans toute la suite $\mathcal{D}\{s\}$, muni de ce produit, est donc un anneau. On se propose dans ce travail d'en étudier les propriétés arithmétiques. Les méthodes formelles utilisées dans [6] ne s'appliquent plus du tout ici. Le point de départ de l'étude est la proposition suivante, qui donne les premières propriétés classiques de l'anneau $\mathcal{D}\{s\}$.

PROPOSITION 1.1. — *Une série $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ de $\mathcal{D}\{s\}$ est inversible dans $\mathcal{D}\{s\}$ si et seulement si on a $a_1 \neq 0$. En particulier, $\mathcal{D}\{s\}$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathcal{M}$, l'ensemble de ses éléments non inversibles. De plus, l'anneau $\mathcal{D}\{s\}$ n'est pas noethérien.*

Preuve. — La première assertion est facile et laissée au lecteur. La seconde assertion n'est pas plus difficile. Soit $(p_j)_{j\geqslant 1}$ la suite des nombres premiers. On pose I_n l'idéal de $\mathcal{D}\{s\}$ engendré par $(2^{-s}, 3^{-s}, \ldots, p_n^{-s})$. On remarque alors que $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite strictement croissante d'idéaux. □

L'article est organisé de la façon suivante : on commence par établir un théorème de division analytique par plusieurs séries dans un anneau de séries dont les coefficients sont dans $\mathcal{D}\{s\}$. C'est le théorème 2.1. On en déduit alors l'analogue des théorèmes de division et de préparation de Weierstrass dans l'anneau $\mathcal{D}\{s\}$ (corollaires 3.1 et 3.3). On applique ensuite ces théorèmes pour obtenir quelques propriétés algébriques de $\mathcal{D}\{s\}$, en particulier sa factorialité (ce résultat est annoncé dans [3]). Enfin, toujours dans le cadre de la géométrie analytique locale, on s'intéresse à des problèmes de composition dans $\mathcal{D}\{s\}$. Soit $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, avec $c_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi(s) \in \mathcal{D}\{s\}$. On sait [10] que, si f appartient à $\mathcal{D}\{s\}$, la composée $f \circ \phi$ appartient aussi à $\mathcal{D}\{s\}$. On étudie ici la réciproque. On montre que, pour tout f de $\mathcal{D}[[s]]$, si on a $f \circ \phi \in \mathcal{D}\{s\}$, alors la série f est elle-même analytique. C'est le théorème 5.3. Ce résultat peut être vu comme l'analogue d'un théorème de P.M. Eakin et G.A. Harris pour les séries convergentes [8]. Dans le même esprit, on étudie le cas mixte, c'est-à-dire la composition de séries convergentes (ou formelles) par des séries de Dirichlet analytiques. On renvoie au théorème 5.7.

Dans toute la suite, on utilise la définition suivante.

DÉFINITION 1.2. — *Si* $f(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ *appartient à* $\mathcal{D}[[s]]$, *on appelle* support de f *l'ensemble*

$$\operatorname{supp}(f) = \{n \in \mathbb{N}^*;\ a_n \neq 0\}.$$

2. Divisions dans l'anneau $\mathcal{D}\{s\}$.

On se propose, dans un premier temps, d'établir un théorème de division par plusieurs séries dans $\mathcal{D}\{s\}$. Si f est un élément de $\mathcal{D}\{s\}$, il existe donc $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait

$$||f||_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^r} < +\infty.$$

On vérifie aisément que $||.||_r$ est une norme sur l'espace

$$\mathcal{D}(r) = \{f \in \mathcal{D}[[s]]\,;\ ||f||_r < +\infty\},$$

qui en fait une algèbre de Banach. On a donc

$$\mathcal{D}\{s\} = \bigcup_{r>0} \mathcal{D}(r).$$

Soient $X_1, \dots, X_k$ des variables et $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ un polyrayon de $\mathbb{R}_+^{*k}$. On pose alors

$$\mathcal{D}(r)(\tau) = \Big\{ g(X) = \sum_{J\in\mathbb{N}^k} g_J(s) X^J \in \mathcal{D}[[s]][[X]]\,;\ ||g||_{r,\tau} = \sum_{J\in\mathbb{N}^k} ||g_J||_r \tau^J < +\infty \Big\}.$$

On vérifie à nouveau sans difficulté que $||.||_{r,\tau}$ est une norme et que l'espace $\mathcal{D}(r)(\tau)$, muni de cette norme, est une algèbre de Banach. On pose enfin

$$(\mathcal{D}\{s\})\{X\} = \bigcup_{r>0,\tau>0} \mathcal{D}(r)(\tau).$$

Dans toute la suite, pour tout élément f de $\mathcal{D}[[s]][[X]]$ et tout multi-indice J de $\mathbb{N}^k$, $f_J(s)$ désigne l'élément de $\mathcal{D}[[s]]$ défini par la formule $f(X) = \sum_{J\in\mathbb{N}^k} f_J X^J$. L'ensemble des multi-indices de $\mathbb{N}^k$ apparaissant dans la décomposition de f est noté

$$\operatorname{Exp}_X(f) = \{J \in \mathbb{N}^k\,;\ f_J \neq 0\}.$$

Soient $E_1, \dots, E_m$ m multi-indices de $\mathbb{N}^k$. On pose

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{m} (E_i + \mathbb{N}^k).$$

On choisit alors une partition $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_m$ de Δ telle que, pour tout $i = 1, \dots, m$, on ait $\Delta_i \subset E_i + \mathbb{N}^k$. Par exemple, on pose $\Delta_1 = E_1 + \mathbb{N}^k$ et, pour tout $i = 2, \dots, m$, $\Delta_i = (E_i + \mathbb{N}^k) - (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_{i-1})$. Dans toute la suite, on dira que $\mathbb{N}^k = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_p \cup (\mathbb{N}^k - \Delta)$ est la partition de $\mathbb{N}^k$ associée aux E_i, pour $i = 1, \dots, p$.

On a alors le théorème de division à la "Hironaka" dans $\mathcal{D}\{s\}\{X\}$ suivant.

THÉORÈME 2.1. — *Soient L une forme linéaire sur $\mathbb{R}_+^k$, à coefficients dans $\mathbb{R}_+^*$, et $f_1, \dots, f_m$ des éléments de $\mathcal{D}\{s\}\{X\}$. On suppose que, pour tout $i = 1, \dots, m$, il existe $E_i \in \mathbb{N}^k$ tel que, dans le développement de $f_i = \sum_{J \in \mathbb{N}^k} (f_i)_J X^J$ par rapport à X à coefficients dans $\mathcal{D}\{s\}$, on ait*

(i) $(f_i)_{E_i}$ *inversible,*

(ii) $(f_i)_J$ *non inversible pour tout* $J \in \mathbb{N}^k$, $J \neq E_i$ *et* $L(J) \leqslant L(E_i)$.

Alors, pour tout élément g de $\mathcal{D}\{s\}\{X\}$, il existe des uniques séries $g_1, \dots, g_m, h$ de $\mathcal{D}\{s\}\{X\}$ telles que l'on ait

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i f_i + h,$$

avec, pour tout $i = 1, \dots, m$,

$$\mathrm{Exp}_X(h) \subset \mathbb{N}^k - \Delta \quad et \quad \mathrm{Exp}_X(g_i X^{E_i}) \subset \Delta_i,$$

où Δ_i est la partition de $\mathbb{N}^k$ associée aux E_i. De plus, les séries $g_1, \dots, g_m$ et h sont données par un opérateur linéaire continu.

