



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Vincent COLIN

Chirurgies de Dehn admissibles dans les variétés de contact tendues

Tome 51, n° 5 (2001), p. 1419-1435.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_5_1419_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

CHIRURGIES DE DEHN ADMISSIBLES DANS LES VARIÉTÉS DE CONTACT TENDUES

par Vincent COLIN

En dimension 3, parmi les structures de contact, les structures tendues présentent un intérêt particulier, en grande partie parce qu'elles apparaissent naturellement sur le bord de certaines variétés symplectiques.

On rappelle qu'une *structure de contact* ξ définie sur une variété V de dimension 3, c'est-à-dire un champ de plans d'équation $\Theta = 0$ où la 2-forme $d\Theta|_{\xi}$ est non dégénérée, est *tendue* s'il n'existe pas de disque D (dit *vrillé*) plongé dans V sur lequel ξ trace une orbite périodique. Elle est *universellement tendue* si son rappel dans le revêtement universel de V est tendu.

On dit qu'une variété de contact close (compacte sans bord) (V, ξ) est *symplectiquement remplissable* s'il existe une variété symplectique compacte (W, ω) telle que $V = \partial W$, que $\omega|_{\xi}$ soit non dégénérée et que $\omega \wedge \omega$ oriente V comme $\Theta \wedge d\Theta$ (où $\xi = \ker \Theta$). De manière plus restrictive, on dit que (V, ξ) est *de type contact* s'il existe en plus sur W un champ de vecteurs transverse à V qui dilate uniformément ω . D'après Y. Eliashberg et M. Gromov [El1], toute variété symplectiquement remplissable est tendue. On pronostique généralement que la réciproque vaut également (dans le cas des variétés closes). Il s'agit d'une question centrale de la géométrie de contact.

Les notions de structures remplissables et de type contact s'étendent au cas où V n'est pas compacte (voir [EIT]). Modulo une condition de finitude à l'infini (voir [EIT]), il reste que toute structure remplissable est tendue. La question du remplissage des structures tendues s'étend ainsi au cas des variétés ouvertes.

Mots-clés: Structure de contact tendue – Chirurgie de Dehn – Remplissage symplectique.

Classification math.: 53C15.

Dans [El2] et [Ga], Y. Eliashberg puis D. Gay mettent en évidence que la classe des structures symplectiquement remplissables est stable pour un certain type de chirurgies de Dehn, dites *admissibles* (voir définition ci-après) ; ou plus précisément que si (V, ξ) est de type contact, la nouvelle variété est symplectiquement remplissable. Du point de vue de la géométrie de contact, ces chirurgies de Dehn admissibles sont des opérations naturelles, définies le long d'un nœud (ou d'un entrelacs) transverse à la structure de contact.

Ici, on exhibe un exemple de variété de contact universellement tendue qui devient vrillée (non tendue) après chirurgie admissible. L'exemple construit est une variété ouverte et ne couvre donc pas le cas fort (pour les variétés closes) de la réciproque au théorème d'Eliashberg et Gromov. Il s'agit cependant d'un comportement original pour une structure de contact universellement tendue, celle-ci n'étant pas, d'après ce qui précède, de type contact. Comme toujours, la partie délicate dans ce qui suit, outre la construction elle-même, est de montrer que la structure de départ est tendue. On utilise pour cela un théorème de chirurgie :

THÉORÈME 0.1 (voir [Co1]). — *Soit (V, ξ) une variété de contact à bord. Soit S une surface plongée dans V , $\partial S \subset \partial V$, qui est un disque à feuilletage caractéristique radial, ou un anneau π_1 -injecté dont le feuilletage caractéristique est constitué d'une orbite périodique non dégénérée (dans les deux cas, le bord de S est positivement transverse à ξ pour une orientation de S et de ξ fixée). Si $(V \setminus S, \xi)$ est universellement tendue, alors (V, ξ) l'est aussi.*

Toutes les variétés V qu'on considère par la suite sont orientées. Les structures de contact étudiées sont alors toutes supposées *positives* : si $\xi = \ker \Theta$, l'orientation, indépendante du choix de Θ , donnée par la forme volume $\Theta \wedge d\Theta$ coïncide avec celle de V .

Soit $S \subset (V, \xi)$ une surface orientée. On suppose que ξ est orientée au voisinage de S . On rappelle que le *feuilletage caractéristique* de $S \subset (V, \xi)$ est le feuilletage (singulier) orienté, noté ξS , tracé par ξ sur S , c'est-à-dire le feuilletage intégral du champ de droites orientées singulier $\xi \cap TS$. Ses singularités — qui sont les points x de S où $\xi(x) = T_x S$ — sont génériquement de deux types : foyers d'indice 1 et selles d'indice -1 . Celles-ci sont positives ou négatives si les coorientations de TS et de ξ coïncident ou non au point considéré, et toujours de divergence non nulle. Tout feuilletage orienté d'une surface S dont les singularités sont des selles ou des foyers isolés de divergence non nulle détermine un unique germe de structure de contact positive qui trace ce feuilletage sur S (voir [Gi1]).

L’*autoenlacement* d’une courbe γ transverse à ξ et bordant dans V une surface orientée et compacte S est l’enlacement entre γ et toute courbe obtenue en poussant un peu γ par le flot d’un champ de vecteurs non singulier et tangent à $\xi|_S$. Si $\gamma \subset \partial S$ est une courbe en tout point tangente à ξ , on définit son *invariant de Thurston-Bennequin relatif* à S , noté $\text{tb}(\gamma, S)$, comme le degré, dans le fibré normal à γ coorienté par $\dot{\gamma}$ et trivialisé par TS , d’une section transverse à ξ et définie le long de γ . Dans le cas où le feuilletage ξS est générique, cet entier se calcule facilement à partir des singularités de ξS situées sur γ (qui est un cycle formé de liaisons) : on compte $-\frac{1}{2}$ pour chaque foyer ; $-\frac{1}{2}$ pour chaque variété instable (resp. stable) de selle positive (resp. négative) ; et $+\frac{1}{2}$ pour chaque variété stable (resp. instable) de selle positive (resp. négative).

