Annales de l'institut Fourier

Leila Ben Abdelghani

# Espace des représentations du groupe d'un noeud classique dans un groupe de Lie

*Annales de l'institut Fourier*, tome 50, nº 4 (2000), p. 1297-1321

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_4_1297_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**50**, 4 (2000), 1297–1321

# ESPACE DES REPRÉSENTATIONS DU GROUPE D'UN NŒUD CLASSIQUE DANS UN GROUPE DE LIE

par Leila BEN ABDELGHANI

## 1. Introduction.

À la suite des travaux de Casson ([GM]), puis de Culler-Shalen ([CS]), il est apparu que l'espace des représentations du groupe fondamental $\Gamma$ d'une variété de dimension trois dans les groupes classiques reflète de nombreuses propriétés géométriques de la variété de départ.

Le cas qui nous intéresse est celui où $\Gamma$ est le groupe $\Pi$ d'un noeud dans une 3-sphère d'homologie rationnelle. E. Klassen ([K]) a été le premier à étudier le problème de déformation d'une représentation abélienne $\rho_0$ du groupe d'un noeud de $S^3$ dans $SU(2)$. Il a montré que si le polynôme d'Alexander $\triangle$ du noeud n'a pas de racines sur le cercle unité, il existe un voisinage de $\rho_0$ qui ne contient que des représentations abéliennes. En revanche, lorsque $\rho_0(\mu)^2$ est une racine simple de $\triangle$, où $\mu$ désigne un méridien du noeud, C. Frohman et E. Klassen ([FK]) ont montré qu'il existe un arc analytique de représentations irréductibles d'extrémité $\rho_0$. Cette hypothèse a été affaiblie par C. Herald ([H]) et Heusener-Kroll ([HK]) en remplaçant la condition sur la racine simple par une condition sur le saut de la signature en cette racine.

*Mots-clés :* Théorie des nœuds – Groupes de Lie – Cohomologie des groupes – Variété des représentations.
*Classification math :* 57M25 – 57N10.

Soit $X$ le complémentaire d'un noeud dans une 3-sphère d'homologie rationnelle $\Sigma$. Soit $\rho_0$ une représentation abélienne de $\Pi = \Pi_1(X)$ dans un groupe de Lie complexe qui factorise par le groupe cyclique infini $H_1(X, \mathbb{Z})/\mathrm{tors}(H_1(X, \mathbb{Z}))$.

Dans cet article nous proposons une méthode générale pour l'étude de la structure locale de la variété algébrique des représentations du groupe $\Pi$ dans un groupe de Lie complexe au voisinage de $\rho_0$. En particulier, nous montrons le :

THÉORÈME 4.5. — *Soit un noeud dans une 3-sphère d'homologie rationnelle dont le groupe $\Pi$ est muni d'une involution $k$ telle que $k(\mu) = \mu^{-1}$, où $\mu$ désigne un méridien du nœud.*

*Soient $G$ un groupe de Lie complexe connexe réductif et $\rho_0 : \Pi \to G$ une représentation abélienne qui factorise par $H_1(X, \mathbb{Z})/\mathrm{tors}(H_1(X, \mathbb{Z}))$ et telle que $\rho_0(\mu) = h_0$ où $h_0$ est dans $\mathcal{H}$, sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{G}$. Supposons qu'il existe $\alpha_{i_0} \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$ telle que $\omega_{i_0} = e^{\alpha_{i_0}(h_0)}$ est une racine simple de $\triangle$. Alors il existe un arc de représentations non métabéliennes $\rho_t : \Pi \to G$ d'extrémité $\rho_0$.*

Une idée classique ([BK]) est de construire une déformation formelle de $\rho_0$, $\rho_t = \left(\sum_{i\geqslant 1} U_i t^i\right)\rho_0$, où les $U_i$, $i \geqslant 1$, sont des cochaînes de $\Pi$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ qui est naturellement munie d'une structure de $\Pi$-module via la représentation adjointe $\mathrm{Ad}\rho_0$. On verra que la condition d'homomorphie de $\rho_t$ à l'ordre 1 est équivalente à $U_1 \in Z^1(\Pi, \mathcal{G})$. On procède inductivement en montrant que la condition d'homomorphie à l'ordre $n$ est équivalente à une équation d'obstruction de la forme $-\delta U_n = \zeta_n(U_1, \dots, U_{n-1})$ dans l'espace des 2-cocycles $Z^2(\Pi, \mathcal{G})$. Ces obstructions seraient levées si le groupe $H^2(\Pi, \mathcal{G})$ était nul. Mais ce n'est en général pas le cas. Sous de bonnes hypothèses, on peut quand même résoudre ces équations d'obstruction et obtenir ainsi une série formelle $\sum_{i\geqslant 1} U_i t^i$. Un théorème classique de M. Artin permet alors d'en déduire l'existence d'un arc analytique de représentations non métabéliennes d'extrémité $\rho_0$. Les obstructions à l'ordre 2 proviennent du produit cup en cohomologie et déterminent un cône quadratique que nous déterminons explicitement et nous montrons qu'il coïncide avec le cône tangent en $\rho_0$.

Il est à remarquer que presque tous les résultats énoncés dans cet article sont aussi valables dans le cas des groupes de Lie compacts connexes réels. Le cas de ces groupes est ramené à celui de leurs groupes de Lie complexifiés qui sont des groupes de Lie complexes connexes réductifs, (voir [BA]).

*Remerciements :* Cet article est issu de la thèse que j'ai préparée au laboratoire de Topologie de l'Université de Bourgogne. Je tiens à remercier Daniel Lines qui a dirigé ce travail ainsi que tous ceux avec qui j'ai eu des discussions intéressantes à ce sujet et en particulier Lucy Moser qui m'a initiée à la géométrie algébrique.

## 2. Cohomologie du groupe du nœud.

Soient $\Pi$ le groupe d'un noeud dans une 3-sphère d'homologie rationnelle $\Sigma$, $G$ un groupe de Lie complexe connexe réductif d'algèbre de lie $\mathcal{G}$ et $\rho_0$ une représentation abélienne de $\Pi$ dans $G$ qui factorise par le groupe cyclique infini $T := H_1(X, \mathbb{Z})/\mathrm{tors}(H_1(X, \mathbb{Z}))$ où $X$ désigne le complémentaire du noeud dans $\Sigma$. Soit $\mu$ un méridien du noeud et supposons que $\rho_0(\mu)$ est un élément semi-simple de $G$ ([St, §2.4]) ; alors $\rho_0(\mu)$ appartient à un sous-groupe de Cartan $H$ de $G$ d'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ ([PV, Chapitre I, §3.5.5, Corollaire 1]). Donc $\rho_0(\mu) = \ h_0$ où $h_0 \in \mathcal{H}$ et : $\mathcal{G} \to G$ est l'application exponentielle. La réductivité de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ implique que $\mathcal{G}$ se décompose comme $\Pi$-module sous la forme : $\mathcal{G} \cong \mathcal{H} \oplus \left(\sum_{\alpha \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})} \mathcal{G}_\alpha\right)$ où $\triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$ désigne le système de racines de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ par rapport à la sous-algèbre de Cartan $\mathcal{H}$ ([OV, Chapitre 3]).

Plus précisément, l'action de $\Pi$ est triviale sur $\mathcal{H}$ et est donnée par la multiplication par $\omega = e^{\alpha(h_0)}$ sur $\mathcal{G}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$.

Soient $E$ un espace d'Eilenberg Mac-Lane qui est un $K(\Pi, 1)$, $\widetilde{E}$ son revêtement universel et $E^\infty$ son revêtement cyclique infini qui correspond à Ker $p$ où $p$ désigne la projection canonique $p : \Pi \to H_1(X, \mathbb{Z}) \to T$. On peut donc identifier $\Pi$ au produit semi-direct Ker $p \rtimes T$. Notons par $X^\infty$ le revêtement cyclique infini de $X$ correspondant à Ker $p$ et soit $\tau$ un générateur du groupe des automorphismes du revêtement $X^\infty$. Les groupes d'homologie $H_*(X^\infty, \mathbb{C})$ sont munis d'une structure de $\Lambda = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$-module de la façon suivante. Si $u \in H_i(X^\infty, \mathbb{C})$ on pose $tu = \tau_*(u)$, (voir [G], §4 et 7 pour les propriétés de ces modules qui restent valables pour les noeuds dans les 3-sphères d'homologie rationnelles si les coefficients des groupes d'homologie sont $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$). Ces modules sont de génération finie et le module $H_1(X^\infty, \mathbb{C})$ est appelé *module d'Alexander du noeud.*

De plus, le module $H_1(X^\infty, \mathbb{C})$ est un $\Lambda$-module de torsion qui se décompose d'une manière unique sous la forme $\Lambda/\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda/\lambda_n$ et $\lambda_i$ divise $\lambda_{i+1}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Les $\lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont les *invariants* *d'Alexander du nœud* et $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ est le *polynôme d'Alexander* $\triangle$ du nœud. Le polynôme d'Alexander est défini à une unité près de $\Lambda$ et satisfait $t^{\deg \triangle} \triangle(1/t) = \alpha \triangle(t)$ où $\alpha \in \mathbb{C}$.

PROPOSITION 2.1

1) *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{H} & \longrightarrow & H^1(\Pi, \mathcal{H}) \\ & h & \longmapsto & [W] \end{array}$$

*où* $W : \Pi = \operatorname{Ker} p \rtimes T \to \mathcal{H}$ *est défini par* $W(x, t^k) = kh$, *est un isomorphisme.*

2) $H^2(\Pi, \mathcal{H}) = 0$.

3)
$$\begin{aligned} H^1(\Pi, \mathcal{G}_\alpha) &\cong \operatorname{Hom}_\Lambda\big(H_1(X^\infty, \mathbb{C}), \mathcal{G}_\alpha\big) \\ &\cong \begin{cases} \operatorname{Hom}_\Lambda\big(\oplus_i \Lambda/\lambda_i, \Lambda/(t-\omega)\big) & si \quad \omega \neq 1 \\ \mathcal{G}_\alpha & si \quad \omega = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

4) $H^2(\Pi, \mathcal{G}_\alpha) \cong \operatorname{Ext}^1_\Lambda\big(\oplus_i \Lambda/\lambda_i, \Lambda/(t-\omega)\big)$.