Preuve. — C'est une adaptation d'une preuve, donnée par Briançon [5] et appliquée aussi dans [15], d'un théorème de division analytique par perturbation d'un épimorphisme.

Première étape : mise en place de la construction. Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\tau \in \mathbb{R}_+^{*k}$. Pour tout $i = 1, \dots, m$, on pose

$$(\mathcal{D}(r)(\tau))^{E_i} = \{f \in \mathcal{D}(r)(\tau); \mathrm{Exp}_X(f(X)X^{E_i}) \subset \Delta_i\}$$

et

$$R_\Delta(r)(\tau) = \{f \in \mathcal{D}(r)(\tau); \mathrm{Exp}_X(f(X)) \subset \mathbb{N}^k - \Delta\}.$$

On considère alors l'espace produit

$$H_\Delta(r)(\tau) = (\mathcal{D}(r)(\tau))^{E_1} \times \ldots \times (\mathcal{D}(r)(\tau))^{E_m} \times R_\Delta(r)(\tau).$$

On munit $H_\Delta(r)(\tau)$ de la norme

$$||(g_1, \ldots, g_m; h)||^\Delta_{r,\tau} = \sum_{i=1}^m ||g_i||_{r,\tau}\tau^{E_i} + ||h||_{r,\tau}.$$

On vérifie facilement que l'espace $H_\Delta(r)(\tau)$, muni de la norme $||.||^\Delta_{r,\tau}$, est un espace de Banach. On considère alors l'application ϕ_1 définie par

$$\begin{array}{rrcl} \phi_1 : & H_\Delta(r)(\tau) & \to & \mathcal{D}(r)(\tau) \\ & (g_1, \ldots, g_m; h) & \to & \sum_{i=1}^m g_i X^{E_i} + h. \end{array}$$

Par construction, pour tout $r \in \mathbb{R}^*_+$ et tout $\tau \in \mathbb{R}^{*k}_+$, ϕ_1 est une application linéaire bijective de $H_\Delta(r)(\tau)$ dans $\mathcal{D}(r)(\tau)$ vérifiant

$$||\phi_1(g_1, \ldots, g_m; h)||_{r,\tau} = ||(g_1, \ldots, g_m; h)||^\Delta_{r,\tau}.$$

On construit alors une application linéaire ϕ_2 qui sera une perturbation de ϕ_1 en ce sens que $\phi = \phi_1 + \phi_2$ restera un isomorphisme d'espaces de Banach. En fait, on écrit :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \phi_1(\mathrm{Id} + \phi_1^{-1}\phi_2).$$

Ainsi, si on a

$$||\phi_2|| < 1,$$

l'application ϕ est inversible.

On note alors, pour tout $i = 1, \ldots, m$, u_i et v_i des séries de $\mathcal{D}(r)(\tau)$ qui se décomposent de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_i = \displaystyle\sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^k; \\ L(J) > L(E_i)}} (u_i)_J X^J \\ v_i = \displaystyle\sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^k; \\ L(J) \leqslant L(E_i)}} (v_i)_J X^J. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{array}{rrcl} \phi_2 : & H_\Delta(r)(\tau) & \to & \mathcal{D}(r)(\tau) \\ & (g_1, \ldots, g_m; h) & \to & \sum_{i=1}^m (u_i + v_i) g_i. \end{array}$$

On a donc

$$(1) \quad ||\phi_2(g_1, \ldots, g_m; h)||_{r,\tau} \leqslant \sum_{i=1}^m ||g_i||_{r,\tau}\tau^{-E_i}\left(||u_i||_{r,\tau}\tau^{E_i} + ||v_i||_{r,\tau}\tau^{E_i}\right).$$

Si, pour tout $i = 1, \ldots, m$, les conditions

$$||u_i||_{r,\tau} < \frac{1}{2}\tau^{-E_i} \text{ et } ||v_i||_{r,\tau} < \frac{1}{2}\tau^{-E_i} \tag{2}$$

sont réalisées, on en déduit $||\phi_2|| < 1$ et l'application linéaire $\phi = \phi_1 + \phi_2$ entre les espaces de Banach $H_\Delta(r)(\tau)$ et $\mathcal{D}(r)(\tau)$ est bijective.

Deuxième étape : division. Par hypothèse, il existe $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\tau_0 \in \mathbb{R}_+^{*k}$ tels que l'on ait $f_1, \ldots, f_m, g \in \mathcal{D}(r_0)(\tau_0)$. Pour tout $i = 1, \ldots, m$, on décompose les séries f_i :

$$f_i = \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^k;\\ L(J)>L(E_i)}} (f_i)_J X^J + \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^k;\\ L(J)\leqslant L(E_i)\\ J\neq E_i}} (f_i)_J X^J + ((f_i)_{E_i} - a_{i,1})\, X^{E_i} + a_{i,1}X^{E_i},$$

en notant $a_{i,1}$ le premier coefficient de la série de Dirichlet $(f_i)_{E_i}$. Sans diminuer la généralité, on peut supposer $a_{i,1} = 1$. On pose alors

$$u_i = \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^k;\\ L(J)>L(E_i)}} (f_i)_J X^J = \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^k;\\ L(J)>L(E_i)}} (u_i)_J X^J$$

$$v_i = \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^k;\\ L(J)\leqslant L(E_i)\\ J\neq E_i}} (f_i)_J X^J + ((f_i)_{E_i} - a_{i,1})\, X^{E_i} = \sum_{\substack{J\in\mathbb{N}^k;\\ L(J)\leqslant L(E_i)}} (v_i)_J X^J.$$

D'après les hypothèses du théorème, on a, pour tout $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{cases} \forall J \in \mathbb{N}^k \ ; \ (v_i)_J \text{ non inversible} \\ f_i = X^{E_i} + u_i + v_i. \end{cases}$$

On considère des réels α et η, vérifiant $0 < \alpha \leqslant \tau_0$ (c'est-à-dire α est inférieur ou égal à toutes les composantes de τ_0) et $0 < \eta < 1$. Les valeurs de α et η seront ajustées dans la suite. On pose $\tau = (\alpha\eta^{l_1}, \ldots, \alpha\eta^{l_k})$ où $(l_1, \ldots, l_k)$ sont les composantes de la forme linéaire L. On considère enfin un réel $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r \geqslant r_0$.

Soit $A \in \mathbb{N}^k$. On remarque aussi que, pour tout $B \in \mathbb{N}^k$, il existe un nombre réel positif δ_B tel que $L(A)-L(B) > 0$ implique $L(A)-L(B) \geqslant \delta_B$.

