



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Frédéric BOSIO

Variétés complexes compactes : une généralisation de la construction de Meersseman et López de Medrano-Verjovsky

Tome 51, n° 5 (2001), p. 1259-1298.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_5_1259_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

VARIÉTÉS COMPLEXES COMPACTES : UNE GÉNÉRALISATION DE LA CONSTRUCTION DE MEERSSEMAN ET LÓPEZ DE MEDRANO-VERJOVSKY

par Frédéric BOSIO

Introduction.

Il existe de nombreuses manières de construire des variétés complexes compactes. L'une des principales est d'obtenir nos variétés comme espaces d'orbites d'une action holomorphe d'un groupe complexe G sur une variété complexe M . Les hypothèses les plus simples pour assurer que l'espace des orbites soit une variété complexe compacte est de demander que l'action soit libre, proprement discontinue et cocompacte.

Par exemple, si le groupe qui agit est discret, l'action nous donne un revêtement de M sur l'espace des orbites. Citons-en quelques exemples importants :

- Les variétés de Hopf [Ho]. Les plus simples sont des variétés obtenues comme quotients de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ par une action de \mathbb{Z} par homothéties. Historiquement, ce furent les premières variétés connues qui n'étaient pas des sous-variétés d'un espace projectif complexe. On peut également les généraliser en faisant agir \mathbb{Z} différemment ou en faisant agir des sur-groupes d'indice fini de \mathbb{Z} [Hae].

- Les variétés parallélisables (voir par exemple [Akh], [Wi]). Ce sont les variétés dont le fibré tangent est holomorphiquement trivial. Une telle variété possède nécessairement un groupe de Lie complexe comme

Mots-clés : Variétés complexes compactes – Groupes de Lie abéliens complexes – Combinatoire sur les ensembles finis.

Classification math. : 32Q99 – 32M05 – 05A05.

revêtement universel, et l'action du groupe fondamental est faite de translations dans ce groupe de Lie. Les exemples les plus simples et les plus importants de ces variétés sont les tores complexes, quotients de \mathbb{C}^n par un réseau cocompact.

- Les surfaces de Inoue [Ino]. Ce sont des variétés qui sont obtenues comme le quotient de $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ (où \mathbb{H} est le demi-plan supérieur de \mathbb{C}) par certains groupes d'applications affines. Ces variétés sont importantes dans la théorie des surfaces de classe VII, une classe encore assez mal connue de surfaces complexes.

Néanmoins, l'intérêt de cette construction ne se limite nullement aux actions des groupes discrets. Par exemple, les espaces projectifs complexes sont souvent construits comme le quotient de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ par l'action naturelle de \mathbb{C}^* par homothéties. Plus généralement, les espaces homogènes complexes peuvent être vus comme des quotients de groupes de Lie par l'action par translations de certains sous-groupes.

Dans [LDMV], Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky ont construit certaines variétés compactes comme espaces d'orbites d'actions linéaires de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ sur le complémentaire dans \mathbb{C}^n de certains sous-espaces bien choisis, utilisant les résultats de [CKP] sur les feuilletages définis sur \mathbb{C}^n par les actions linéaires de \mathbb{C} . Ils montrent que les variétés qu'ils construisent englobent certaines structures connues comme par exemple le cas linéaire des variétés de Hopf généralisées par Haefliger [Hae] ou le cas linéaire des variétés de Calabi-Eckman [CE] généralisées par Loeb et Nicolau [LN1] et contiennent également de nouvelles structures.

Dans sa thèse [Me] (ou [Me']), Laurent Meersseman a généralisé leur construction à des actions de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ avec m entier naturel non nul quelconque. Il donne également les principales propriétés géométriques des variétés qu'il construit, généralisant à ses variétés certains résultats de [LDMV] ou de [LN2], mais en montre aussi un certain nombre de nouvelles.

Le but de notre article est d'une part de généraliser la construction de Meersseman, d'autre part de mettre l'accent sur le caractère combinatoire autant que géométrique de bien des aspects de la théorie des variétés qu'il étudie. Étant donné une action linéaire diagonale de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ sur \mathbb{C}^n , nous cherchons toutes les combinaisons possibles de sous-espaces de \mathbb{C}^n sur le complémentaire desquelles l'ensemble des orbites de l'action est une variété complexe compacte. Nous obtenons alors le théorème suivant :

THÉORÈME. — Soient $m \geq 1$ et $n \geq 2m + 1$ deux entiers. Soient $\mathcal{E}_{m,n}$ un ensemble (non vide) de parties à $2m + 1$ éléments de $\{1, \dots, n\}$, ℓ_1, \dots, ℓ_n des formes \mathbb{C} -linéaires sur \mathbb{C}^m telles que l'ensemble des formes correspondant à un élément de $\mathcal{E}_{m,n}$ soit un repère affine de $(\mathbb{C}^m)^*$ et appelons S l'ensemble des éléments de \mathbb{C}^n dont l'ensemble des coordonnées non nulles contient un élément de $\mathcal{E}_{m,n}$. Alors, l'ensemble des orbites de l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ sur S donnée par

$$(Z, w) \cdot (z_1, \dots, z_n) = (we^{\ell_1(Z)} z_1, \dots, we^{\ell_n(Z)} z_n)$$

est une variété complexe compacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- Pour deux éléments J_1, J_2 de $\mathcal{E}_{m,n}$, les enveloppes convexes dans $(\mathbb{C}^m)^*$ des $\ell_j, j \in J_1$ et des $\ell_j, j \in J_2$ sont d'intérieurs non disjoints.
- Pour toute partie J de $\mathcal{E}_{m,n}$ et tout élément k de $\{1, \dots, n\}$, il existe un élément k' de J tel que $(J \setminus \{k'\}) \cup \{k\}$ soit aussi dans $\mathcal{E}_{m,n}$.

NB : Pour alléger le texte, et du fait qu'aucune confusion ne me semble possible, le mot de coordonnée pour un élément $z = (z_1, \dots, z_n)$ de \mathbb{C}^n pourra, suivant le contexte, désigner aussi bien le nombre complexe z_k que, comme dans le théorème ci-dessus, l'élément k de $\{1, \dots, n\}$ correspondant.

En corollaire, nous avons que si la condition du théorème est vérifiée, l'ensemble $\mathcal{E}_{m,n}$ possède la propriété combinatoire suivante : *pour toute partie J de $\mathcal{E}_{m,n}$ et tout élément k de $\{1, \dots, n\}$, il existe un élément k' de J et un seul tel que $(J \setminus \{k'\}) \cup \{k\}$ soit aussi dans $\mathcal{E}_{m,n}$.*

Puis nous donnons quelques propriétés géométriques des variétés que nous avons construites, généralisant ces mêmes propriétés dans le cas des variétés de Meersseman, notamment le fait que les variétés que nous construisons ne sont pas des variétés admettant une structure symplectique, sauf dans les cas des tores complexes. Le fait que les principales propriétés géométriques des variétés de Meersseman soient aussi vérifiées par celles que nous construisons illustre bien à quel point notre généralisation est naturelle. Nous mettrons aussi en évidence l'existence d'une variété topologique (non différentielle, mais lissable) \widehat{M}'_1 , plongée dans S et définie de façon combinatoire, qui possède des propriétés analogues à la variété M_1 de [Me] (en particulier, elle est naturellement homéomorphe à l'espace des orbites de l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^*_+$).

Ensuite, nous traitons le cas particulier $m = 1$. Dans ce cas,

nous prouvons, à partir de l'étude des ensembles vérifiant la propriété combinatoire citée plus haut, le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les variétés que nous construisons dans le cas $m = 1$ sont des déformations analytiques de variétés de López de Medrano-Verjovsky.*

J'ignore si ce théorème se généralise en dimension supérieure, c'est-à-dire si toutes les variétés que nous construisons sont des déformations de variétés de Meersseman.

Nous terminons par une série d'exemples, montrant notamment comment on peut obtenir de nouvelles variétés en « recollant des morceaux » de variétés de Meersseman ou en ne les modifiant que légèrement.

1. Construction des variétés.

1.1. La construction de Meersseman.

Nous allons décrire une manière de construire de nouvelles variétés complexes compactes. Pour cela, nous nous inspirons des constructions réalisées par [LDMV] et de leur généralisation par [Me]. Rappelons la construction de ces variétés :

On considère deux entiers $n > m \geq 1$. On se donne n éléments $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ dans \mathbb{C}^m . Pour deux éléments Λ et T de \mathbb{C}^m , on note $\langle \Lambda, T \rangle$ le produit scalaire complexe canonique. On considère alors l'action de \mathbb{C}^m sur \mathbb{C}^n donnée par

$$T \cdot (w_1, \dots, w_n) = (e^{\langle \Lambda_1, T \rangle} w_1, \dots, e^{\langle \Lambda_n, T \rangle} w_n).$$

On considère alors les feuilles du feuilletage (singulier) induit sur \mathbb{C}^n par cette action. Suivant que l'origine appartient ou non à leur adhérence, on les appelle feuilles de Poincaré ou feuilles de Siegel. Alors, sous l'hypothèse que 0 est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe des $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$, on montre qu'il existe des feuilles de Siegel et que leur complémentaire est une réunion finie de sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^n . On appelle domaine de Siegel la réunion des feuilles de Siegel et on prouve que sous l'hypothèse supplémentaire dite d'hyperbolicité faible, qui est que l'origine ne soit pas dans l'enveloppe convexe de $2m$ des éléments $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$, alors $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ agit sur S , \mathbb{C}^m agissant comme ci-dessus, \mathbb{C}^* agissant par homothéties, de telle sorte que l'espace des orbites de cette action soit une variété complexe compacte N .

Rappelons simplement que chaque feuille de Siegel possède un unique point qui minimise la distance (euclidienne) à l'origine, que l'intersection de l'ensemble de ces points avec la sphère unité de \mathbb{C}^n , notée M_1 est une variété algébrique réelle lisse et s'identifie à l'espace des orbites de l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^*$ sur S , ce qui lui fournit une structure naturelle de S^1 -fibré principal au-dessus de N .

DÉFINITION 1.1. — Nous appellerons *variété de Meersseman* une variété définie par la construction ci-dessus.

Nous appellerons *variété de López de Medrano-Verjovsky* une variété de Meersseman pour laquelle $m = 1$.

Nous allons maintenant nous attacher à généraliser cette construction.

1.2. La construction de nos variétés.

Avant tout, fixons-nous deux entiers naturels $m \geq 1$ et $n \geq 2m + 1$. En fait, le cas $m = 0$ donnerait uniquement l'action de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ et l'espace des orbites serait l'espace projectif $\mathbb{C}P^{n-1}$, ce qui n'aurait guère d'intérêt. Toutefois, on peut le garder à l'esprit, par exemple vis-à-vis des propositions 2.1 et 2.2, tandis que pour le cas $n \leq 2m$, notre construction serait irréalisable. Commençons par poser quelques définitions et notations.

DÉFINITION 1.2. — On appelle *ensemble étudiable* un ensemble non vide $\mathcal{E}_{m,n}$ de parties à $2m + 1$ éléments de $\{1, \dots, n\}$.

Pour alléger les notations, une partie $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de $\{1, \dots, n\}$ sera généralement notée $(i_1 i_2 \dots i_k)$

DÉFINITION 1.3. — Étant donné un ensemble étudiable $\mathcal{E}_{m,n}$, une partie de $\{1, \dots, n\}$ sera dite *acceptable* si elle contient un élément de $\mathcal{E}_{m,n}$; une partie de $\{1, \dots, n\}$ sera dite *complétable* si elle est contenue dans un élément de $\mathcal{E}_{m,n}$; un élément de $\mathcal{E}_{m,n}$ s'appellera une *partie fondamentale* de $\{1, \dots, n\}$. Enfin, un élément de $\{1, \dots, n\}$ sera dit *indispensable* s'il est dans l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{E}_{m,n}$.

DÉFINITION 1.4. — Étant donné un ensemble étudiable $\mathcal{E}_{m,n}$, on notera S l'ensemble des éléments de \mathbb{C}^n dont les coordonnées non nulles forment une partie acceptable de $\{1, \dots, n\}$.

Donnons-nous un ensemble étudiable $\mathcal{E}_{m,n}$ et une application ℓ de $\{1, \dots, n\}$ dans l'ensemble $(\mathbb{C}^m)^*$ des formes linéaires complexes sur \mathbb{C}^m (en fait simplement n formes linéaires complexes sur \mathbb{C}^m , que nous noterons ℓ_1, \dots, ℓ_n). On considère alors l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ sur S donnée par

$$(Z, w) \cdot (z_1, \dots, z_n) = (w e^{\ell_1(Z)} z_1, \dots, w e^{\ell_n(Z)} z_n).$$

DÉFINITION 1.5. — On appelle *système étudiable* la donnée d'un ensemble étudiable $\mathcal{E}_{m,n}$ et d'une application ℓ de $\{1, \dots, n\}$ dans $(\mathbb{C}^m)^*$ ayant la propriété suivante : pour tout P dans $\mathcal{E}_{m,n}$, $\{\ell_k, k \in P\}$ engendre \mathbb{R} -affinement $(\mathbb{C}^m)^*$. L'action associée sera appelée une *action étudiable*. L'ensemble $\mathcal{E}_{m,n}$ sera appelé l'*ensemble fondamental* de ce système étudiable.

Donnons deux remarques simples :

Remarque 1.1. — Une action étudiable est libre.

En effet, soient z un élément de S et (Z, w) un élément qui le stabilise. Alors toutes les coordonnées de z à indice dans une certaine partie P_z de $\mathcal{E}_{m,n}$ sont non nulles. Alors, $e^{\ell_k(Z)}$ doit être le même pour tout k dans P_z . En particulier, la partie réelle de $\ell_k(Z)$ ne dépend pas de k . Comme $\{\ell_k, k \in P_z\}$ engendre \mathbb{R} -affinement $(\mathbb{C}^m)^*$, on en déduit que Z est nul. Alors, il est clair que $w = 1$. L'action est donc bien libre.

