



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Nafaa CHBILI

**Les invariants  $\theta_p$  des 3-variétés périodiques**

Tome 51, n° 4 (2001), p. 1135-1150.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2001\\_\\_51\\_4\\_1135\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_4_1135_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

# LES INVARIANTS $\theta_p$ DES 3-VARIÉTÉS PÉRIODIQUES

par Nafaa CHBILI

---

## 1. Introduction.

Le progrès réalisé en théorie des nœuds grâce à la découverte des invariants polynomiaux, notamment le polynôme de Jones (1984) a été suivi quelques années plus tard d'un progrès semblable en théorie des variétés de dimension 3. À partir de la théorie quantique des champs topologiques, Witten [17] a montré l'existence d'une famille d'invariants topologiques des variétés compactes connexes orientées de dimension 3. Il revient ensuite à Reshitikhin et Turaev [15] de donner une construction mathématique de ces invariants en utilisant l'algèbre quantique  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ , d'où le nom invariants quantiques. Cette construction a été suivie d'une autre beaucoup plus élémentaire, due à Lickorish [10]. En effet, ce dernier définit ces invariants en utilisant seulement la théorie skein associée au crochet de Kauffman, évalué en les racines  $4p$ -ième de l'unité. Dans ce même esprit, l'invariant  $\theta_p$  est introduit par Blanchet, Habbeager, Masbaum et Vogel, l'avantage de l'approche suivie par ces derniers [2] est qu'elle a permis de montrer qu'on peut étendre la définition des invariants de Lickorish en évaluant le crochet de Kauffman en les racines de l'unité d'ordre  $2p$ .

Soit  $M$  une variété compacte connexe orientée sans bord de dimension 3 (dans la suite le mot *variété* désignera une variété sans bord). La question qu'on se pose dans ce travail est la suivante. Supposons que  $M$  vérifie une certaine propriété géométrique (symétrie) : comment se

---

*Mots-clés* : 3-variété périodique – Entrelacs périodiques – Sphère d'homologie – Invariants quantiques.

*Classification math.* : 57M27.

comportent les invariants  $\theta_p(M)$ ? Autrement dit, jusqu'à quel point ces invariants sont-ils sensibles à la géométrie de la variété considérée. Une réponse à cette question permettra non seulement d'avoir une idée sur les symétries de la variété en question, mais aussi de mesurer la sensibilité et la fidélité de ces invariants. Dans ce travail nous nous intéressons en particulier aux variétés sur lesquelles le groupe cyclique  $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  agit semi-librement avec un cercle comme ensemble de points fixes.

**DÉFINITION.** — Soient  $r \geq 2$  un entier et  $M$  une variété compacte connexe orientée de dimension 3. On dit que  $M$  est  $r$ -périodique si et seulement si le groupe  $G = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  agit différemmentiellement sur  $M$  et l'ensemble des points fixes par l'action de  $G$  sur  $M$  est un cercle. On note  $\bar{M}$  la variété quotient.

Soit  $p \geq 3$  un entier et  $B_p$  le *skein module* de Kauffman du tore solide  $S^1 \times B^2$  à coefficients dans l'anneau  $\Lambda_p = \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]_{/\Phi_{2p}(A)}$ , où  $\Phi_{2p}(A)$  est le polynôme cyclotomique d'ordre  $2p$ . On sait que  $B_p$  est isomorphe à l'algèbre  $\Lambda_p[z]$ , où  $z$  correspond à une bande axiale standard dans le tore  $S^1 \times I \times I$  (voir le début du § 7). Dans la suite, nous rappelons brièvement la définition de l'invariant  $\theta_p$  tel qu'il est introduit dans [2]. Pour tout réel  $d$ , on note par  $[d]$  la partie entière de  $d$ . Dans  $B_p$ , on définit l'élément

$$\Omega_p = \sum_{i=0}^{[(p-3)/2]} \langle e_i \rangle e_i,$$

où  $(e_i)_i$  est définie par  $e_0 = 1$ ,  $e_1 = z$  et la relation de récurrence  $e_{i+1} = ze_i - e_{i-1}$ . Rappelons qu'on a

$$\langle e_i \rangle = (-1)^i \frac{A^{2(i+1)} - A^{-2(i+1)}}{A^2 - A^{-2}}.$$

Soit  $L$  un entrelacs en bandes à  $m$  composantes. Le multicrochet  $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_L$  est une forme multilinéaire de  $B_p \times B_p \times \dots \times B_p \rightarrow \Lambda_p$  définie sur les éléments de la base de façon que  $\langle z^{i_1}, z^{i_2}, \dots, z^{i_m} \rangle_L$  est égale au crochet de Kauffman de  $L_{i_1, i_2, \dots, i_m}$ , où  $L_{i_1, i_2, \dots, i_m}$  représente la classe d'isotopie dans  $B_p$  de l'entrelacs obtenu à partir de  $L$  en remplaçant la  $j$ -ième composante de  $L$  par  $i_j$  bandes parallèles à celle-ci situées dans un voisinage suffisamment petit. Dans la suite, nous notons par  $t$  l'automorphisme de  $B_p$  induit par un twist positif du tore solide; par  $t^{-1}$  on notera l'automorphisme inverse. Enfin, par  $b_+(L)$  (respectivement  $b_-(L)$ ) nous désignons le nombre de valeurs propres positives (respectivement négatives) de la matrice d'enlacement de l'entrelacs en bandes  $L$ .