*En particulier,* $H^2(\Pi, \mathcal{G}_\alpha) \cong 0$ *si et seulement si* $\triangle(\omega) \neq 0$. *Si* $\alpha$ *est une racine de l'algèbre de Lie* $\mathcal{G}$ *telle que* $e^{\alpha(h_0)} \neq 1$ *alors* $\dim H^1(\Pi, \mathcal{G}_\alpha) = \dim H^2(\Pi, \mathcal{G}_\alpha)$.

*Démonstration.* — Considérons la projection de revêtement $q : \widetilde{E} \to E^\infty$ et $s$ la section

$$\begin{array}{rcc} s : C_i(E^\infty, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & C_i(\widetilde{E}, \mathbb{Z}) \\ e_i & \longmapsto & \tilde{e}_i \end{array}$$

où $e_i$ est une i-cellule de $E^\infty$ et $\tilde{e}_i$ est un relevé dans $\widetilde{E}$ de $e_i$. Alors $s$ induit un isomorphisme de complexes de chaînes

$$s^* : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}\Pi}(C_i(\widetilde{E}), \mathcal{G}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[t,t^{-1}]}(C_i(E^\infty), \mathcal{G})$$

qui commute aux bords, (on a noté encore par $\mathcal{G}$ le module $\mathcal{G}$ avec l'action de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ induite par $\bar{\rho}_0 : T \cong \langle t \rangle \to G$).

Puisque $E$ est un $K(\Pi, 1)$, on a pour tout $i \geqslant 1$, ([Br, Chapitre II, Proposition 4.1])

$$\begin{aligned} H^i(\Pi, \mathcal{G}) &= H^i\Big(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}\Pi}(C_*(\widetilde{E}), \mathcal{G})\Big) \\ &= H^i\Big(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[t,t^{-1}]}(C_*(E^\infty), \mathcal{G})\Big). \end{aligned}$$

Par extension des scalaires, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[t,t^{-1}]}(C_*(E^\infty),\mathcal{G})$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[t,t^{-1}]}(C_*(E^\infty,\mathbb{C}),\mathcal{G})$. Comme $\Lambda$ est un anneau principal, les coefficients universels donnent la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(H_{i-1}(E^\infty,\mathbb{C}),\mathcal{G}) \to H^i(\Pi,\mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(H_i(E^\infty,\mathbb{C}),\mathcal{G}) \to 0.$$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} &H_0(E^\infty,\mathbb{C}) \cong \Lambda/(t-1)\\ &H_1(E^\infty,\mathbb{C}) \cong \big(\mathrm{Ker}\ p/(\mathrm{Ker}\ p)'\big)\otimes\mathbb{C} \cong H_1(X^\infty,\mathbb{C}). \end{aligned}$$

On relie $H_2(E^\infty,\mathbb{C})$ à $H_2(X^\infty,\mathbb{C})$ en regardant la suite exacte de Hopf pour $X^\infty$, ([Br, Chapitre II, Théorème 5.2]). On a une surjection : $H_2(X^\infty,\mathbb{Z}) \to H_2(\mathrm{Ker}\ p)$ qui induit, en tensorisant par $\mathbb{C}$ une surjection

$$H_2(X^\infty,\mathbb{C}) \to H_2(\mathrm{Ker}\ p)\otimes\mathbb{C} \cong H_2(E^\infty,\mathbb{C}).$$

Or $H_2(X^\infty,\mathbb{C}) = 0$. En effet, la dualité de Reidemeister montre que

$$\begin{aligned} \overline{H_2(X^\infty,\mathbb{C})} &\cong H^1\big(\mathrm{Hom}_\Lambda(C_*(X^\infty,\partial X^\infty,\mathbb{C}),\Lambda)\big)\\ &\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(H_1(X^\infty,\partial X^\infty,\mathbb{C}),\Lambda) \end{aligned}$$

où $\overline{H_2(X^\infty,\mathbb{C})}$ désigne le module conjugué de $H_2(X^\infty,\mathbb{C})$. Comme $H_1(X^\infty,\mathbb{C})$ est de $\Lambda$-torsion, $H_1(X^\infty,\partial X^\infty,\mathbb{C})$ l'est aussi et $H_2(X^\infty,\mathbb{C}) = 0$.

Ceci implique que $H^2(\Pi,\mathcal{G}) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(H_1(X^\infty,\mathbb{C}),\mathcal{G})$.

D'autre part, le $\Lambda$-module $H_1(X^\infty,\mathbb{C})$ n'a pas de $(t-1)$-torsion car $\triangle(1) \neq 0$ donc, puisque le $\Lambda$-module trivial $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\Lambda/(t-1)$, on obtient

$$H^1(\Pi,\mathcal{H}) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda/(t-1),\mathcal{H}) \cong \mathcal{H}.$$

Comme l'application $\Phi$ est un homomorphisme injectif, on obtient l'affirmation 1).

La deuxième égalité, $H^2(\Pi,\mathcal{H}) \cong 0$, est conséquence de $\triangle(1) \neq 0$. De même, pour tout $\alpha \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$ tel que $\omega = e^{\alpha(h_0)} = 1$, on a

$$\begin{aligned} &H^1(\Pi,\mathcal{G}_\alpha) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda/(t-1),\mathcal{G}_\alpha) \cong \mathcal{G}_\alpha\\ &H^2(\Pi,\mathcal{G}_\alpha) \cong 0. \end{aligned}$$

Par contre si $\omega \neq 1$ alors

$$\begin{aligned} &H^1(\Pi,\mathcal{G}_\alpha) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(H_1(X^\infty,\mathbb{C}),\mathcal{G}_\alpha)\\ &H^2(\Pi,\mathcal{G}_\alpha) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(H_1(X^\infty,\mathbb{C}),\mathcal{G}_\alpha). \end{aligned}$$

Remarquons que $H^2(\Pi, \mathcal{G}_\alpha) = 0$ si et seulement si $H_1(X^\infty, \mathbb{C})$ n'a pas de $(t-\omega)$-torsion, c'est-à-dire si et seulement si $\triangle(\omega) \neq 0$. □

## 3. Structure d'algèbre graduée sur les groupes de cohomologie.

Soit $\rho_0 : \Pi \to G$ une représentation abélienne de $\Pi$ dans un groupe de Lie $G$ d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Le crochet de Lie sur $\mathcal{G}$ induit un produit cup

$$\smile : H^i(\Pi, \mathcal{G}) \times H^j(\Pi, \mathcal{G}) \to H^{i+j}(\Pi, \mathcal{G})$$

défini au niveau des cochaînes comme suit : pour $f \in C^i(\Pi, \mathcal{G})$ et $g \in C^j(\Pi, \mathcal{G})$ on pose :

$$(f \smile g)(x_1, \dots x_i; x_{i+1}, \dots, x_{i+j}) = [f(x_1, \dots x_i), x_1 \dots x_i \cdot g(x_{i+1}, \dots, x_{i+j})].$$

Ce produit confère donc à $H^*(\Pi, \mathcal{G})$ une structure d'algèbre graduée. On s'intéresse à la nature de l'application bilinéaire symétrique

$$\smile : H^1(\Pi, \mathcal{G}) \times H^1(\Pi, \mathcal{G}) \to H^2(\Pi, \mathcal{G}).$$

Dans ce qui suit, on considère le cas des groupes de Lie complexes connexes réductifs et on conservera les notations du §2.

Rappelons ([OV, Chapitre 3, §1.2]) que l'algèbre $\mathcal{G}$ se décompose, comme $\Pi$-module, sous la forme $\mathcal{G} \cong \mathcal{H} \oplus \sum_{\alpha \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})} \mathcal{G}_\alpha$ avec

$$[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 0, \qquad [\mathcal{H}, \mathcal{G}_\alpha] \subset \mathcal{G}_\alpha, \qquad [\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\alpha] = 0,$$

$$[\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta] \begin{cases} = & \mathcal{G}_{\alpha+\beta} & \text{si} & \alpha+\beta \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}). \\ \subset & \mathcal{H} & \text{si} & \beta = -\alpha \\ = & 0 & \text{sinon.} & \end{cases}$$

Donc on en déduit que $f \smile g = 0$ pour tout $(f,g) \in H^1(\Pi, \mathcal{H}) \times H^1(\Pi, \mathcal{H}) \cup H^1(\Pi, \mathcal{G}_\alpha) \times H^1(\Pi, \mathcal{G}_\alpha) \cup H^1(\Pi, \mathcal{G}_\alpha) \times H^1(\Pi, \mathcal{G}_\beta)$ pour tout $\alpha, \beta \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$ tels que $\alpha + \beta \notin \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$.

Il est clair aussi que si $\alpha$ est une racine de $\mathcal{G}$ telle que $\triangle(e^{\alpha(h_0)}) \neq 0$ alors $f \smile g = 0$ pour tout $(f,g) \in H^1(\Pi, \mathcal{H}) \times H^1(\Pi, \mathcal{G}_\alpha)$ car dans ce cas $H^2(\Pi, \mathcal{G}_\alpha) = 0$, (proposition 2.1, 4)).