Remarque 1.2. — Il est clair, d'après la définition de l'action, que deux points de la même orbite ont les mêmes coordonnées nulles (et aussi bien sûr non nulles). Cela nous permet de parler de l'ensemble des coordonnées (non) nulles d'une orbite d'une action étudiable.

Le but de cet article est d'étudier les variétés complexes compactes qui sont obtenues comme l'espace des orbites d'une action étudiable. Nous posons donc la définition suivante :

DÉFINITION 1.6. — Un système étudiable sera dit *bon* si l'espace des orbites de l'action associée, muni de la topologie et d'un atlas naturellement induits par l'action, est une variété complexe compacte. La variété ainsi construite sera alors appelée la *variété associée au bon système* considéré.

De plus, si le système étudiable est noté $(\mathcal{E}_{m,n}, \ell)$, la variété associée sera notée N .

Il est dès maintenant possible de caractériser les variétés de Meersseman parmi celles que nous avons construites. Prenons d'abord une notation :

DÉFINITION 1.7. — Soit $(\mathcal{E}_{m,n}, \ell)$ un système étudiable. Nous noterons \mathcal{O} l'ensemble des points de $(\mathbb{C}^m)^*$ qui ne sont dans l'enveloppe convexe d'aucune partie à $2m$ éléments de $\{\ell_k, 1 \leq k \leq n\}$.

On remarque que \mathcal{O} est le complémentaire d'une partie compacte de $(\mathbb{C}^m)^*$. Nous avons alors :

PROPOSITION 1.3. — a) *Toute variété de Meersseman peut être construite par le procédé que nous venons de décrire.*

b) *Un système étudiable est un bon système associé à une variété de Meersseman si et seulement s'il existe une composante connexe bornée O de \mathcal{O} telle que $\mathcal{E}_{m,n}$ soit l'ensemble des parties à $2m + 1$ éléments de $\{1, \dots, n\}$ ayant la propriété que l'enveloppe convexe de leur image par ℓ contient O .*

Preuve. — Montrons déjà que toute variété de Meersseman peut être construite par notre procédé. Il suffit juste de poser pour $\mathcal{E}_{m,n}$ l'ensemble des parties à $2m + 1$ éléments de $\{1, \dots, n\}$ pour lesquelles les Λ correspondants ont 0 dans leur enveloppe convexe, et de poser $\ell_i = \langle \Lambda_i, \bullet \rangle$. Il est clair que les deux actions sont les mêmes et donc les variétés obtenues également. Ainsi, notre construction permet de retrouver toutes les variétés de Meersseman.

Cherchons maintenant à quelle condition la variété associée à un bon système est une variété de Meersseman. Commençons par supposer que $\mathcal{E}_{m,n}$ est l'ensemble des parties à $2m + 1$ éléments de $\{1, \dots, n\}$ dont l'image par ℓ possède une certaine composante connexe bornée O de \mathcal{O} dans son enveloppe convexe. Soit alors λ un point de O . Posons pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, $\ell'_i = \ell_i - \lambda$ et considérons le système étudiable $(\mathcal{E}_{m,n}, \ell')$. Alors on a pour tout couple (Z, w) de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} (Z, w) \cdot (z_1, \dots, z_n) &= (w e^{\ell_1(Z) - \lambda(Z)} z_1, \dots, w e^{\ell_n(Z) - \lambda(Z)} z_n) \\ &= (Z, w e^{-\lambda(Z)}) \cdot (z_1, \dots, z_n). \end{aligned}$$

Ainsi, les actions associées aux deux systèmes sont les mêmes, à automorphisme près du groupe $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$. Or, pour le système $(\mathcal{E}_{m,n}, \ell')$, l'ensemble S associé est exactement l'ensemble des points pour lesquels

l'enveloppe convexe de l'image par ℓ' de leurs coordonnées non nulles a 0 dans son intérieur. En posant pour tout i , Λ_i le point de \mathbb{C}^m tel qu'on ait pour tout Z , $\langle \Lambda_i, Z \rangle = \ell'(Z)$, on voit que 0 est dans l'enveloppe convexe des Λ_i , n'est dans l'enveloppe convexe d'aucune partie à $2m$ éléments de l'ensemble des Λ_i et que la variété de Meersseman associée est l'espace des orbites de l'action associée au système $(\mathcal{E}_{m,n}, \ell')$, qui est la même variété que celle associée au système $(\mathcal{E}_{m,n}, \ell)$. Ainsi, ce dernier système est un bon système associé à une variété de Meersseman.

Supposons maintenant que nous ayons un bon système associé à une variété de Meersseman. Dans ce cas, S est l'espace des feuilles de Siegel d'une certaine action de \mathbb{C}^m sur \mathbb{C}^n de la forme

$$Z \cdot (z_1, \dots, z_n) = (e^{\langle \Lambda_1, Z \rangle} z_1, \dots, e^{\langle \Lambda_n, Z \rangle} z_n).$$

On en déduit qu'à isomorphisme de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ près, les parties acceptables sont exactement les parties dont les images par ℓ ont 0 dans leur enveloppe convexe. Or, un isomorphisme de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ est de la forme $(Z, w) \mapsto (AZ, w e^{\phi(Z)})$ où A est dans $\text{GL}_m(\mathbb{C})$ et ϕ est une forme linéaire sur \mathbb{C}^m . Ainsi, il existe A dans $\text{GL}_m(\mathbb{C})$, et $\phi, \ell'_1, \dots, \ell'_n$ formes linéaires sur \mathbb{C}^m telles que les parties acceptables sont exactement les parties dont les images par ℓ' ont 0 dans leur enveloppe convexe et $\ell'_i = A\ell_i + \phi$. Il est alors clair que les parties acceptables sont exactement les parties dont les images par ℓ ont $A^{-1}\phi$ dans leur enveloppe convexe. Cela termine la preuve de notre proposition. \square

1.3. Une caractérisation des bons systèmes.

Nous cherchons maintenant à savoir si un système étudiable est bon. On sait qu'il faut pour cela deux conditions : l'action associée doit être proprement discontinue et cocompacte.

Rappelons que l'action d'un groupe topologique G sur une variété M est dite proprement discontinue si, étant donné deux parties (relativement) compactes K_1 et K_2 de M , l'ensemble des éléments z pour lesquels $z \cdot K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, qu'on appellera l'intersecteur de K_1 vers K_2 , est (relativement) compact dans G . Rappelons également que l'ensemble des orbites d'une action libre et proprement discontinue est muni naturellement d'une structure de variété.

Le théorème suivant fournit une réponse à notre question :

THÉORÈME 1.4. — *Un système étudiable est bon si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

• Pour tout couple P, P' de parties fondamentales, les enveloppes convexes dans $(\mathbb{C}^m)^*$ des ensembles image $\ell(P)$ et $\ell(P')$ sont d'intérieurs non disjoints.

• Pour toute partie fondamentale P et tout élément k de $\{1, \dots, n\}$, il existe un élément k' de P tel que $(P \setminus \{k'\}) \cup \{k\}$ soit aussi une partie fondamentale.

Ce théorème sera en fait une conséquence immédiate de deux lemmes. Le premier établit une condition nécessaire et suffisante de propre discontinuité d'une action étudiable :

LEMME 1.1. — Une action étudiable est proprement discontinue si et seulement si pour tout couple (P, P') de parties fondamentales, l'intersection de l'enveloppe convexe (dans $(\mathbb{C}^m)^*$) des $(\ell_i)_{i \in P}$ et de l'enveloppe convexe des $(\ell_j)_{j \in P'}$ est d'intérieur non vide.

Le lemme suivant traite de la cocompacité. La condition est alors plus compliquée, mais notons qu'elle est de nature purement combinatoire :

LEMME 1.2. — Si une action étudiable est cocompacte, alors pour toute partie fondamentale (k_1, \dots, k_{2m+1}) et tout élément k de $\{1, \dots, n\}$, il existe i dans $\{1, \dots, 2m+1\}$ pour lequel $(k_1, \dots, k_{i-1}, k, k_{i+1}, \dots, k_{2m+1})$ est une partie fondamentale. Réciproquement, si la condition précédente est vérifiée et si l'action est proprement discontinue, alors elle est aussi cocompacte.

Avant de prouver ces lemmes, nous pouvons faire quelques remarques simples qui nous seront utiles.

Remarques 1.5.

(i) L'application $(\ell, Z) \mapsto [\ell, Z] = \operatorname{Re}(\ell(Z))$ est une forme \mathbb{R} -bilinéaire non dégénérée sur $(\mathbb{C}^m)^* \times \mathbb{C}^m$.

(ii) Étant donné $2m+1$ éléments affinement indépendants de $(\mathbb{C}^m)^*$, que nous noterons $\ell_1, \dots, \ell_{2m+1}$ et $2m+1$ réels r_1, \dots, r_{2m+1} , il existe un unique couple (Z, r) dans $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}$ tels que pour tout k , $1 \leq k \leq 2m+1$, on ait $r_k = [\ell_k, Z] + r$.

(iii) Étant donné $2m$ éléments affinement indépendants de $(\mathbb{C}^m)^*$, que nous noterons ℓ_1, \dots, ℓ_{2m} , l'ensemble des couples (Z, w) de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^*$ tels

que pour tout k , $1 \leq k \leq 2m$, on ait $w \cdot e^{[\ell_k, Z]} = 1$ est un sous-groupe à un paramètre réel.

De plus, si on note H_+ et H_- les deux demi-espaces ouverts délimités par l'hyperplan contenant ℓ_1, \dots, ℓ_{2m} , alors l'un des deux demi-groupes ouverts de notre groupe à un paramètre, notons-le Δ_+ , vérifiera que si ℓ_0 est dans H_+ (resp. H_-) et si (Z, w) est dans Δ_+ , alors $w \cdot e^{[\ell_0, Z]} > 1$ (resp. < 1).

L'assertion (i) est claire. Le point (ii) en résulte par des arguments classiques. Établissons le (iii). Appelons H l'hyperplan affine réel de $(\mathbb{C}^m)^*$ qui contient tous les ℓ_k et H_0 l'hyperplan vectoriel sous-jacent. Soit Z un élément de \mathbb{C}^m pour lequel il existe w tel que (Z, w) vérifie les propriétés demandées. Alors clairement $[\ell_k, Z]$ ne dépend pas de k c'est-à-dire que Z est dans l'orthogonal de H_0 pour $[\cdot, \cdot]$. Réciproquement, si Z est dans l'orthogonal de H_0 pour $[\cdot, \cdot]$, alors $[\ell_k, Z]$ ne dépend pas de k et il existe un unique w tel que (Z, w) est dans l'ensemble Δ cherché, précisément $w = e^{[\ell_1, Z]}$. Ainsi, Δ est juste l'image de $(H_0)^\perp$, qui est une droite réelle, par le morphisme injectif $Z \rightarrow (Z, e^{[\ell_1, Z]})$. C'est donc bien un sous-groupe à un paramètre réel de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^*$. La deuxième partie de l'assertion (iii) est claire. \square

DÉFINITION 1.8. — Deux parties finies de $(\mathbb{C}^m)^*$ dont les enveloppes convexes sont d'intérieurs non disjoints seront dites *imbriquées*. De même, deux parties de $\{1, \dots, n\}$ seront dites *imbriquées* si leurs images par ℓ le sont.

Nous pouvons maintenant nous attacher à la preuve de notre théorème, en commençant par le lemme 1.1.

Preuve. — Montrons d'abord que si la condition d'imbrication des parties fondamentales est vérifiée, alors l'action étudiée est proprement discontinue. Pour cela, donnons nous deux éléments x et y de S et appelons A_x (resp. A_y) l'ensemble des coordonnées non nulles de x (resp. y). Par définition de S , ces deux ensembles sont acceptables. Soit P_x (resp. P_y) l'ensemble des éléments de \mathbb{C}^n ayant toutes leurs coordonnées de module $\leq R$ et leurs coordonnées à indice dans A_x (resp. A_y) de module $\geq r$, où $r > 0$ est choisi assez petit et $R > 0$ est choisi assez grand pour que P_x soit un voisinage de x et P_y soit un voisinage de y . Supposons qu'il existe une suite (Z_n, w_n) de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$, qui «tend vers l'infini» et telle que pour tout n , $(Z_n, w_n) \cdot P_x \cap P_y \neq \emptyset$. Appelons alors ℓ_0 une forme linéaire dans l'intersection des intérieurs des enveloppes convexes de A_x et A_y . On

doit alors avoir pour tout n :

$$|w_n| \cdot \sup_{k \in A_x} e^{\operatorname{Re}(\ell_k(Z_n))} \leq \frac{R}{r}.$$

Or, si Z_n tend vers l'infini dans \mathbb{C}^m , on a

$$\sup_{k \in A_x} \operatorname{Re}(\ell_k(Z_n) - \ell_0(Z_n))$$

qui tend vers $+\infty$. Cela implique que $w_n \cdot \inf_{k \in A_y} e^{\operatorname{Re}(\ell_k(Z_n))}$ tend vers 0. Et donc $(Z_n, w_n) \cdot P_x$ serait constitué d'éléments ayant une coordonnée à indice dans A_y trop petite pour rencontrer P_y . On aboutirait alors à une contradiction. La suite Z_n doit donc être bornée dans \mathbb{C}^m et la suite w_n doit « tendre vers l'infini » dans \mathbb{C}^* , ce qui est clairement contradictoire. Ainsi, il existe un voisinage P_x de x et un voisinage P_y de y tels que l'intersecteur de P_x vers P_y est relativement compact dans $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$, ce qui prouve bien la propre discontinuité de l'action.