Soit  $M$  une variété compacte connexe orientée de dimension 3. On sait que  $M$  s'obtient à partir de la sphère  $S^3$  par chirurgie le long d'un entrelacs en bandes  $L$ . L'invariant  $\theta_p(M)$  est défini par la formule suivante :

$$\theta_p(M) = \frac{\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_L}{\langle t(\Omega_p) \rangle^{b_+(L)} \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{b_-(L)}}.$$

Rappelons que l'invariant  $\theta_p(M)$  prend ses valeurs dans  $\Lambda_p[p^{-1}]$  ([2], th. B, p. 686). Cependant, si  $r$  est premier avec  $p$ , alors  $p$  est inversible dans  $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  et par suite, si on considère  $B_p$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}[A^{\pm 1}]_{/\mathbb{F}_{2p}(A)}$ , alors  $\theta_p(M)$  peut être vu comme un polynôme en  $A$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ . Dans cet article, nous démontrons le résultat donné par le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** — *Soit  $r$  un nombre premier impair et  $M$  une sphère d'homologie rationnelle de dimension 3. Si  $M$  est  $r$ -périodique, alors pour tout entier  $p \geq 3$  premier avec  $r$  on a*

$$\theta_p(M) \equiv (\theta_p(\bar{M}))^r (-A^{-6-p(p-1)/2})^\alpha \pmod{r, \delta^r - \delta},$$

où  $\delta = -A^2 - A^{-2}$  et  $\alpha$  est un entier.

**COROLLAIRE 2.** — *Soit  $r$  un nombre premier impair et  $M$  une sphère d'homologie rationnelle de dimension 3. Supposons que  $M$  est  $r$ -périodique, alors pour tout  $p \geq 3$  tel que  $r \equiv \pm 1 \pmod{p}$ , il existe un entier  $\alpha$  tel que*

$$\theta_p(M) \equiv (\theta_p(\bar{M}))^r (-A^{-6-p(p-1)/2})^\alpha \pmod{r}.$$

*Preuve.* — Voir à la fin du §5.

**COROLLAIRE 3.** — *Soit  $r$  un nombre premier impair et  $M$  un revêtement cyclique régulier à  $r$  feuillets ramifié au-dessus de  $S^3$ . Alors pour tout  $p \geq 3$  tel que  $r \equiv \pm 1 \pmod{p}$ , il existe un entier  $\alpha$  tel que*

$$\theta_p(M) \equiv (-A^{-6-p(p-1)/2})^\alpha \pmod{r}.$$

*Preuve.* — Voir à la fin du §5.

Cet article est organisé de la manière suivante. Dans le paragraphe 2, nous illustrons les corollaires 2 et 3 par des exemples. Le paragraphe 3 établit le lien entre entrelacs et variétés périodiques. La démonstration du théorème 1 s'étend sur les paragraphes 4 et 5, où nous rappelons aussi quelques propriétés des invariants  $\theta_p$  utiles pour la démonstration. Une généralisation du théorème principal est donnée dans le paragraphe 6. Enfin, un appendice est réservé pour la preuve d'un résultat clef utilisé dans la démonstration du théorème 1.

*Remerciements.* — Ce travail a été achevé pendant un séjour à l'Université de Genève. Je remercie le Fond National Suisse de la Recherche Scientifique qui a bien voulu financer ce séjour. Je remercie également le professeur J.C. Hausmann pour son hospitalité ainsi que P. Vogel pour plusieurs discussions profitables à ce travail.

## 2. Applications.

La plus connue, après  $S^3$ , des sphères d'homologie entière est sans doute la sphère de Poincaré  $\Sigma$ . Elle a été construite par H. Poincaré lui-même comme un contre exemple à une version antérieure de sa célèbre conjecture. En fait,  $\Sigma$  est une variété de dimension 3 ayant la même homologie que  $S^3$  mais un groupe fondamental isomorphe au groupe dodécahédral (voir [13]). Cette sphère s'obtient à partir de  $S^3$  par chirurgie le long du nœud de trèfle droit avec framing 1. On note par  $T$  ce nœud. Il est bien connu que  $\Sigma$  est 5-périodique. En effet,  $\Sigma$  est un revêtement cyclique régulier à 5 feuillets ramifié au-dessus de  $S^3$ . L'exemple 1 (ci-dessous) montre que l'invariant  $\theta_6(M)$  obéit à la condition donnée par le corollaire 3. Cependant, l'exemple 2 montre que l'invariant  $\theta_5(M)$  ne vérifie pas la relation donnée par le corollaire 3 pour  $r = 11$  par exemple. Ce qui permet de conclure que la sphère de Poincaré n'est pas un revêtement cyclique régulier à 11 feuillets ramifié au-dessus de la sphère  $S^3$ .

*Exemple 1.* — Prenons  $r = 5$  et  $p = 6$ . Remarquons d'abord que le polynôme cyclotomique  $\Phi_{12}(A) = A^4 - A^2 + 1$  et que le crochet de Kauffman de  $T$  est

$$\langle T \rangle = A^{-6}(A^{-7} - A^{-3} - A^5)(-A^2 - A^{-2}).$$

Comme  $\Phi_{12}(A)$  est nul donc  $\delta = -1$  et par suite,

$$\Omega_6 = e_0 + \langle e_1 \rangle e_1 = 1 + (-A^2 - A^{-2})z = 1 - z.$$

Un calcul simple montre que  $\langle t(\Omega_6) \rangle = 1 - A^3$ . Ainsi on peut écrire

$$\theta_6(\Sigma) = \frac{\langle \Omega_6 \rangle_T}{\langle t(\Omega_6) \rangle} = \frac{1 - \delta A^{-6}(A^{-7} - A^{-3} - A^5)}{1 - A^3}.$$

Rappelons que  $A$  est une racine primitive de l'unité d'ordre 12; en particulier  $A^6 = -1$ . Par conséquent,

$$\theta_6(\Sigma) = \frac{1 + \delta A^{-9}}{1 - A^3} = \frac{1 - A^3}{1 - A^3} = 1.$$