On se propose de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Soit* $\alpha \in \Delta_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$ *une racine de* $\mathcal{G}$ *telle que* $\omega = e^{\alpha(h_0)}$ *est une racine simple du polynôme d'Alexander. Soit* $W \in H^1(\Pi,\mathcal{H}) \cong Z^1(\Pi,\mathcal{H})$ *un cocycle abélien non nul donné par* $W(\mu) = H \in \mathcal{H}$ *et tel que* $\alpha(H) \neq 0$. *Alors l'application linéaire*

$$W \smile - : H^1(\Pi,\mathcal{G}_\alpha) \longrightarrow H^2(\Pi,\mathcal{G}_\alpha)$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — D'après la proposition 2.1, 4), il suffit de montrer que $W \smile -$ est injective. Soit $j$ l'homomorphisme défini par la composée

$$j : \mathrm{Ker}\ p \longrightarrow \mathrm{Ker}\ p/(\mathrm{Ker}\ p)' \longrightarrow \mathrm{Ker}\ p/(\mathrm{Ker}\ p)' \otimes \mathbb{C} \cong H_1(X^\infty,\mathbb{C}).$$

Si $U \in \mathrm{Hom}_\Lambda(H_1(X^\infty,\mathbb{C}),\mathcal{G}_\alpha)$, soit $\bar{U} : \Pi \to \mathcal{G}_\alpha$ défini par $\bar{U}(x,t^k) = U(j(x))$. Il est facile de voir que $\bar{U} \in Z^1(\Pi,\mathcal{G}_\alpha)$ et que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_\Lambda(H_1(X^\infty,\mathbb{C}),\mathcal{G}_\alpha) & \longrightarrow & H^1(\Pi,\mathcal{G}_\alpha) \\ U & \longmapsto & [\bar{U}] \end{array}$$

est $\mathbb{C}$-linéaire et injective. La proposition 2.1.3) montre que c'est un isomorphisme. Si $A$ est un élément de $H^1(\Pi,\mathcal{G}_\alpha)$, il existe donc $U \in \mathrm{Hom}_\Lambda(H_1(X^\infty,\mathbb{C}),\mathcal{G}_\alpha)$ qui représente $A$.

Si $[W] \smile A = 0$, il existe une cochaîne $\phi : \mathrm{Ker}\ p \rtimes T \to \mathcal{G}_\alpha$ telle que $W \smile \bar{U} = \delta\phi$, c'est-à-dire

$$-\phi(XY) + \phi(X) + X \cdot \phi(Y) = [W(X), X \cdot \bar{U}(Y)] \tag{1}$$

pour tout $X = (x,t^k), Y = (y,t^l)$ avec $x,y \in \mathrm{Ker}\ p$, $k,l \in \mathbb{Z}$.

Quitte à corriger par un cobord, on peut supposer que $\phi(0,t^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En effet, si $\phi(0,t) = g \in \mathcal{G}_\alpha$, on remplace $\phi$ par la cochaîne $\phi' = \phi + \delta C$ où $C$ est la 0-cochaîne donnée par $1/(1-\omega)g$. En utilisant (1) et par récurrence sur $k$, on montre que, puisque $\bar{U}(0,t) = 0$, $\phi(0,t^k) = 0$. De plus, $\phi(x,t^k) = \phi(x,1)$ pour tout $x \in \mathrm{Ker}\ p$ et tout $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\phi(x,t^k) = \nu(x)$ où $\nu$ désigne une application de Ker $p$ dans $\mathcal{G}_\alpha$. En utilisant (1) de nouveau et le fait que $W(x,1) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Ker}\ p$, on montre que $\nu$ est un homomorphisme de groupes. Il induit une application $\mathbb{C}$-linéaire $\bar{\nu} : H_1(X^\infty,\mathbb{C}) \to \mathcal{G}_\alpha$ et (1) est équivalent à

$$-\bar{\nu}(t^k y) + \omega^k \bar{\nu}(y) = k\alpha(h)\omega^k U(y) \tag{2}$$

pour tout $y \in H_1(X^\infty,\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{Z}$.

D'autre part, comme $\omega$ est une racine simple de $\triangle$, le $\Lambda$-module $H_1(X^\infty, \mathbb{C})$ est isomorphe à $\Lambda/(t-\omega) \oplus \mathcal{T}$ où $\mathcal{T}$ est un $\Lambda$-module de torsion sans $(t-\omega)$-torsion. Il est clair que $U(\mathcal{T}) = 0$ et si $y$ appartient à la $(t-\omega)$-torsion de $H_1(X^\infty, \mathbb{C})$, $(\omega - t)y = 0$.

Pour $k = 1$, l'équation (2) donne : $0 = \nu((\omega - t)y) = \alpha(h)\omega U(y)$. Donc $U$ est l'homomorphisme nul et $W \smile -$ est injective. □

## 4. Structure locale de $R(\Pi, G)$.

Soient $\Gamma$ un groupe discret de présentation finie et $G$ un groupe algébrique. On considère l'ensemble $R(\Gamma, G)$ de tous les homomorphismes de groupes de $\Gamma$ dans $G$. Cet ensemble admet une structure d'espace topologique de la façon suivante : on considère la topologie usuelle sur le groupe de Lie $G$, la topologie discrète sur $\Gamma$ et on munit $R(\Gamma, G)$ de la topologie compacte ouverte.

L'ensemble $R(\Gamma, G)$ admet aussi une structure de variété affine non nécessairement irréductible. En effet, si $\Gamma$ est le groupe libre $F_n$ de générateurs $X_1, \ldots, X_n$, l'ensemble $R(\Gamma, G)$ s'identifie naturellement à la variété affine $G^n$. Si $\Gamma$ admet la présentation $\langle X_1, \ldots, X_n \ : \ W_1, \ldots, W_m \rangle$ on peut plonger $R(\Gamma, G)$ dans $G^n$ via l'application $f$ donnée par $f(\rho) = (\rho(X_1), \ldots, \rho(X_n))$. L'application $f$ est injective car les $X_i$ engendrent $\Gamma$.

Soit $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ un élément de $G^n$. Si on substitue $\sigma_i$ à la place de $X_i$ dans le mot $W_j$ alors on peut considérer chaque mot $W_j$ comme étant une application polynomiale de $G^n$ dans $G^m$. Donc $\mathrm{Im} f = \bigcap\{(W_j)^{-1}(e),\ j = 1, \ldots, m\} = W^{-1}(e, \ldots, e)$ où

$$W = (W_1, \ldots, W_m) : G^n \longrightarrow G^m$$

et on peut identifier $R(\Gamma, G)$ à $\mathrm{Im} f$.

Le résultat suivant, qui est une conséquence de la proposition 3.4 de [LM], généralise le théorème 19 de E.P. Klassen ([K]) à d'autres groupes de Lie que $SU(2)$.

Soit $G$ un groupe de Lie complexe connexe réductif d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et soit $\rho_0 : \Pi \to G$ une représentation abélienne de $\Pi$ dans $G$ qui factorise par $T$. Supposons que $\rho_0(\mu)$ est un élément semi-simple de $G$ alors $\rho_0(\mu)$ appartient à un sous-groupe de Cartan $H$ de $G$ d'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ et $\rho_0(\mu) = h_0$ avec $h_0 \in \mathcal{H}$.

THÉORÈME 4.1. — *Supposons que pour toute racine* $\alpha \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$, $\omega = e^{\alpha(h_0)}$ *n'est pas racine du polynôme d'Alexander; alors l'espace des représentations* $R(\Pi, G)$ *est une variété analytique complexe lisse au voisinage de* $\rho_0$ *de dimension égale à celle de* $G$. *De plus, il existe un voisinage de* $\rho_0$ *dans* $R(\Pi, G)$ *qui ne contient que des représentations abéliennes.*

*Remarque.* — La sous-variété $S(\Pi, G)$ des représentations abéliennes de $R(\Pi, G)$ qui factorisent par $T = H_1(X^\infty, \mathbb{Z})/\mathrm{tors}(H_1(X^\infty, \mathbb{Z}))$ est une composante irréductible de $R(\Pi, G)$ qui s'identifie à $G$.

Naturellement, on se demande ce qui se passe si l'un des $\omega$ est une racine du polynôme d'Alexander $\triangle$.

Ce paragraphe est entièrement consacré à une réponse partielle à cette question dans le cas d'un groupe de Lie complexe connexe réductif.

DÉFINITION 4.2. — *Soit* $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ *une représentation d'un groupe* $\Gamma$ *de génération finie dans un groupe de Lie* $G$. *On dit que* $\rho$ *est une* représentation métabélienne *si la restriction de* $\rho$ *au sous-groupe* $\Gamma''$ *(où* $\Gamma''$ *désigne le deuxième sous-groupe des commutateurs de* $\Gamma$*) est l'homomorphisme trivial.*

Un calcul simple utilisant le fait que $[\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\alpha] = 0$ pour tout $\alpha \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$ montre la :

PROPOSITION 4.3. — *Soit* $\rho_0 : \Pi \longrightarrow G$ *une représentation abélienne de* $\Pi$ *dans un groupe de Lie complexe connexe réductif qui factorise par* $T$ *et supposons que* $\rho_0(\mu)$ *est un élément semi-simple de* $G$. *Soient* $\mathcal{V}_1$ *un cocycle de* $Z^1(\Pi, \mathcal{G}_\alpha)$, $\alpha \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$, *et* $\rho_t = (t\mathcal{V}_1)\rho_0$, $t \in \mathbb{R}$. *Alors* $\rho_t$ *est un chemin de représentations métabéliennes de* $\Pi$ *dans* $G$.

Rappelons ([P, définition 3.3]) qu'une représentation $\rho \in R(\Pi, G)$ est dite *réduite au sens des schémas* si on peut identifier $T_\rho^{\mathrm{Zar}} R(\Pi, G)$, l'espace tangent de Zariski à la variété $R(\Pi, G)$ au point $\rho$, à l'espace des 1-cocycles $Z^1(\Pi, \mathcal{G})$.

COROLLAIRE 4.4. — *La représentation* $\rho_0$ *est réduite au sens des schémas.*

*Démonstration.* — Pour montrer ce résultat, il suffit de montrer qu'on a $\mathrm{Vect}\big(C^T_{\rho_0}(\Pi, G)\big) = Z^1(\Pi, \mathcal{G})$ où $C^T_{\rho_0}(\Pi, G)$ désigne le cône tangent de $R(\Pi, G)$ en $\rho_0$, (voir §5, définition 5.1). Or, d'après la proposition 4.3, tout cocycle de $Z^1(\Pi, \mathcal{G}_\alpha)$, $\alpha \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$, est un vrai vecteur tangent. De plus, il est facile de voir que les cocycles de $Z^1(\Pi, \mathcal{H})$ sont aussi de vrais vecteurs tangents, d'où le résultat. □

Nous allons maintenant énoncer le théorème dont la démonstration va occuper tout le reste de ce paragraphe.