Supposons réciproquement qu'il existe deux parties fondamentales P_1 et P_2 non imbriquées. Il existe alors un hyperplan affine réel H de $(\mathbb{C}^m)^*$ qui sépare les enveloppes convexes de leurs images par ℓ . Posons K_1 (resp. K_2) la partie de S formée de tous les éléments de \mathbb{C}^n ayant toutes leurs coordonnées de module majoré par 1 et leurs coordonnées à indice dans P_1 (resp. P_2) de module exactement 1. Prenons alors Z dans l'orthogonal de H_0 pour $[\cdot, \cdot]$. Au signe près, l'action de Z diminue les coordonnées dont l'indice est dans P_1 et augmente les coordonnées dont l'indice est dans P_2 . Il est alors clair que $Z \cdot K_1 \cap K_2$ est non vide. Ainsi, l'intersecteur de K_1 vers K_2 contient une demi-droite de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^*$. Comme K_1 et K_2 sont compacts, cela prouve que l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^*$, et *a fortiori* celle de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$, ne sont pas proprement discontinues. \square

Passons maintenant au lemme 1.2.

Preuve. — Commençons par prouver que si l'action est cocompacte, alors la condition de l'énoncé est vérifiée. Supposons qu'il existe une partie fondamentale P et un élément k de $\{1, \dots, n\}$ pour lesquels il n'existe aucun k' dans P tel que $(P \setminus \{k'\}) \cup \{k\}$ soit fondamentale. Appelons N l'espace des orbites de l'action étudiée, N' (resp. S') l'ensemble des éléments de N (resp. S) dont toutes les coordonnées hors de $P \cup \{k\}$ sont nulles, N'' (resp. S'') l'ensemble des éléments de N (resp. S) dont toutes les coordonnées hors de P sont nulles. Alors, $S' = S'' \times \mathbb{C}$. Ainsi, N' se projette naturellement sur N'' et, comme l'action sur S'' est libre, les fibres sont homéomorphes à \mathbb{C} . Ainsi, l'espace des orbites de l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ sur S

possède un fermé non quasi-compact. Cela montre que l'action étudiée n'est pas cocompacte.

Intéressons-nous maintenant à la réciproque. On suppose que la condition de l'énoncé est vérifiée et que, de plus, l'action est proprement discontinue.

Pour prouver la cocompacité, il suffit d'exhiber un compact de S qui rencontre chaque orbite de l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ sur S . Définissons-le comme suit :

DÉFINITION 1.9. — Nous appellerons \widehat{M}'_1 l'ensemble des éléments de \mathbb{C}^n dont toutes les coordonnées ont un module majoré par 1 et dont celles ayant un module égal à 1 forment un ensemble acceptable.

Il est clair que \widehat{M}'_1 est compact, inclus dans S , et ne dépend pas de l'application ℓ .

Pour prouver que toute orbite de l'action rencontre \widehat{M}'_1 , nous allons raisonner par récurrence sur le nombre de coordonnées non nulles d'un point de l'orbite considérée. Comme on sait que l'ensemble des coordonnées non nulles d'un point de S est acceptable, c'est qu'il y en a au moins $2m + 1$.

S'il y en a exactement $2m + 1$, c'est que l'ensemble de ces coordonnées non nulles est fondamental. Prenons alors un tel élément $x = (x_1, \dots, x_n)$. Il est alors facile, grâce au point (ii) de la remarque 1.5, de trouver un élément (z, w) de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ tel que $(z, w) \cdot x$ ait toutes ses coordonnées non nulles de module 1. L'élément alors obtenu de l'orbite de x est un élément de \widehat{M}'_1 , ce qui montre dans ce cas la propriété recherchée.

Supposons maintenant que l'orbite de tout élément de S ayant exactement $k \geq 2m + 1$ coordonnées non nulles rencontre \widehat{M}'_1 . Considérons alors un élément x de S ayant exactement $k + 1$ coordonnées non nulles et montrons que l'orbite de x rencontre également \widehat{M}'_1 .

Appelons i_0 une coordonnée non nulle de x telle qu'en la retirant de l'ensemble des coordonnées non nulles de x , on conserve un ensemble acceptable. Ceci est possible par hypothèse. Considérons alors x' l'élément $(x_1, \dots, x_{i_0-1}, 0, x_{i_0+1}, \dots, x_n)$ de \mathbb{C}^n . D'après la définition de i_0 , x' est aussi un élément de S et, d'après l'hypothèse de récurrence, son orbite rencontre \widehat{M}'_1 . Soit $y'_1 = (z', w') \cdot x'$ un élément de $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*) \cdot x' \cap \widehat{M}'_1$. Considérons le point $\bar{y} = (z', w') \cdot x$. C'est un point qui a les mêmes coordonnées que y'_1 , excepté la coordonnée d'indice i_0 qui est non nulle.

Si le module de \bar{y}_{i_0} est inférieur à 1, alors \bar{y} est dans \widehat{M}'_1 et l'orbite

de x rencontre donc cet ensemble.

Considérons donc le cas où $|\bar{y}_{i_0}| > 1$. Dans ce cas, nous allons construire un algorithme qui permettra de construire un point de \widehat{M}'_1 dans presque toute orbite. Par un passage à la limite, nous aurons un tel point dans toute orbite. L'idée de l'algorithme est de faire diminuer le module de la coordonnée d'indice i_0 jusqu'à ce qu'il arrive à 1. Pour cela nous construisons une suite (P_k) de parties fondamentales et une suite (y^k) d'éléments de l'orbite de x de la manière suivante :

On commence par faire l'hypothèse que la partie P'_0 formée des coordonnées de \bar{y} qui sont de module 1 est fondamentale. Dans ce cas, il existe par hypothèse k_0 dans P'_0 tel que $P_0 = (P'_0 \setminus \{k_0\}) \cup \{i_0\}$ est fondamentale. Remarquons que ℓ_{i_0} et ℓ_{k_0} sont du même côté de l'hyperplan contenant $\{\ell_i, i \in (P_0 \setminus \{i_0\})\}$. On définit aussi $y^0 = \bar{y}$.

Supposons maintenant qu'on ait construit P_r et y^r avec la propriété suivante (en posant $Q_r = P_r \setminus \{i_0\}$) : y^r a toutes ses coordonnées autre que celle d'indice i_0 de module inférieur à 1 et telles que ses coordonnées de module 1 soient Q_r plus une coordonnée k_r dont l'image par ℓ est du même côté que ℓ_{i_0} par rapport à l'hyperplan affine réel H_r contenant $\ell_i, i \in Q_r$.

La remarque 1.5 nous fournit une demi-droite de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ dont l'action ne change pas le module des coordonnées dont l'indice est dans Q_r , mais diminue strictement le module de la coordonnée d'indice i_0 . Dans ce cas, comme ℓ_{k_r} est du même côté de l'hyperplan H_r que ℓ_{i_0} , la coordonnée d'indice k_r diminue aussi strictement sous l'action de la demi-droite précitée. On suit l'action de cette demi-droite sur y^r jusqu'à ce qu'une nouvelle coordonnée k'_{r+1} ait un module égal à 1. On demande alors que cette coordonnée soit unique.

Si $k'_{r+1} = i_0$, l'élément que nous avons est un élément de \widehat{M}'_1 et nous avons terminé. Sinon, nous définissons y^{r+1} comme l'élément de l'orbite de x que nous avons et P_{r+1} comme étant une partie fondamentale où on retire un élément k_{r+1} de P_r et où on ajoute k'_{r+1} . Clairement, k_{r+1} ne peut pas être i_0 car ℓ_{i_0} et $\ell_{k_{r+1}}$ sont situés de part et d'autre de H_r . Nous avons donc défini P_{r+1} et y^{r+1} et la propriété demandée sur y^{r+1} est clairement vérifiée. De plus, comme $|(y^{r+1})_{i_0}| < |(y^r)_{i_0}|$ pour tout r , on ne peut pas avoir $P_r = P_{r'}$ si $r \neq r'$. Ainsi, le processus de construction des parties P_r est obligé de s'arrêter.

Or, seules deux conditions peuvent faire cesser le processus. Soit le point y_{r+1} correspondant est dans \widehat{M}'_1 , soit l'hypothèse d'unicité de la

nouvelle coordonnée de module 1, ou de la fundamentalité de la partie correspondante lors de la première étape, n'est pas vérifiée. Mais il est clair que la vérification à toutes les étapes de cette dernière condition est le cas générique. Cela prouve que, génériquement, une orbite de l'action rencontre \widehat{M}'_1 .

Montrons alors que toute orbite rencontre effectivement \widehat{M}'_1 . D'après ce que nous venons de dire, il existe une suite $(x_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de points de S dont l'orbite rencontre \widehat{M}'_1 et qui converge vers x . Notons y_r un point correspondant de l'orbite de x_r et (Z_r, w_r) le point tel que $(Z_r, w_r) \cdot x_r = y_r$. Alors, la suite $(Z_r, w_r)_{r \in \mathbb{N}}$ est bornée (*i.e.* d'image relativement compacte) dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, car l'action est proprement discontinue. Ainsi, en prenant une valeur d'adhérence (Z, w) de $(Z_r, w_r)_{r \in \mathbb{N}}$, on s'aperçoit que $(Z, w) \cdot x$ est une valeur d'adhérence de $(y_r)_{r \in \mathbb{N}}$, donc est dans \widehat{M}'_1 .

Nous avons donc prouvé que toute orbite de l'action considérée rencontrait \widehat{M}'_1 , ce qui prouve que l'action est cocompacte. \square

Ce lemme appelle plusieurs remarques.

En premier lieu, on se doute que la condition de la proposition 1.3 est plus forte que la condition du théorème 1.4. C'est vrai, et il est d'ailleurs possible de l'établir directement.

Ensuite, l'hypothèse de propre discontinuité de l'action est indispensable, et en voici un contre-exemple :

Considérons $n = 4$; $m = 1$; $\mathcal{E}_{1,4} = \{(123), (134)\}$; $\ell_1(z) = z$ et pour $k = 2, 3, 4$, $\ell_k(z) = i \cdot \ell_{k-1}(z)$. Il est clair que le système est étudiable, que $\mathcal{E}_{1,4}$ vérifie la deuxième condition du lemme, mais nous allons voir que l'espace des orbites de l'action associée à ce système n'est pas quasi-compact.

En effet, $(z, w) \cdot x = (w e^z x_1, w e^{iz} x_2, w e^{-z} x_3, w e^{-iz} x_4)$. Remarquons que 1 et 3 sont indispensables, donc tout élément de S a ses première et troisième coordonnées non nulles. Il est alors clair que si x et y sont dans la même orbite, $y_2 y_4 / y_1 y_3 = x_2 x_4 / x_1 x_3$. Ainsi, par passage au quotient, cette formule nous définit une application continue de l'espace des orbites de l'action dans \mathbb{C} , qui est surjective (puisque pour tout α , l'image de l'orbite du point $(1, 1, 1, \alpha)$ est α). Ainsi, l'espace des orbites de l'action étudiée n'est pas quasi-compact.

D'autre part, on voit qu'un bon système vérifie un principe intéressant :

DÉFINITION 1.10. — Soit $\mathcal{E}_{m,n}$ un ensemble étudiable, P un des ses éléments et k un élément de $\{1, \dots, n\}$. On dit qu'un élément k' de P est un *remplaçant de k dans P* si $(P \setminus \{k'\}) \cup \{k\}$ est encore dans $\mathcal{E}_{m,n}$.

On dit qu'un ensemble étudiable $\mathcal{E}_{m,n}$ *vérifie le principe d'existence et d'unicité du remplaçant* (en abrégé *PEUR*) si pour toute partie P de $\mathcal{E}_{m,n}$ et tout entier k dans $\{1, \dots, n\}$, il existe un unique remplaçant de k dans P .

PROPOSITION 1.6. — *L'ensemble fondamental d'un bon système vérifie le PEUR.*

En effet, l'existence d'un remplaçant pour tout point dans toute partie résulte du lemme 1.2. L'unicité vient du fait que si un élément possédait deux remplaçants, on obtiendrait deux parties fondamentales non imbriquées parmi les trois considérées.

On peut se demander, réciproquement à notre théorème, si tout ensemble étudiable vérifiant le PEUR peut être l'ensemble fondamental d'un bon système. Il y a déjà une condition nécessaire simple :

PROPOSITION 1.7. — *Un bon système doit être minimal, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{E}_{m,n}$ ne peut pas contenir de sous-ensemble non vide strict $\mathcal{E}'_{m,n}$ vérifiant aussi le PEUR (bien entendu, on s'interdit de faire varier n).*

On peut remarquer que cette condition est automatiquement vérifiée si $m = 1$.