Pour de plus amples détails sur les notions de base de géométrie de contact, et notamment sur la création et l’élimination de singularités par isotopie de S , on renvoie à [Gi].

Je remercie le rapporteur pour avoir relevé de nombreuses inexactitudes et confusions dans la première version de ce texte.

1. Structures normales sur le tore solide.

1.1. Pentés et chirurgie de Dehn.

Soit $T = D \times S^1 = \{(r \leq 1, \theta, z)\}$ un tore solide muni de coordonnées cylindriques. On note T_b le tore $\{r = b\}$ ($T_1 = \partial T$). Les deux courbes m_b et p_b de T_b d’équations respectives $r = b, z = 0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $r = b, \theta = 0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, orientées par $\partial/\partial\theta$ et $\partial/\partial z$, déterminent une base de $H_1(T_b, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[m_b] + \mathbb{R}[p_b]$. À tout feuilletage orienté non singulier et sans composante de Reeb de T_b , les cycles asymptotiques de Schwartzmann [Sc] permettent d’associer une direction (orientée) dans $H_1(T_b, \mathbb{R})$ et donc, compte tenu de la trivialisatation précédente, un angle dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ appelé la *pené* du feuilletage. Par exemple, la pené du feuilletage de T_b défini comme $(\{(r = b, z = c)\})_{c \in S^1}$ (et orienté comme m_b) vaut 0 et celle de $(\{(r = b, \theta = c)\})_{c \in S^1}$ (orienté comme p_b) vaut $\frac{1}{2}\pi$. La pené d’une courbe de classe $-[m_b] - 2[p_b]$ vaut $-\frac{1}{2}\pi - \arctan(\frac{1}{2})$.

Une structure de contact ξ sur T est dite *normale* si elle est tendue, si le feuilletage caractéristique ξT_1 est non singulier et sans composante de Reeb et si m_1 est transverse à ξ et d’autoenlacement -1 . Deux structures de contact normales sur T qui coïncident sur T_1 sont isotopes relativement à T_1 (voir [ML]). De plus, toute structure normale ξ sur T est isotope

relativement à T_1 à une structure qui, pour tout $b \in]0, 1]$, trace sur T_b un feuilletage non singulier, sans composante de Reeb et transverse à m_b . Toutes les structures de contact normales qu'on envisage par la suite possèdent cette propriété. Se donner un tore solide T ainsi qu'un feuilletage au bord sans singularité ni composante de Reeb, non parallèle au méridien, détermine une unique (classe d'isotopie de) structure normale sur T qui imprime ce feuilletage au bord. Pour un tore normal, la condition de contact impose à la fonction « pente de T_b » d'être une fonction décroissante de $b \in]0, 1]$.

Soient à présent une variété de contact (V, ξ) et $T \subset V$ un tore normal. À toute courbe fermée simple $\alpha \subset \partial T$, non isotope au méridien de T , on associe une chirurgie de la variété de contact (V, ξ) de la façon suivante : on excise le tore T de V pour recoller à $V \setminus \text{Int } T$ un tore solide T' , en stipulant que l'on recolle un méridien de T' sur α (c'est la chirurgie de Dehn associée), et on prolonge la structure $\xi|_{V \setminus \text{Int } T}$ sur T' par l'unique structure normale qui imprime $\xi \partial T$ sur $\partial T' \simeq \partial T$.

Quitte à coorienter différemment la structure ξ sur T , on peut toujours supposer que la pente de ξT_1 est dans $] - \pi, 0[$. Sous cette hypothèse, dans le cas où la pente de α est comprise entre 0 et la pente de ξT_1 dans $] - \pi, 0[$, on parle de chirurgie *admissible*.

Un cas particulier intéressant est celui où la pente de ξT_1 est $-\frac{1}{2}\pi$. Le feuilletage ξT_1 possède alors une orbite périodique δ . Dans cette situation, on peut vérifier que la chirurgie admissible de pente $-\frac{1}{4}\pi$ opérée sur T_1 conduit à la même variété de contact que celle obtenue par *chirurgie legendrienne d'indice -1* le long de la courbe legendrienne δ (voir [E12]).

Plus généralement, le théorème de Darboux assure que tout entrelacs Γ contenu dans une variété de contact (V, ξ) et transverse à ξ possède un voisinage normal. On peut ainsi parler de chirurgie admissible sur un entrelacs transverse.

THÉORÈME 1.1 (D. Gay [Ga]). — *Toute variété obtenue par chirurgie admissible sur un entrelacs transverse dans une variété de type contact est symplectiquement remplissable.*

On se propose d'exhiber un exemple de variété tendue qui devient vrillée après une chirurgie admissible sur un entrelacs.

THÉORÈME 1.2. — *Il existe une variété de contact universellement tendue (V, ζ) et un entrelacs $\Gamma \subset V$ transverse à ζ tels que les variétés obtenues à partir de (V, ζ) par certaines chirurgies de Dehn admissibles le long de Γ soient vrillées.*

L'exemple est un corps en anses de genre 2. Sa construction, apparemment peu naturelle, résulte d'une réponse positive à la question suivante. Étant donné une variété de contact (V, ξ) , un disque vrillé $D \subset V$ ainsi que deux courbes orientées $\gamma_1, \gamma_2 \subset V$, positivement transverses à ξ et qui intersectent D transversalement en un point avec le même signe, le germe de la structure ξ près de $D \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ est vrillé. Si U est un petit voisinage voisinage tubulaire de $D \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$, est-il possible d'obtenir $(U, \xi|_U)$ comme le produit d'une chirurgie admissible sur un petit voisinage T de $\gamma_1 \cup \gamma_2$ à partir d'une variété de contact tendue ?

Au lieu de partir d'un entrelacs à deux composantes, on peut obtenir le même résultat en considérant le voisinage U d'un disque vrillé D et d'une courbe transverse qui intersecte D transversalement en deux points avec un signe constant.

En ce qui concerne les chirurgies non admissibles, les exemples de variétés tendues (closes ou non) qui aboutissent à des variétés vrillées sont très simples à construire, et leur étude n'est donc pas pertinente.