THÉORÈME 4.5. — *Soit un nœud d'une 3-sphère d'homologie rationnelle $\Sigma$ dont le groupe $\Pi$ est muni d'une involution $k$ telle que $k(\mu) = \mu^{-1}$, où $\mu$ désigne un méridien du nœud.*

*Soient $G$ un groupe de Lie complexe connexe réductif et soit $\rho_0 : \Pi \to G$ une représentation abélienne qui factorise par $T$ et telle que $\rho_0(\mu) = h_0$ où $h_0$ est dans $\mathcal{H}$, sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{G}$. Supposons qu'il existe $\alpha_{i_0} \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$ telle que $\omega_{i_0} = e^{\alpha_{i_0}(h_0)}$ est une racine simple de $\triangle$. Alors il existe un arc de représentations non métabéliennes $\rho_t : \Pi \to G$ d'extrémité $\rho_0$.*

*Remarque.* — Il semble nécessaire d'introduire l'involution sur le groupe du noeud pour pouvoir résoudre les équations d'obsrtuction de la proposition 4.11. Une telle condition n'apparaît pas dans les travaux de C. Frohman et E. Klassen où un résultat analogue est démontré par une méthode géométrique pour le groupe de Lie réel $SU(2)$, ni d'ailleurs dans les travaux de C. Herald et Heusener-Kroll. L'existence de cette involution est garantie si le noeud est rigidement inversible (ce qui est le cas des noeuds du tore ou plus généralement des noeuds algébriques) ou fortement amphichériques, ([Boi]).

Nous nous proposons de démontrer le théorème 4.5 en deux étapes. Tout d'abord nous construisons une déformation formelle de $\rho_0$. Ensuite nous montrons qu'à partir de cet arc formel on peut construire un arc convergent de représentations.

Nous énonçons et démontrons auparavant quelques résultats qui nous seront utiles pour la suite.

Notons par $\bar{\mathcal{G}}$ l'algèbre de Lie de $G$ qui est un $\Pi$-module via l'action de $\mathrm{Ad}(\rho_0 \circ k)$.

*Notations.* — On notera par $e_1$ un générateur de $\mathcal{G}_{\alpha_{i_0}}$, par $e_2$ un générateur de $\mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}}$ et par $\mathcal{H}_{i_0}$ la sous-algèbre abélienne engendrée par $h_{\alpha_{i_0}} = [e_1, e_2]$. Si $f$ est une $i$-cochaîne à coefficients dans $\mathcal{G}_{i_0} = \mathcal{G}_{\alpha_{i_0}} \oplus \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}}$, on notera par $(f^1, f^2)$ les coordonnées de $f$ dans la base $(e_1, e_2)$. Si $F$ est une $i$-cochaîne à coefficients dans $\mathcal{H}_{i_0}$, on notera par $F^0$ sa coordonnée dans la base $h_{\alpha_{i_0}}$.

On a les isomorphismes de $\Pi$-modules suivants :

$$\psi : \bar{\mathcal{G}}_{\alpha_{i_0}} \longrightarrow \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}} \text{ et } \varphi : \bar{\mathcal{G}}_{-\alpha_{i_0}} \longrightarrow \mathcal{G}_{\alpha_{i_0}}$$

définis sur les générateurs par $\psi(e_1) = e_2$ et $\varphi(e_2) = e_1$.

L'automorphisme $k$ induit des isomorphismes sur les complexes de cochaînes : $k^* : C^i(\Pi, \mathcal{G}) \longrightarrow C^i(\Pi, \bar{\mathcal{G}})$ et en cohomologie : $k^* : H^i(\Pi, \mathcal{G}) \longrightarrow H^i(\Pi, \bar{\mathcal{G}})$. Notons par $K_1^*$ la composée

$$K_1^* = \psi^* \circ k^* : C^i(\Pi, \mathcal{G}_{\alpha_{i_0}}) \to C^i(\Pi, \bar{\mathcal{G}}_{\alpha_{i_0}}) \to C^i(\Pi, \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}})$$

et par $K_2^*$ la composée

$$K_2^* = \varphi^* \circ k^* : C^i(\Pi, \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}}) \to C^i(\Pi, \bar{\mathcal{G}}_{-\alpha_{i_0}}) \to C^i(\Pi, \mathcal{G}_{\alpha_{i_0}})$$

alors $K_1^* \circ K_2^* = \mathrm{id}_{C^i(\Pi, \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}})}$ et $K_2^* \circ K_1^* = \mathrm{id}_{C^i(\Pi, \mathcal{G}_{\alpha_{i_0}})}$.

Soit $K = K_1^* \oplus K_2^* : C^i(\Pi, \mathcal{G}_{i_0}) \longrightarrow C^i(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$.

DÉFINITIONS 4.6

1) *Si $f$ et $g$ sont deux cochaînes dans $C^1(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$, on note par $[f, g]$ la 2-cochaîne de $C^2(\Pi, \mathcal{H}_{i_0})$ donnée par $[f, g](X, Y) = [f(X), g(Y)]$ pour tout $X, Y \in \Pi$.*

2) *Soient $F \in C^2(\Pi, \mathcal{H}_{i_0})$ et $G \in C^1(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$. On note respectivement par $\langle F, G\rangle$ et $\langle\langle F, G\rangle\rangle$ les 2-cochaînes de $C^2(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$ définies, pour tout $X, Y \in \Pi$, par*

$$\langle F, G\rangle(X, Y) = [F(X, Y), G(X)] \text{ et } \langle\langle F, G\rangle\rangle(X, Y) = [F(X, Y), X \cdot G(Y)].$$

Nous aurons besoin du résultat suivant.

PROPOSITION 4.7

1) *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} C^1(\Pi, \mathcal{G}_{i_0}) & \xrightarrow{K} & C^1(\Pi, \mathcal{G}_{i_0}) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ C^2(\Pi, \mathcal{G}_{i_0}) & \xrightarrow{K} & C^2(\Pi, \mathcal{G}_{i_0}) \end{array}$$

2) *Pour tout $f, g \in C^1(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$ : $k^*([f, g]) = -[Kf, Kg]$ et $k^*(f \smile g) = -Kf \smile Kg$.*

3) *Si $f \in C^1(\Pi, \mathcal{H}_{i_0})$ et $g \in C^1(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$ alors $K(f \smile g) = -k^* f \smile Kg$.*

4) *Pour tout* $F \in C^2(\Pi, \mathcal{H}_{i_0})$ *et tout* $G \in C^1(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$ : $K\big(\langle F, G\rangle\big) = -\langle k^*F, KG\rangle$ *et* $K\big(\langle\langle F, G\rangle\rangle\big) = -\langle\langle k^*F, KG\rangle\rangle$.

*Démonstration.* — La démonstration étant technique, nous démontrons juste le cas 1).

Pour tout $X, Y \in \Pi \cong \operatorname{Ker} p \rtimes T$, écrivons $X = (x, t^l)$. Soit $f \in C^1(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$ ; alors

$$\begin{aligned}\partial \circ K(f)(X,Y) \;&= -\Big(f^1(k(XY))e_2 + f^2(k(XY))e_1\Big)\\ &\quad+\Big(f^1(k(X))e_2 + f^2(k(X))e_1\Big)\\ &\quad+\Big({\omega_{i_0}}^{-l} f^1(k(Y))e_2 + {\omega_{i_0}}^{l} f^2(k(Y))e_1\Big).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}K \circ \partial(f)(X,Y) \;&= -\Big(f^1(k(XY))e_2 + f^2(k(XY))e_1\Big) + \Big(f^1(k(X))e_2\\ &\quad+f^2(k(X))e_1\Big) + \Big(\omega_{i_0}^{-l} f^1(k(Y))e_2 + \omega_{i_0}^{l} f^2(k(Y))e_1\Big)\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

*Notation.* — Soit $V_1$ un cocycle qui engendre $H^1(\Pi, \mathcal{G}_{\alpha_{i_0}})$ et tel que $V_1(\mu) = 0$. Notons par $V_2$ le cocycle de $Z^1(\Pi, \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}})$ tel que $V_2 = K_1^* V_1$. Comme $K_1^*$ est un isomorphisme, le cocycle $V_2$ engendre aussi $H^1(\Pi, \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}})$ et est tel que $V_2(\mu) = 0$ car $K_1^* V_1(\mu) = V_1(\mu^{-1}) = 0$. En particulier, on a $K(V_1 + V_2) = V_1 + V_2$.

### 4.1. Construction d'une déformation formelle.

Soient $\Gamma$ un groupe de présentation finie et $G$ un groupe de Lie réel ou complexe. Notons par $\mathcal{G}[[t]]$ l'espace vectoriel des séries formelles en une variable $t$ et par $m[[t]]$ la sous-algèbre des séries formelles sans termes constants. Si $\mathcal{G}$ admet une structure de $\Gamma$-module alors $\mathcal{G}[[t]]$ aussi et l'action est donnée par

$$x \cdot \Big(\sum_{i \geqslant 0} A^i t^i\Big) = \sum_{i \geqslant 0} A^i x \cdot t^i \quad \text{pour tous } x \in \Gamma, A_i \in \mathcal{G}.$$

En substituant les éléments $A = \sum_{i \geqslant 1} U_i t^i$ et $B = \sum_{i \geqslant 1} V_i t^i$ de $m[[t]]$ dans la série de Campbell-Hausdorff :

$$A * B = A + B + 1/2[A, B] + 1/12[[A, B], B - A] + \ldots$$

on obtient

$$\left(\sum_{i\geqslant 1} U_i t^i\right) * \left(\sum_{i\geqslant 1} V_i t^i\right) = (U_1+V_1)t + (U_2+V_2+1/2[U_1,V_1])t^2$$
$$+(U_3+V_3+1/2[U_1,V_2]+1/2[V_1,U_2]+1/12[[U_1,V_1],V_1-U_1])t^3+\dots$$

(voir [Bou, ChapitreII, §6.5] pour les détails). Ceci permet de construire une opération $*: m[[t]]\times m[[t]] \to m[[t]]$.