Preuve. — Elle est très simple. Si un tel $\mathcal{E}'_{m,n}$ existait, le système obtenu à partir du précédent en substituant $\mathcal{E}'_{m,n}$ à $\mathcal{E}_{m,n}$ vérifierait aussi les conditions du théorème 1.4. Ainsi, ce serait un bon système et la variété N' associée serait une sous-variété compacte stricte de N , dense dedans. C'est bien sûr absurde. \square

Cette contrainte n'est d'ailleurs pas la seule. En voici une autre, ainsi qu'un contre-exemple explicite qui sera important pour la suite :

PROPOSITION 1.8. — *Soit $\mathcal{E}_{m,n}$ l'ensemble fondamental d'un bon système et P une partie de $\{1, \dots, n\}$ à $2m - 1$ éléments (de préférence complétable). On considère le graphe dont les sommets sont les éléments de $\{1, \dots, n\} \setminus P$ et dont les arêtes relient les paires $\{k, k'\}$ telles que $P \cup \{k, k'\}$ est fondamentale. Alors ce graphe doit être bipartite (i.e. sans cycle de longueur impaire).*

Preuve. — Raisonnons par l'absurde et supposons que nous ayons une partie P et un ensemble $\mathcal{E}_{m,n}$ qui violent les conditions de la proposition, ainsi qu'un bon système $(\mathcal{E}_{m,n}, \ell)$. Considérons une orientation sur $(\mathbb{C}^m)^*$. On peut alors orienter notre graphe de la manière suivante : On ordonne les éléments p_1, \dots, p_{2m-1} de P et on oriente l'arête $k - k'$ du graphe selon l'orientation du repère affine $\ell(p_1), \dots, \ell(p_{2m-1}), \ell(k), \ell(k')$. Comme notre graphe possède un cycle de longueur impaire, il y a forcément dans ce cycle un sommet k qui est l'extrémité d'une arête et l'origine de la suivante. Les images par ℓ des deux parties fondamentales correspondantes sont situées de part et d'autre de l'hyperplan affine contenant $\{\ell_i, i \in P \cup \{k\}\}$. Ces deux parties ne peuvent donc être imbriquées, ce qui constitue une contradiction. \square

COROLLAIRE 1.9. — *Il n'existe pas de bon système ayant pour ensemble fondamental l'ensemble*

$$\mathcal{P}_{1,6} = \{(124), (125), (134), (136), (156), (235), (236), (246), (345), (456)\},$$

bien que cet ensemble satisfasse le PEUR.

Preuve. — On vérifie facilement que $\mathcal{P}_{1,6}$ satisfait le PEUR. Prenons alors $P = \{1\}$ et remarquons que le graphe obtenu par la proposition 1.8 contient le cycle $2 - 4 - 3 - 6 - 5 - 2$ qui est de longueur impaire. La proposition s'applique alors. \square

Ainsi, la condition de minimalité, associée au PEUR ne garantit pas qu'un système soit bon. Néanmoins, nous décrirons les configurations vérifiant le PEUR pour $m = 1$ et nous verrons que le contre-exemple précédent est « essentiellement le seul ».

2. Propriétés géométriques des variétés.

Nous allons ici nous attacher à prolonger certains résultats concernant les variétés de Meersseman aux variétés que nous venons de construire. Nous avons d'abord la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. — *Soit $(\mathcal{E}_{m,n}, \ell)$ un bon système. Alors :*

- (i) *Si $n = 2m + 1$, alors N est un tore complexe.*
- (ii) *Si $n > 2m + 1$, alors N n'est pas une variété symplectique.*

Preuve. — Le point (i) est clair. Si $n = 2m + 1$, alors $S = (\mathbb{C}^*)^n$ peut être vu comme groupe de Lie commutatif, et l'action comme l'action par translations d'un sous-groupe. Dans ce cas, N est un groupe de Lie complexe compact commutatif, donc un tore complexe.

La preuve du point (ii) est une adaptation de celle de [Me] et, comme elle, se décompose en deux cas.

Supposons pour commencer qu'il existe un élément k de $\{1, \dots, n\}$ (qu'on suppose égal à 1) qui est indispensable. Prouvons alors que N a le même type d'homotopie que l'ensemble des éléments de S dont la première coordonnée vaut 1. En effet, considérons l'espace S/S^1 des orbites de l'action diagonale de S^1 sur S . C'est une variété qui fibre sur N , les fibres étant isomorphes à $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^*$, donc contractiles. Ainsi, N a le même type d'homotopie que S/S^1 . Or, l'application

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow (S \cap \{z_1 = 1\}) \times \mathbb{R}_+^*, \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto \left(1, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_n}{z_1}, |z_1|\right) \end{aligned}$$

passé au quotient par l'action de S^1 en un difféomorphisme de S/S^1 avec $(S \cap \{z_1 = 1\}) \times \mathbb{R}_+^*$, qui a le même type d'homotopie que $S \cap \{z_1 = 1\}$. Ainsi, ce dernier espace a même type d'homotopie que N . Or, cet espace est l'ensemble des éléments de \mathbb{C}^n dont la première coordonnée vaut 1, pour lesquels les autres coordonnées indispensables sont non nulles et qui ne sont pas sur certains sous-espaces de codimension complexe ≥ 2 , sous-espaces indépendants des coordonnées indispensables. Ainsi, si on note p le nombre de coordonnées indispensables autres que 1, on a $S \cap \{z_1 = 1\}$ difféomorphe au produit de $(\mathbb{C}^*)^p$ par $\mathbb{C}^{n-p-1} \setminus X$ où X est un sous-ensemble de codimension réelle au moins 4 en tout point. Ainsi, $\mathbb{C}^{n-p-1} \setminus X$ est 2-connexe et ainsi, N a le type d'homotopie du produit $(\mathbb{C}^*)^p \times (\mathbb{C}^{n-p-1} \setminus X)$. Or, $(\mathbb{C}^*)^p$ a le type d'homotopie du tore réel de dimension p et ainsi, N a le type d'homotopie du produit de $(S^1)^p$ par un espace 2-connexe. Prenons maintenant une classe η dans le $H^2(N, \mathbb{R}) \simeq H^2((S^1)^p, \mathbb{R})$. Alors, $(\eta)^{n-m-1} \in H^{2(n-m-1)}((S^1)^p, \mathbb{R})$. Si η est la classe d'une forme symplectique, alors $(\eta)^{n-m-1}$ est non nulle, et donc $p \geq 2(n - m - 1)$. Or, $p \leq 2m$. Ainsi, si N est symplectique,

$$2m \geq p \geq 2(n - m - 1) \geq 2((2m + 1) - m - 1) = 2m,$$

ce qui nécessite $n = 2m + 1$ et on est donc dans le cas (i).

Reste le cas où il n'y a pas d'élément indispensable dans $\{1, \dots, n\}$. Dans ce cas, nous appelons d le cardinal minimum du complémentaire

d'une partie inacceptable de $\{1, \dots, n\}$ et nous prenons P une partie de cardinal d et de complémentaire inacceptable. Un élément de \widehat{M}'_1 ne peut avoir toutes ses coordonnées à indice dans P nulles. Cela nous permet de définir une application de \widehat{M}'_1 dans $\mathbb{C}^d \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, et donc dans S^{2d-1} en composant avec la projection naturelle. De plus, si on considère les S^1 -fibrés principaux $\widehat{M}'_1 \rightarrow N$ et $S^{2d-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{d-1}$, cette application est S^1 -équivariante et passe donc au quotient en une application que nous noterons f de N dans $\mathbb{C}P^{d-1}$. De plus, si on note e la classe d'Euler du fibré $\widehat{M}'_1 \rightarrow N$ et e_d la classe d'Euler du fibré $S^{2d-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{d-1}$, on a $e = f^*(e_d)$ et alors $e^d = f^*((e_d)^d) = 0$.

D'autre part, \widehat{M}'_1 est 2-connexe. En effet, \widehat{M}'_1 a le même type d'homotopie que S et comme il n'y a pas de point indispensable, on a $d \geq 2$ et S est le complémentaire dans \mathbb{C}^n de sous-espaces vectoriels de codimension réelle au moins 4. Ainsi, S , et donc \widehat{M}'_1 sont 2-connexes. Alors, la suite exacte de Gysin du S^1 -fibré principal $\widehat{M}'_1 \rightarrow N$ nous induit un isomorphisme entre $H^0(N, \mathbb{Z})$ et $H^2(N, \mathbb{Z})$ qui envoie le générateur canonique de $H^0(N, \mathbb{Z})$ sur e . Ainsi, $H^2(N, \mathbb{Z})$ est monogène, engendré par la classe d'Euler du fibré $\widehat{M}'_1 \rightarrow N$.

Or, $e^d = 0$. Ainsi, si N est symplectique, d doit être strictement supérieur à la dimension complexe de N , soit $d > n - m - 1$ et comme toute partie de $\{1, \dots, n\}$ à $2m$ éléments est inacceptable, on a $d \leq n - 2m$. La vérification simultanée des deux inégalités entraîne $m < 1$, ce qui est exclu. Ainsi, si l'ensemble $\mathcal{E}_{m,n}$ n'a pas d'élément indispensable, alors la variété N ne peut pas être symplectique. \square

Nous avons ensuite la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. — *Si N est la variété associée à un bon système et est une variété de Moishezon, alors N est un tore complexe projectif (ces tores sont parfois appelés variétés abéliennes).*

La preuve que nous donnons ici simplifie considérablement celle de [Me].

Preuve. — Supposons que N soit une variété de Moishezon. Alors le premier nombre de Betti de N est pair, et il en est de même pour toutes les sous-variétés complexes lisses de N . Or, supposons que $n > 2m + 1$. Dans ce cas, soient P un élément de $\mathcal{E}_{m,n}$ et k un élément de $\{1, \dots, n\}$ hors de P . Soit N' la sous-variété de N correspondant aux éléments de S dont toutes les coordonnées hors de $P \cup \{k\}$ sont nulles. La partie $\mathcal{E}'_{m,2m+2}$ correspondante

a deux éléments, qui ont eux-mêmes $2m$ éléments en commun. D'après la preuve de la proposition 2.1, N' a le même type d'homotopie que le produit de $(S^1)^{2m-1}$ par un espace 2-connexe. Son premier nombre de Betti est donc $2m - 1$, donc impair, et nous en concluons que N ne peut être une variété de Moishezon.

Ainsi, si N est de Moishezon, c'est que $n = 2m + 1$ et d'après la proposition 2.1, N est un tore complexe. Or, un tore complexe de Moishezon est projectif. \square

Rappelons que pour les variétés de Meersseman, on peut construire une variété M_1 qui s'identifie différemment à l'espace des orbites de l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^*$ sur S . La définition qu'il donne n'aurait pas franchement de sens dans le cas des variétés étudiées ici, aussi cherchons-nous une variété M'_1 ayant les propriétés suivantes :

- La variété M'_1 est une sous-variété compacte de S difféomorphe à la variété des orbites de l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^*$ sur S .
- La variété M'_1 rencontre une fois et une seule chaque orbite de l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^*$ sur S .
- L'action naturelle du tore $(S^1)^n$ sur S laisse M'_1 globalement invariant.

En fait, la variété \widehat{M}'_1 a toutes les propriétés cherchées en dehors du fait qu'elle n'est pas une variété différentiable mais seulement une variété topologique. Il faut donc la « lisser » pour obtenir une variété ayant les propriétés cherchées. Néanmoins, pour établir les principales propriétés de l'espace des orbites de l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^*$, l'étude de \widehat{M}'_1 doit être suffisante et vraisemblablement plus simple même que celle de la variété M_1 de [Me], du fait de sa nature combinatoire. Montrons tout de même qu'on peut « lisser » \widehat{M}'_1 .

PROPOSITION 2.3. — *La variété \widehat{M}'_1 est différentiable en dehors de l'ensemble K des éléments ayant strictement plus de $2m + 1$ coordonnées de module 1. De plus, pour tout voisinage de K , il existe une variété qui satisfait les propriétés ci-dessus et qui coïncide avec \widehat{M}'_1 en dehors du voisinage considéré.*

J'ignore cependant s'il existe une variété qui satisfasse les conditions ci-dessus et qui soit en un certain sens naturelle (par exemple qui soit une intersection de quadriques, ou simplement algébrique réelle).

Preuve. — Le fait que \widehat{M}'_1 est différentiable en dehors de K est très simple. Si un point x de \widehat{M}'_1 n'est pas dans K et si P est l'ensemble des coordonnées de module 1 de x , alors un point proche de x est dans \widehat{M}'_1 si et seulement si ses coordonnées à indice dans P sont aussi de module 1. Donc, un voisinage de x dans \widehat{M}'_1 est donné par l'intersection d'un voisinage de x dans \mathbb{C}^n avec une sous-variété algébrique réelle lisse. Donc \widehat{M}'_1 est différentiable au voisinage de x .

Montrons maintenant comment il est possible de « lisser » la variété \widehat{M}'_1 de façon $(S^1)^n$ -équivariante. Donnons-nous pour cela une fonction f de classe C^∞ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, croissante, qui vaut 0 sur un intervalle de la forme $[0, r_1]$ et qui vaut 1 sur un intervalle de la forme $[r_2, 1]$, $0 < r_1 < r_2 < 1$. Prenons un point x de \widehat{M}'_1 et associons-lui un point de la même orbite comme suit : on considère le sous-ensemble de $\mathcal{E}_{m,n}$ formé des parties fondamentales pour lesquelles toutes les coordonnées de x correspondantes ont un module supérieur à r_1 . Pour chacune de ces parties P , on considère l'élément (Z_P, w_P) de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^*$ dont l'action sur x donne un élément dont toutes les coordonnées à indice dans P sont de module 1. Puis on considère le barycentre de tous ces éléments où pour tout P , le coefficient associé à (Z_P, w_P) est le produit $f(P)$ des images par la fonction f des éléments de P . Ce barycentre est un élément (Z, w) et c'est $y = (Z, w) \cdot x$ qui sera élément de la variété considérée. Montrons donc que l'ensemble M'_1 des éléments y de la forme précédente satisfait bien les conditions imposées.

Le deuxième point est évident car c'était déjà le cas pour \widehat{M}'_1 et que pour tout x , l'élément y associé est dans la même orbite. Le troisième point se vérifie facilement. Il suffit de constater que le sous-ensemble de $\mathcal{E}_{m,n}$ considéré, que (Z_P, w_P) , que $f(P)$ et par suite (Z, w) ne dépendent que du module des coordonnées de x . Comme de plus l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^*$ commute avec l'action de $(S^1)^n$, on peut affirmer que M'_1 est $(S^1)^n$ -invariant (globalement). Pour le premier point, il est clair que l'application $x \mapsto (Z, w)$ est continue et donc l'application $h : x \mapsto y$ est un homéomorphisme de \widehat{M}'_1 sur M'_1 . Reste à voir que l'application qui, à un point de M'_1 , associe son orbite est un difféomorphisme.