*Exemple 2.* — Le polynôme cyclotomique d'ordre 10 est  $\Phi_{10}(A) = A^4 - A^3 + A^2 - A + 1$ . L'invariant  $\theta_5$ , à coefficients considérés modulo  $r$ , prend alors ses valeurs dans l'anneau  $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}[A^{\pm 1}]/(A^4 - A^3 + A^2 - A + 1)$ . L'élément  $\Omega_5$  est formé seulement de deux termes. En effet,

$$\Omega_5 = 1 + (-A^2 - A^{-2})z.$$

En utilisant les propriétés énoncées dans le § 4, on peut établir les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_5(\Sigma) &= \frac{\langle \Omega_5 \rangle_T}{\langle t(\Omega_5) \rangle} = \frac{\langle \Omega_5 \rangle_T \overline{\langle t(\Omega_5) \rangle}}{\langle t(\Omega_5) \rangle \overline{\langle t(\Omega_5) \rangle}} \\ &= \frac{1 + (-A^{-2} - A^2)^2 A^{-6} (A^{-7} - A^{-3} - A^5)}{-5} \\ &\quad \times (A^2 - A^{-2})^2 \overline{1 - A^3(-A^2 - A^{-2})^2} \\ &= 1 - 2A + 2A^2 - A^3. \end{aligned}$$

Soit  $r$  un nombre premier tel que  $r \equiv \pm 1 \pmod{5}$ . Supposons que  $\Sigma$  est le revêtement cyclique régulier à  $r$  feuillets ramifié au-dessus de  $S^3$ . Alors on aura d'après le corollaire 3,  $\theta_5(\Sigma) = (-A^{-16})^\alpha \pmod{r}$ , pour un certain entier  $\alpha$ . Rappelons que  $A$  est une racine primitive de l'unité d'ordre 10. Par conséquent les valeurs possibles des puissances de  $A$  sont  $\pm 1, \pm A, \pm A^2, \pm A^3$  et  $\pm A^4 = \pm(A^3 - A^2 + A - 1)$ . On peut voir facilement que  $\theta_5(\Sigma)$  n'est pas une puissance de  $A$ . Ce qui permet de conclure que  $\Sigma$  n'est pas le revêtement cyclique régulier à  $r$  feuillets ramifié au-dessus de  $S^3$ , pour tout  $r$  congru à 1 ou  $-1$  modulo 5; en particulier pour  $r = 11, 19$  et 29.

*Remarques.*

1) La condition donnée par le théorème 1 est nécessaire. Cependant, il est difficile de voir s'il s'agit d'une condition suffisante. La difficulté vient essentiellement du fait qu'on ne dispose pas, même dans le cas des sphères d'homologie les plus simples, de formules calculant les invariants  $\theta_p$  pour tout  $p \geq 3$ . Il est à noter aussi que le théorème 1 introduit une infinité de formules (pour tout  $p$  premier avec  $r$ ). Tout ce qu'on peut affirmer est que si la condition du corollaire 3 est vérifiée pour une seule valeur de  $p$ , alors elle est insuffisante. Un contre exemple est facile à construire. En effet, prenons  $p = 4$  et  $r = 11$ . Comme  $\theta_4(\Sigma) = 1$ , alors la congruence donnée par le corollaire 3 est vérifiée. Cependant,  $\Sigma$  n'est pas le revêtement cyclique régulier à 11 feuillets ramifié au-dessus de  $S^3$ , comme on vient de le prouver dans l'exemple 2.

2) Pour certaines valeurs de  $p$ , la condition donnée par le théorème 1 devient triviale. Des considérations élémentaires en théorie des nombres montrent que les seuls cas intéressants dans la formule donnée par ce théorème sont les cas où  $r \equiv \pm 1 \pmod{p}$ . Puisque si on n'a pas cette relation entre  $p$  et  $r$  alors l'idéal engendré par  $r$  et  $\delta^r - \delta$  est égal à  $\Lambda_p[p^{-1}]$ .

### 3. Entrelacs et variétés périodiques.

Le comportement des invariants quantiques des nœuds périodiques représente la motivation principale de ce travail. En fait, on dispose de plusieurs critères permettant d'avoir des informations sur les symétries que vérifie un entrelacs donné de  $S^3$ . En particulier, les entrelacs périodiques ont fait l'objet d'une littérature abondante. Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques propriétés de ces entrelacs ainsi que le lien existant entre entrelacs et variétés périodiques.

**DÉFINITION.** — Soit  $r$  un entier  $\geq 2$ , un entrelacs  $K$  de  $S^3$  est dit  $r$ -périodique s'il existe un difféomorphisme direct  $h$  de  $S^3$  dans lui-même vérifiant :

- 1) l'ensemble des points fixes de  $h$  est un cercle non noué  $B$ ;
- 2) le nombre  $r$  est le plus petit entier non nul tel que  $h^r = \text{Id}$ ;
- 3) l'entrelacs  $K$  est disjoint de  $B$ ;
- 4) l'entrelacs  $K$  est globalement invariant par  $h$ .

D'après la solution positive de la conjecture de Smith [3], un tel difféomorphisme est conjugué à une rotation d'angle  $2\pi/r$ . Si on considère  $S^3$  comme le compactifié d'Alexandroff de  $\mathbb{R}^3$ , alors  $h$  peut être vu comme la rotation d'angle  $2\pi/r$  autour de l'axe  $(oz)$ . Soit  $L$  un entrelacs  $r$ -périodique, dans la suite nous notons par  $\lambda$  le nombre d'enlacement de  $L$  avec l'axe de la rotation et par  $\pi$  la surjection canonique définie par l'action de  $h$  sur  $S^3$ .

*Exemple.* — Un entrelacs  $r$ -périodique peut être vu comme la clôture d'un tangle de la forme  $\widehat{T^r}$ . Il est alors représenté par un diagramme de  $\mathbb{R}^2$  qui est invariant par une rotation de centre l'origine et d'angle  $2\pi/r$ . La figure 1 représente un entrelacs 5-périodique.