Les exemples produits dans la démonstration du théorème 1.2 ne recouvrent pas toutes les chirurgies admissibles possibles sur l'entrelacs considéré. La question ouverte par cette étude est : étant donné un nœud (ou un entrelacs) transverse dans une variété de contact tendue et une trivialisations de son fibré normal, peut-on trouver des conditions portant sur l'indice de la chirurgie (dépendant éventuellement des invariants du nœud) qui assurent que la nouvelle variété est tendue ? Elle englobe le cas des chirurgies legendriennes d'indice -1 .

On constate par exemple que si l'entrelacs Γ considéré est contenu dans une boule (ouverte) $B \subset (V, \xi)$, alors toute chirurgie admissible sur Γ donne naissance à une variété (V', ξ') tendue. En effet, quitte à élargir la boule B , on peut supposer qu'elle contient le voisinage normal de Γ sur lequel on effectue la chirurgie. D'après un théorème d'Eliashberg [El13], l'espace \mathbb{R}^3 porte une unique structure de contact tendue positive ζ_0 à laquelle $\xi|_B$ est donc conjuguée. Comme (\mathbb{R}^3, ζ_0) est explicitement de type contact, c'est aussi le cas de $(B, \xi|_B)$. En particulier, l'image $(\widehat{B}, \widehat{\xi})$ de $(B, \xi|_B)$ par chirurgie admissible le long de Γ est une variété de contact tendue par combinaison du théorème 1.1 de D. Gay et du théorème d'Eliashberg et Gromov. De plus, par construction, (V', ξ') est obtenue par collage entre $(V \setminus B, \xi)$ et $(\widehat{B}, \widehat{\xi})$. Ce collage a lieu le long d'une sphère et, d'après [Co2], (V', ξ') est tendue.

1.2. Ajustement de feuilletages.

LEMME 1.3. — Soient (T, ξ) un tore normal et $a \in]0, 1[$ tel que la pente de ξT_a soit strictement supérieure à celle de ξT_1 et strictement inférieure à $-\frac{1}{2}\pi$ (toutes ces pentes étant dans $]-\pi, 0[$). Soient de plus p_a et p_1 deux parallèles transverses à ξ orientés dans le même sens et $\phi : p_1 \rightarrow p_a$ un difféomorphisme préservant l'orientation. Il existe un anneau C plongé dans $T \setminus \text{Int } T_a$, de bord $p_a \cup p_1$ et tel que toute feuille de ξC partant de $x \in p_1$ aboutisse à $\phi(x) \in p_a$ (en particulier, ξC est non singulier).

Démonstration. — Compte tenu des hypothèses précédentes, il est aisé, d'après [ML], de définir un système de coordonnées pour

$$T \setminus \text{Int } T_a = T^2 \times [a, 1] = \{(x, y, t)\}$$

dans lequel ξ a pour équation

$$\cos f(x, y, t) dx - \sin f(x, y, t) dy = 0,$$

avec $\frac{1}{2}\pi < f < \pi$, $p_u = \{(x = 0, t = u)\}$ pour $u = a, 1$, et où la condition « la pente de $\xi \partial T_a$ est strictement supérieure à la pente de $\xi \partial T_1$ » se traduit par le fait qu'il existe $\delta > 0$ et $c, t_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in [a + \delta, 1 - \delta], \quad f(x, y, t) = t_0 + ct.$$

On prend dans $T^2 \times [a, a + \delta]$ et $T^2 \times [1 - \delta, 1]$ les deux anneaux $p_a \times [a, a + \delta]$ et $p_1 \times [1 - \delta, 1]$ s'appuyant sur p_a et p_1 : leurs caractéristiques vont d'un bord à l'autre. Pour trouver C , on cherche à compléter ces anneaux sur $T^2 \times [a + \delta, 1 - \delta]$. Cette remarque montre qu'on peut se ramener au cas où, sur $T^2 \times [a, 1]$, la structure a pour équation

$$\cos h(t) dx - \sin h(t) dy = 0,$$

où h est un difféomorphisme croissant de $[a, 1]$ dans un sous-intervalle de $]\frac{1}{2}\pi, \pi[$. On se place dorénavant dans cette hypothèse.

On considère le revêtement cyclique

$$\pi : \mathbb{R} \times S^1 \times [a, 1] \longrightarrow T^2 \times [a, 1],$$

muni du rappel de ξ . On note $\ell : S^1 \rightarrow S^1$ le difféomorphisme tel que, pour tout $y \in S^1$,

$$\phi((0, y, 1)) = (0, \ell(y), a).$$

On note de plus

$$p : \mathbb{R} \times S^1 \times [a, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \times S^1$$

la projection le long de la troisième coordonnée.

Les projetées par p des courbes des feuilletages respectifs de $\mathbb{R} \times S^1 \times \{1\}$ et de $\mathbb{R} \times S^1 \times \{a\}$ passant respectivement par $(0, y, 1)$ et $(2n\pi, \ell(y), a)$ se coupent en un unique point situé, si $n \in \mathbb{N}$ est choisi assez grand, dans le secteur $2n\pi > y > 0$. On fixe un tel entier n . La réunion de ces points lorsque y parcourt S^1 forme une courbe connexe et lisse γ , qui découpe l’anneau

$$A = \{0 \leq y \leq 2n\pi\}$$

en deux sous-anneaux. On considère le feuilletage singulier F donné sur A par $p_*(\xi\mathbb{R} \times S^1 \times \{1\})$ en dessous de γ et par $p_*(\xi\mathbb{R} \times S^1 \times \{a\})$ au-dessus. Il est aisé d’approcher le feuilletage F — par lissage puis légère déformation — par un feuilletage F' avec les propriétés suivantes :

- a) F' est lisse et tangent à F au bord de A ;
- b) en tout point de A , la tangente à F' est comprise dans le cône formé par la tangente à $p_*(\xi\mathbb{R} \times S^1 \times \{1\})$ et à $p_*(\xi\mathbb{R} \times S^1 \times \{a\})$;
- c) dans les coordonnées (x, y) , l’équation de la tangente à F' est $\cos g(x, y) dx - \sin g(x, y) dy = 0$, la dérivée de g le long de chaque feuille étant strictement positive;
- d) toute courbe $\{g = C^{te}\}$ est transverse au champ de vecteurs ∂_x ;
- e) toute feuille de F' joint $(0, y)$ à $(2n\pi, \ell(y))$.