Or, l'application composée de h avec la projection de S sur \widehat{M}'_1 est une application différentiable. En effet, les applications qui à un élément de S font correspondre les (Z_P, w_P) correspondants sont différentiables au voisinage des points dont la projection sur \widehat{M}'_1 n'a pas de coordonnée de module r_1 , mais comme f est plate sur 0 en r_1 , on se convainc facilement

que cette restriction n'est pas un problème. Comme de plus les applications donnant les coefficients du barycentre sont également différentiables, on en conclut que l'application naturelle de S dans M'_1 est différentiable. On voit alors aisément que M'_1 est bien difféomorphe à l'espace des orbites de l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_+^*$ sur S .

Enfin, il est clair que si x n'a aucune coordonnée dans l'intervalle $]r_1, 1[$, alors $h(x) = x$. Or, le complémentaire de n'importe quel voisinage de K a tous ses points vérifiant la relation précédente si on prend r_1 suffisamment proche de 1. Ainsi, M'_1 coïncide avec \widehat{M}'_1 en dehors de ce voisinage. \square

PROPOSITION 2.4. — *La variété N peut aussi être obtenue comme compactification équivariante d'un groupe de Lie abélien complexe.*

Preuve. — L'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ sur $S \subset \mathbb{C}^n$ induit un plongement de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ dans l'ensemble Δ des matrices diagonales de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. L'image de ce plongement est un sous-groupe H et le groupe $G = \Delta/H$ agit sur N avec une orbite ouverte dense, de telle sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Delta \times S & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times N & \longrightarrow & N \end{array}$$

où les flèches horizontales représentent les actions considérées et les flèches verticales les projections naturelles. Ainsi, N est une compactification équivariante du groupe G . \square

Nous avons ici généralisé à nos variétés certaines propriétés géométriques parmi les plus importantes des variétés de Meersseman. Il serait sans doute possible de faire de même avec bien d'autres propriétés mais tel n'est pas notre but.

3. Cas des actions de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

3.1. Ensembles vérifiant le principe d'existence et d'unicité du remplaçant.

Nous nous attachons ici à décrire les systèmes étudiables avec $m = 1$ et qui vérifient le PEUR. Il s'agit peut-être d'un résultat déjà connu, car il est purement combinatoire, mais je n'en connais pas de référence.

On se donne donc un système étudiable $\mathcal{E}_{m,n}$ et on suppose qu'il vérifie le PEUR. Nous avons alors le lemme suivant, où on ne suppose pas $m = 1$:

LEMME 3.1. — *Pour deux éléments distincts k et k' de $\{1, \dots, n\}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *L'ensemble $\{k, k'\}$ n'est pas complétable.*
- (ii) *Une partie P contenant k est acceptable si et seulement si $(P \cup \{k'\}) \setminus \{k\}$ est acceptable.*
- (iii) *Une partie P contenant k est fondamentale si et seulement si $(P \cup \{k'\}) \setminus \{k\}$ est fondamentale.*

On considère la relation binaire sur $\mathcal{E}_{m,n}$ pour laquelle deux éléments k et k' sont liés s'ils sont égaux ou si les conditions précédentes sont vérifiées. Il s'agit d'une relation d'équivalence, pour laquelle nous noterons \mathcal{R} l'ensemble des classes d'équivalence et n' le nombre de ces classes.

Alors, $\mathcal{E}_{m,n}$ « passe au quotient » par cette relation d'équivalence en un ensemble étudiable $\bar{\mathcal{E}}_{m,n'}$ qui vérifie le PEUR et pour lequel la relation d'équivalence associée est la relation d'égalité.

Ce lemme motive la définition suivante :

DÉFINITION 3.1. — Nous dirons qu'un ensemble étudiable vérifiant le PEUR est *irréductible* si la relation d'équivalence associée est la relation d'égalité.

Nous pouvons enfin décrire les systèmes que nous cherchons :

THÉORÈME 3.1. — *À isomorphisme près, les ensembles étudiés non vides vérifiant le principe d'existence et d'unicité du remplaçant, pour lesquels $m = 1$ et qui sont irréductibles sont :*

- *Les ensembles $\mathcal{P}_{1,2k+1}$, $k \geq 1$ où on place nos points aux $2k + 1$ sommets d'un polygone régulier et où on garde exactement les tripletons qui ont le centre du polygone dans leur enveloppe convexe.*
- *L'ensemble $\mathcal{P}_{1,6}$ que nous avons donné dans le corollaire 1.9.*

Nous commençons par la preuve du lemme.

Preuve. — Montrons l'équivalence des propriétés (i) et (iii).

Commençons par (i) \Rightarrow (iii) : soient k et k' deux éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$ et soit P une partie fondamentale contenant k . On sait qu'il existe alors un élément p de P tel que $(P \cup \{k'\}) \setminus \{p\}$ est fondamentale. Si p était différent de k , cela donnerait une partie fondamentale contenant à la fois k et k' , ce qui est impossible par hypothèse. Ainsi $p = k$ et $(P \cup \{k'\}) \setminus \{k\}$ est fondamentale. L'autre sens s'obtient par symétrie. On a donc bien (i) \Rightarrow (iii).

Montrons maintenant (iii) \Rightarrow (i) : si P est une partie fondamentale contenant à la fois k et k' , alors $(P \cup \{k'\}) \setminus \{k\}$ est juste $P \setminus \{k\}$, donc a juste $2m$ éléments. Elle ne peut donc être fondamentale, d'où contradiction.

Ainsi, nous avons prouvé l'équivalence entre (i) et (iii). Montrons maintenant l'équivalence avec (ii).

Commençons par (iii) \Rightarrow (ii) : soit P une partie acceptable contenant k et P' une partie fondamentale contenue dans P . Si P' ne contient pas k , alors $(P \cup \{k'\}) \setminus \{k\}$ contient P' et est donc acceptable. Si P' contient k , alors $(P \cup \{k'\}) \setminus \{k\}$ contient $(P' \cup \{k'\}) \setminus \{k\}$ qui est fondamentale d'après (iii).

L'implication (ii) \Rightarrow (iii) est quant à elle claire car une partie fondamentale est acceptable (et pour des raisons de cardinalité).

Ainsi, les propriétés (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

Le fait que la relation considérée est une relation d'équivalence est clair quand on regarde la propriété (iii). De plus, le fait que $\mathcal{E}_{m,n}$ passe au quotient en un ensemble vérifiant le PEUR et tel que la relation associée est l'égalité se vérifie immédiatement. \square

Avant de prouver le théorème, nous pouvons donner deux propriétés combinatoires très simples d'un ensemble vérifiant le PEUR :

Un ensemble vérifiant le PEUR avec $m = 1$ ne peut contenir de partie de la forme $\{(ABX), (ACX), (BCX)\}$ ni de partie de la forme $\{(ABX), (ABY), (ABZ), (XYZ)\}$.

En effet, pour le premier, C aurait deux remplaçants dans (ABX) et pour le second, quel que soit le remplaçant de A dans (XYZ) , on aurait une partie ayant la première forme.

Montrons maintenant le théorème 3.1 :

Preuve. — Nous avons déjà dit que l'ensemble $\mathcal{P}_{1,6}$ vérifiait le PEUR. Le fait que les ensembles $\mathcal{P}_{1,2k+1}$ vérifient le PEUR résulte du fait que nous savons que chacun est l'ensemble d'un bon système associé à une variété de

López de Medrano-Verjovsky (mais on peut aussi le voir directement sans difficulté). La réciproque est plus délicate.

Nous supposons donc que nous sommes en présence d'un ensemble étudiable $\mathcal{E}_{1,n}$ qui vérifie le PEUR et qui est irréductible. Nous supposons de plus qu'il ne contient pas de sous-ensemble isomorphe à l'ensemble $\mathcal{P}_{1,6}$. Nous devons alors montrer qu'il est de la première forme annoncée dans le théorème. La preuve va se faire en plusieurs étapes que nous décrivons brièvement. Commençons par une notation :

DÉFINITION 3.2. — Pour deux éléments A et B de $\{1, \dots, n\}$, notons $\varphi(A, B)$ l'ensemble des C pour lesquels (ABC) est fondamentale.

La première étape consistera à étudier φ . La deuxième consistera à « couper l'ensemble en deux parties égales de chaque côté d'un point ». La dernière consistera à établir une bijection entre $\{1, \dots, n\}$ et les sommets d'un polygône et à conclure.

Première étape. — Cette première étape consistera à établir le fait suivant :

Soient A, B et C trois éléments de $\{1, \dots, n\}$. Il y a alors deux cas :

(i) Si (ABC) est fondamentale, alors $\{\varphi(A, B), \varphi(A, C), \varphi(B, C)\}$ forme une partition de $\{1, \dots, n\}$.

(ii) Sinon l'une des trois parties $\varphi(A, B), \varphi(A, C), \varphi(B, C)$ est la réunion disjointe des deux autres.

En fait, le (i) n'est qu'une retraduction du PEUR dans le cas où l'hypothèse est vérifiée.

Pour l'assertion (ii), montrons d'abord que chacune de ces parties est incluse dans la réunion des deux autres. Soit X dans $\varphi(A, B)$. Alors, (ABX) est fondamentale. D'après le principe d'existence du remplaçant, l'une des trois parties $(ABC), (ACX), (BCX)$ est fondamentale. Comme par hypothèse (ABC) ne l'est pas, c'est que l'une des deux autres l'est, et donc X est soit dans $\varphi(A, C)$, soit dans $\varphi(B, C)$. C'est-à-dire $\varphi(A, B) \subset \varphi(A, C) \cup \varphi(B, C)$. Les autres inclusions s'obtiennent par permutation circulaire.

Montrons maintenant que ces trois inclusions ne peuvent toutes être strictes. Dans le cas contraire, il existerait trois éléments X, Y, Z de $\{1, \dots, n\}$ tels que $(ABX), (ACX), (ABY), (BCY), (ACZ), (BCZ)$ soient toutes fondamentales. Alors, en appliquant à (ABX) le principe d'existence

du remplaçant avec Z , l'une des trois parties (ABZ) , (AXZ) , (BXZ) doit être fondamentale. La première violerait le principe d'unicité du remplaçant avec (ACZ) et (BCZ) , la seconde le violerait avec (ACX) et (ACZ) , c'est donc qu'on a (BXZ) . Par permutation circulaire, nous aurions également (AYZ) et (CXY) . Puis, en appliquant à (BXZ) le principe d'existence du remplaçant avec Y , on s'aperçoit qu'on a (XYZ) , les autres possibilités violant encore le principe d'unicité du remplaçant. Ainsi, nous avons un sous-ensemble qui vérifie le principe d'existence et d'unicité du remplaçant et qui est isomorphe à $\mathcal{P}_{1,6}$. Nous avons exclu cette possibilité. Cela nous montre que l'une des trois parties $\varphi(A, B)$, $\varphi(A, C)$, $\varphi(B, C)$ est la réunion des deux autres et nous incite à poser :

DÉFINITION 3.3. — Soient A, B et C trois éléments de $\{1, \dots, n\}$. On dit que A est entre B et C si $\varphi(B, C) = \varphi(A, B) \cup \varphi(A, C)$.

Pour obtenir l'assertion (ii), il ne reste donc plus qu'à montrer que si A est entre B et C , alors $\varphi(A, B)$ et $\varphi(A, C)$ sont disjoints. Supposons donc que A est entre B et C et soit D un élément de $\varphi(A, B) \cap \varphi(A, C)$. Alors, $\mathcal{E}_{1,n}$ devrait contenir (ABD) , (ACD) et (BCD) . Or on sait que c'est contradictoire. Donc $\varphi(A, B)$ et $\varphi(A, C)$ sont bien disjoints, ce qui nous donne l'assertion (ii).

Deuxième étape. — Cette deuxième étape consistera à établir le résultat suivant :

Soit A un élément de $\{1, \dots, n\}$. Nous considérons la relation binaire suivante sur $\{1, \dots, n\} \setminus \{A\}$:

$$B \equiv C \quad \text{si} \quad \varphi(A, B) \text{ et } \varphi(A, C) \text{ ne sont pas disjoints.}$$

Alors, la relation \equiv est une relation d'équivalence qui a exactement deux classes d'équivalence. De plus, ces deux classes ont même cardinal.

Commençons par montrer que \equiv est une relation d'équivalence. La réflexivité résulte de l'irréductibilité de $\mathcal{E}_{1,n}$, la symétrie est évidente. Montrons la transitivité. Soient donc B, C , et D trois points distincts de A , et on suppose que $\varphi(A, C)$ intersecte à la fois $\varphi(A, B)$ et $\varphi(A, D)$; nous devons alors montrer que $\varphi(A, B)$ et $\varphi(A, D)$ s'intersectent. D'après la première étape, si $\varphi(A, C)$ et $\varphi(A, B)$ s'intersectent, c'est que l'un des deux est inclus dans l'autre. Il en est de même pour $\varphi(A, C)$ et $\varphi(A, D)$. Ainsi, si l'un des deux ensembles $\varphi(A, B)$ ou $\varphi(A, D)$ contient $\varphi(A, C)$, alors ils s'intersectent et on a fini.