Le crochet de Kauffman [8], noté  $\langle \rangle$ , est un invariant d'isotopie régulière des entrelacs de  $S^3$  qui peut être défini uniquement par  $\langle \emptyset \rangle = 1$  et

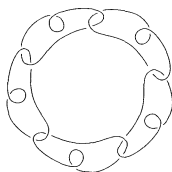


Figure 1. Un entrelacs 5-périodique.

les deux relations  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  ci-dessous :

$$(\mathcal{R}_1) \quad \langle \bigcirc \cup L \rangle = \delta \langle L \rangle,$$

$$(\mathcal{R}_2) \quad \langle L \rangle = A \langle L_0 \rangle + A^{-1} \langle L_\infty \rangle,$$

où  $L$ ,  $L_0$  et  $L_\infty$  sont trois entrelacs qui sont identiques sauf au voisinage d'un croisement où ils sont comme suit :

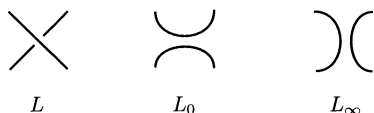


Figure 2

L'invariant de Kauffman des entrelacs périodiques vérifie la relation donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — Soit  $r$  un nombre premier impair et  $L$  un entrelacs  $r$ -périodique; alors on a

$$\langle L \rangle(A) \equiv \langle \bar{L} \rangle^r(A) \quad \text{modulo } r, \delta^r - \delta,$$

où  $\delta = -A^2 - A^{-2}$  et  $\bar{L}$  désigne l'entrelacs quotient.

*Preuve.* — Une version de cette formule est donnée dans [12]; cette version utilise le polynôme de Jones qui est équivalent, dans un certain sens, au crochet de Kauffman. Dans le dernier paragraphe (appendice), nous donnons une preuve de la proposition en utilisant seulement la théorie skein associée au crochet de Kauffman du tore solide.

Dans [6], Goldsmith a montré que tout revêtement cyclique régulier à  $r$  feuilletés ramifié au-dessus de  $S^3$  peut être obtenu à partir de la sphère  $S^3$  par chirurgie le long d'un entrelacs  $r$ -périodique. Dans un article récent, Przytycki et Sokolov [14] ont montré que ce résultat se généralise au cas des 3-variétés  $r$ -périodiques (voir aussi [1]).



**THÉORÈME 5** (voir [14]). — Soit  $r$  un nombre premier et  $M$  une 3-variété compacte connexe. Si  $M$  est  $r$ -périodique, alors il existe un entrelacs  $r$ -périodique  $L$  de  $S^3$  tel que  $M$  s'obtient par chirurgie le long de  $L$ . De plus, le nombre d'enlacement de chaque composante de  $L$  avec l'axe de la rotation est nul modulo  $r$  a priori.

*Exemple.* — Le groupe  $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  agit par rotations sur la sphère  $S^3$ , ce qui permet de dire que  $S^3$  est  $r$ -périodique pour tout  $r \geq 2$ . On peut voir facilement que  $S^3$  s'obtient à partir d'elle-même par chirurgie le long d'un entrelacs à  $r$  composantes triviales avec framing 1 chacune. Un exemple moins trivial est donné par la variété de Poincaré  $\Sigma$ . Il est bien connu que cette variété est périodique de période 5. En effet, elle s'obtient par chirurgie sur  $S^3$  le long de l'entrelacs donné par la figure 1. Ce résultat est démontré dans [6], où un algorithme est donné pour construire, pour tout revêtement  $M$  cyclique régulier à  $r$  feuilletés ramifié au-dessus de  $S^3$ , un entrelacs  $L$  vérifiant les conditions données par le théorème précédent et tel que  $M$  s'obtient à partir de  $S^3$  par chirurgie le long de  $L$ .

**DÉFINITION.** — Dans la suite et pour tout entrelacs  $r$ -périodique  $L$ , on dit que  $L$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}_1$  si et seulement si le nombre d'enlacement de chaque composante  $\ell_i$  de  $L$  avec l'axe de la rotation est nul modulo  $r$ .

Une lecture attentive de la preuve du théorème précédent montre que si  $M$  est obtenue à partir de  $S^3$  par chirurgie le long de  $L$ , alors la variété quotient  $\bar{M}$  est le résultat d'une chirurgie sur  $S^3$  le long de l'entrelacs quotient  $\bar{L}$ .

#### 4. Étude du multicrochet.

Dans ce paragraphe, nous étudions le comportement du multicrochet  $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_L$  dans le cas où  $L$  est un entrelacs  $r$ -périodique vérifiant la propriété  $\mathcal{P}_1$ . Le multicrochet représente le terme principal dans la définition de l'invariant  $\theta_p$ . Soit  $L$  un entrelacs vérifiant la propriété  $\mathcal{P}_1$ ; alors la régularité du crochet de Kauffman donnée par la proposition 4 se généralise d'une façon naturelle au multicrochet et on a :

**PROPOSITION 6.** — Soit  $r$  un nombre premier, et  $L$  un entrelacs vérifiant la propriété  $\mathcal{P}_1$ . Alors pour tout  $p \geq 3$ , on a

$$\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_L(A) = \left( \langle \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_{\bar{L}}(A) \right)^r \text{ modulo } r, \delta^r - \delta.$$

*Preuve.* — Soit  $L$  un entrelacs à  $k$  composantes ; dans la suite, nous notons par  $L_{i_1, \dots, i_k}$  l'entrelacs obtenu à partir de  $L$  en remplaçant la  $j$ -ième composante  $\ell_j$  de  $L$  par  $i_j$  composantes parallèles à celle-ci situées dans un voisinage suffisamment petit. Ainsi, l'élément  $\langle z^{i_1}, z^{i_2}, \dots, z^{i_k} \rangle_L$  n'est autre que le crochet de Kauffman de l'entrelacs  $L_{i_1, \dots, i_k}$  noté  $\langle L_{i_1, \dots, i_k} \rangle$ . Dans le reste de cet article, l'entrelacs  $L_{i_1, \dots, i_k}$  sera appelé *coloration de  $L$* .