On a alors, pour tout $i = 1, \ldots, m$,

$$||u_i||_{r,\alpha} \leqslant ||u_i||_{r_0,\tau_0} \tag{3}$$

et, puisque les coefficients de la série v_i ne sont pas inversibles,

$$||v_i||_{r,\alpha} \leqslant 2^{r_0-r}||v_i||_{r_0,\tau_0}. \tag{4}$$

De plus, on a les inégalités

$$\begin{aligned} ||u_i||_{r,\tau}\tau^{-E_\imath} &= \sum_{L(J)>L(E_\imath)} ||(u_i)_J||_r\tau^{(J-E_\imath)} \\ &= \sum_{L(J)>L(E_\imath)} ||(u_i)_J||_r\alpha^{|J|-|E_\imath|}\eta^{L(J-E_\imath)} \qquad (5) \\ &\leqslant \alpha^{-|E_\imath|}\eta^{\delta_\imath}||u_i||_{r,\alpha} \end{aligned}$$

et, en tenant compte de l'inégalité $0 < \eta < 1$,

$$||v_i||_{r,\tau}\tau^{-E_\imath} \leqslant \alpha^{-|E_\imath|}\eta^{-L(E_\imath)}||v_i||_{r,\alpha}. \qquad (6)$$

On fixe alors $\alpha \leqslant \tau_0$ et on choisit $\eta(\alpha) < 1$ assez petit tel que, pour tout $i = 1, \dots, m$, on ait

$$\eta(\alpha)^{\delta_\imath}||u_i||_{r_0,\tau_0} < \frac{\alpha^{|E_\imath|}}{2}.$$

Cela donne pour tout $r \geqslant r_0$, en regroupant (3) et (5),

$$||u_i||_{r,\tau}\tau^{-E_\imath} < \frac{1}{2}. \qquad (7)$$

On choisit ensuite $r = r(\alpha, \eta(\alpha))$ assez grand pour avoir

$$2^{r_0-r}||v_i||_{r_0,\tau_0} < \frac{\alpha^{|E_i|}\eta^{L(E_\imath)}}{2}.$$

Cela donne, en utilisant (4) et (6),

$$||v_i||_{r,\tau}\tau^{-E_i} < \frac{1}{2}. \qquad (8)$$

D'après (7), (8) et (2), l'application linéaire $\phi = \phi_1 + \phi_2$ réalise donc une bijection entre les espaces de Banach $H_\Delta(r)(\tau)$ et $\mathcal{D}(r)(\tau)$. Soit g un élément de $\mathcal{D}(r)(\tau)$. Il existe donc des uniques séries $(g_1, \dots, g_m; h)$ de $\mathcal{D}(r)(\tau)$ telles que l'on ait

$$\begin{aligned} g &= (\phi_1 + \phi_2)(g_1, \dots, g_m; h) \\ &= \sum_{i=1}^m g_i(u_i + v_i + X^{E_\imath}) + h \\ &= \sum_{i=1}^m g_i f_i + h, \end{aligned}$$

avec, pour tout $i = 1, \dots, m, \mathrm{Exp}_X(g_i X^{E_\imath}) \subset \Delta_i$ et $\mathrm{Exp}_X(h) \subset \mathbb{N}^k - \Delta$. La division est donc réalisée. □

On déduit de ce résultat un théorème de division "à la Hironaka" dans $\mathcal{D}\{s\}$. On change légèrement les notations, afin de les rendre plus adaptées aux séries de Dirichlet. On note $\mathbb{N}^{(\infty)}$ l'ensemble des suites d'entiers à support fini. On définit une bijection entre $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}^{(\infty)}$ en posant

$$\psi\,(p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}) = (\alpha_1,\dots,\alpha_r,0,\dots).$$

Dans la suite, on désigne par L une forme linéaire positive non nulle de $\mathbb{N}^{(\infty)}$ dans $\mathbb{R}$. On a alors

$$L(j_1,\dots,j_r,0,\dots) = \sum_{i=1}^{r} l_i j_i,$$

où les coefficients l_i sont des nombres réels strictement positifs. Par la bijection ψ, L définit aussi un ordre sur les entiers, avec, pour a et b deux entiers non nuls,

$$a \leqslant_L b \text{ si et seulement si } L\circ\psi(a) \leqslant L\circ\psi(b).$$

Cet ordre est l'ordre naturel si on choisit $l_k = \log p_k$. En outre, cet ordre est compatible avec les valuations $p-$adiques :

$$\text{si } \alpha_1 \leqslant \beta_1,\dots,\alpha_r \leqslant \beta_r, \text{ alors } p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r} \leqslant_L p_1^{\beta_1}\dots p_r^{\beta_r}.$$

On suppose enfin que L vérifie la propriété $(*)$ suivante :

$(*)$ toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément pour L.

En particulier, cela est vérifié si L a un nombre fini de composantes non nulles.

THÉORÈME 2.2. — *Soient $f_1,\dots,f_m$ des éléments non nuls de $\mathcal{D}\{s\}$. Pour tout $i=1,\dots,m$, on choisit q_i minimum dans le support de f_i pour l'ordre défini par L, vérifiant $(*)$. On pose*

$$\Delta_1 = \{n \in \mathbb{N}^*;\ q_1|n\},$$

et, pour tout $i=2,\dots m$,

$$\Delta_i = \{n\in\mathbb{N}^*;\ q_i|n\} - (\Delta_1\cup\dots\Delta_{i-1}).$$

Alors, pour tout f de $\mathcal{D}\{s\}$, il existe un unique $(m+1)$-uplet $(g_1,\dots,g_m;h)$ d'éléments de $\mathcal{D}\{s\}$ vérifiant

$$f = \sum_{i=1}^{m} f_i g_i + h, \tag{9}$$

$$\operatorname{supp}\left(\frac{1}{q_i^s}g_i\right) \subset \Delta_i, \tag{10}$$

$$\operatorname{supp}(h) \subset \mathbb{N}^* - (\Delta_1\cup\dots\cup\Delta_m). \tag{11}$$

De plus, les séries $g_1,\dots,g_m$ et h sont données par un opérateur linéaire continu.

Preuve. — Il suffit de remarquer que toute série f de $\mathcal{D}\{s\}$ se décompose en

$$f(s) = \sum_{J\in\mathbb{N}^k} f_J(s)\left(p_1^{-s}\dots p_k^{-s}\right)^J,$$

avec, pour tout multi-indice J et tout $i = 1,\dots,k$,

$$n \in \operatorname{supp}(f_J) \text{ implique } n \wedge p_i = 1.$$

Soit $X = (X_1,\dots,X_k)$. On associe alors à f la série

$$\tilde f(X) = \sum_{J\in\mathbb{N}^k} f_J(s)X^J.$$

On a $f(s) = \tilde f(p_1^{-s},\dots,p_k^{-s})$. De plus, l'équivalence suivante est facile à vérifier :

$$(f \in \mathcal{D}\{s\}) \iff \Big(\text{il existe } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \tau \in \mathbb{R}_+^{*k} \text{ tels que } \tilde f \in \mathcal{D}(r)(\tau)\Big).$$

Si, par exemple, on a $\sum_{n\geqslant 1}|a_n|n^{-r} < +\infty$, en posant $\tau = (p_1^{-r},\dots,p_k^{-r})$, on a $\tilde f \in \mathcal{D}(r)(\tau)$.

On applique alors le théorème 2.1 à $\tilde g$ et $\tilde f_i$, pour $i = 1,\dots,m$. On conclut en posant $X_i = p_i^{-s}$. □

Remarques 2.3. – Il est toujours possible de diviser par une famille $f_1,\dots,f_m$ de $\mathcal{D}\{s\}$. Si on choisit pour L l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$, on peut en effet appliquer le théorème de division précédent avec $q_i = \min\operatorname{supp}(f_i)$. On dira que q_i^{-s} est une direction de division par f_i possible. Ce n'est toutefois pas la seule et on verra dans la suite qu'il est parfois plus judicieux de diviser, par exemple, suivant 8^{-s} que suivant 6^{-s}.