Reste le cas où $\varphi(A, C)$ contient à la fois $\varphi(A, B)$ et $\varphi(A, D)$, autrement dit que B et D sont entre A et C . Supposons de plus $\varphi(A, B)$ et $\varphi(A, D)$ disjoints. Comme (ABD) ne peut être fondamentale sans quoi (ABC) le serait aussi, il faut alors que A soit entre B et D , et donc

$$\varphi(B, D) = \varphi(A, B) \sqcup \varphi(A, D).$$

En prenant X dans $\varphi(A, B)$ et Y dans $\varphi(A, D)$, on devrait avoir que (ABX) , (ACX) , (BDX) , (ADY) , (ACY) et (BDY) sont fondamentales. On ne peut alors trouver de remplaçant à Y dans (ABX) sans avoir de contradiction immédiate. Ainsi, $\varphi(A, B)$ et $\varphi(A, D)$ ne peuvent être disjoints. Cela prouve que \equiv est bien une relation d'équivalence.

Montrons maintenant que cette relation n'a que deux classes d'équivalence, c'est-à-dire que si on prend A dans $\{1, \dots, n\}$ et trois points B, C et D distincts de A , alors $\varphi(A, B)$, $\varphi(A, C)$ et $\varphi(A, D)$ ne peuvent être deux à deux disjoints. Raisonnons par l'absurde en supposant que ce soit le cas. Appelons X un élément de $\varphi(A, B)$, Y un élément de $\varphi(A, C)$ et Z un élément de $\varphi(A, D)$.

Supposons d'abord que (ABC) soit fondamentale. Alors le remplaçant de D dans (ABC) doit être A sans quoi $\varphi(A, D)$ ne peut être disjoint des deux autres. Pour la même raison, le remplaçant de Z dans (ABC) doit aussi être A . Ainsi, (ABC) , (BCZ) , (BCD) et (ADZ) sont fondamentales. Or, nous savons que c'est impossible.

Ainsi, le remplaçant de C dans (ABX) ne peut être X , ni B . C'est donc A et $\mathcal{E}_{1,n}$ contient (BCX) . De même, il doit contenir (BCY) . Le remplaçant de Y dans (ABX) ne peut alors être X , car $Y \notin \varphi(A, B)$ ni A car on aurait (BCX) , (BCY) et (BXY) dans $\mathcal{E}_{1,n}$. Ce remplaçant est donc B et $\mathcal{E}_{1,n}$ contient (AXY) , ainsi que, par permutation circulaire, (AXZ) et (AYZ) , ce qu'on sait contradictoire.

Ainsi, il ne peut y avoir plus de deux classes d'équivalence pour \equiv . Il y en a par ailleurs au moins deux car si (ABC) est dans $\mathcal{E}_{1,n}$, alors B et C sont dans deux classes distinctes.

Il reste à montrer que ces deux classes, que nous noterons C_1 et C_2 ont autant d'éléments l'une que l'autre. Pour ce faire, nous allons définir une injection de l'une de ces classes dans un ensemble ayant autant d'éléments que l'autre, et vice versa.

Comme nous l'avons vu, si $B \equiv C$, alors (ABC) ne peut être fondamentale, donc si B est dans C_1 , alors $\varphi(A, B) \subset C_2$. Considérons alors l'application $d_{1A} : C_1 \rightarrow \mathcal{P}(C_2)$ qui à B dans C_1 associe $\varphi(A, B)$.

Alors, d_{1A} est injective. En effet, si B et C sont deux éléments de $\{1, \dots, n\}$ tels que $\varphi(A, B) = \varphi(A, C)$, alors la première étape nous montre que $\varphi(B, C) = \emptyset$, donc $B = C$. De plus, l'image de l'application d_{1A} est totalement ordonnée pour l'inclusion, toujours d'après la première étape. Ainsi, il existe un sous-ensemble de $\mathcal{P}(C_2)$, qui ne contient pas l'ensemble vide, qui a autant d'élément que C_1 et qui est totalement ordonné pour l'inclusion. Le cardinal d'un tel sous-ensemble ne pouvant dépasser celui de C_2 , on en déduit que C_1 a moins d'élément que C_2 . Par symétrie, ils en ont autant l'un que l'autre.

Troisième étape. — Nous allons maintenant terminer la preuve du théorème 3.1. Nous définissons maintenant une bijection entre nos éléments de $\{1, \dots, n\}$ et l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Appelons k le cardinal de C_1 . Nous avons alors $n = 2k + 1$. Nous avons de plus défini ci-dessus une application d_{1A} de C_1 dans $\mathcal{P}(C_2)$. Appelons d_{2A} l'application $B \rightarrow \varphi(A, B)$ de C_2 dans $\mathcal{P}(C_1)$. Appelons alors pour tout B dans $\{1, \dots, n\}$, $n_A(B)$ le cardinal de $\varphi(A, B)$. Remarquons que la restriction à C_1 (ou C_2) de n_A prend ses valeurs dans $\{1, \dots, k\}$ et est injective, donc bijective. D'après ce qui précède, un élément de $\{1, \dots, n\}$ autre que A est caractérisé par sa classe pour \equiv et son image par n_A . Définissons alors notre application f . On pose $f(A) = 1$. Si B est dans C_1 , on pose $f(B) = e^{2i\pi \cdot n_A(B)/n}$. Si B est dans C_2 , on pose $f(B) = e^{-2i\pi \cdot n_A(B)/n}$. L'application f est clairement une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Reste à prouver que (XYZ) est dans $\mathcal{E}_{1,n}$ si et seulement si 0 est dans l'enveloppe convexe du triangle de sommets $f(X), f(Y), f(Z)$. Montrons d'abord que c'est vrai si $X = A$. Soit Y un élément de C_1 alors $\varphi(A, Y)$ est constitué des $n_A(Y)$ éléments de C_2 dont l'image par n_A est la plus grande, c'est-à-dire est au moins $k - n_A(Y) + 1$. Soit exactement des éléments Z de C_2 pour lesquels $n_A(Y) + n_A(Z) \geq k + 1$. D'après la définition de f , c'est clairement équivalent au fait que 0 soit dans l'enveloppe convexe de l'image par f de (AYZ) .

Pour terminer, il reste à voir que si nous étions partis d'un autre point que A , nous aurions obtenu la même application f à isométrie près (et même à rotation près si on range bien nos deux classes). Par récurrence, il suffit de montrer cela si on part du point A' qui est dans C_1 et pour lequel $n_A(A') = 1$. On appelle alors C'_1 et C'_2 les classes d'équivalence de la nouvelle relation \equiv' et on demande que A soit dans C'_2 . Appelons alors f' la bijection entre $\{1, \dots, n\}$ et les racines n -ièmes de l'unité construite

à partir de ces données et r la multiplication par $e^{-2i\pi/n}$. On a alors

$$f'(A) = e^{-2i\pi/n} = r(f(A)), \quad f'(A') = 1 = r(f(A')).$$

Si Y est dans C_1 est n'est pas A' , on a A' entre A et Y . En effet, $\varphi(A, A')$ est inclus dans $\varphi(A, Y)$. On a alors $\varphi(A', Y) = \varphi(A, Y) \setminus \varphi(A, A')$. Ainsi Y est dans C'_1 et $n_{A'}(Y) = n_A(Y) - 1$. On a donc

$$f'(Y) = e^{2i\pi \cdot (n_A(Y) - 1)/n} = r(f(Y)).$$

Si Y est dans C_2 et $n_A(Y) \neq k$, alors A est entre A' et Y . En effet, $(AA'Y)$ n'est pas fondamentale et $\varphi(A, A')$ et $\varphi(A, Y)$ sont disjoints. Alors $\varphi(A', Y) = \varphi(A, Y) \sqcup \varphi(A, A')$. Ainsi Y est dans C'_2 et $n_{A'}(Y) = n_A(Y) + 1$. On a donc

$$f'(Y) = e^{-2i\pi \cdot (n_A(Y) + 1)/n} = r(f(Y)).$$

Il ne reste que l'élément Z de $\varphi(A, A')$. Par bijectivité, on a aussi $f'(Z) = r(f(Z))$.

Nous avons donc montré $f' = r \circ f$. Comme nous l'avons dit, cela montre que (XYZ) est dans $\mathcal{E}_{1,n}$ si et seulement si 0 est dans l'enveloppe convexe du triangle de sommets $f(X)$, $f(Y)$, $f(Z)$ et donc $\mathcal{E}_{1,n}$ est bien de la forme $\mathcal{P}_{1,2k+1}$.

Pour être complets, il nous faut maintenant prouver que si $\mathcal{E}_{1,n}$ vérifie le PEUR, est irréductible et contient $\mathcal{P}_{1,6}$, alors c'est exactement $\mathcal{P}_{1,6}$. Montrons d'abord que si un ensemble $\mathcal{E}_{1,7}$ vérifie le PEUR et contient $\mathcal{P}_{1,6}$, alors il ne peut être irréductible. En effet, quitte à faire agir la permutation (124)(356), on peut supposer que le remplaçant de 7 dans (124) est 1. L'ensemble $\mathcal{E}_{1,7}$ contient alors (247), en plus de (124) et (246). Il ne peut alors contenir (167). Quitte à faire agir la permutation (16)(24), on peut supposer que le remplaçant de 7 dans (136) est 6, donc $\mathcal{E}_{1,7}$ contient (137). On remarque alors que, pour une raison analogue à (167), l'ensemble $\mathcal{E}_{1,7}$ ne peut contenir ni (267), ni (367), ni (467). S'il contenait (567), il devrait contenir (257) et (357) en plus de (237), ce que nous savons impossible. Ainsi, (67) n'est pas complétable, ce qui interdit à $\mathcal{E}_{1,7}$ d'être irréductible, et $\mathcal{E}_{1,7} = \mathcal{P}_{1,6} \cup \{(137), (237), (157), (247), (457)\}$. Reste à voir qu'aucun ensemble irréductible vérifiant le PEUR ne contient cet ensemble.

Pour cela, supposons qu'il existe un ensemble vérifiant le PEUR $\mathcal{E}_{1,8}$ contenant $\mathcal{E}_{1,7}$ ainsi que (678). Pour tout A dans $\{1, \dots, 5\}$, le remplaçant de A dans (678) est 6 ou 7. De plus, si $(AB6)$ est dans $\mathcal{P}_{1,6}$, alors les

remplaçants de A et de B dans (678) ne peuvent être les mêmes, sans quoi en appelant C ce remplaçant, nous aurions $(AC8)$, $(BC8)$ et (ABC) . Tout ceci nous permet alors d'affirmer que le graphe construit comme dans la proposition 1.8 à partir de $P = \{6\}$ pour $\mathcal{P}_{1,6}$ est bipartite. Or, nous savons qu'il ne l'est pas. Cela constitue donc une contradiction. Nous avons donc prouvé que $\mathcal{E}_{1,8}$ ne pouvait exister. Ainsi, pour tout ensemble contenant $\mathcal{E}_{1,7}$ et vérifiant le PEUR, (67) n'est pas complétable, ce qui empêche l'ensemble considéré d'être irréductible. Nous avons donc terminé la preuve du théorème 3.1. \square

3.2. Les variétés associées.

Nous décrivons ici les variétés associées aux bons systèmes qui vérifient $m = 1$. D'après le théorème précédent et le corollaire 1.9, l'ensemble fondamental du système irréductible associé à un bon système est de la forme $\mathcal{P}_{1,2k+1}$ pour un entier k bien choisi.

En fait, nous pouvons encore décrire beaucoup mieux les variétés obtenues grâce au théorème suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Si $m = 1$ et si l'action est bonne, alors N est une déformation analytique d'une variété de López de Medrano-Verjovsky.*

Néanmoins, comme nous le verrons dans les exemples, N n'est pas forcément elle-même une variété de López de Medrano-Verjovsky.

Preuve. — Rappelons qu'une variété de López de Medrano-Verjovsky possède une déformation « canonique » obtenue en envoyant par homotopie chaque forme linéaire sur un des sommets d'un polygône régulier à un nombre impair de côtés [LDM]. Nous allons ici démontrer qu'il en est de même pour les variétés que nous considérons.

Nous avons démontré au paragraphe précédent que la variété S associée à une bonne action était la même que celle associée à une variété de López de Medrano-Verjovsky canonique bien choisie. Encore faut-il montrer que l'on peut déformer notre variété N en la variété précitée. Nous nous servirons pour cela du lemme suivant :

LEMME 3.2. — *Il existe une homotopie $\ell(t)$ de ℓ sur ℓ' pour laquelle les parties fondamentales sont imbriquées deux à deux à tout instant t , où ℓ' est une application de $\{1, \dots, n\}$ dans le dual de \mathbb{C} ayant pour image un polygône régulier.*

La preuve de ce lemme va reposer sur deux sous-lemmes. Le premier va nous permettre de nous ramener au cas où $\mathcal{E}_{1,n}$ est irréductible (en réalité, ce lemme n'est pas indispensable, mais il permet notamment de simplifier les notations). Le second sous-lemme va nous montrer qu'on dispose d'assez de liberté pour bouger nos formes linéaires, et la conclusion en découlera facilement.

LEMME 3.3. — *Les enveloppes convexes des images par ℓ de deux classes d'équivalence distinctes pour la relation \mathcal{R} sont disjointes. De plus, si on prend des points $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ de \mathbb{C}^* dans de telles enveloppes convexes et si les classes (X_1, X_2, X_3) et (Y_1, Y_2, Y_3) correspondantes sont imbriquées, alors (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) le sont également.*

LEMME 3.4. — *Soient $(\bar{\mathcal{E}}_{1,n}, \ell)$ un bon système avec $\bar{\mathcal{E}}_{1,n}$ irréductible, et A un élément de $\{1, \dots, n\}$. Alors, il existe une demi-droite D de \mathbb{C}^* , issue de ℓ_A , telle que si on modifie ℓ en ℓ' en envoyant A sur un élément quelconque de D , le système $(\mathcal{E}_{1,n}, \ell')$ reste un bon système.*

Montrons d'abord le lemme 3.3 :

Preuve. — Pour un élément A de $\{1, \dots, n\}$, notons \hat{A} l'enveloppe convexe de l'image par ℓ de sa classe d'équivalence. La première assertion du lemme résulte du fait suivant : si (ABC) est une partie fondamentale, alors il n'existe aucune droite rencontrant à la fois \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} .