L’anneau $C' = \{(x, y, h^{-1}(g(x, y)))\}$, qui est le relevé legendrien du feuilletage F' , est transverse au feuilletage $(\{t = c\})_{c \in [a, 1]}$ (propriété c)). Comme de plus il est transverse à ∂_x (propriété d)), son projeté $C = \pi(C')$ est un anneau plongé qui possède les propriétés requises (d’après a), b) et e)). □

En s’inspirant des arguments de [ML], on peut montrer également le lemme bien connu suivant :

LEMME 1.4. — *Soit ξ une structure normale sur T telle que la pente θ de ξT_1 appartienne à $] - \pi, 0[$. Pour tout $\theta' \in]\theta, 0[$ et tout feuilletage lisse F sur le tore T^2 sans singularité ni composante de Reeb, il existe un paramétrage de T tel que $\xi T_{1/2}$ soit de pente θ' et conjugué à F .*

2. Feuilletages caractéristiques et germes de structures de contact.

Toutes les selles qu'on envisage par la suite sont supposées de divergence non nulle.

2.1. Autour d'un feuilletage de l'anneau.

Soient $A_0 \simeq S^1 \times [0, 1]$ un anneau et F_{A_0} un feuilletage orienté de A_0 , avec les propriétés suivantes :

- F_{A_0} possède trois singularités, dont un foyer positif radial situé dans $\text{Int } A_0$ et deux selles situées sur $S^1 \times \{1\}$ (vu comme feuilletage caractéristique d'une structure de contact, on précise que ces deux selles sont de signes opposés) ;
- $S^1 \times \{1\}$ est un cycle de F_{A_0} formé des deux séparatrices instables de la selle négative, qui sont également les deux séparatrices stables de la selle positive ;
- F_{A_0} ne contient pas d'orbite périodique ;
- F_{A_0} est transverse (sortant) à $S^1 \times \{0\}$.

Les connexions entre selles le long de $S^1 \times \{1\}$ sont rétrogrades : le feuilletage F_{A_0} n'est pas de type Morse-Smale ; vu comme feuilletage caractéristique tracé par une structure de contact ξ , l'anneau A_0 n'est pas *convexe* (voir [Gil]).

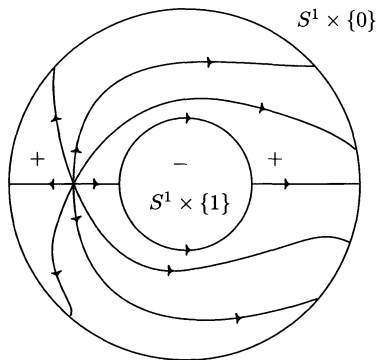


Figure 1. Le feuilletage de A_0

LEMME 2.1. — Soit ξ une structure normale sur T telle que la pente de $\xi_{T_{1/2}}$ vale $-\frac{3}{4}\pi$. Soient α une feuille fermée de $\xi_{T_{1/2}}$ et β une courbe

fermée simple dans T_1 , isotope à p_1 dans T_1 et transverse à ξ . Il existe un anneau $A \subset T$ de bord $\alpha \cup \beta$ dont le feuilletage caractéristique est conjugué à F_{A_0} .

Démonstration. — Comme ξ est normale sur T , (T, ξ) est conjuguée, d'après [ML], à

$$(\{r \leq 1\}, \zeta = \ker(dz + f(r, \theta, z)^2 d\theta)),$$

avec $\partial f / \partial r > 0$ et $f(\{r = 0\}) = 0$. Dans de telles coordonnées bien choisies, les courbes α et β intersectent chaque disque $\{z = c\}$ en exactement un point, respectivement x_α^c et x_β^c , et $T_{1/2}$ reste donné par l'équation $\{r = \frac{1}{2}\}$. Lorsque c parcourt le cercle, le point x_α^c fait un tour de plus que x_β^c autour de l'origine $r = 0$.

On remarque que l'existence de l'anneau A ne dépend pas du choix de β à isotopie près dans T_1 parmi les courbes transverse à ξ . On va ici prouver l'existence d'un tel anneau pour une courbe β''' isotope à β .

Il existe une isotopie de β en une courbe β' parmi les courbes transverses de T_1 telle qu'en dehors d'une valeur de c , x_α^c et $x_{\beta'}^c$, ne sont pas sur la même feuille de $\zeta\{z = c\}$. En effet, quitte à reparamétriser T , il existe $u \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que ζT_u soit un feuilletage en cercles de pente $-\frac{1}{2}\pi$. On considère alors l'anneau ($\subset \{r \geq u\}$) formé des caractéristiques de $\zeta\{z = c\}$ issues d'une feuille γ de ζT_u . D'après la condition de contact, son feuilletage caractéristique est constitué d'une ligne de singularités (γ), de laquelle sont issues des feuilles non singulières qui partent vers le bord extérieur. En particulier, il rencontre $T_{1/2}$ le long d'une courbe transverse à ζ et est donc intersecté par α en exactement un point. La courbe β' que cet anneau borde dans T_1 est isotope à β dans T_1 parmi les courbes transverses à ζ et possède la propriété recherchée.

On relie alors x_α^c et $x_{\beta'}^c$ par une famille lisse de segments $I_c \subset \{z = c\}$ de sorte que I_c soit transverse à $\zeta\{z = u\}$, sauf pour deux valeurs c_0 et c_1 de c , pour lesquelles I_c est tangent à ξ . On prend pour A' l'anneau formé de la réunion des segments I_c .

Toutes les singularités du feuilletage de A' se situent sur les deux segments I_{c_0} et I_{c_1} . On obtient ainsi deux singularités sur α qui sont des selles liées comme dans l'énoncé du lemme. En effet, compte tenu du sens de rotation de $x_{\beta'}^c$ par rapport à x_α^c , $\text{tb}(\alpha, A') = +1$ et, en suivant α , on traverse donc la singularité positive (resp. négative) le long de séparatrices stables (resp. instables), comme signalé dans la présentation.