– On peut aussi écrire le théorème 2.2 pour les séries de Dirichlet à plusieurs variables $(s_1,\dots,s_k)$. L'énoncé est analogue. Il faut simplement distinguer, pour un nombre premier p, les "variables" p^{s_i} et p^{s_j} $(i \neq j)$.

– Le théorème de division reste évidemment vrai dans le cas formel. La démonstration peut se faire aussi par perturbation d'un épimorphisme. On remplace la notion de norme par celle de valeur absolue (voir [19] ou [15]).

3. Applications.

Comme conséquence du théorème 2.2, on obtient l'analogue dans $\mathcal{D}\{s\}$ des théorèmes analytiques de division et de préparation de Weierstrass.

COROLLAIRE 3.1. — *Soient $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s} \in \mathcal{D}\{s\}$ et p un nombre premier tel que $p^\alpha \in \operatorname{supp} f$, où $\alpha > 0$ est le plus petit possible. Alors, pour tout élément g de $\mathcal{D}\{s\}$, il existe des uniques séries q et $r_1, \ldots, r_\alpha$ de $\mathcal{D}\{s\}$ satisfaisant*

$$g(s) = q(s)f(s) + \sum_{j=1}^{\alpha} r_j(s)(p^{-s})^{\alpha-j},$$

avec, pour tout $j = 1, \ldots, \alpha$, $n \in \operatorname{supp}(r_j)$ implique $n \wedge p = 1$.

Preuve. — C'est une simple application du théorème 2.2. □

DÉFINITION 3.2. — *Soit p un nombre premier. On dit que $P \in \mathcal{D}\{s\}$ est un* polynôme distingué *en p de degré α si P s'écrit*

$$P(s) = \left(\frac{1}{p^s}\right)^\alpha + \sum_{j=1}^{\alpha} r_j(s)(p^{-s})^{\alpha-j},$$

avec, pour tout $j = 1, \ldots, \alpha$,

- *$r_j \in \mathcal{D}\{s\}$,*
- *r_j non inversible,*
- *$n \in \operatorname{supp}(r_j)$ implique n premier avec p.*

COROLLAIRE 3.3. — *Soient $f \in \mathcal{D}\{s\}$ et p un nombre premier tel que $p^\alpha \in \operatorname{supp} f$, où $\alpha > 0$ est le plus petit possible. Alors on a la décomposition unique*

$$f(s) = U(s)P(s),$$

avec U et P des éléments de $\mathcal{D}\{s\}$ vérifiant :

- *U est inversible,*
- *P est un polynôme distingué en p de degré α.*

Preuve. — Comme dans le cadre analytique, on applique le corollaire 3.1 en divisant $(p^{-s})^\alpha$ par $f(s)$. On a donc

$$\left(\frac{1}{p^s}\right)^\alpha = q(s)f(s) + \sum_{j=1}^{\alpha} r_j(s)(p^{-s})^{\alpha-j},$$

avec q et $r_1, \dots, r_\alpha$ des uniques éléments de $\mathcal{D}\{s\}$ et, pour tout $j = 1, \dots, \alpha$, si n appartient à $\operatorname{supp}(r_j)$ alors n est premier avec p. Par des considérations de support, on déduit facilement que q est inversible et, pour tout $j = 1, \dots, \alpha$, r_j est non inversible. En notant $U(s)$ l'inverse de q, on obtient le résultat annoncé.

On déduit aussi du théorème 2.2 le résultat suivant. C'est une version locale du théorème de Landau [13].

COROLLAIRE 3.4. — *Soient $f, h \in \mathcal{D}\{s\}$ et $u \in \mathcal{D}[[s]]$ telles que l'on ait $f = uh$. Alors u est aussi un élément de $\mathcal{D}\{s\}$.*

Preuve. — On pose

$$q = \min(n \in \mathbb{N}^* \ ; \ n \in \operatorname{supp}(h)).$$

La division de f par h dans $\mathcal{D}\{s\}$ suivant la direction q^{-s} donne

$$f = gh + r, \text{ avec } g, r \text{ dans } \mathcal{D}\{s\} \text{ et } \operatorname{supp}(r) \subset \mathbb{N}^* - \{n \in \mathbb{N}^*; q|n\}.$$

On a donc $r = h(u - g)$. Si on a $u \neq g$, on écrit $u - g$ sous la forme

$$u - g = \frac{a_m}{m^s} + \sum_{n>m} a_n n^{-s}, \ a_m \neq 0.$$

On a alors $mq \in \operatorname{supp}\big(h(u-g)\big)$, ce qui contredit $\operatorname{supp} r \subset \mathbb{N}^* - \{n \in \mathbb{N}^*; q|n\}$. □

4. Propriétés arithmétiques.

Le théorème principal de ce paragraphe est la factorialité de $\mathcal{D}\{s\}$; on commence par le résultat analogue dans le cas formel.

THÉORÈME 4.1 [6]. — *L'anneau $\mathcal{D}[[s]]$ est factoriel.*

Ce théorème a été démontré par E.D. Cashwell et C.J. Everett dans [6]. On en donne toutefois ici une nouvelle preuve plus élémentaire. Pour cela, on introduit les définitions suivantes :

- pour $l \geqslant 1$, $\mathcal{D}_l[[s]]$ désigne le sous-anneau de $\mathcal{D}[[s]]$ des séries de Dirichlet f vérifiant $\operatorname{supp}(f) \subset \{p_1^{\alpha_1} \dots p_l^{\alpha_l}; \alpha_i \geqslant 0\}$.
- P_l est la projection canonique de $\mathcal{D}[[s]]$ sur $\mathcal{D}_l[[s]]$:

$$P_l\Big(\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}\Big) = \sum_{J \in \mathbb{N}^l} a_{p_1^{j_1}\dots p_l^{j_l}} \big(p_1^{j_1} \dots p_l^{j_l}\big)^{-s}.$$

Les lemmes suivants seront utilisés dans la suite.

LEMME 4.2. — *Si $f, g \in \mathcal{D}[[s]]$, alors $P_l(fg) = P_l(f)P_l(g)$.*

La preuve est évidente.

LEMME 4.3. — *Soit $f \in \mathcal{D}[[s]]$ (resp. $f \in \mathcal{D}\{s\}$), $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} = \min \mathrm{supp}(f)$. Si $f = g_1 \dots g_q$, où $g_i \in \mathcal{D}[[s]]$ (resp. $g_i \in \mathcal{D}\{s\}$), g_i non inversible, alors $q \leqslant \alpha_1 + \ldots + \alpha_r$.*

Preuve. — Le premier terme de f est le produit des premiers termes de $g_1, \dots, g_q$, et aucun des g_i ne possède de terme constant. □

LEMME 4.4. — *$\mathcal{D}_l[[s]]$ est factoriel.*

Preuve. — Comme dans la preuve du théorème 2.2, on identifie par la transformation de Bohr $\mathcal{D}_l[[s]]$ et $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_l]]$. En effet, à toute série de Dirichlet

$$f(s) = \sum_{J \in \mathbb{N}^l} a_J \left(p_1^{j_1} \dots p_l^{j_l}\right)^{-s}$$

de $\mathcal{D}_l[[s]]$, on associe la série formelle

$$\tilde{f}(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^l} a_J X_1^{j_1} \dots X_l^{j_l}.$$

Les anneaux $\mathcal{D}_l[[s]]$ et $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_l]]$ sont donc isomorphes et il est bien connu que $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_l]]$ est factoriel. □

Le lemme suivant est l'étape principale dans la démonstration du théorème 4.1.