En effet, il y aurait dans le cas contraire un élément de chaque enveloppe convexe dans chaque demi-plan. Cela donnerait des parties fondamentales non imbriquées ce qui contredirait le théorème 1.4.

La première assertion du lemme en résulte immédiatement car le contraire fournirait directement un contre-exemple à l'assertion précédente.

La deuxième partie du lemme résulte simplement du fait que si on a deux triangles qui ont deux sommets communs et dont les intérieurs rencontrent un même convexe K , alors si on considère un triangle ayant pour sommets les deux sommets communs et dont le troisième sommet est situé sur le segment joignant les sommets non communs, alors l'intérieur de ce triangle rencontre également notre convexe. \square

Montrons maintenant le lemme 3.4 :

Preuve. — Considérons un bon système $(\mathcal{E}_{1,n}, \ell)$ avec $\mathcal{E}_{1,n}$ irréductible, et soit A un élément de $\{1, \dots, n\}$. Nous reprenons les notations de la preuve

du théorème 3.1. L'ensemble $\{1, \dots, n\} \setminus \{A\}$ est donc partitionné en deux classes C_1 et C_2 . Nous allons prouver qu'il existe une droite Δ de $(\mathbb{C})^*$, passant par ℓ_A et telle que C_1 et C_2 ont leurs images par ℓ de part et d'autre de Δ (cf. figure 1).

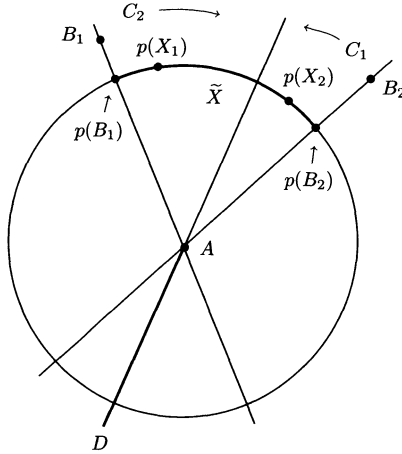


Figure 1

En effet, il existe un élément B_1 de C_1 tel que $\varphi(A, B_1) = C_2$ et un élément B_2 de C_2 tel que $\varphi(A, B_2) = C_1$. Appelons p la projection canonique de $(\mathbb{C})^* \setminus \{\ell_A\}$ sur le cercle des demi-droites de $(\mathbb{C})^*$ issues de ℓ_A et $\tilde{p} = p \circ \ell$. Les images par \tilde{p} des éléments de C_2 sont toutes situées sur le même demi-cercle délimité par la demi-droite $[\ell_A \ell_{B_1})$, qui est celui qui contiendra $\tilde{p}(B_2)$. De même, les images par \tilde{p} des éléments de C_1 sont toutes situés sur le même demi-cercle délimité par la demi-droite $[\ell_A \ell_{B_2})$ celui qui contient $\tilde{p}(B_1)$. Appelons $[\tilde{p}(B_1); \tilde{p}(B_2)]$ l'adhérence de l'intersection de ces deux demi-cercles, que l'on identifie à un intervalle. Alors si X_1 est dans C_1 , X_2 dans C_2 et leurs images par \tilde{p} dans $[\tilde{p}(B_1); \tilde{p}(B_2)]$, alors $\tilde{p}(X_1)$ est plus proche de $\tilde{p}(B_1)$ que $\tilde{p}(X_2)$. En effet, le contraire interdirait aux parties fondamentales (AB_1X_2) et (AB_2X_1) d'être emboîtées. Ainsi, il existe un point \tilde{X} de $[\tilde{p}(B_1); \tilde{p}(B_2)]$ qui sépare les points de $\tilde{p}(C_1)$ des points de $\tilde{p}(C_2)$. On peut prendre pour Δ la droite contenant la demi-droite \tilde{X} .

Considérons alors une partie fondamentale (ABC) . Alors le segment $[\ell(B); \ell(C)]$ rencontre la demi-droite \tilde{X} pour des raisons d'orientation. Si on considère alors D la demi-droite issue de ℓ_A opposée à \tilde{X} et ℓ_0 un point de D . Il est alors clair que ℓ_A est dans l'enveloppe convexe des points ℓ_0 , ℓ_B et ℓ_C . Dans ce cas, le triangle de sommets ℓ_A , ℓ_B , ℓ_C est inclus dans le triangle de sommets ℓ_0 , ℓ_B et ℓ_C . Le lemme en résulte immédiatement. \square

Le lemme 3.2 résulte alors facilement de ces deux lemmes. En effet, d'après le premier, on peut supposer qu'on est dans le cas irréductible. Considérons un cercle dans $(\mathbb{C})^*$ qui entoure tous nos ℓ_i . Le second lemme nous permet de ramener nos sommets l'un après l'autre sur ce cercle par homotopie, en déplaçant chaque sommet le long de la demi-droite associée jusqu'à ce qu'il soit sur le cercle considéré. Maintenant, il est clair que si on a un système étudiable $(\mathcal{E}_{1,n}, \ell)$ avec $\mathcal{E}_{1,n}$ irréductible et l'image de ℓ sur un cercle, alors le système est bon si et seulement si l'ordre cyclique est le même (à orientation près) que celui d'un bon système ayant l'image de ℓ sur un polygone régulier. Ainsi, en envoyant par homotopie nos éléments sur un polygone régulier inscrit dans le cercle contenant l'image de ℓ et sans en modifier l'ordre cyclique au cours du parcours (c'est le cas lorsque tous les sommets tournent dans le même sens, et que chaque sommet tourne à vitesse angulaire constante $< 2\pi$), on a bien construit une homotopie qui satisfait aux exigences du lemme 3.2.

Nous pouvons maintenant finir de prouver le théorème. L'image de l'homotopie donnée par le lemme précédent est un chemin dans l'espace vectoriel des applications de $\{1, \dots, n\}$ dans le dual de \mathbb{C} . Prenons un voisinage \mathcal{V} de ce chemin suffisamment petit pour qu'étant donné un élément L de ce voisinage, deux éléments quelconques de $\mathcal{E}_{1,n}$ soient imbriqués dans le système $(\mathcal{E}_{1,n}, L)$. On considère maintenant l'action suivante de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ sur $S \times \mathcal{V}$:

$$(Z, w) \cdot (z_1, \dots, z_n, L) \longmapsto (w e^{[L(1)](Z)} z_1, \dots, w e^{[L(n)](Z)} z_n, L).$$

C'est une action holomorphe libre et proprement discontinue. De plus, l'espace \mathcal{N} des orbites de cette action est une variété holomorphe et la projection naturelle Π de \mathcal{N} sur \mathcal{V} est une submersion. On en déduit que $N = \Pi^{-1}(\ell)$ est une déformation analytique de $\Pi^{-1}(\ell')$ qui est une variété de López de Medrano-Verjovsky. Le théorème est donc démontré. \square

4. Exemples.

Nous allons maintenant donner des exemples de variétés associées à des bons systèmes, mais qui ne sont pas des variétés de Meersseman. Une telle variété est de dimension minimum 4, et voici l'exemple d'une variété de dimension 4 qui est à la frontière des variétés de López de Medrano-Verjovsky.

Exemple 1. — Considérons

$$\mathcal{E}_{1,6} = \{(135), (136), (145), (146), (235), (236), (245), (246)\}.$$

Et, pour $1 \leq k \leq 6$, posons $\ell_k(z) = e^{i(k-1)\pi/3}$. Pour prouver que ce système est un bon système, il suffit de dessiner le graphe complet associé dans \mathbb{R}^2 .

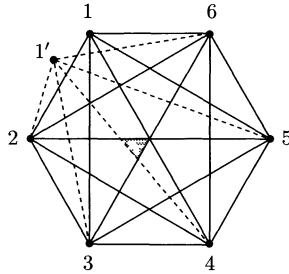


Figure 2

On voit qu'en perturbant très légèrement la position d'un de nos sommets de manière judicieuse, $\mathcal{E}_{1,6}$ correspond exactement à l'ensemble des parties à trois éléments ayant le petit triangle central dans leur enveloppe convexe. Cela montre d'abord que $\mathcal{E}_{1,6}$ vérifie le PEUR. Comme d'autre part l'intersection des enveloppes convexes de deux de ces parties ne peut être restreinte à ce seul petit triangle, on voit que deux parties quelconques de $\mathcal{E}_{1,6}$ sont imbriquées.

Exemple 2. — Donnons-nous maintenant une manière plus générale de construire de bons systèmes. Considérons une variété de Meersseman. Alors l'ensemble des parties fondamentales est l'ensemble $\mathcal{E}_{m,n}^1$ des parties ayant le bon cardinal et dont l'image par ℓ possède une composante connexe bornée O de \mathcal{O} dans son enveloppe convexe. On se demande si on change de beaucoup $\mathcal{E}_{m,n}$ quand on change cette composante. Pour cela, regardons la frontière de O dans $(\mathbb{C}^m)^*$. Elle est formée d'une réunion de morceaux convexes d'hyperplans affines, morceaux que nous appellerons *murs* de cette composante. Considérons un de ces murs que nous noterons \mathcal{M} . Alors, \mathcal{M} sépare O d'une autre composante de \mathcal{O} et supposons que cette nouvelle composante O' est aussi bornée. Définissons alors de manière naturelle l'ensemble $\mathcal{E}'_{m,n}$ et la variété N' . Alors, l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'image par ℓ d'une partie à $2m + 1$ éléments de $\{1, \dots, n\}$ contiendra exactement une des deux parties O ou O' si et seulement si cette image contient exactement $2m$ points sur l'hyperplan contenant \mathcal{M} et si l'enveloppe convexe de ces $2m$ points contient \mathcal{M} . En particulier, s'il

n'existe que $2m$ formes ℓ_i sur l'hyperplan en question, alors on obtient ainsi exactement les parties à $2m + 1$ éléments qui contiennent ces $2m$ éléments là. Appelons alors V (resp. V') la sous-variété de N (resp. N') formée des éléments dont l'ensemble des coordonnées non nulles ne contient aucun élément de $\mathcal{E}_{m,n} \cap \mathcal{E}'_{m,n}$. Alors, par définition, les variétés complexes $N \setminus V$ et $N' \setminus V'$ sont les mêmes. Ainsi, on peut, à partir d'une variété de Meersseman et d'un de ses murs, construire une autre variété, qui est aussi de Meersseman, en remplaçant la sous-variété V par une autre sous-variété, à savoir V' .

Nous refaisons maintenant cette construction à partir de $p \geq 2$ murs distincts de notre composante. Nous obtenons ainsi p variétés N_1, \dots, N_p , chacune s'obtenant en remplaçant une sous-variété de la variété de départ, respectivement V_1, \dots, V_p par une autre sous-variété, respectivement V'_1, \dots, V'_p . Alors, si V_1, \dots, V_p sont deux à deux disjointes, il est possible de faire tous les remplacements simultanément. On obtient alors une variété avec la même application ℓ que les précédentes mais celle-ci n'est plus nécessairement une variété de Meersseman car l'intersection globale des intérieurs des enveloppes convexes des images par ℓ de tous les éléments de $\mathcal{E}_{m,n}^{(p)}$ peut être vide.

Donnons tout de suite un exemple :

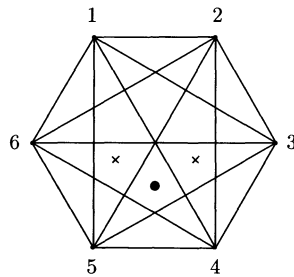


Figure 3

Nous voyons que l'ensemble des tripletons de $\{1, \dots, 6\}$ dont l'enveloppe convexe contient la case marquée d'un point noir est l'ensemble $\mathcal{E}_{1,6}$ suivant : $\{(135), (145), (146), (235), (245), (246), (346), (356)\}$. Appelons $(\mathcal{E}^1)_{1,6}$ (resp. $(\mathcal{E}^2)_{1,6}$) l'ensemble des tripletons de $\{1, \dots, 6\}$ dont l'enveloppe convexe contient la case marquée d'une croix et qui est dans le triangle 125 (resp. 124). Alors, $(\mathcal{E}^1)_{1,6}$ est obtenu à partir de $\mathcal{E}_{1,6}$ en remplaçant les parties (235) et (245) par les parties (125) et (256). De même, $(\mathcal{E}^2)_{1,6}$ est obtenu à partir de $\mathcal{E}_{1,6}$ en remplaçant les parties (145) et (146) par les parties (124) et (134). La variété associée au système $((\mathcal{E}^1)_{1,6}, \ell)$

contient tous les éléments de N excepté ceux dont les coordonnées d'indice 1 et 6 sont nulles. De même, la variété associée au système $((\mathcal{E}^2)_{1,6}, \ell)$ contient tous les éléments de N excepté ceux dont les coordonnées d'indice 2 et 3 sont nulles. Comme (45) n'est pas acceptable, les deux sous-variétés de N correspondantes sont disjointes. Ainsi, on peut effectuer les deux remplacements simultanément, ce qui nous donne que $((\mathcal{E}^{(2)})_{1,6}, \ell)$ est un bon système, où $(\mathcal{E}^{(2)})_{1,6} = \{(124), (125), (134), (135), (246), (256), (346), (356)\}$. Néanmoins, la variété associée n'est pas une variété de López de Medrano-Verjovsky car l'intersection globale des intérieurs des enveloppes convexes de (124), (125), et (356) est vide.

Donnons un autre exemple, avec $p = 3$.