On suppose que le point $(r = 0, z = c_0)$ appartient à I_{c_0} . On modifie l'anneau A' près de I_{c_1} en un anneau A'' pour que, hors d'un voisinage de α , le plan tangent à A'' près de I_{c_1} soit C^∞ -proche du plan tangent au disque méridien $\{z = c_1\}$. Pour ce faire, on imprime une vitesse de rotation très grande aux segments I_c près de I_{c_1} . Il est à noter que les orientations sont telles que ceci peut être fait en laissant la nouvelle courbe β'' bordée par le nouvel anneau A'' dans T_1 transverse à ζ . Le feuilletage $\zeta A''$ est non singulier dans l'intérieur de I_{c_1} .

On effectue la même opération près de $\{z = c_0\}$, de sorte que le feuilletage de l'intérieur du nouvel anneau A''' près de I_{c_0} se confonde avec celui de $\{z = c_0\}$ et donc que l'intérieur de I_{c_0} porte, comme $\zeta\{z = c_0\}$, un foyer (que l'on peut toujours rendre *a posteriori* radial par une légère déformation) et pas d'autre singularité. Le bord extérieur de A''' est noté β''' .

On observe de plus que le plan tangent à A''' en $x_{\beta'''}^{c_0}$ est «coincé» entre ζ et le plan tangent au disque $\{z = c_0\}$, ce qui implique que l'unique singularité de $\zeta \text{Int } A'''$ est située sur I_{c_0} entre $x_{\beta'''}^{c_0}$ et le foyer de $\zeta\{z = c_0\}$. \square

Voici la réciproque de ce résultat.

LEMME 2.2. — Soient A un anneau et ξ une structure de contact définie sur un voisinage U de A qui trace sur A un feuilletage caractéristique conjugué à F_{A_0} . On note α et β les composantes de ∂A respectivement tangente et transverse à ξ . Il existe un tore solide $T^0 \subset U$ normal pour ξ qui contient A , et tel que ∂T^0 rencontre A transversalement le long de β . De plus, dans la base de $H_1(\partial T^0, \mathbb{R})$ donnée par un méridien et β , la pente de $\xi \partial T^0$ est inférieure à $-\frac{3}{4}\pi$.

Démonstration. — On réalise $(A, \xi A)$ comme sous-anneau d'un tore solide normal (T, ζ) , dans les conditions du lemme 2.1. Sous ces hypothèses, quitte à restreindre la taille de U , on obtient (U, ξ) comme sous-variété de contact de (T, ζ) . L'anneau A coupe chaque disque $\{z = c\}$ le long d'un segment connexe transverse au feuilletage $\zeta\{z = c\}$, sauf pour les deux valeurs c_0 et c_1 où $A \cap \{z = c\}$ est tangent à ζ . Comme dans la démonstration du lemme 2.1, le segment $A \cap \{z = c_0\}$ contient la singularité du feuilletage $\zeta\{z = c_0\}$.

Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $c \in [c_0 + \epsilon, c_0 - \epsilon]$, l'intérieur de $U \cap \{z = c\}$ contienne la feuille (notée f_c par la suite quelle que soit la

valeur de $c \in S^1$) reliant le foyer de $\zeta\{z = c\}$ au point $x_\alpha^c = \alpha \cap \{z = c\}$. On note, pour $c \in [c_0 + \epsilon, c_0 - \epsilon]$, U_c un disque autour de cette feuille (dépendant continûment de c), inclus dans $U \cap \{z = c\}$ et dont le bord est transverse à $\zeta\{z = c\}$. On obtient ainsi que $\text{Int } U_{c_0}$ contient le foyer de ζA .

Pour tout $\epsilon' > 0$ assez petit, on note $\alpha_{\epsilon'}$ la courbe de A obtenue comme le bord ($\subset \text{Int } A$) d'un ϵ' -voisinage régulier du graphe G des liaisons entre singularités de ζA . Pour le choix d'une métrique convenable, elle est transverse à ζ ainsi qu'à chaque disque $\{z = c\}$, isotope à α et rencontre le disque $\{z = c\}$ dans la composante de $\{z = c\} \cap U$ qui contient x_α^c . On rappelle que le foyer de ζA est situé sur $I_{c_0} \setminus f_{c_0}$, et donc que $\alpha_{\epsilon'}$ intersecte $\{z = c_0\}$ dans $I_{c_0} \setminus f_{c_0}$. Par la suite, on sera amené à jouer sur la taille de ϵ' assez petit.

On note, pour $c \in S^1 \setminus]c_0 + \epsilon, c_0 - \epsilon[$, U'_c un disque (dépendant continûment de c) inclus dans $U \cap \{z = c\}$ et qui contient x_α^c dans son intérieur. On impose que $U'_{c_0 \pm \epsilon} \subset U_{c_0 \pm \epsilon}$. On note de plus f'_c un segment inclus dans $f_c \cap U'_c$, compris entre x_α^c et le foyer de $\zeta\{z = c\}$ et qui contient x_α^c .

Il existe (voir [Gil]) une isotopie de T dont le support est inclus dans

$$\left(\bigcup_{c \in S^1 \setminus]c_0 + \epsilon, c_0 - \epsilon[} U'_c \right) \cup \left(\bigcup_{c \in [c_0 + \epsilon, c_0 - \epsilon]} U_c \right)$$

et évite A , fixant chaque f_c , et qui fait apparaître, le long de f'_c sur le feuilletage de l'image D'_c de U'_c , deux singularités positives (du même signe que le foyer de $\zeta\{z = c\}$) en position d'élimination. Si on note D_c l'image de U_c par cette isotopie, on peut également imposer que $D_c = U_c$ pour c proche de c_0 , et que le feuilletage de D_c près de $c_0 \pm \epsilon$ présente, en plus du foyer d'origine qui reste inchangé, le film d'une élimination d'une selle avec un foyer le long de f'_c .