DÉFINITION 4.8. — *Un* arc logarithmique formel *est une application* $U_t : \Gamma \longrightarrow m[[t]]$ *telle que pour tout* $X, Y \in \Gamma : U_t(XY) = U_t(X) * X \cdot U_t(Y)$.

Soient des cochaînes $U_i : \Gamma \longrightarrow \mathcal{G}$, $i \geqslant 1$ et soit $U_t = \sum_{i\geqslant 1} U_i t^i$. Considérons pour tout $X, Y \in \Gamma$ l'équation $U_t(XY) = U_t(X) * X \cdot U_t(Y)$. En remplaçant la cochaîne $U_t$ par sa valeur et en égalisant les coefficients de $t^n$, on obtient une fonction multilinéaire $\zeta_n$, $n \geqslant 2$ sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ telle que

$$\begin{cases} \delta U_1(X,Y) &= 0 \\ -\delta U_n(X,Y) &= \zeta_n(U_1,\dots,U_{n-1})(X,Y). \end{cases}$$

Remarquons que $\zeta_n$ $(n \geqslant 2)$ est en fait une somme de monômes qui sont des crochets en les $U_i(X)$ et les $X \cdot U_j(Y)$, $1 \leqslant i,j \leqslant n-1$. En particulier, pour tout $n \geqslant 2$ :

$$-\delta U_n(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}[U_k(X), X\cdot U_{n-k}(Y)] + \sum_{j=3}^{n} A_j\big(U_1,\dots,U_{n-2}\big)(X,Y)$$

où $A_j$ est une somme de monômes qui sont des crochets en exactement $j$ facteurs parmi les $U_i(X)$ et les $X \cdot U_l(Y)$, $1 \leqslant i, l \leqslant n-2$.

DÉFINITION 4.9. — *Soit* $\Gamma$ *un groupe quelconque de génération finie qui agit sur l'algèbre de Lie* $\mathcal{G}$. *Une famille de cochaînes* $U_i : \Gamma \longrightarrow \mathcal{G}$, $i = 1,\dots,k$, *satisfait la* condition d'homomorphie à l'ordre $k$ ,$(H_k)$, *si pour tout* $X, Y \in \Gamma$ :

$$\sum_{i=1}^{k} U_i(XY)t^i = \left(\sum_{i=1}^{k} U_i(X)t^i\right) * \left(\sum_{i=1}^{k} X\cdot U_i(Y)t^i\right) \mod (t^{k+1}\mathcal{G}[[t]]).$$

PROPOSITION 4.10. — *Soit* $(U_1,\dots,U_{k-1})$, *pour* $k \geqslant 2$, *une famille de cochaînes sur le groupe de présentation finie* $\Gamma$ *qui satisfait la condition d'homomorphie à l'ordre* $(k-1)$, $(H_{k-1})$, *alors*

$$\zeta_k(U_1,\dots,U_{k-1}) \in Z^2(\Gamma,\mathcal{G}).$$

*Démonstration.* — Ceci découle de l'associativité de la loi $*$. Si $(U_1, \cdots, U_{k-1})$ satisfait la condition d'homomorphie $(H_{k-1})$ alors

$$\sum_{i=1}^{k-1} U_i(XY)t^i + \zeta_k(U_1, \ldots, U_{k-1})(X,Y)t^k$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{k-1} U_i(X)t^i\right) * \left(\sum_{i=1}^{k-1} X \cdot U_i(Y)t^i\right) \ \mathrm{mod}(t^{k+1}\mathcal{G}[[t]]).$$

Si on calcule

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} U_i(X)t^i\right) * \left(\sum_{i=1}^{k-1} X \cdot U_i(Y)t^i\right) * \left(\sum_{i=1}^{k-1} XY \cdot U_i(Z)t^i\right)$$

de deux façons différentes, on voit que $\delta\zeta_k(U_1, \ldots, U_{k-1}) = 0$. □

PROPOSITION 4.11. — *Supposons que $\rho_0$ est une représentation abélienne de $\Pi$ dans un groupe de Lie complexe connexe réductif et qui vérifie les hypothèses du théorème 4.5. Soit le cocycle $U_1 = V_1 + V_2 \in Z^1(\Pi, \mathcal{G}_{\alpha_{i_0}} \oplus \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}})$, alors pour tout $i \geqslant 2$ il existe une cochaîne $U_i \in C^1(\Pi, \mathcal{G})$ qui est solution de l'équation*

$$(E_i) \qquad -\delta U_i = \zeta_i(U_1, \ldots, U_{i-1}).$$

*Démonstration.* — Pour toute la suite de la démonstration choisissons un cocycle $W$ non nul de $Z^1(\Pi, \mathcal{H}_{i_0})$ ; alors $W$ est un générateur de $H^1(\Pi, \mathcal{H}_{i_0})$. De plus $\alpha_{i_0}(W(\mu)) \neq 0$ ([OV, Chapitre 3, §1.2]).

On va commencer par traiter les cas $i = 2$ et $i = 3$ où l'on peut écrire les équations complètement.

Considérons l'équation

$$(E_2) \qquad -\delta U_2 = \zeta_2(U_1) = \frac{1}{2} U_1 \smile U_1.$$

Cette équation admet une solution unique $U_2^0 \in C^1(\Pi, \mathcal{H}_{i_0})$ telle que $U_2^0(\mu) = 0$ car $H^2(\Pi, \mathcal{H}_{i_0}) = 0$ et $\dim Z^1(\Pi, \mathcal{H}_{i_0}) = 1$.

D'après la proposition 4.7 on a

$$k^*(\zeta_2(U_1)) = \frac{1}{2} k^*(U_1 \smile U_1)$$
$$= -\frac{1}{2} U_1 \smile U_1 = -\zeta_2(U_1).$$

Donc

$$\begin{aligned}-\delta k^* U_2^0 &= k^*(-\delta U_2^0)\\ &= k^*\zeta_2(U_1)\\ &= -\zeta_2(U_1) = \delta U_2^0.\end{aligned}$$

On en déduit que $k^*U_2^0 = -U_2^0 + Z$ où $Z \in Z^1(\Pi, \mathcal{H}_{i_0})$. Or $k^*U_2^0(\mu) = U_2^0(\mu^{-1}) = -U_2^0(\mu) = 0$ donc $Z(\mu) = 0$ et par là même $Z = 0$. Ceci implique que $k^*U_2^0 = -U_2^0$.

Considérons la 2-cochaîne $\zeta_3(U_1, U_2^0) \in C^2(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$ alors $\zeta_3(U_1, U_2^0) \in Z^2(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$ (proposition 4.10) et pour tout $X, Y \in \Pi$ on a

$$\begin{aligned}\zeta_3(U_1, U_2^0)(X,Y) = \frac{1}{2}[U_1(X), X\cdot U_2^0(Y)] + \frac{1}{2}[U_2^0(X), X\cdot U_1(Y)]\\ + \frac{1}{12}[[U_1(X), X\cdot U_1(Y)], X\cdot U_1(Y) - U_1(X)]\end{aligned}$$

ou encore

$$\zeta_3(U_1, U_2^0) = \frac{1}{2}U_1 \smile U_2^0 + \frac{1}{2}U_2^0 \smile U_1 + \frac{1}{12}\langle\langle U_1 \smile U_1, U_1\rangle\rangle - \frac{1}{12}\langle U_1 \smile U_1, U_1\rangle.$$

En appliquant l'isomorphisme $K$ on obtient (proposition 4.7)

$$\begin{aligned}K\zeta_3(U_1, U_2^0) = -\frac{1}{2}KU_1 \smile k^*U_2^0 - \frac{1}{2}k^*U_2^0 \smile KU_1\\ - \frac{1}{12}\langle\langle k^*(U_1 \smile U_1), KU_1\rangle\rangle + \frac{1}{12}\langle k^*(U_1 \smile U_1), KU_1\rangle.\end{aligned}$$

Or $KU_1 = U_1$ et $k^*U_2^0 = -U_2^0$ d'où $K\zeta_3(U_1, U_2^0) = \zeta_3(U_1, U_2^0)$.

D'après le théorème 3.1, il existe un couple unique $(\lambda, \gamma) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\{\zeta_3(U_1, U_2^0)\} = \lambda\{W \smile V_1\} + \gamma\{W \smile V_2\}.$$

Or $K\{\zeta_3(U_1, U_2^0)\} = \{K\zeta_3(U_1, U_2^0)\} = \{\zeta_3(U_1, U_2^0)\}$ et

$$K\Big(\lambda\{W \smile V_1\} + \gamma\{W \smile V_2\}\Big) = \lambda\{W \smile V_2\} + \gamma\{W \smile V_1\}$$

donc $\gamma = \lambda$. Ceci implique que $\{\zeta_3(U_1, U_2^0)\} = \lambda\{W \smile U_1\}$.