LEMME-CLÉ 4.5. — *Soit $f \in \mathcal{D}[[s]]$, irréductible dans $\mathcal{D}[[s]]$. Il existe $m \geqslant 1$ tel que, pour $l \geqslant m$, $P_l(f)$ soit irréductible dans $\mathcal{D}_l[[s]]$.*

Preuve. — On suppose que le lemme est faux et on note $f_l = P_l(f)$. La décomposition de f_l en produit d'irréductibles de $\mathcal{D}_l[[s]]$ est notée

$$f_l = h_{l,1} \dots h_{l,n_l}.$$

L'entier n_l désigne donc le nombre d'irréductibles nécessaires à la décomposition de f_l dans $\mathcal{D}_l[[s]]$. On a alors

$$f_{l-1} = P_{l-1}(f_l) = P_{l-1}(h_{l,1}) \dots P_{l-1}(h_{l,n_l})$$

et aucun des $P_{l-1}(h_{l,k})$ n'est inversible. On a donc $n_{l-1} \geqslant n_l$: la suite d'entiers naturels $(n_l)_{l\geqslant 1}$ stationne à compter d'un certain rang m. On pose $u = n_m$. On a alors, pour tout $l \geqslant m$,

$$f_l = h_{l,1} \dots h_{l,m}.$$

Par projection, on obtient $P_m(f_l) = P_m(h_{l,1}) \dots P_m(h_{l,u})$. Nécessairement, chaque $P_m(h_{l,k})$ est irréductible, sinon on aurait une décomposition de f_m en plus d'irréductibles que u dans $\mathcal{D}_m[[s]]$. Donc, quitte à changer la numérotation, et aux inversibles près, on a

$$P_m(h_{l,k}) = h_{m,k}.$$

On note $h_{l,k} = \sum_{j\geqslant 1} a(l,k,j)j^{-s}$. Pour k et j fixés, la suite $(a(l,k,j))_{l\geqslant 1}$ est stationnaire et converge vers $a(k,j)$. On pose $h_k(s) = \sum_{j\geqslant 1} a(k,j)j^{-s}$, de sorte que $P_l(h_k) = h_{l,k}$. L'égalité, vérifiée pour $l \geqslant m$,

$$P_l(f) = P_l(h_1 \dots h_u)$$

entraîne $f = h_1 \dots h_u$. Aucun des h_i n'est inversible. Ainsi, f n'est pas irréductible, ce qui contredit les hypothèses. □

Preuve du théorème 4.1. — L'existence d'une décomposition résulte du lemme 4.5. Pour l'unicité, si on suppose que f admet deux décompositions

$$f = f_1 \dots f_r = g_1 \dots g_u,$$

avec f_i, g_i des irréductibles de $\mathcal{D}[[s]]$ et f_1 non associé à un des g_i, alors il existe l assez grand tel que l'on ait

- $P_l(f_1)$ non associé à un des g_i,
- $P_l(f_i)$, $P_l(g_j)$, pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et $1 \leqslant j \leqslant u$, irréductibles dans $\mathcal{D}_l[[s]]$.

Pour ce l, on aurait deux décompositions non équivalentes de $P_l(f)$ dans $\mathcal{D}_l[[s]]$; c'est impossible! □

La preuve précédente ne peut s'appliquer au cas analytique : en particulier, même si chaque $h_{k,l} \in \mathcal{D}\{s\}$, il n'y a aucune raison pour que la série h_k définie dans le lemme 4.5 soit dans $\mathcal{D}\{s\}$. Pour prouver la factorialité de $\mathcal{D}\{s\}$, on va, suivant une idée de [18], appliquée dans un autre contexte, utiliser la propriété "être intégralement clos" pour établir la propriété "être factoriel".

PROPOSITION 4.6. — *L'anneau $\mathcal{D}\{s\}$ est intégralement clos.*

Preuve. — Soit $\frac{f}{g}$ une racine d'un polynôme $X^n + b_1 X^{n-1} + \ldots + b_n$ avec f, g et b_i, pour $i = 1, \ldots, n$, dans $\mathcal{D}\{s\}$. En particulier, comme l'anneau $\mathcal{D}[[s]]$ est factoriel, on a $f = ug$ avec $u \in \mathcal{D}[[s]]$. Le corollaire 3.4 permet de conclure. □

THÉORÈME 4.7. — *L'anneau $\mathcal{D}\{s\}$ est factoriel.*

On démontre le théorème 4.7 en plusieurs étapes. L'existence d'une décomposition d'un élément f de $\mathcal{D}\{s\}$ en produits d'éléments irréductibles résulte du lemme 4.3. Il reste donc à montrer l'unicité. On commence par le cas de polynômes distingués.

LEMME 4.8. — *Tout polynôme distingué en p de $\mathcal{D}\{s\}$ se décompose de manière unique comme produit de polynômes distingués en p irréductibles dans $\mathcal{D}\{s\}$.*

Preuve. — Soit $P(s)$ un polynôme distingué en p de $\mathcal{D}\{s\}$. On écrit donc

$$P(s) = (p^{-s})^\alpha + \sum_{i=1}^{\alpha} r_i(s)(p^{-s})^{\alpha-i}.$$

On note aussi

$$A_p = \{f \in \mathcal{D}\{s\}\,;\, \forall n \in \operatorname{supp} f,\ p \wedge n = 1\}.$$

L'anneau A_p est intégralement clos. En effet, si $\frac{f}{g}$ est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans A_p, avec f, g dans A_p, la proposition 4.6 entraîne $f = ug$, avec $u \in \mathcal{D}\{s\}$. Si on a $u \notin A_p$, on considère m le plus petit élément du support de u tel que p divise m. On note par ailleurs $q = \min \operatorname{supp}(g)$. On a clairement $mq \in \operatorname{supp}(f)$, ce qui est impossible car $f \in A_p$. On note alors K_p le corps des fractions de A_p. Au polynôme P distingué en p, on associe le polynôme de $A_p[T]$:

$$T^\alpha + \sum_{i=1}^{\alpha} r_i T^{\alpha-i}.$$

On identifie alors $A_p[T]$ à une partie de $\mathcal{D}\{s\}$. On suppose maintenant que P admet deux décompositions en produit de distingués irréductibles de $\mathcal{D}\{s\}$:

$$P = P_1 \ldots P_m = Q_1 \ldots Q_l.$$

A fortiori, chaque P_i et Q_j est irréductible dans $A_p[T]$. Comme A_p est intégralement clos, on montre que chaque P_i et chaque Q_j est irréductible dans $K_p[T]$. En effet, si on a P_i (ou Q_j) $= R_1R_2$, avec R_1, R_2 dans $K_p[T]$, les polynômes R_1 et R_2 sont unitaires car P_i (ou Q_j) est unitaire. Comme $A_p[T]$ est intégralement clos, on a alors $R_k \in A_p[T]$ (voir [4]). Pour conclure, il suffit de remarquer que $K_p[T]$ est factoriel. Les deux décompositions de P en produit d'irréductibles sont donc équivalentes. □

Preuve du théorème 4.7. — Soit f dans $\mathcal{D}\{s\}$ non inversible. On montre que f se décompose de manière unique en produit d'irréductibles.