Pour ϵ' assez petit, la courbe $\alpha_{\epsilon'}$ est incluse dans le tore réunion des disques U_c et U'_c et pour tout $c \in S^1 \setminus]c_0 - \epsilon, c_0 + \epsilon[$, $\alpha_{\epsilon'} \cap D'_c$ est sur une feuille issue du foyer de $\zeta D'_c$. De plus, la liaison, dans $\zeta((\{z = c\} \setminus U'_c) \cup D'_c)$ (qui est le feuilletage de l'image de $\{z = c\}$ par l'isotopie), entre tout point du segment $[\alpha_{\epsilon'} \cap D'_c, x_\alpha^c] \subset A \cap \{z = c\}$ et le nouveau foyer est incluse dans $\text{Int } D'_c$. En particulier, pour tout $c \in S^1 \setminus]c_0 + \epsilon, c_0 - \epsilon[$ il existe un disque B'_c (dépendant continûment de c) inclus dans D'_c , de bord transverse à $\zeta D'_c$ et tel que A rencontre $\partial B'_c$ en $\alpha_{\epsilon'} \cap \{z = c\}$.

On définit également une famille continue de disques $B_c \subset D_c$, $c \in [c_0 + \epsilon, c_0 - \epsilon]$, dont les bords sont transverses à ζD_c , rencontrent $A \cap D_c$

en $\alpha_{\epsilon'} \cap D_c$ (il est ici essentiel que $\alpha_{\epsilon'}$ intersecte $\{z = c_0\}$ dans $I_{c_0} \setminus f_{c_0}$) et tels que $B'_{c_0 \pm \epsilon} \subset B_{c_0 \pm \epsilon}$.

Le feuilletage des disques $B_{c_0 \pm \epsilon}$ contient en particulier les trois singularités de $\zeta D_{c_0 \pm \epsilon}$, dont l'une est entourée par $B'_{c_0 \pm \epsilon}$.

Le tore T^1 obtenu en prenant la réunion des disques B_c et B'_c rencontre A transversalement le long de $\alpha_{\epsilon'}$. La courbe α rencontre chaque disque B_c et B'_c transversalement en un point qui est situé hors du graphe des liaisons des singularités.

Le feuilletage $\zeta \partial T^1$ possède deux paires de singularités foyer-selle en position d'élimination, contenues, avec leurs liaisons respectives, dans $B_{c_0 \pm \epsilon} \setminus B'_{c_0 \pm \epsilon}$. Le lemme d'élimination de E. Giroux [Gi1] permet, par une isotopie à support inclus dans $\text{Int } B_{c_0 \pm \epsilon} \setminus B'_{c_0 \pm \epsilon}$ (évitant A) d'éliminer ces singularités du bord du nouveau tore T^2 . Après lissage de T^2 (le long de $\partial B_{c_0 \pm \epsilon}$ et $\partial B'_{c_0 \pm \epsilon}$ qui sont des courbes transverses), on obtient un tore T^3 normal (le feuilletage de ∂T^3 est non singulier, et si $c \notin [c_0 - \epsilon, c_0 + \epsilon]$, le disque B'_c est un disque méridien de T^3 , de bord transverse à ζ et d'autoenlacement -1), qui contient α et rencontre transversalement A le long de $\alpha_{\epsilon'}$.

On observe que T^3 est feuilleté par des disques méridiens à feuilletages radiaux (obtenus à partir des disques B'_c et des disques B_c auxquels on applique une isotopie d'élimination qui prolonge celle déjà effectuée sur $B_{c_0 \pm \epsilon}$) que α rencontre en un unique point : pour une paramétrisation convenable de T^3 , un tore intermédiaire $T^3_{1/2}$ porte α comme caractéristique. En particulier, la pente de $\zeta \partial T^3$ est inférieure à celle de $\zeta T^3_{1/2}$, donnée par α , qui est $-\frac{3}{4}\pi$ (car $\text{tb}(\alpha, A) = 1$ et la classe de α dans $H_1(T^3_{1/2}, \mathbb{R})$ est donc $-[m_{1/2}] - [p_{1/2}]$). De plus, par construction, la courbe $A \cap \partial T^3$ est $\alpha_{\epsilon'}$ et est donc transverse à ζ . Ainsi, toute feuille du feuilletage caractéristique de l'anneau $A \setminus \text{Int } T^3$ joint un bord à l'autre. Le tore T^0 est alors obtenu en adjoignant à T^3 un petit voisinage régulier de $A \setminus \text{Int } T^3$. Il est automatiquement normal et la pente de $\zeta \partial T^0$ est inférieure à celle de $\zeta \partial T^3$, compte tenu de la décroissance de la fonction pente. \square

2.2. Une liste de modèles universellement tendus.

L'objectif de cette section est la preuve du corollaire 2.4 qui fournit une liste de modèles de variétés de contact universellement tendues.

Soit S la surface obtenue en retirant quatre disques ouverts disjoints à la sphère S^2 . On note $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ et γ_3 les composantes de ∂S . Soit F_S un

feuilletage de S avec les propriétés suivantes :

- F_S possède deux orbites périodiques (et seulement deux), attractives, qui sont γ_0 et γ_1 ;
- F_S est transverse (rentrant) à γ_2 et γ_3 ;
- F_S comporte deux singularités qui sont deux selles ; les séparatrices stables de chacune provenant de γ_2 et γ_3 et les séparatrices instables de γ_0 et γ_1 (voir figure 2).

On s'intéresse au germe de structure de contact induit par F_S au voisinage de S . Pour cela, on précise que les deux selles de F_S sont des selles positives.

On considère la surface S' , munie du feuilletage induit $F_{S'}$, obtenue par collage de deux copies de (A_0, F_{A_0}) (numérotées respectivement 1 et 2) à (S, F_S) le long de, respectivement, γ_2 et γ_3 (figure 2).