Il est clair que l'élément  $\Omega_p$  s'écrit sous la forme  $\sum_{i \geq 0} Q_i(A)z^i$  où  $Q_i(A) \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ . Étant donné que le multicrochet est une forme multilinéaire, alors nous pouvons écrire

$$\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_L = \sum_{L_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{E}_L} Q_{i_1}(A) \cdots Q_{i_k}(A) \langle L_{i_1, \dots, i_k} \rangle$$

où  $\mathcal{E}_L$  désigne l'ensemble de toutes les colorations possibles de l'entrelacs  $L$ .

Soit  $M$  une sphère d'homologie rationnelle de dimension 3. Supposons que  $M$  est  $r$ -périodique ; d'après le théorème 5, on sait que  $M$  s'obtient à partir de  $S^3$  par chirurgie le long d'un entrelacs  $r$ -périodique vérifiant la propriété  $\mathcal{P}_1$ . La variété quotient  $\bar{M}$  s'obtient par chirurgie le long de l'entrelacs  $\bar{L}$ . On peut voir sans difficulté que si  $\bar{L}$  contient  $n$  composantes alors  $L$  contient  $nr$  composantes. Autrement dit, si

$$\bar{L} = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \dots \cup \ell_n,$$

alors l'entrelacs  $\pi^{-1}(\ell_i)$  s'écrit  $\ell_i^1 \cup \ell_i^2 \cup \dots \cup \ell_i^r$ . Dans la suite nous notons par  $\mathcal{E}_L$  (resp.  $\mathcal{E}_{\bar{L}}$ ) l'ensemble de toutes les colorations possibles de  $L$  (resp.  $\bar{L}$ ).

**DÉFINITION.** — Soit  $L$  un entrelacs vérifiant la propriété  $\mathcal{P}_1$ . Une coloration de  $L$  est dite  $r$ -périodique si, pour tout  $i \leq n$ , les composantes  $\ell_i^k$  sont colorées de la même façon. Dans la suite, on notera par  $\mathcal{E}'_L$  l'ensemble de toutes les colorations périodiques de l'entrelacs  $L$ .

**LEMME 7.** — Soient  $r$  un nombre premier et  $L$  un entrelacs  $r$ -périodique vérifiant la propriété  $\mathcal{P}_1$ . Alors

$$\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_L = \sum_{L_{i_1, \dots, i_{nr}} \in \mathcal{E}'_L} Q_{i_1}(A) \cdots Q_{i_{nr}}(A) \langle L_{i_1, \dots, i_{nr}} \rangle \text{ modulo } r.$$

*Preuve.* — Soit  $L$  un entrelacs vérifiant la propriété  $\mathcal{P}_1$ . Supposons que l'entrelacs quotient  $\bar{L}$  s'écrit  $\ell_1 \cup \ell_2 \cup \dots \cup \ell_n$ . Comme le nombre d'enlacement de chaque composante  $\ell_i$  avec l'axe de la rotation est nul

modulo  $r$ ,  $\pi^{-1}(\ell_i)$  est formé de  $r$  composantes identiques  $\ell_i^1, \ell_i^2, \dots, \ell_i^r$  permutées entre elles par la rotation. Ainsi l'entrelacs  $L$  est de la forme  $(\ell_1^1 \cup \dots \cup \ell_1^r) \cup (\ell_2^1 \cup \dots \cup \ell_2^r) \cup \dots \cup (\ell_n^1 \cup \dots \cup \ell_n^r)$ . On conclut donc que l'action de  $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  sur les composantes  $\ell_{i_0}^1, \ell_{i_0}^2, \dots, \ell_{i_0}^r$  permet de définir une action de ce même groupe sur l'ensemble  $\mathcal{E}_L$ . De plus, l'orbite d'une coloration de  $L$  contient 1 ou  $r$  éléments identiques. Soit  $E \in \mathcal{E}_L$ ; si l'orbite de  $E$  contient  $r$  éléments, alors la contribution de ces entrelacs dans l'expression de  $\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_L$  est nulle modulo  $r$  puisque ces éléments ont le même crochet de Kauffman avec le même coefficient  $Q_{i_1} Q_{i_2} \dots Q_{i_n}$ . Ce qui permet de conclure que pour le calcul de  $\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_L$  modulo  $r$ , on peut se limiter aux colorations périodiques, c'est-à-dire aux éléments de  $\mathcal{E}'_L$ .

NOTATION. — Si  $E$  est un élément de  $\mathcal{E}'_L$ , alors  $E$  est de la forme

$$L_{i_1, i_1, \dots, i_1, i_2, \dots, i_2, \dots, i_n, \dots, i_n}$$

où chaque coefficient  $i_j$  apparaît exactement  $r$  fois successives. Cet entrelacs sera par la suite noté par  $\mathcal{L}_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ .

Comme l'entrelacs  $\mathcal{L}_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  est une coloration périodique de  $L$ , il est lui même  $r$ -périodique. De plus, l'entrelacs quotient  $\overline{\mathcal{L}_{i_1, i_2, \dots, i_n}}$  n'est autre que  $\overline{L}_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  qui représente la coloration de  $\overline{L}$  induite par celle de  $L$ . En considérant toutes les colorations périodiques de  $L$ , on obtient toutes les colorations nécessaires pour calculer le multicrochet de  $\overline{L}$ . Réciproquement, une coloration de  $\overline{L}$  se relève naturellement en une coloration de  $L$ . D'après la proposition 4, on a

$$\langle \mathcal{L}_{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle(A) = (\langle \overline{L}_{i_1, i_2, \dots, i_n} \rangle(A))^r \text{ modulo } r, \delta^r - \delta.$$

Il est aussi clair que le coefficient correspondant à  $\mathcal{L}_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  dans l'expression du multicrochet est  $Q_{i_1}^r(A) Q_{i_2}^r(A) \dots Q_{i_n}^r(A)$ , celui de  $\overline{L}_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  étant  $Q_{i_1}(A) Q_{i_2}(A) \dots Q_{i_n}(A)$ , ce qui nous permet d'en déduire que

$$\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_L(A) = (\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_{\overline{L}}(A))^r \text{ modulo } r, \delta^r - \delta.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 6. □

### 5. Démonstration du théorème 1.

L'étude du multicrochet représente l'étape principale dans la preuve du théorème 1. Le reste de la démonstration de ce théorème consiste à analyser les termes correctifs  $\langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{b-(L)}$  et  $\langle t(\Omega_p) \rangle^{b+(L)}$ . En effet,

la formule établie par la proposition 6 entraîne la congruence suivante, modulo  $r$  et  $\delta^r - \delta$  :

$$\theta_p(M) \langle t(\Omega_p) \rangle^{b_+(L)} \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{b_-(L)} \equiv \theta_p(\bar{M})^r \langle t(\Omega_p) \rangle^{rb_+(\bar{L})} \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{rb_-(\bar{L})}.$$

Dans le reste de ce paragraphe  $\equiv$  désigne la congruence modulo  $r$  et  $\delta^r - \delta$ . En utilisant le fait que  $\langle t^\epsilon(\Omega_p) \rangle$  est inversible dans  $\Lambda_p[p^{-1}]$  pour  $\epsilon = \pm 1$  (voir [2], prop. 6.8), la formule précédente devient

$$\theta_p(M) \equiv \theta_p(\bar{M})^r \langle t(\Omega_p) \rangle^{rb_+(\bar{L}) - b_+(L)} \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{rb_-(\bar{L}) - b_-(L)}.$$

Posons

$$\alpha = rb_+(\bar{L}) - b_+(L) \quad \text{et} \quad \beta = rb_-(\bar{L}) - b_-(L).$$

Soit  $n'$  le nombre de composantes de  $L$  et  $n$  celui de  $\bar{L}$ . Comme  $M$  est une sphère d'homologie rationnelle, alors  $\bar{M}$  est aussi une sphère d'homologie rationnelle et on a

$$b_+(L) + b_-(L) = n' \quad \text{et} \quad b_+(\bar{L}) + b_-(\bar{L}) = n.$$

L'entrelacs  $L$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}_1$ , donc  $n' = nr$ . Il en résulte que

$$\alpha + \beta = r(b_+(\bar{L}) + b_-(\bar{L})) - (b_+(L) + b_-(L)) = 0.$$

Ainsi on aura l'égalité suivante :

$$\theta_p(M) \equiv \theta_p(\bar{M})^r \left( \frac{\langle t(\Omega_p) \rangle}{\langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle} \right)^\alpha.$$

Pour tout couple d'entiers  $(p, s)$ , nous notons par  $g(p, s)$  la somme de Gauss définie par

$$g(p, s) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^{sk} A^{sk^2}$$

vue comme un élément de  $\Lambda_p$ . Dans la suite, nous rappelons quelques propriétés de ces sommes qui nous serviront par la suite pour le reste de la démonstration. Ces propriétés sont extraites de [2], essentiellement le lemme 6.6 et le lemme 6.7.

*Propriétés.* — On a :

- (i)  $g(p, 1) \cdot \overline{g(p, 1)} = p$ ,
- (ii)  $\overline{g(p, 1)} = A^{p(p-1)/2} g(p, 1)$ ,

$$(iii) \langle t(\Omega_p) \rangle = \frac{A^{-3}}{A^2 - A^{-2}} g(p, 1),$$

$$(vi) \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle = \overline{\langle t(\Omega_p) \rangle}.$$

Ces propriétés permettent d'établir

$$\frac{\langle t(\Omega_p) \rangle}{\langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle} = \frac{\langle t(\Omega_p) \rangle}{\overline{\langle t(\Omega_p) \rangle}} = -A^{-6} \frac{g(p, 1)}{g(p, 1)} = -A^{-6-p(p-1)/2}.$$

Ainsi s'achève la démonstration du théorème 1. □

Les preuves des corollaires 2 et 3 sont immédiates. En effet, pour démontrer le corollaire 2, il suffit de remarquer que si  $r \equiv \pm 1 \pmod p$  alors la condition  $A^{2p} = 1$  entraîne  $\delta^r - \delta = 0$  modulo  $r$ . Le corollaire 3 se démontre en remarquant que si  $M$  est un revêtement cyclique régulier à  $r$  feuillets ramifié au-dessus de  $S^3$ , alors  $M$  est  $r$ -périodique et l'espace quotient n'est autre que la sphère  $S^3$ . Rappelons aussi que  $\theta_p(S^3) = 1$  pour tout  $p \geq 3$ .

### 6. Invariants des entrelacs périodiques dans une sphère d'homologie.

L'invariant  $\theta_p$  permet de définir, d'une façon naturelle, un invariant des entrelacs en bandes d'une variété de dimension 3. En effet, soit  $M$  une variété compacte connexe et orientée de dimension 3. On sait que  $M$  s'obtient à partir de  $S^3$  par chirurgie le long d'un entrelacs en bandes  $L$ . Soit  $m$  le nombre de composantes de  $L$ . Dans  $M$ , on considère un entrelacs en bandes  $K$  à  $k$  composantes. Par abus de notation, on peut considérer  $K$  comme un entrelacs de  $S^3 - L$ . Pour tout entier  $p \geq 3$ , on définit l'invariant  $\theta_p(M, K)$  de la façon suivante :

$$\theta_p(M, K) = \frac{\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p, z, \dots, z \rangle_{L \cup K}}{\langle t(\Omega_p) \rangle^{b_+(L)} \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{b_-(L)}},$$

où le multicrochet  $\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p, z, \dots, z \rangle_{L \cup K}$  désigne la forme multilinéaire de  $B_p^{k+m} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$  définie dans le premier paragraphe (voir [10] pour une définition plus générale de  $\theta_p(M, K)$ ). L'invariant  $\theta_p(M, K)$  ainsi obtenu prend ses valeurs dans  $\Lambda_p[p^{-1}]$ .