Cas 1 : il existe p premier et $\beta > 0$ tels que p^β appartient à $\operatorname{supp}(f)$.

Soit alors α le plus petit entier possible tel que p^α appartient à $\operatorname{supp}(f)$. D'après le théorème de préparation 3.3, on a

$$f(s) = U(s)P(s),$$

avec U inversible dans $\mathcal{D}\{s\}$ et P un polynôme distingué en p de degré α de $\mathcal{D}\{s\}$. Si on a une décomposition en produit d'irréductibles

$$f = f_1 \dots f_r,$$

il est clair que pour chaque indice i il existe un entier $\alpha_i > 0$ tel que p^{α_i} soit dans $\operatorname{supp} f_i$. On peut donc appliquer le théorème de préparation 3.3, pour tout $i = 1, \dots, r$, à f_i pour obtenir

$$f_i(s) = U_i(s)P_i(s),$$

avec U_i inversible dans $\mathcal{D}\{s\}$ et P_i un polynôme distingué en p de degré α_i associé à f_i et irréductible dans $\mathcal{D}\{s\}$. On a donc

$$P(s) = V(s)P_1(s)\dots P_r(s),$$

avec V inversible dans $\mathcal{D}\{s\}$. Une autre décomposition en produit d'irréductibles $f = g_1 \dots g_k$ de f donne clairement une autre décomposition de P en produit de polynômes distingués en p. Le lemme 4.8 permet de conclure.

Cas général : soit $q \in \operatorname{supp} f$, $q = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ avec $\alpha = \alpha_1 + \dots \alpha_r$ minimum. L'entier q est donc le premier terme de f pour un ordre donné. Quitte à remplacer $p_1, \dots, p_r$ par des variables $X_1, \dots, X_r$ dans la série f, on obtient une série, selon les notations du paragraphe 2, $\tilde{f}(X)$ de $\mathcal{D}\{s\}\{X\}$ d'ordre α en X. On effectue alors un changement de variables linéaire (qui préserve donc l'analycité) sur X tel que le premier terme de $\tilde{f}$ soit X_r^α. La série de Dirichlet associée possède donc un terme minimal en p_r^α. Le cas précédent permet de conclure, car toutes les transformations effectuées sont des isomorphismes d'anneaux; en particulier elles préservent l'irréductibilité.

Remarque 4.9. — De la même manière, grâce à la remarque 2.3, on montre aussi que l'anneau des séries de Dirichlet analytiques à plusieurs variables $(s_1, \dots, s_k)$ est factoriel.

L'utilisation de la division permet d'obtenir une autre propriété arithmétique de l'anneau $\mathcal{D}\{s\}$.

THÉORÈME 4.10. — *Soit P un polynôme unitaire de $\mathcal{D}\{s\}[X]$. On note $\overline{P}$ sa classe dans $(\mathcal{D}\{s\}/\mathcal{M})[X]$. On suppose que $\overline{P}$ se factorise de la manière suivante :*

$$\overline{P}(X) = (X - c_1)^{b_1} \dots (X - c_r)^{b_r},$$

avec $c_i \neq c_j$, pour $i \neq j$. Alors, on peut écrire P sous la forme

$$P(X) = \omega_1(X) \dots \omega_r(X),$$

avec, pour tout $i = 1, \dots, r$,

$$\omega_i(X) \in \mathcal{D}\{s\}[X] \text{ et } \overline{\omega_i}(X) = (X - c_i)^{b_i}.$$

L'anneau $\mathcal{D}\{s\}$ est donc hensélien.

Preuve. — On utilise le théorème 2.1 et on suit une démonstration classique [11] par récurrence sur r. Si on a $r = 1$, le résultat est clair. Soit alors $r > 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer $c_1 = 0$. Par hypothèse, on a $\overline{P}(X) = X^{b_1} u(X)$ avec $u(0) \neq 0$. On applique le théorème 2.1 de division dans $\mathcal{D}\{s\}\{X\}$. On écrit alors

$$X^{b_1} = P(X)e(X) + \sum_{i=1}^{b_1} r_i X^{b_1 - i}, \tag{12}$$

avec $e \in \mathcal{D}\{s\}\{X\}$ et, pour $i = 1, \dots, b_1$, $r_i \in \mathcal{D}\{s\}$. De plus, en regardant la classe des éléments de l'égalité (12) modulo $\mathcal{M}$, on tire $\overline{e}(0) \neq 0$ et, pour $i \in \{1, \dots, b_1\}$, $\overline{r}_i = 0$. La série $e(X)$ possède donc un terme constant (par rapport à X) inversible dans $\mathcal{D}\{s\}$. On a ainsi $e(X)$ inversible et $e^{-1}(X) \in \mathcal{D}\{s\}\{X\}$. On en déduit

$$P(X) = e^{-1}(X)\Big(X^{b_1} - \sum_{i=1}^{b_1} r_i(s) X^{b_1 - i}\Big).$$

Par unicité de la division polynomiale classique dans $\mathcal{D}\{s\}[X]$ (on divise P par $X^{b_1} - \sum_{i=1}^{b_1} r_i(s) X^{b_1 - i}$), on a alors $e^{-1}(X) \in \mathcal{D}\{s\}[X]$. On pose

$$\omega_1(X) = X^{b_1} - \sum_{i=1}^{b_1} r_i(s) X^{b_1 - i}.$$

On a $\overline{\omega}_1(X) = X^{b_1}$ et le résultat est prouvé en appliquant l'hypothèse de récurrence à $e^{-1}(X)$. □

Il est bien connu que le théorème des fonctions implicites implique le lemme de Hensel [17]. On peut ici aussi écrire une version du théorème des fonctions implicites pour $\mathcal{D}\{s\}$ ce qui donnera une nouvelle preuve du théorème 4.10.

THÉORÈME 4.11. — *Soient $y = (y_1, \dots, y_k)$ des variables et $f(s,y) = (f_1(s,y), \dots, f_k(s,y))$ un élément de $(\mathcal{D}\{s\}\{y\})^k$. On note $\mathcal{J}_f(s,y)$ le jacobien de l'application f par rapport aux variables y. On suppose $\mathcal{J}_f(s,0)$ inversible dans $\mathcal{D}\{s\}$. Alors il existe des uniques séries $a(s) = (a_1(s), \dots, a_k(s))$ de $\mathcal{D}\{s\}$ vérifiant $f(s, a(s)) = 0$.*

Preuve. — On adapte sans difficulté la preuve classique donnée dans [1] en utilisant le théorème 2.1. □

5. Deux problèmes de composition dans $\mathcal{D}\{s\}$.

Premier problème : soit f un élément de $\mathcal{D}\{s\}$. On fixe une fonction analytique ϕ et on étudie la composition à droite par ϕ. Si l'on souhaite que, pour toute série de Dirichlet analytique f, $f \circ \phi$ reste dans $\mathcal{D}\{s\}$, il est d'abord nécessaire que $\Re\phi(s)$ tende vers $+\infty$ si $\Re(s)$ tend vers $+\infty$. D'autre part, il est aussi nécessaire que ϕ vérifie certaines conditions arithmétiques afin que $f \circ \phi$ soit encore une série de Dirichlet. La détermination de ces fonctions ϕ a été complètement résolue par J. Gordon et H. Hedenmalm [10] (on note C_ϕ l'opérateur de composition par ϕ, $C_\phi(f) = f \circ \phi$). On donne ici une version locale de leur théorème.