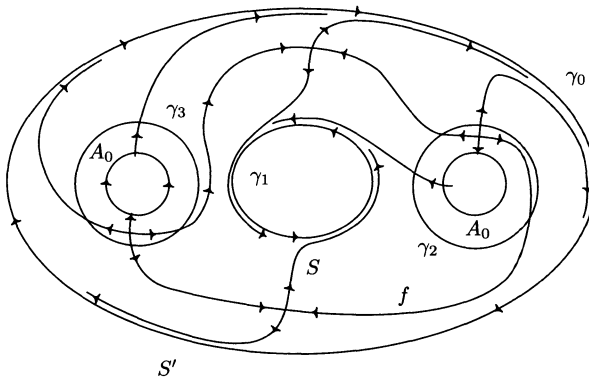


Figure 2. Le feuilletage de S'

LEMME 2.3. — *Le germe de structure de contact ξ donné par le feuilletage $F_{S'}$ est universellement tendu.*

Démonstration. — Par construction, le feuilletage $F_{S'}$ possède un cycle (non contractile) f de quatre singularités positives. On se donne un petit anneau C qui rencontre S' transversalement le long de f et dont le feuilletage ξC , transverse à ∂C , possède une orbite périodique non dégénérée (f) sur laquelle toute feuille vient s'accumuler (ou de laquelle toute feuille est issue) : pour obtenir un tel anneau, comme les singularités le long de f sont toutes positives, on part d'un anneau C' qui rencontre

transversalement S' le long de f et tel que ξ soit transverse à C' le long de f . Le cycle f est alors une orbite périodique de $\xi C'$, qu'une isotopie C^∞ -petite de C' suffit à rendre non dégénérée (d'après [Gi2]). On prend alors pour C un voisinage régulier de f dans C' .

Sous ces hypothèses il suffit, pour montrer que le germe ξ est tendu, d'après le théorème 0.1, de montrer que les germes donnés sur les deux composantes de la surface compacte obtenue en découpant S' le long de f sont universellement tendus.

Suivant la disposition de f dans $F_{S'}$, trois types de feuilletages peuvent apparaître sur une composante S_1 de ce découpage.

— Si S_1 est un anneau, son feuilletage est non singulier dans l'intérieur, une de ses composantes de bord est f et l'autre est une orbite périodique de son feuilletage. Un tel anneau peut être réalisé par déformation C^0 -petite d'un anneau non singulier dont les deux composantes de bord sont des orbites périodiques et dont les feuilles spiralent d'un bord vers l'autre (voir par exemple [Gi2]). Il est bien connu que le germe de structure de contact au voisinage d'un tel anneau, et donc de S_1 , est universellement tendu.

— Si S_1 est une sphère privée de trois disques, son feuilletage est non singulier dans l'intérieur. Il est constitué d'une orbite périodique sur une composante de bord, de f sur une autre et enfin la troisième g est constituée des liaisons entre deux selles de signes opposés. De plus, la séparatrice stable de la selle négative de g provient du foyer positif de f . On note ℓ cette liaison. Il est alors aisé de trouver un disque à bord transverse d'autoenlacement -1 qui rencontre transversalement S_1 selon ℓ : pour ce faire, comme ξ est transverse à S_1 dans l'intérieur de ℓ , on part d'un disque D rencontrant transversalement S_1 selon ℓ , et tel que ξ coïncide avec $T_\ell D$ en exactement un point. Ce point est alors une singularité de ξD qu'une isotopie C^0 petite de D fixant ℓ suffit à rendre d'indice 1. On obtient le disque recherché comme voisinage adapté de ℓ dans D .

D'après le théorème 0.1, pour montrer que le germe de structure au voisinage de S_1 est universellement tendu, il suffit de prouver que le germe de structure près de l'anneau obtenu en découpant S_1 le long de ℓ est universellement tendu. Ceci est fait de la même manière que précédemment en remarquant que le feuilletage de cet anneau est non singulier à l'intérieur — qui ne contient pas par ailleurs d'orbite périodique — et que le long de la composante de bord provenant de f et g , la structure de contact «ne tourne pas» par rapport au plan tangent de l'anneau : l'invariant de Thurston-Bennequin relatif est nul et il est aisé d'obtenir cet

anneau par perturbation C^0 -petite d'un anneau dont les deux composantes de bord sont des orbites périodiques et dont les feuilles à l'intérieur spiralent d'un bord à l'autre (voir par exemple [Gi2]).

— Si S_1 est une sphère privée de quatre disques, une composante de ∂S_1 est une orbite périodique, deux sont des liaisons entre selles de signes opposés et la dernière est f . Chaque séparatrice stable des deux selles négatives provient d'un foyer positif de f (les deux distincts). On procède alors comme dans le cas précédent en découpant S_1 le long de ces deux séparatrices, pour conclure de la même manière que le germe de structure au voisinage de S_1 est universellement tendu. \square

On considère à présent un voisinage U de S' et une structure de contact universellement tendue ξ_U sur U telle que $\xi_U S' = F_{S'}$. On se donne alors, pour $i = 1, 2$, un voisinage T^i de la copie numéro i de (A_0, F_{A_0}) dans U , fournit par le lemme 2.2 : T^i est un tore normal; son bord intersecte transversalement S' selon γ_{i+1} ; si on choisit γ_{i+1} comme parallèle de ∂T^i , la pente de $\xi_U \partial T^i$ (vue comme élément de $] -\pi, 0[$) est inférieure à $-\frac{3}{4}\pi$.

On déduit aisément de la conjonction du lemme d'ajustement 1.3 et du lemme 1.4, que pour tout feuilletage F sur le tore et pour tout $\theta \in] -\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{2}\pi[$, il existe un tore normal $\bar{T}^i \subset \text{Int } T^i$ tel que le feuilletage de $\partial \bar{T}^i$ soit conjugué à F et de pente θ . Si γ'_i désigne un parallèle sur $\partial \bar{T}^i$ (transverse à ξ' et déduit de γ_{i+1}), on obtient de plus que pour tout difféomorphisme $\phi : \gamma_{i+1} \rightarrow \gamma'_i$ préservant l'orientation, il existe un anneau $C_i \subset T^i \setminus \text{Int } \bar{T}^i$ s'appuyant sur γ_{i+1} et γ'_i , dont le feuilletage caractéristique est non singulier, toute feuille joignant $x \in \gamma_{i+1}$ à $\phi(x) \in \gamma'_i$. Le corollaire suivant résulte immédiatement de cette remarque et de l'unicité des structures normales à feuilletage au bord prescrit.

