ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Bernard MALGRANGE

La variété caractéristique d'un système différentiel analytique

Tome 52, nº 5 (2002), p. 1591-1592.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_5_1591_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
52, 5 (2002), 1591-1592

ERRATUM

LA VARIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL ANALYTIQUE

par Bernard MALGRANGE

Article paru dans le tome 50 (2000), fascicule 2, pp. 491–518

1. Le raisonnement employé pour démontrer la proposition 3.2.1 est incorrect pour la raison suivante : d'une façon générale soit $u_n : E_{n+1} \to E_n$ $(n \geqslant 1)$ une suite d'espaces compacts non vides; alors leur limite projective est non vide : en effet dans le produit $\prod E_n, \varprojlim E_n$ s'identifie à l'intersection des sous-espaces fermés F_n formés des suites $\{x_q\}$ vérifiant $x_q = u_q(x_{q+1})$, $q \leqslant n$. Comme le produit $\prod E_n$ est compact (Tychonov), le résultat suit. Dans l'article cité, ce raisonnement est utilisé incorrectement pour des espaces quasi-compacts, non nécessairement séparés (en l'occurence, il est utilisé pour la topologie de Zariski).

2. La proposition est néanmoins exacte; elle peut se démontrer avec l'une ou l'autre des variantes suivantes du théorème de Baire :

THÉORÈME 1. — *Soit $u_n : E_{n+1} \to E_n$ une suite d'espaces topologiques séparés non vides; on suppose que l'image de chacun est dense dans le précédent; alors l'image de $\varprojlim E_n$ dans chaque E_n est dense (et, en particulier, $\varprojlim E_n$ est non vide) dans chacun des deux cas suivants :*

i) *Les E_n sont localement compacts.*

ii) *Les E_n sont métriques localement complets (= chaque point admet un voisinage complet).*

Le théorème de Baire est simplement le cas particulier du résultat précédent où l'on suppose que les E_n sont une suite décroissante d'ouverts de E_1; la démonstration dans le cas général est la même que celle de ce cas particulier, qu'on trouvera, par exemple, dans Bourbaki, Topologie Générale, chap. 9.

3. Maintenant, pour démontrer la proposition 3.2.1 de loc. cit., il suffit de remplacer, à la fin du raisonnement, la référence au théorème de Tychonov, par le résultat qui précède. Je laisse la vérification au lecteur, et je vais seulement expliciter les choses dans un cas particulier, intéressant par lui-même.

THÉORÈME 2. — *Soit $\mathcal{J}$ un idéal de l'anneau des polynômes à une infinité d'indéterminées $A = \mathbb{C}[x_n]$, $n \geqslant 1$; on pose $A_n = \mathbb{C}[x_p]$, $1 \leqslant p \leqslant n$ et $\mathcal{J}_n = \mathcal{J} \cap A_n$; on suppose que chaque $\mathcal{J}_n$ a un zéro; alors $\mathcal{J}$ a un zéro.*

Soit en effet, E_n l'ensemble des zéros de $\mathcal{J}_n$; comme $\mathcal{J}_{n+1} \cap A_n = \mathcal{J}_n$ la théorie des ensembles constructibles (ou la théorie élémentaire de l'élimination) montre que l'image de E_{n+1} dans E_n contient un ouvert de Zariski dense; a fortiori, cette image est dense pour la topologie transcendante; le résultat suit alors du théorème 1.

4. Question : Soit k un corps; à quelle condition le théorème 2 est-il encore vrai, pour $\mathbb{C}$ remplacé par k?

Il est faux pour $k = \mathbb{R}$; contre-exemple : prendre l'idéal engendré par la famille de polynômes $x_n^2 + n - x_1$ $(n \geqslant 2)$.

Par contre, il est vrai pour les corps finis; en effet, on est dans la situation de 1/ avec les E_n finis.

En dehors de ces cas, je ne sais rien et je n'ai pas trouvé de référence.

Bernard MALGRANGE,
Université Joseph Fourier
Institut Fourier
BP 74
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex (France).
Bernard.Malgrange@ujf-grenoble.fr