Comme $\{W \smile U_1\} = \{U_1 \smile W\}$ dans $H^2(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$ alors

$$\Big\{\zeta_3(U_1, U_2^0)\} = \frac{\lambda}{2}\{W \smile U_1\} + \frac{\lambda}{2}\{U_1 \smile W\Big\}.$$

Ceci est équivalent à

$$\Big\{\zeta_3(U_1, U_2^0) - \frac{\lambda}{2}W \smile U_1 - \frac{\lambda}{2}U_1 \smile W\Big\} = 0$$

ou encore

$$\{\zeta_3(U_1, U_2^0 - \lambda W)\} = 0 \quad \text{dans } H^2(\Pi, \mathcal{G}_{i_0}).$$

Autrement dit, il existe une cochaîne $U_3 \in C^1(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$ qui est solution de l'équation

$$(E_3) \qquad -\delta U_3 = \zeta_3(U_1, U_2^0 - \lambda W).$$

On pose $U_2 = U_2^0 - \lambda W$. Alors il est clair que $U_2$ est solution de l'équation $(E_2)$ et vérifie $k^* U_2 = -U_2$. D'autre part, il est facile de voir que $K\zeta_3(U_1, U_2) = \zeta_3(U_1, U_2)$, donc pour toute cochaîne $U_3$ solution de $(E_3)$ on a $K(-\delta U_3) = -\delta K U_3 = -\delta U_3$, ou encore $KU_3 = U_3 + Z$ avec $Z \in Z^1(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$. Quitte à corriger par un cobord, on peut supposer que $U_3^0$ est une cochaîne telle que $U_3^0(\mu) = 0$ et qui satisfait $(E_3)$. On a la deuxième composante de $Z$ qui s'écrit sous la forme $Z^2 = \epsilon V_2 + \delta C$ avec $\epsilon \in \mathbb{C}$ et $C \in \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}}$. D'où

$$\begin{aligned} K_1^*\big((U_3^0)^1 e_1\big)(\mu) &= \big((U_3^0)^2 e_2\big)(\mu) + \epsilon V_2(\mu) + \delta C(\mu) \\ &= \delta C(\mu) \\ &= (1 - \omega_{i_0}^{-1}) C. \end{aligned}$$

D'autre part, $K_1^*\big((U_3^0)^1 e_1\big)(\mu) = \big((U_3^0)^1 e_2\big)(\mu^{-1}) = -\mu^{-1} \cdot \big((U_3^0)^1 e_2\big)(\mu) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} K_1^*\big((U_3^0)^1 e_1\big) &= (U_3^0)^2 e_2 + \epsilon V_2 \\ &= (U_3^0)^2 e_2 + \epsilon K_1^* V_1. \end{aligned}$$

Notons par $U_3$ la cochaîne dans $C^1(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$ telle que
$\begin{cases} U_3^1 e_1 = (U_3^0)^1 e_1 - \epsilon V_1 \\ U_3^2 e_2 = (U_3^0)^2 e_2 \end{cases}$ alors $-\delta U_3 = \zeta_3(U_1, U_2)$ et

$$\begin{aligned} KU_3 &= K_1^*\Big(U_3^1 e_1\Big) + K_2^*\Big(U_3^2 e_2\Big) \\ &= U_3^2 e_2 + U_3^1 e_1 \quad (\text{car } K_2^* \circ K_1^* = \mathrm{Id}) \\ &= U_3. \end{aligned}$$

Nous allons démontrer par récurrence que l'on peut résoudre de la même façon les paires d'équations $(E_{2n})$ et $(E_{2n+1})$, pour tout $n \geqslant 1$.

*Hypothèse d'induction.* — Supposons que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, il existe une cochaîne $U_{2i} \in C^1(\Pi, \mathcal{H}_{i_0})$ et une cochaîne $U_{2i+1} \in C^1(\Pi, \mathcal{G}_{i_0})$ telles que

$$\begin{cases} -\delta U_{2i} = \zeta_{2i}(U_1, \ldots, U_{2i-1}) \\ k^* U_{2i} = -U_{2i} \end{cases} ; \quad \begin{cases} -\delta U_{2i+1} = \zeta_{2i+1}(U_1, \ldots, U_{2i}) \\ KU_{2i+1} = U_{2i+1}. \end{cases}$$

Considérons le 2-cocycle $\zeta_{2n}(U_1,\dots,U_{2n-1}) \in Z^2(\Pi,\mathcal{H}_{i_0})$, alors

$$\zeta_{2n}(U_1,\dots,U_{2n-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} U_{2k+1} \smile U_{2n-(2k+1)} + \sum_{l=3}^{2n} A_l(U_1,\dots,U_{2n-2})$$

puisque tous les produits cup des cochaînes d'indices pairs sont nuls.

Montrons que $k^*\zeta_{2n}(U_1,\dots,U_{2n-1}) = -\zeta_{2n}(U_1,\dots,U_{2n-1})$.

Chaque terme dans une somme $A_{2j}$ de la sommation ci-dessus, $(2 \leqslant j \leqslant n)$ contient $(2j-1)$ crochets et $2j$ termes, un nombre pair $\alpha_1$ de cochaînes $U_{2i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ et un nombre pair $\alpha_2$ de cochaînes $U_{2i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence et la proposition 4.7,

$$\begin{aligned} k^*A_{2j}(U_1,\dots,U_{2n-2}) &= (-1)^{2j-1}(-1)^{\alpha_2}A_{2j}(U_1,\dots,U_{2n-2}) \\ &= -A_{2j}(U_1,\dots,U_{2n-2}). \end{aligned}$$

Quant aux termes dans une somme $A_{2j+1}$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ ils font intervenir $2j$ crochets, un nombre pair $\alpha_1$ de cochaînes $U_{2i+1}$ et un nombre impair $\alpha_2$ de cochaînes $U_{2i}$ ; d'où

$$\begin{aligned} k^*A_{2j+1}(U_1,\dots,U_{2n-2}) &= (-1)^{2j}(-1)^{\alpha_2}A_{2j+1}(U_1,\dots,U_{2n-2}) \\ &= -A_{2j+1}(U_1,\dots,U_{2n-2}). \end{aligned}$$

De plus, par la proposition 4.7 et l'hypothèse de récurrence

$$k^*\big(U_{2k+1} \smile U_{2n-(2k+1)}\big) = -U_{2k+1} \smile U_{2n-(2k+1)}, \text{ pour tout } 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

donc

$$k^*\zeta_{2n}(U_1,\dots,U_{2n-1}) = -\zeta_{2n}(U_1,\dots,U_{2n-1}).$$

Comme $H^2(\Pi,\mathcal{H}_{i_0}) = 0$ et $\dim Z^1(\Pi,\mathcal{H}_{i_0}) = 1$, on trouve une cochaîne $U_{2n}^0$ dans $C^1(\Pi,\mathcal{H}_{i_0})$ telle que

$$\begin{cases} -\delta U_{2n}^0 &= \zeta_{2n}(U_1,\dots,U_{2n-1}) \\ U_{2n}^0(\mu) &= 0 \end{cases}$$

et qui vérifie en plus $k^*U_{2n}^0 = -U_{2n}^0$.

Soit le 2-cocycle $\zeta_{2n+1}(U_1,\dots,U_{2n}^0) \in Z^2(\Pi,\mathcal{G}_{i_0})$ alors

$$\begin{aligned} \zeta_{2n+1}(U_1,\dots,U_{2n}^0) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\big(U_{2i} \smile U_{2n+1-2i} + U_{2n+1-2i} \smile U_{2i}\big) \\ &\quad + \frac{1}{2}U_{2n}^0 \smile U_1 + \frac{1}{2}U_1 \smile U_{2n}^0 + \sum_{l=3}^{2n+1} A_l(U_1,\dots,U_{2n-1}). \end{aligned}$$

Considérons un terme dans un monôme $A_{2j}$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$ alors ce terme contient $(2j-1)$ crochets, un nombre impair $\alpha_1$ de cochaînes $U_{2i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ et un nombre impair $\alpha_2$ de cochaînes $U_{2i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ d'où

$$\begin{aligned} KA_{2j}(U_1,\ldots,U_{2n-1}) &= (-1)^{2j-1}(-1)^{\alpha_2}A_{2j}(U_1,\ldots,U_{2n-1}) \\ &= A_{2j}(U_1,\ldots,U_{2n-1}). \end{aligned}$$

D'un autre côté, tout terme dans un monôme $A_{2j+1}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ fait intervenir $2j$ crochets, un nombre impair $\alpha_1$ de cochaînes $U_{2i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ et un nombre pair $\alpha_2$ de cochaînes $U_{2i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ donc

$$\begin{aligned} KA_{2j+1}(U_1,\ldots,U_{2n-1}) &= (-1)^{2j}(-1)^{\alpha_2}A_{2j+1}(U_1,\ldots,U_{2n-1}) \\ &= A_{2j+1}(U_1,\ldots,U_{2n-1}). \end{aligned}$$

Enfin, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$ on a, en appliquant la proposition 4.7 et l'hypothèse de récurrence,

$$K\big(U_{2i} \smile U_{2n+1-2i}+U_{2n+1-2i} \smile U_{2i}\big) = U_{2i} \smile U_{2n+1-2i}+U_{2n+1-2i} \smile U_{2i}$$

et $K\big(U_{2n}^0 \smile U_1 + U_1 \smile U_{2n}^0\big) = U_{2n}^0 \smile U_1 + U_1 \smile U_{2n}^0$. Donc $K\zeta_{2n+1}(U_1,\ldots,U_{2n}^0) = \zeta_{2n+1}(U_1,\ldots,U_{2n}^0)$.

D'après le théorème 3.1, il existe un couple unique $(\lambda,\gamma) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\{\zeta_{2n+1}(U_1,\ldots,U_{2n}^0)\} = \lambda\{W \smile V_1\} + \gamma\{W \smile V_2\}.$$

La condition $K\zeta_{2n+1}(U_1,\ldots,U_{2n}^0) = \zeta_{2n+1}(U_1,\ldots,U_{2n}^0)$ implique que $\lambda=\gamma$, donc

$$\{\zeta_{2n+1}(U_1,\ldots,U_{2n}^0)\} = \lambda\{W \smile U_1\}$$

ou encore

$$\{\zeta_{2n+1}(U_1,\ldots,U_{2n}^0 - \lambda W)\} = 0 \text{ dans } H^2(\Pi,\mathcal{G}_{i_0}).$$

On pose $U_{2n} = U_{2n}^0 - \lambda W$. C'est une solution de l'équation $(E_{2n})$ telle que $k^*U_{2n} = -U_{2n}$. Quitte à corriger par un cobord, on peut supposer que $U_{2n+1}^0$ est une cochaîne dans $C^1(\Pi,\mathcal{G}_{i_0})$ telle que

$$\begin{cases} -\delta U_{2n+1}^0 &= \zeta_{2n+1}(U_1,\ldots,U_{2n}) \\ U_{2n+1}^0(\mu) &= 0. \end{cases}$$

On montre que $K_1^*((U_{2n+1}^0)^1e_1) = (U_{2n+1}^0)^2e_2 + \epsilon V_2$; $\epsilon \in \mathbb{C}$. Donc, la cochaîne $U_{2n+1} \in C^1(\Pi,\mathcal{G}_{i_0})$ telle que

$$\begin{cases} U_{2n+1}^1e_1 &= (U_{2n+1}^0)^1e_1 - \epsilon V_1 \\ U_{2n+1}^2e_2 &= (U_{2n+1}^0)^2e_2 \end{cases}$$

est une cochaîne telle que

$$\begin{cases} -\delta U_{2n+1} & = & \zeta_{2n+1}(U_1,\dots,U_{2n}) \\ KU_{2n+1} & = & U_{2n+1}. \end{cases}$$

Ceci termine la récurrence et par là même la construction des déformations formelles. □

### 4.2. Construction d'une déformation convergente à partir d'une déformation formelle.

Soit $\rho_0 : \Gamma \longrightarrow G$ une représentation abélienne où $\Gamma$ est un groupe de présentation finie et $G$ est un groupe de Lie.