Soient  $r$  un entier  $\geq 2$  et  $M$  une sphère d'homologie rationnelle  $r$ -périodique. Le groupe  $G = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  agit sur  $M$  semi-librement et l'ensemble des points fixes de cette action est un nœud  $B$  de  $M$ . Soit  $K$  un entrelacs en bandes de  $M$ .

On dit que  $K$  est *r-périodique* si  $K$  est invariant par l'action de  $G$  et  $K \cap B = \emptyset$ . Il est bien clair que cette définition n'a un sens que si la variété  $M$  est *r-périodique*.

Rappelons que si  $M$  est une sphère d'homologie *r-périodique*, alors  $M$  est le résultat d'une chirurgie sur  $S^3$  le long d'un entrelacs *r-périodique*  $L$  vérifiant une certaine propriété  $\mathcal{P}_1$ . Comme  $L$  et  $K$  sont *r-périodiques*, l'entrelacs  $L \cup K$  l'est aussi. L'entrelacs quotient est  $\overline{L \cup K} = \overline{L} \cup \overline{K}$ .

Désormais, on suppose que  $r$  est premier.

Remarquons que pour le calcul du multicrochet

$$\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p, z, \dots, z \rangle_{L \cup K},$$

on colore les composantes de  $K$  par  $z$  chacune. Il s'agit donc d'une coloration périodique de  $K$ , qui induit une coloration de l'entrelacs quotient  $\overline{K}$ . Les techniques utilisées dans le paragraphe 4, restent valables pour établir la congruence suivante :

$$\begin{aligned} \langle \Omega_p, \dots, \Omega_p, z, \dots, z \rangle_{L \cup K}(A) \\ = (\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p, z, \dots, z \rangle_{\overline{L \cup K}}(A))^r \text{ modulo } r, \delta^r - \delta. \end{aligned}$$

Par conséquent et en suivant la démarche du paragraphe 5, on obtient la relation suivante pour tout  $p$  premier avec  $r$  :

$$\theta_p(M, K) \equiv (\theta_p(\overline{M}, \overline{K}))^r (-A^{-6-p(p-1)/2})^\alpha \text{ mod } r, \delta^r - \delta,$$

où  $\delta = -A^2 - A^{-2}$  et  $\alpha$  est un entier. On peut voir facilement que cette formule n'est qu'une généralisation du théorème 1. En fait, la condition donnée par ce théorème correspond au cas  $K = \emptyset$  dans la formule précédente.

### 7. Appendice : démonstration de la proposition 4.

Ce paragraphe sera consacré à la preuve de la proposition 4. Cette proposition joue un rôle crucial dans la démonstration du résultat principal de ce papier. Notre approche utilise la théorie skein de Kauffman associée au tore solide  $S^1 \times B^2$ , voir [7] pour une étude détaillée. Nous rappelons ici brièvement quelques notions essentielles pour notre démonstration. Pour toute variété  $M$  de dimension 3, on notera par  $\mathcal{L}$  l'ensemble de toutes les classes d'isotopie des entrelacs en bandes de  $M$ . Soit  $\Gamma$  un anneau commutatif. Dans la suite on notera par  $\mathcal{S}'(M)$  le  $\Gamma$ -module libre engendré par les éléments de  $\mathcal{L}$ .

DÉFINITION. — Soit  $M$  une variété de dimension 3. On appelle skein module de Kauffman et on note  $\mathcal{S}(M)$  le  $\Gamma$ -module  $\mathcal{S}'(M)$  quotienté par les relations :

$$\bigcirc \cup L = \delta L, \quad L = AL_0 + A^{-1}L_\infty,$$

où  $\bigcirc$  désigne le nœud trivial et  $L, L_0$  et  $L_\infty$  sont comme dans la figure 2.

Nous nous intéressons maintenant au skein module du tore solide  $S^1 \times I \times I \cong S^1 \times B^2$ . Dans le module  $\mathcal{S}(S^1 \times I \times I)$  considérons l'élément  $z$  représenté par une bande standard  $S^1 \times I \times J$  (où  $J$  est un sous-intervalle de  $I$ ). Nous notons par  $z^i$  l'entrelacs en bandes formé par  $i$  copies parallèles de  $z$ , en particulier  $z^0 = \emptyset$  (voir figure 3).

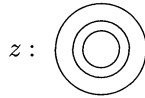


Figure 3

PROPOSITION 8. — Le skein module  $\mathcal{S}(S^1 \times I \times I)$  est isomorphe au module libre engendré par les éléments  $z^i$  pour  $i \geq 0$ .