THÉORÈME 5.1. — *Une fonction analytique $\phi : \mathbb{C}_\theta \to \mathbb{C}_\nu$ définit un opérateur de composition C_ϕ sur $\mathcal{D}\{s\}$ si et seulement si elle s'écrit*

$$\phi(s) = c_0 s + \varphi(s),$$

où $c_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{D}\{s\}$.

Remarque 5.2. — Le théorème de J. Gordon et H. Hedenmalm se situe dans un contexte légèrement différent. Si l'on pose $\mathcal{H} = \{f(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s};\ \sum |a_n|^2 < +\infty\}$, ces deux auteurs recherchent les fonctions ϕ pour lesquelles C_ϕ définit un opérateur de composition de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{D}\{s\}$.

Il est alors possible que $c_0 = 0$, ce qui est exclu ici puisqu'il faut que l'on ait $\Re\phi(s) \to +\infty$ si $\Re(s) \to +\infty$. Le reste de leur preuve s'adapte sans changements.

De plus, on remarque que si ϕ s'écrit $\phi(s) = c_0 s + \sum_{n\geqslant 1} c_n n^{-s}$ et si $f(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ est une série de $\mathcal{D}[[s]]$, il est possible de composer formellement f par ϕ en posant

$$f \circ \phi(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k k^{-c_0 s - c_1} \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-c_n \log k)^j}{j!} n^{-js}\right).$$

En développant l'expression précédente, on obtient une série de Dirichlet (formelle) $\sum_{k\geqslant 1} b_k k^{-s}$, chaque coefficient b_k étant obtenu par une somme finie. En outre, cette composition formelle est aussi la composition des fonctions là où il y a convergence absolue des deux séries (voir [10] pour le détail des justifications).

On se propose d'établir une réponse à la question suivante : soient $f \in \mathcal{D}[[s]]$ et $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, avec $\varphi \in \mathcal{D}\{s\}$. Si $f \circ \phi$ appartient à $\mathcal{D}\{s\}$, que peut-on dire de f ? On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 5.3. — *Soient $f \in \mathcal{D}[[s]]$ et $\phi(s) = c_0 s + \varphi(s)$, avec $c_0 \geqslant 1$ et $\varphi \in \mathcal{D}\{s\}$. Si on a $f \circ \phi \in \mathcal{D}\{s\}$, alors f est aussi un élément de $\mathcal{D}\{s\}$.*

Remarque 5.4. — Ce théorème est l'analogue d'un résultat dans le cadre des séries analytiques établi par P.M. Eakin et G.A. Harris [8] (on peut voir aussi, pour des méthodes différentes, [7], [14] ou [16]). Ici, on étudie la composition d'une série de Dirichlet à une seule variable s par un élément du type $c_0 s + \varphi(s)$, avec c_0 entier non nul et $\varphi(s)$ série de Dirichlet analytique. Comme dans [8], on peut se demander sous quelles hypothèses on a encore le théorème 5.3 dans le cas de séries de Dirichlet à plusieurs variables $s = (s_1, \ldots, s_k)$.

Pour prouver le théorème 5.3 le lemme suivant est crucial.

LEMME-CLÉ 5.5. — *Soit $\phi(s) = s + \varphi(s)$, avec $\varphi \in \mathcal{D}\{s\}$. Alors il existe un demi-plan $\mathbb{C}_\nu$ où l'on a*

$$\phi^{-1}(s) = s + \omega(s),$$

avec $\omega \in \mathcal{D}\{s\}$.

Preuve. — On utilise une technique du type théorème du point fixe pour construire un inverse local. On fixe $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta > \sigma_c(\varphi)$, tel que l'on ait

$$s \in \mathbb{C}_\theta \Longrightarrow \max(|\varphi'(s)|) \leqslant 1/2 \text{ et } |\varphi| \text{ bornée sur } \mathbb{C}_\theta. \tag{13}$$

En particulier, ϕ est injective sur $\mathbb{C}_\theta$. On note

$$\nu = \theta + \max_{\mathbb{C}_\theta} |\varphi|. \tag{14}$$

Pour $z \in \mathbb{C}_\nu$, on définit la suite de fonctions

$$\begin{cases} u_0(z) = z \\ u_{n+1}(z) = z - \varphi(u_n(z)). \end{cases}$$

D'après (13) et (14), pour tout $n \geqslant 0$, et tout $z \in \mathbb{C}_\nu$, on a $u_n(z) \in \mathbb{C}_\theta$. La suite est donc bien définie. En outre, utilisant à nouveau (13), il vient

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(z) - u_n(z)| &\leqslant \frac{1}{2}|u_n(z) - u_{n-1}(z)| \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1(z) - u_0(z)| \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \sup_{w \in \mathbb{C}_\nu} |\varphi(w)|. \end{aligned}$$

En particulier, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers une fonction ψ sur $\mathbb{C}_\nu$. D'autre part, il résulte du théorème 5.1 que chaque u_n s'écrit

$$u_n(z) = z + \varphi_n(z),$$

avec $\varphi_n \in \mathcal{D}\{s\}$ et

$$\sup_{z \in \mathbb{C}_\nu} |\varphi_n(z)| \leqslant \sup_{z \in \mathbb{C}_\theta} |\varphi(z)|.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\psi(z) = z + \omega(z),$$

avec $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge uniformément vers ω sur $\mathbb{C}_\nu$. Des résultats récents sur les séries de Dirichlet (voir [2], lemma 18) garantissent $\omega \in \mathcal{D}\{s\}$. Pour conclure, il suffit de remarquer que l'hypothèse $z \in \mathbb{C}_\nu$ implique

$$\begin{aligned} \phi \circ u_n(z) &= u_n(z) + \varphi(u_n(z)) \\ &= z + \varphi(u_n(z)) - \varphi(u_{n-1}(z)). \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on tire

$$\phi \circ \psi(z) = z.$$

□

Preuve du théorème 5.3.

Premier cas : $c_0 = 1$. Dans ce cas, si $f \circ \phi = g$, avec $g \in \mathcal{D}\{s\}$, on commence par composer formellement par ϕ^{-1} :

$$f = f \circ (\phi \circ \phi^{-1}) = g \circ \phi^{-1}.$$

D'après le théorème 5.1 et le lemme 5.5, on a $f \in \mathcal{D}\{s\}$.