THÉORÈME 4.12. — *Supposons que $U_t : \Gamma \longrightarrow \mathcal{G}[[t]]$ est un arc logarithmique formel; alors il existe un arc logarithmique convergent $\tilde{U}_t : \Gamma \longrightarrow \mathcal{G}$ tel que $\tilde{U}_t = U_t \pmod{t^3\mathcal{G}[[t]]}$. De plus, $\rho_t = \tilde{U}_t\,\rho_0$ est un arc de représentations de $\Gamma$ dans $G$.*

*Démonstration.* — Supposons que les relations du groupe

$$\Gamma = \langle X_1,\dots,X_n : W_1,\dots,W_m\rangle$$

sont de la forme $W_i = X_{j_1}^{\epsilon_1}\dots X_{j_i}^{\epsilon_i}$ avec $j_i \in \{1,\dots,n\}$ et $\epsilon_i = \pm 1$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathcal{G}$ pour lequel les fonctions analytiques $F_i : \mathcal{V}^n \to \mathcal{G}$ données par

$$F_i(g_1,\dots,g_n) = \tilde{g}_{j_1} * (X_{j_1}^{\epsilon_1}\cdot \tilde{g}_{j_2}) * \dots * (X_{j_1}^{\epsilon_1}\cdots X_{j_{i-1}}^{\epsilon_{i-1}}\cdot \tilde{g}_{j_i})$$
$$\text{avec } \tilde{g}_{j_k} = \begin{cases} g_{j_k} & \text{si} \quad \epsilon_k = +1 \\ -X_{j_k}^{\epsilon_k}\cdot g_{j_k} & \text{si} \quad \epsilon_k = -1 \end{cases}$$

sont définies. Considérons la variété analytique

$$L(\Gamma,\mathcal{G}) = \{(g_1,\dots,g_n) \in \mathcal{V}^n | F_i(g_1,\dots,g_n) = 0 \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant m\}.$$

Il est facile de voir que si $(g_1,\dots,g_n) \in L(\Gamma,\mathcal{G})$ alors

$$\Big((g_1)\rho_0(X_1),\dots,(g_n)\rho_0(X_n)\Big) \in R(\Gamma,G)$$

et que si $U_t : \Gamma \longrightarrow \mathcal{G}[[t]]$ est un arc logarithmique formel, alors $\Big(U_t(X_1),\dots,U_t(X_n)\Big)$ est une solution formelle des équations $F_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$. Puisque $\bar{y}(t) = \Big(U_t(X_1),\dots,U_t(X_n)\Big)$ est une solution formelle dans $L(\Gamma,\mathcal{G})$, d'après le Théorème d'Artin ([Ar]), il existe une solution convergente $\tilde{U}_t$ dans $L(\Gamma,\mathcal{G})$ qui coïncide avec $U_t$ modulo $t^3\mathcal{G}[[t]]$. Posons $\rho_t = \tilde{U}_t\ \rho_0$. Alors $\Big(\tilde{U}_t(X_1),\dots,\tilde{U}_t(X_n)\Big) \in L(\Gamma,\mathcal{G})$ et $\Big(\rho_t(X_1),\dots,\rho_t(X_n)\Big) \in R(\Gamma,G)$. Donc $\rho_t$ est une représentation de $\Gamma$ dans $G$. □

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 4.5.

L'existence d'un arc de représentations tangent à $V_1+V_2$ et d'extrémité $\rho_0$ est une conséquence de la proposition 4.11 et du théorème 4.12 ; soit $\rho_t = \big(\sum_{i\geqslant 1} U_i t^i\big)\rho_0$ cet arc. Il reste à montrer qu'il s'agit d'un arc de représentations non métabéliennes. Pour ce faire, on commence par montrer qu'il existe $\sigma \in \Pi''$ tel que $U_2(\sigma) \neq 0$. On sait que la cochaîne $U_2$ est solution de l'équation $-\delta U_2 = \frac{1}{2}U_1 \smile U_1$, d'où pour tout $X, Y \in \Pi'$ on a $U_2(XYX^{-1}Y^{-1}) = [U_1(X), U_1(Y)]$.

Soit $X_i$ un élément de Ker $p$ tel que $V_1(X_i) \neq 0$ et $X_j$ un élément de Ker $p$ tel que $V_2(X_j) \neq 0$. Rappelons que $V_1(\mu) = V_2(\mu) = 0$. Deux cas sont possibles : si $V_2(X_i) \neq 0$ alors pour $X = \mu X_i \mu^{-1} X_i^{-1}$ et $Y = \mu^{-1} X_i \mu X_i^{-1}$ on a $U_2(XYX^{-1}Y^{-1}) \neq 0$ et si $V_2(X_i) = 0$ alors pour $X = \mu X_i \mu^{-1} X_i^{-1}$ et $Y = \mu X_j \mu^{-1} X_j^{-1}$ on a $U_2(XYX^{-1}Y^{-1}) \neq 0$. Dans les deux cas, il existe $\sigma \in \Pi''$ tel que $U_2(\sigma) \neq 0$. Par le Principe des zéros isolés, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t$, $0 < t \leqslant \delta$, on a $\rho_{t|\Pi''} \neq I$.

Nous concluons ce paragraphe en montrant que tous les cocycles “non paraboliques” de $Z^1(\Pi,\mathcal{G}_{i_0})$ qui ne sont pas des cobords, apparaissent comme vecteurs tangents d'arcs de représentations non métabéliennes d'extrémité $\rho_0$.

COROLLAIRE 4.13.— *Soit le cocycle* $\mathcal{U}_1 = xV_1 + yV_2$ ; $x, y \in \mathbb{C}^*$ *de* $Z^1(\Pi,\mathcal{G}_{i_0})$. *Alors il existe un arc de représentations non métabéliennes, tangent à* $\mathcal{U}_1$ *et d'extrémité* $\rho_0$.

*Démonstration.*— Soit $\rho_t = (\sum_{i=1}^{\infty} u_i t^i)\rho_0$ un arc de représentations de vecteur tangent $U_1 = V_1 + V_2$. Comme $(\lambda h_0)$ est dans le stabilisateur de $\rho_0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on voit que $\rho_{\lambda,t} = (\lambda h_0)\rho_t(-\lambda h_0)$ est aussi un arc de représentations d'extrémité $\rho_0$ et de vecteur tangent $e^{\lambda\alpha_{i_0}(h_0)}V_1 + e^{-\lambda\alpha_{i_0}(h_0)}V_2$.

Soient $z$ et $\lambda$ des nombres complexes tels que $z^2 = xy$ et $e^{\lambda\alpha_{i_0}(h_0)} = x/z$, alors l'arc de représentations $\rho_{\lambda,zt}$ admet $\mathcal{U}_1 = xV_1 + yV_2$ comme vecteur tangent.

La cochaîne $\mathcal{U}_2$ associée à cet arc est $\mathcal{U}_2 = xyU_2$. Comme $xy \neq 0$, $\rho_{\lambda,zt}$ est un arc de représentations non métabéliennes. □

*Cas réel.* — Comme on l'a déjà mentionné, le théorème 4.5 est encore valable dans le cas des groupes de Lie compacts connexes. Plus précisément, on a le :

THÉORÈME 4.14. — *Soit $\rho_0$ une représentation abélienne de $\Pi$ dans un groupe de Lie compact connexe $K$ qui factorise par $T$. L'élément $\rho_0(\mu)$ appartient à un tore maximal de $K$ et $\rho_0(\mu) = h_0$ où $h_0 \in V_0$, sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathcal{K}$ de $K$.*

*Supposons qu'il existe $\theta_{i_0} \in \triangle_{\mathcal{K}}(V_0)$ telle que $\omega_{i_0} = e^{2i\pi\theta_{i_0}(h_0)}$ est une racine simple du polynôme d'Alexander, alors il existe un arc de représentations non métabéliennes $\rho_t : \Pi \to K$ d'extrémité $\rho_0$.*

*Idée de la démonstration* ([BA]). — Notons par $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathcal{K}$, par $\tilde{\tau}$ l'automorphisme involutif antilinéaire de $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{G}^{\tilde{\tau}} = \mathcal{K}$ et par $\alpha_{i_0}$ la racine $2i\pi\theta_{i_0}$ ([OV, Chapitre 1, §7.2; Chapitre 4, §2.5]). Dans ce cas, on prend $e_2 = \tilde{\tau}e_1$ comme générateur de $\mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}}$ où $e_1$ désigne un générateur de $\mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}}$ et on note par $(\mathcal{H}_{i_0})_{\mathbb{R}}$ la sous-algèbre abélienne réelle $(\mathcal{H}_{i_0})^{\tilde{\tau}}$ qui est de dimension 1 sur $\mathbb{R}$.