On place neuf points, numérotés de 1 à 9, aux sommets d'un polygone régulier (figure 4). L'ensemble $\mathcal{P}_{1,9}$ des parties à trois éléments dont l'enveloppe convexe contient le centre du polygone est formé des tripletons suivants :

(126), (136), (137), (146), (147), (148), (156), (157), (158), (159),
 (237), (247), (248), (257), (258), (259), (267), (268), (269), (348),
 (358), (359), (368), (369), (378), (379), (459), (469), (479), (489).

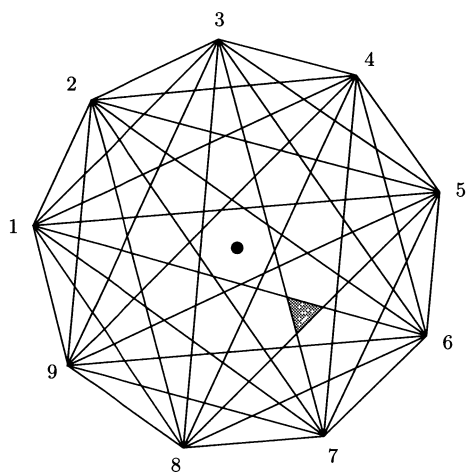


Figure 4

La composante connexe du centre du polygone possède neuf murs, chacun étant une partie d'un hyperplan reliant deux sommets les plus éloignés possible de notre polygone. Considérons les murs situés sur les

hyperplans reliant les points 1 à 6, 3 à 7 et 4 à 9. Alors, les sous-variétés correspondantes sont deux à deux disjointes. En effet, les éléments de V_1 ont leur coordonnées d'indice 7, 8, 9 qui sont nulles. Pour V_2 , ce sont les coordonnées 4, 5, 6 et pour V_3 , les coordonnées 1, 2, 3. La variété alors obtenue après remplacement est la variété associée à l'ensemble étudiable ayant pour éléments

(147), (148), (149), (157), (158), (159), (167), (168), (169), (247),
 (248), (249), (257), (258), (259), (267), (268), (269), (347), (348),
 (349), (357), (358), (359), (367), (368), (369).

On vérifie aisément que ce n'est pas une variété de López de Medrano-Verjovsky. En effet l'intersection globale des enveloppes convexes des ensembles (169), (349) et (367) est vide.

Exemple 3. — La construction précédente peut être généralisée.

DÉFINITION 4.1. — Soit $(\mathcal{E}_{m,n}, \ell)$ un bon système. On dit qu'une partie complétable P à $2m$ éléments de $\{1, \dots, n\}$ est un *pseudo-mur* du système s'il existe un demi-espace ouvert H_+ de $(\mathbb{C}^m)^*$ délimité par l'hyperplan contenant l'ensemble image de P par ℓ tel qu'on puisse trouver k dans $\{1, \dots, n\}$ avec ℓ_k dans H_+ , et que pour tout tel k on ait $P \cup \{k\}$ dans $\mathcal{E}_{m,n}$.

PROPOSITION 4.1. — Soit $(\mathcal{E}_{m,n}, \ell)$ un bon système et P un de ses pseudo-murs. On suppose que l'hyperplan H de $(\mathbb{C}^m)^*$ contenant $\ell(P)$ ne contient l'image par ℓ d'aucun autre élément de $\{1, \dots, n\}$. On appelle alors $\widetilde{\mathcal{E}}_{m,n}$ l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$ obtenu à partir de $\mathcal{E}_{m,n}$ en enlevant les parties contenant P et en rajoutant les parties de la forme $P \cup \{k\}$ où k parcourt l'ensemble des éléments de $\{1, \dots, n\}$ dont l'image par ℓ est dans H_- , le deuxième demi-plan ouvert délimité par H .

Alors, si $\widetilde{\mathcal{E}}_{m,n}$ n'est pas vide, le système $(\widetilde{\mathcal{E}}_{m,n}, \ell)$ est un bon système.

Preuve. — Il suffit de prouver que ce système satisfait bien aux conditions du théorème 1.4. Montrons d'abord que deux éléments quelconques de $\widetilde{\mathcal{E}}_{m,n}$ sont imbriqués. C'est clair si les deux éléments sont dans $\mathcal{E}_{m,n}$ et c'est clair aussi si aucun des deux n'y est. Pour le cas où un seul des deux est dans $\mathcal{E}_{m,n}$, nous pouvons nous servir du lemme suivant :

LEMME 4.1. — Soit \mathcal{E} un espace affine réel, \mathcal{H} un hyperplan de \mathcal{E} et \mathcal{H}_+ un des deux hyperplans ouverts définis par \mathcal{H} . Soient K_1 et K_2 deux

compactes convexes de \mathcal{E} avec K_1 d'intérieur non vide et rencontrant \mathcal{H}_+ , K_2 inclus dans \mathcal{H} et disjoint de l'intérieur de K_1 . On demande également que \mathcal{H} ne soit pas un hyperplan d'appui de K_1 . Alors il existe une application affine de \mathcal{E} dans \mathbb{R} qui est strictement positive sur l'intérieur de K_1 , négative sur K_2 et qui s'annule en un point de $K_1 \cap \mathcal{H}_+$.

Preuve. — On sait qu'il existe une application affine f_0 de \mathcal{E} dans \mathbb{R} qui est nulle sur \mathcal{H} et strictement négative sur \mathcal{H}_+ . De plus, le théorème de Hahn-Banach nous offre une application affine h_0 non nulle de \mathcal{E} dans \mathbb{R} qui est positive sur K_1 et négative sur K_2 . Soit alors λ le plus grand réel tel que $h_\lambda = h_0 + \lambda f_0$ soit positive sur K_1 . Alors l'application h_λ est positive sur K_1 , négative sur K_2 et s'annule en un point de $K_1 \cap \mathcal{H}_+$ par maximalité de λ . Ainsi, si h_λ est non nulle, elle vérifie les conditions du lemme.

D'autre part, si h_λ est nulle, cela signifie que h_0 est un multiple de f_0 . Comme la restriction de h_0 à K_1 est positive et que \mathcal{H} n'est pas un hyperplan d'appui de K_1 , c'est que K_1 est inclus dans \mathcal{H}_+ . Alors, l'application $h_0 - \min_{K_1} h_0$ satisfait bien les propriétés demandées par le lemme. \square

Appliquons alors le lemme en prenant pour K_1 l'enveloppe convexe de l'image par ℓ d'une partie P' de $\mathcal{E}_{m,n}$, pour \mathcal{H} l'hyperplan H et pour K_2 l'enveloppe convexe de $\ell(P)$. Clairement, K_1 est d'intérieur non vide et rencontre H_+ . Comme la conclusion du lemme précédent ne peut être vérifiée, sans quoi K_1 et $\ell(P \cup \{k\})$ seraient non imbriqués, où k désigne un élément de P' dont l'image par ℓ est dans H_+ et a une image nulle par l'application considérée, on en déduit que si H n'est pas hyperplan d'appui de K_1 , alors K_2 rencontre l'intérieur de K_1 . Or, P' ne peut avoir H comme hyperplan d'appui que s'il contient tout P . En effet, dans le cas contraire, P' contiendrait une partie stricte P'' de P et les autres éléments de P' auraient leur image par ℓ dans H_+ . Il existerait alors une forme linéaire h non nulle qui serait nulle sur P'' , négative sur P et telle que $h \circ \ell$ ait pour minimum 0 sur $P' \setminus P''$, en un point k . Alors P' et $P \cup \{k\}$ ne pourraient pas être imbriquées. On en déduit que quel que soit k dans $\{1, \dots, n\} \setminus P$, si P' est dans $\mathcal{E}_{m,n} \cap \widetilde{\mathcal{E}}_{m,n}$, alors P' et $P \cup \{k\}$ sont imbriquées.

Montrons maintenant que $\widetilde{\mathcal{E}}_{m,n}$ vérifie le principe d'existence du remplaçant. Soit P' un élément de $\widetilde{\mathcal{E}}_{m,n}$ et k' un élément de $\{1, \dots, n\}$. Il faut distinguer plusieurs cas. Le plus simple est le cas où $P' \cup \{k'\}$ ne contient pas P . Dans ce cas, P' est aussi dans $\mathcal{E}_{m,n}$ et le remplaçant de k' dans P' pour $\mathcal{E}_{m,n}$ l'est aussi pour $\widetilde{\mathcal{E}}_{m,n}$. Sinon :

- *Premier cas* : P' est dans $\mathcal{E}_{m,n}$.

Soit k le remplaçant de k' dans P' pour $\mathcal{E}_{m,n}$. Si k n'est pas remplaçant de k' dans P' pour $\widetilde{\mathcal{E}}_{m,n}$, c'est qu'obligatoirement $(P' \setminus \{k\}) \cup \{k'\}$ est de la forme $P \cup \{k''\}$ où $\ell_{k''}$ est dans H_+ et il est clair qu'alors ℓ_k est dans H_- pour ne pas violer le principe d'unicité du remplaçant pour $\mathcal{E}_{m,n}$. On en déduit que k'' est remplaçant de k' dans P' pour $\widetilde{\mathcal{E}}_{m,n}$.

- *Deuxième cas* : P' n'est pas dans $\mathcal{E}_{m,n}$.

Dans ce cas, P' est de la forme $P \cup k$ où ℓ_k est dans H_- . Si $\ell_{k'}$ est dans H_- , k remplace k' dans P' . Si k' est dans P , il est son propre remplaçant dans P' . Si $\ell_{k'}$ est dans H_+ , alors $P \cup \{k'\}$ est dans $\mathcal{E}_{m,n}$. Soit k'' le remplaçant de k dans $P \cup \{k'\}$ pour $\mathcal{E}_{m,n}$. k'' ne peut être k' . Ainsi, $k'' \in P$ et donc $(P \setminus \{k''\}) \cup \{k, k'\}$ est dans $\mathcal{E}_{m,n}$ et dans $\widetilde{\mathcal{E}}_{m,n}$. Ainsi, k'' est bien remplaçant de k' dans P' . Nous avons donc examiné tous les cas, ce qui termine la preuve de la proposition. \square

Exemple. — Reprenons la figure 4 et considérons $\mathcal{E}_{1,9}$ l'ensemble des tripletons ayant la partie en gris dans leur enveloppe convexe. On a

$$\mathcal{E}_{1,9} = \{(147), (157), (158), (167), (168), (169), (247), (257), (258), (267), (268), (269), (347), (357), (358), (367), (368), (369), (458), (468), (469), (478), (479), (569), (579), (589)\}.$$

On remarque que (48) est un pseudo-mur de notre système. La variété obtenue par la construction ci-dessus a pour ensemble fondamental l'ensemble

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{1,9} = \{(147), (148), (157), (158), (167), (168), (169), (247), (248), (257), (258), (267), (268), (269), (347), (348), (357), (358), (367), (368), (369), (469), (479), (489), (569), (579), (589)\}.$$

On remarque que ce n'est pas une variété de López de Medrano-Verjovsky car l'intersection globale des intérieurs des enveloppes convexes de (169), (347) et (348) est vide.

Ainsi, même si on part d'une variété de López de Medrano-Verjovsky et qu'on ne suppose pas que le pseudo-mur est un mur, on ne tombe pas forcément sur une autre variété de López de Medrano-Verjovsky.

BIBLIOGRAPHIE

- [Akh] D.N. AKHIEZER, Lie group actions in complex analysis, *Aspects of Math.*, (1995).
- [CE] E. CALABI, B. ECKMANN, A class of complex manifolds which are not algebraic, *Annals of Math.*, 58 (1953), 494–500.
- [CKP] C. CAMACHO, N. KUIPER, J. PALIS, The topology of holomorphic flows with singularities, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 48 (1979), 5–38.
- [Hae] A. HAEFLIGER, Deformations of transversely holomorphic flows on spheres and deformations of Hopf manifolds, *Comp. Math.*, 55 (1985), 241–251.
- [Ho] H. HOPF, *Zur Topologie der komplexen Manifaltigkeiten*, Studies and Essays presented to R. Courant, New York, 1948.
- [Ino] M. INOUE, On surfaces of class VII_0 , *Invent. Math.*, 24 (1974), 269–310.
- [LDM] S. LÓPEZ DE MEDRANO, The topology of the intersection of quadrics in \mathbb{R}^n , *Lecture Notes in Math.*, 1370 (1989), 280–292.
- [LDMV] S. LÓPEZ DE MEDRANO, A. VERJOVSKY, A new family of complex compact non symplectic manifolds, *Bol. Soc. Math. Bra.*, 28–2 (1997), 253–269.
- [LN1] J.-J. LOEB, M. NICOLAU, Holomorphic flows and complex structures on products of odd dimensional spheres, *Math. Annalen*, 306 (1996), 781–817.
- [LN2] J.-J. LOEB, M. NICOLAU, On the complex geometry of a class of non-kählerian manifolds, *Israel J. Math.*, 110 (1999), 371–379.
- [Me] L. MEERSSEMAN, Un procédé géométrique de construction de variétés compactes, complexes, non algébriques en dimension quelconque, Thèse de doctorat, Université de Lille I, 1998.
- [Me'] L. MEERSSEMAN, A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension, *Math. Annalen*, 317 (2000), 79–115.
- [Wi] J. WINKELMANN, Complex analytic geometry of complex parallelizable manifolds, *Mémoires S.M.F., nouv. série*, 72–73 (1998).

Manuscrit reçu le 29 mars 2000,
accepté le 27 février 2001.

Frédéric BOSIO,
Université de Poitiers
UFR Sciences SP2MI
Département de Mathématiques
Boulevard Marie-et-Pierre-Curie
Téléport 2 – BP 30179
86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex (France).
bosio@mathlabo.univ-poitiers.fr