Deuxième cas : $c_0 > 1$. En posant $f(s) = \sum_{k\geqslant 1} a_k k^{-s}$ et $\phi(s) = c_0 s + \sum_{n\geqslant 1} c_n n^{-s}$, on obtient

$$\begin{aligned} f \circ \phi &= \sum_{k\geqslant 1} a_k k^{-c_0 s - \sum_{n\geqslant 1} c_n n^{-s}} \\ &= \sum_{k\geqslant 1} a_k \left(k^{c_0}\right)^{-s - \sum_{n\geqslant 1} \frac{c_n}{c_0} n^{-s}}. \end{aligned}$$

On pose

$$h(s) = \sum_{k\geqslant 1} a_k (k^{c_0})^{-s} \quad \text{et} \quad \phi_1(s) = s + \sum_{n\geqslant 1} \frac{c_n}{c_0} n^{-s}.$$

On a alors $f \circ \phi = h \circ \phi_1$. D'après le cas $c_0 = 1$, on sait que $h \in \mathcal{D}\{s\}$, d'où l'on tire $f \in \mathcal{D}\{s\}$. □

Deuxième problème : une autre voie pour obtenir une série de Dirichlet analytique est de composer une série entière et une série de Dirichlet. On note $\mathbb{C}\{X\}$ l'anneau des séries entières analytiques, c'est-à-dire l'ensemble des séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ pour lesquelles il existe $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge.

PROPOSITION 5.6. — *Soient $\mathcal{A} \in \mathbb{C}\{X\}$ et $f \in \mathcal{D}\{s\}$, non inversible. Alors on a aussi $\mathcal{A} \circ f \in \mathcal{D}\{s\}$.*

Preuve. — On écrit $\mathcal{A}(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ et $f(s) = \sum_{n\geqslant 2} b_n n^{-s}$. On a :

$$\mathcal{A} \circ f(s) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \left(\sum_{j\geqslant 2} b_j j^{-s} \right)^n.$$

Lorsqu'on développe formellement cette expression, on obtient une série de Dirichlet : la somme devant chaque terme en k^{-s} est finie, puisque le plus petit terme dans le support de $\left(\sum_{j\geqslant 2} b_j j^{-s}\right)^n$ est plus grand que 2^n. En outre, si R est un réel strictement positif tel que $\sum |a_n| R^n < +\infty$, il existe $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{j\geqslant 2} |b_j||j^{-s}| < R$. On a alors

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n| \left(\sum_{j\geqslant 2} |b_j||j^{-s}| \right)^n \leqslant \sum_{n\geqslant 0} a_n R^n < +\infty.$$

Ceci assure que $\mathcal{A} \circ f$ appartient à $\mathcal{D}\{s\}$. $\square$

On a aussi le résultat suivant, facile à obtenir.

THÉORÈME 5.7. — *Soient $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$ et $f \in \mathcal{D}\{s\}$, non inversible. Si on a $\mathcal{A} \circ f \in \mathcal{D}\{s\}$, alors $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathbb{C}\{X\}$.*

Preuve. — Soit $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_l^{\alpha_l} = \min(\operatorname{supp} f)$ et $f_l = P_l(f)$, où P_l est la projection canonique définie dans la section 4. Clairement on a l'égalité $\mathcal{A} \circ f_l = P_l(\mathcal{A} \circ f) \in \mathcal{D}\{s\}$. On note aussi F_l la série entière obtenue par la transformation de Bohr à partir de f_l :

$$f_l(s) = \sum_{J \in \mathbb{N}^l} a_J (p_1^{j_1} \dots p_l^{j_l})^{-s} \text{ implique } F_l(Z) = \sum_{J \in \mathbb{N}^l} a_J Z_1^{j_1} \dots Z_l^{j_l}.$$

F_l est une application holomorphe de $\mathbb{C}^l$ dans $\mathbb{C}$, avec $F_l(0) = 0$. On note $\mathcal{A} \circ f_l(s) = \sum_{J \in \mathbb{N}^l} b_J (p_1^{j_1} \dots p_l^{j_l})^{-s}$. On a alors $\mathcal{A} \circ F_l(Z) = \sum_{J \in \mathbb{N}^l} b_J Z_1^{j_1} \dots Z_l^{j_l}$ et la convergence de $\mathcal{A} \circ f_l$ entraîne l'existence de constantes strictement positives C et σ telles que l'on ait, pour tout J de $\mathbb{N}^l$,

$$|b_J| \leqslant C p_1^{j_1 \sigma} \dots p_l^{j_l \sigma}.$$

Ainsi, $\mathcal{A} \circ F_l$ a un rayon de convergence non nul. Ceci entraîne clairement $\mathcal{A} \in \mathbb{C}\{X\}$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ABHYANKAR, Local analytic geometry, Academic Press, New York-London, 1964.

[2] F. BAYART, Hardy spaces of Dirichlet series and their composition operators, Monat. Math., 136 (2002), 203–236.

[3] F. BAYART, A. MOUZE, Factorialité de l'anneau des séries de Dirichlet analytiques, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 336 (2003), 213–218.

[4] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, chap. 5 et 6, Hermann, 1964.

[5] J. BRIANÇON, Weierstrass préparé à la Hironaka, Astérisque 7 et 8 (1973).

[6] E.D. CASHWELL, C.J. EVERETT, The ring of number-theoretic functions, Pacific J. Math., 9 (1959), 975–985.

[7] J. CHAUMAT, A.M. CHOLLET, On composite formal power series, Trans. Amer. Math. Soc., 353 (2001), 1691–1703.

[8] P.M. EAKIN, G.A. HARRIS, When $\phi(f)$ convergent implies f is convergent, Math. Ann., 229 (1977), 201–210.

[9] W.J. ELLISON, M. MENDÈS-FRANCE, Les nombres premiers, Hermann, 1975.

[10] J. GORDON, H. HEDENMALM, The Composition Operators on the space of Dirichlet Series with Square Summable Coefficients, Michigan Math. J., 46 (1999), 313–329.

[11] H. GRAUERT, R. REMMERT, Analytische Stellenalgebren, Springer Verlag, Berlin, 1971.

[12] J.P. KAHANE, H. QUEFFÉLEC, Ordre, convergence et sommabilité des produits de séries de Dirichlet, Ann. Inst. Fourier, 47–2 (1997), 485–529.

[13] E. LANDAU, Über den Wertervorrat von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 36 (1933), 81–91.

[14] R. MOUSSU, J.C. TOUGERON, Fonctions composées analytiques et différentiables, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 282 (1976), 1237–1240.

[15] A. MOUZE, Division dans l'anneau des séries formelles à croissance contrôlée. Applications, Studia Math., 144 (2001), 63–93.

[16] A. MOUZE, Sur la composition des séries formelles à croissance contrôlée, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci., 5 Vol. I (2002), 73–92.

[17] A. PłOSKI, Remarque sur le lemme de Hensel, Bull. Acad. Polonaise Sci., Sér. Math., 28 (1980), 115–116.

[18] J.-P. RAMIS, Factorialité des anneaux de séries formelles et de séries convergentes sur les espaces vectoriels normés, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 262 (1966) 902–904.

[19] J.C. TOUGERON, Idéaux de fonctions différentiables, Springer Verlag, Berlin, 1972.

Manuscrit reçu le 6 mars 2003,
accepté le 26 mai 2003.

Frédéric BAYART,
Université de Bordeaux I
Laboratoire Bordelais d'Analyse et Géométrie
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex (France).
bayart@math.u-bordeaux.fr

Augustin MOUZE,
Université des Sciences et Technologies de Lille I
Laboratoire de Mathématiques, UMR 8524
59650 Villeneuve d'Ascq (France).
mouze@agat.univ-lille1.fr