Preuve. — Elle découle immédiatement du fait que  $\mathcal{S}(S^1 \times I \times I)$  admet une structure d'algèbre isomorphe à l'algèbre polynomiale  $\Gamma[z]$  (voir [7]).  $\square$

L'action par rotations du groupe  $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  sur la sphère  $S^3$  induit une action sur le tore solide  $S^1 \times B^2$ . L'espace quotient de  $S^1 \times B^2$  par cette action est homéomorphe au tore solide  $S^1 \times B^2$  et la surjection canonique définit naturellement un revêtement à  $r$  feuillets  $\pi : S^1 \times B^2 \rightarrow S^1 \times B^2$ . Si  $L$  est un entrelacs de  $S^1 \times B^2$ , on note par  $\tilde{L}$  l'entrelacs  $\pi^{-1}(L)$ . Les techniques utilisées dans le cas du polynôme de Homfly [16], [5] permettent d'établir le lemme suivant :

LEMME 9. — Soit  $L$  un entrelacs de  $S^1 \times B^2$ . Alors on a les égalités suivantes dans le module  $\mathcal{S}(S^1 \times I \times I)$  :

$$\widehat{\bigcirc \cup L} = \delta^r \tilde{L}, \quad \tilde{L} \equiv A^r \tilde{L}_0 + A^{-r} \tilde{L}_\infty \text{ modulo } r.$$

Soit  $\Gamma_r = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ ; on définit  $\mathcal{S}_r(S^1 \times I \times I)$  comme étant le  $\Gamma_r$ -module engendré par les classes d'isotopies des entrelacs de  $S^1 \times B^2$  quotienté par les relations

$$\bigcirc \cup L = \delta^r L, \quad L = A^r L_0 + A^{-r} L_\infty.$$

Soit  $i : \mathcal{S}_r(S^1 \times B^2) \rightarrow \Gamma_r$  l'application qui associe à chaque entrelacs la valeur de son crochet de Kauffman. Considérons maintenant les deux applications suivantes  $\varphi$  et  $\psi$  définies sur les éléments de la base  $\mathcal{L}$  et étendues linéairement au module  $\mathcal{S}'(S^1 \times B^2)$  comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{S}'(S^1 \times B^2) &\longrightarrow \Gamma_r, & \psi : \mathcal{S}'(S^1 \times B^2) &\longrightarrow \Gamma_r, \\ L &\longmapsto i(\tilde{L}); & L &\longmapsto i(L)^r. \end{aligned}$$

Le lemme précédent montre que les deux applications  $\varphi$  et  $\psi$  passent au quotient pour définir deux applications  $\bar{\varphi}$  et  $\bar{\psi}$  de  $\mathcal{S}_r(S^1 \times B^2)$  dans  $\Gamma_r$ . Il est facile de voir que  $\mathcal{S}_r(S^1 \times B^2)$  est le  $\Gamma_r$ -module engendré par les éléments de type  $z^i$  pour  $i \geq 0$ . Par conséquent,  $\bar{\varphi}$  et  $\bar{\psi}$  coïncident modulo l'idéal de  $\Lambda_r$  engendré par les éléments  $\bar{\varphi}(z^i) - \bar{\psi}(z^i)$ . À partir des propriétés élémentaires du crochet de Kauffman, on peut voir que cet idéal est engendré par  $\delta^r - \delta$ . Ce qui permet de conclure que  $\langle \tilde{L} \rangle(A)$  et  $(\langle L \rangle(A))^r$  coïncident modulo  $r$  et  $\delta^r - \delta$ . Cela achève la démonstration de la proposition 4.  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.K. BARTOSZYNSKA, J. PRZYTYCKI, 3-Manifold invariants and periodicity of homology spheres, Preprint math/9807011.
- [2] C. BLANCHET, N. HABBEGER, G. MASBAUM, P. VOGEL, Three-Manifold invariants derived from the Kauffman bracket, *Topology*, 31 (1992), 685–699.
- [3] H. BASS, J.W. MORGAN, The Smith conjecture, *Pure App. Math.*, 112 (1994).
- [4] N. CHBILI, The Jones polynomials of freely periodic knots, *J. Knot Th. Ram.*, 9, n° 7 (2000), 885–891.
- [5] N. CHBILI, Le polynôme de Homfly des nœuds librement périodiques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 325, série I (1997), 411–414.
- [6] D.L. GOLDSMITH, *Symmetric fibered links. Knots, groups and 3-manifolds*, University press, 1975.
- [7] J. HOSTE, J. PRZYTYCKI, A survey of skein modules of 3-manifolds, *Knots 90*, Proceeding of the international conference on knot theory and related topics, Osaka (Japan), Walter de Gruyter, 1992, 363–379.
- [8] L.H. KAUFFMAN, An invariant of regular isotopy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318 (1990), 417–471.
- [9] W.B.R. LICKORISH, A representation of orientable combinatorial 3-manifolds, *Ann. Math.*, 76 (1962), 531–540.
- [10] W.B.R. LICKORISH, The skein method for 3-manifold invariants, *J. Knot Th. Ram.*, 2 (1993), 171–194.
- [MR] G. MASBAUM, J. ROBERTS, A simple proof of integrality of quantum invariants at prime roots of unity, *Math. Proc. Cambridge. Phil. Soc.*, 121 (1997), 443–454.



- [12] K. MURASUGI, The Jones polynomials of periodic links, *Pacific J. Math.*, 131 (1988), 319–329.
- [13] V.V. PRASOLOV, A.B. SOSSINSKY, Knots, Links, Braids and 3-manifolds, *Trans. Math. Monographs*, Vol. 154.
- [14] J. PRZYTYCKI, M. SOKOLOV, Surgeries on periodic links and homology of periodic 3-manifolds, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 131, Part 2 (to appear).
- [15] N. YU. Reshitikhin, V. TURAEV, Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, *Invent. Math.*, 103 (1991), 547–597.
- [16] P. TRACZYK, Periodic knots and the skein polynomial, *Invent. Math.*, 106 (1) (1991), 73–84.
- [17] E. WITTEN, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.*, 121 (1989), 351–399.

Manuscrit reçu le 30 juin 2000,  
accepté le 20 novembre 2000.

Nafaa CHBILI,  
Faculté des Sciences de Monastir  
Département de Mathématiques  
Monastir 5000 (Tunisie).  
nafaa.chbili@esstt.rnu.tn