COROLLAIRE 2.4. — Si \bar{T}^1 et \bar{T}^2 sont deux tores normaux collés à S le long de γ_2 et γ_3 avec au bord un feuilletage de pente dans $] -\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{2}\pi[$ (toujours dans une trivialisations dont le parallèle est γ_{i+1}), alors le germe de structure donné au voisinage de $S \cup \bar{T}^1 \cup \bar{T}^2$ se plonge dans tout voisinage de $S \cup T^1 \cup T^2 \subset (U, \xi_U)$ (par un plongement π_1 -injectif) et est donc universellement tendu.

3. Construction de l'exemple.

Soit S_0 la surface obtenue en retirant trois disques ouverts disjoints

à la sphère S^2 . On note a_0 , a_1 et a_2 les composantes de ∂S_0 . Soit F_{S_0} un feuilletage de S_0 avec les propriétés suivantes :

- F_{S_0} comporte une orbite périodique (et une seule) qui est a_0 ;
- F_{S_0} est transverse (rentrant) à a_1 et a_2 ;
- F_{S_0} comporte une selle dont les séparatrices stables proviennent l'une de a_1 , l'autre de a_2 , et les séparatrices instables de a_0 .

On s'intéresse au germe de structure de contact qui trace F_{S_0} sur S_0 avec la précision que la selle est positive.

Soit ξ un tel germe. On restreint ξ à un voisinage produit $S_0 \times [-\epsilon, \epsilon]$ de $S_0 \simeq S_0 \times \{0\}$, avec ξ transverse à $a_i \times \{t\}$, $i = 1, 2$, $t \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Soit ξ' une structure normale sur le tore solide T , tel que la pente de $\xi' T_1$ appartienne à $] -\frac{1}{2}\pi - \arctan(\frac{1}{2}), -\frac{1}{2}\pi[$. On se donne un parallèle p_1 de T_1 (qui participe à la définition de la pente, et dont la classe d'isotopie a été fixée une fois pour toutes) transverse à ξ et un petit anneau A_1 , voisinage tubulaire régulier de p_1 dans T_1 .

On note (V, ζ) la variété de contact obtenue par collage de deux copies de (T, ξ') à $(S_0 \times [-\epsilon, \epsilon], \xi)$ le long de, respectivement, A_1 et $a_1 \times [-\epsilon, \epsilon]$, et A_1 et $a_2 \times [-\epsilon, \epsilon]$.

Remarque 3.1. — Compte tenu des orientations données sur chaque composante par la présence des structures de contact, il y a, à isotopie près, une seule façon de recoller de manière compatible avec les structures.

LEMME 3.2. — *La variété (V, ζ) est universellement tendue.*

Démonstration. — On considère $(\widehat{V}, \widehat{\zeta})$, le revêtement de degré 2 de (V, ζ) dans lequel a_0 se relève en deux courbes disjointes et les relevés de a_1 et a_2 sont connexes. Si \widehat{S}_0 désigne le relevé de S_0 , on obtient que $(\widehat{A}_0, \widehat{\zeta}_{\widehat{A}_0})$ est conjugué à (S, F_S) . Chaque copie de (T', ξ') se relève dans V' en un tore normal $(\widehat{T}', \widehat{\xi}')$, et la pente du feuilletage caractéristique du bord (dans la base obtenue en relevant celle de T') est comprise entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $-\frac{3}{4}\pi$. $(\widehat{V}, \widehat{\zeta})$ est donc universellement tendue d'après le corollaire 2.4. C'est aussi le cas de (V, ζ) . □

Pour conclure cette étude, et prouver le théorème 1.2, il suffit de remarquer qu'en opérant la chirurgie admissible, donnée par les deux courbes a_1 et a_2 , sur les deux copies de (T, ξ') dans V , dans la nouvelle

variété, a_1 et a_2 bordent des disques qui permettent de compléter S_0 en un disque plongé de bord a_0 , lequel est par conséquent vrillé.

BIBLIOGRAPHIE

- [Co1] V. COLIN, Chirurgies d'indice 1 et isotopies de sphères dans les variétés de contact tendues, C. R. Acad. Sci. Paris, 324, série 1 (1997), 659–663.
- [Co2] V. COLIN, Recollement de variétés de contact tendues, Bull. Soc. Math. France, 127 (1999), 101–127.
- [El1] Y. ELIASHBERG, Filling by holomorphic discs and its applications, London Math. Soc. Lect. Notes Ser., 151 (1991), 45–67.
- [El2] Y. ELIASHBERG, Contact 3-manifolds, twenty years since Jean Martinet's work, Ann. Inst. Fourier, 42-1 (1992), 165–192.
- [El3] Y. ELIASHBERG, Legendrian and transversal knots in tight contact manifolds, Topological methods in Modern Mathematics, Publish or Perish, 1993.
- [ET] Y. ELIASHBERG, W. THURSTON, Confoliations, Univ. Lect. Ser., vol. 13 (1998).
- [Ga] D. GAY, Symplectic 4–dimensional 2–handles and contact surgery along transverse knots, Ph. D. de l'Université de Berkeley, 1999.
- [Gi1] E. GIROUX, Convexité en topologie de contact, Comment. Math. Helvetici, 66 (1991), 18–33.
- [Gi2] E. GIROUX, Topologie de contact en dimension 3, Sém. Bourbaki, 760 (1992–1993), 1–27.
- [ML] S. MAKAR-LIMANOV, Tight contact structures on solid tori, Trans. Amer. Math. Soc., 350 (1998), 1013–1044, CMP 96:16.
- [Sc] S. SCHWARTZMANN, Asymptotic cycles, Ann. of Math., 66-2 (1957), 270–284.

Manuscrit reçu le 16 mai 2000,
révisé le 8 février 2001,
accepté le 27 février 2001.

Vincent COLIN,
Université de Nantes
Département de Mathématiques
UMR 6629 du CNRS
2 rue de la Houssinière
BP 92208, 44322 Nantes cedex 3 (France).
Vincent.Colin@math.univ-nantes.fr