L'involution $\tilde{\tau}$ commute avec $k^*$ où $k^*$ désigne l'application de cochaînes de $C^1(\Pi, \mathcal{H}_{i_0})$ dans lui-même induite par l'involution $k$. De plus, $\tilde{\tau} \circ K_1^* = K_2^* \circ \tilde{\tau}$ et il est facile de voir qu'on peut choisir le cocycle $V_1$ de manière à ce que $V_2 = K_1^* V_1 = \tilde{\tau} V_1$. De même, on arrive à montrer que toutes les cochaînes $U_i$ construites dans le cas complexe peuvent être choisies de manière à ce qu'elles soient dans $C^1(\Pi, \mathcal{K})$. □

## 5. Cône quadratique et cône tangent.

DÉFINITIONS 5.1. — *Soient $\Gamma$ un groupe de présentation finie et $G$ un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.*

1) *On appelle* cône quadratique *en $\rho$ l'ensemble*

$$C_\rho^Q(\Gamma, G) = \{V \in Z^1(\Gamma, \mathcal{G}) | \{V \smile V\} = 0 \textit{ dans } H^2(\Gamma, \mathcal{G})\}$$

*et* cône quadratique homologique *en $\rho$ l'ensemble*

$$C_\rho^{QH}(\Gamma, G) = \{U \in H^1(\Gamma, \mathcal{G}) | U \smile U = 0 \textit{ dans } H^2(\Gamma, \mathcal{G})\}.$$

*Si on note par $q : Z^1(\Gamma, \mathcal{G}) \to H^1(\Gamma, \mathcal{G})$ la projection canonique alors*

$$C_\rho^Q(\Gamma, G) = q^{-1}(C_\rho^{QH}(\Gamma, G)).$$

2) *On appelle cône tangent de* $R(\Gamma, G)$ *en* $\rho$ *l'ensemble*

$$C_\rho^T(\Gamma, G) = \left\{ \frac{d\gamma_t}{dt}_{|t=0} | \gamma_t \text{ est un arc analytique dans } R(\Gamma, G) \text{ d'extrémité } \rho \right\}.$$

*Remarquons qu'on a l'inclusion* $C_\rho^T(\Gamma, G) \subset C_\rho^Q(\Gamma, G)$. *En effet, si* $V \in C_\rho^T(\Gamma, G)$ *alors il existe, pour* $t$ *assez petit, un arc analytique* $\gamma_t = \left(\sum_{i \geqslant 1} V_i t^i\right)\rho$ *où les* $V_i$ *désignent des cochaînes dans* $C^1(\Gamma, \mathcal{G})$ *telles que* $V_1 = V$. *En écrivant les conditions d'homomorphie à l'ordre 1 et 2, on obtient* $\delta V_1 = 0$ *et* $-\delta V_2 = \frac{1}{2} V_1 \smile V_1$.

3) *Soit* $V$ *un élément de* $Z^1(\Gamma, \mathcal{G})$; *nous dirons que* $V$ *est un* vrai vecteur tangent *si* $V \in C_\rho^T(\Gamma, G)$.

THÉORÈME 5.2. — *Soient* $G$ *un groupe de Lie complexe connexe réductif et* $\rho_0 : \Pi \to G$ *une représentation abélienne du groupe* $\Pi$ *d'un noeud de* $S^3$ *dans* $G$ *telle que* $\rho_0(\mu) = h_0$ *avec* $h_0 \in \mathcal{H}$, *sous-algèbre de Cartan de* $\mathcal{G}$. *On suppose que*

$$\begin{cases} \omega_{i_0} & = & e^{\alpha_{i_0}(h_0)} \text{ est une racine simple de } \triangle, \\ \triangle(e^{\alpha(h_0)}) & \neq & 0 \qquad \text{pour toute racine } \alpha \neq \pm\alpha_{i_0} \end{cases}$$

*et qu'il existe une involution* $k$ *sur le groupe du noeud* $\Pi$ *telle que* $k(\mu) = \mu^{-1}$. *Alors*

$$C_{\rho_0}^T(\Pi, G) = C_{\rho_0}^Q(\Pi, G) = Z^1(\Pi, \mathcal{H}) \oplus \sum_{\substack{\alpha \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}) \\ \alpha \neq \pm\alpha_{i_0}}} Z^1(\Pi, \mathcal{G}_\alpha) \oplus B^1(\Pi, \mathcal{G}_{\alpha_{i_0}} \oplus \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}})$$
$$\cup\, Z^1(\Pi, \mathcal{H}_1) \oplus \sum_{\substack{\alpha \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}) \\ \alpha \neq \pm\alpha_{i_0}}} Z^1(\Pi, \mathcal{G}_\alpha) \oplus Z^1(\Pi, \mathcal{G}_{\alpha_{i_0}} \oplus \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}})$$

*où* $\mathcal{H}_1 = \{H \in \mathcal{H} | \alpha_{i_0}(H) = 0\}$.

*Le cône tangent admet deux composantes irréductibles, l'une de dimension* $\dim G$ *et l'autre de dimension* $\dim G + 1$.

*Démonstration.*

1) Considérons le cône quadratique homologique $C_{\rho_0}^{QH}(\Pi, G)$. On sait d'après le théorème 2.1 que pour tout $\alpha \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}) \setminus \{\pm\alpha_{i_0}\}$

$$H^1(\Pi, \mathcal{G}_\alpha) = \begin{cases} \{0\} & \text{si} \quad e^{\alpha(h_0)} \neq 1 \\ Z^1(\Pi, \mathcal{G}_\alpha) \cong \mathcal{G}_\alpha & \text{si} \quad e^{\alpha(h_0)} = 1. \end{cases}$$

Soit $\{U\} \in H^1(\Pi, \mathcal{G})$ alors $\{U\} = \{W\} + \sum_{e^{\alpha(h_0)}=1} \{Z_\alpha\} + \{V\}$, où $W \in H^1(\Pi, \mathcal{H})$, $Z_\alpha \in H^1(\Pi, \mathcal{G}_\alpha)$ et $V \in H^1(\Pi, \mathcal{G}_{\alpha_{i_0}} \oplus \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}})$.

Notons par $Z$ le cocycle tel que $Z = \sum_{e^{\alpha(h_0)}=1} Z_\alpha$. Donc

$$\{U \smile U\} = \{W \smile W + V \smile V\} + 2\{W \smile Z\} + \{Z \smile Z\} \\ +2\{Z \smile V\} + 2\{W \smile V\}.$$

Les trois premiers termes de cette égalité sont nuls car ils sont à valeurs dans $H^2(\Pi, \mathcal{H} \oplus \sum_{e^{\alpha(h_0)}=1} \mathcal{G}_\alpha) = 0$. Le quatrième terme est nul sauf peut être si $\alpha \pm \alpha_{i_0} = \pm\alpha_{i_0}$ ce qui impliquerait que $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pm 2\alpha_{i_0}$. Or ceci est impossible pour une algèbre de Lie complexe réductive ([O-V, Chapitre 3, §1]). Donc $\{U \smile U\} = 2\{W \smile V\}$. Le cocycle $V$ s'écrit $V = xV_1 + yV_2$ où $V_1$ et $V_2$ désignent, respectivement, des cocycles générateurs de $H^1(\Pi, \mathcal{G}_{\alpha_{i_0}})$ et $H^1(\Pi, \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}})$. Donc $\{U\} \in C^{QH}_{\rho_0}(\Pi, G)$ si et seulement si $x\{W \smile V_1\} = 0$ et $y\{W \smile V_2\} = 0$. Deux cas sont possibles :

a) si le cocycle $W$ est tel que $\alpha_{i_0}(W(\mu)) = 0$ alors $x\{W \smile V_1\} = y\{W \smile V_2\} = 0$ pour tout $x$, $y \in \mathbb{C}$.

b) si $\alpha_{i_0}(W(\mu)) \neq 0$ alors $x\{W \smile V_1\} = y\{W \smile V_2\} = 0$ si et seulement si $x = y = 0$ (voir théorème 3.1) ; d'où le résultat.

2) Soit $U$ un cocycle dans la première composante de $C^Q_{\rho_0}(\Pi, G)$ alors $U = W + Z + \delta B$ avec $W \in Z^1(\Pi, \mathcal{H})$, $Z \in \sum_{e^{\beta(h_0)}=1} Z^1(\Pi, \mathcal{G}_\beta)$ et $B \in \sum_{e^{\gamma(h_0)}\neq 1} \mathcal{G}_\gamma$. Comme l'action est triviale sur $\mathcal{H} \oplus \sum_{e^{\beta(h_0)}=1} \mathcal{G}_\beta$, pour tout $X = (x, t^l) \in \Pi = \operatorname{Ker} p \rtimes T$ on a $W(X) + Z(X) = lW(\mu) + lZ(\mu)$. D'où pour tout $X = (x, t^l), Y = (y, t^s) \in \operatorname{Ker} p \rtimes T$ :

$$[W(X)+Z(X), X\cdot(W(Y) + Z(Y))] = [l(W(\mu)+Z(\mu)), s(W(\mu)+Z(\mu))] \\ = 0.$$

On en déduit que l'arc $\rho_t = t(W + Z)\,\rho_0$ est un arc de représentations dans $R(\Pi, G)$ tangent à $W+Z$ et que $(tB)\,\rho_t\,(-tB)$ est un arc de représentations tangent à $U$. Donc $U \in C^T_{\rho_0}(\Pi, G)$.

Soit $U$ un cocycle dans la deuxième composante de $C^Q_{\rho_0}(\Pi, G)$ qui s'écrit sous la forme $U = W_1 + Z + \delta B + xV_1 + yV_2$ avec $W_1 \in Z^1(\Pi, \mathcal{H}_1)$, $Z \in \sum_{e^{\beta(h_0)}=1} Z^1(\Pi, \mathcal{G}_\beta)$, $V_1$ (respectivement $V_2$) est un cocycle générateur de $H^1(\Pi, \mathcal{G}_{\alpha_{i_0}})$ (respectivement $H^1(\Pi, \mathcal{G}_{-\alpha_{i_0}})$) et $B \in \sum_{e^{\gamma(h_0)}\neq 1} \mathcal{G}_\gamma$. Considérons le cocycle $U_1 = xV_1 + yV_2$ alors (voir proposition 4.3 et corollaire 4.13) il existe un arc logarithmique formel $\sum_{i\geqslant 1} U_i t^i$ à valeurs dans $\mathcal{H}_{i_0} \oplus \mathcal{G}_{i_0}$. Il est facile de voir que $[\mathcal{G}_\beta, \mathcal{H}_{i_0} \oplus \mathcal{G}_{i_0}] = 0$ pour toute racine $\beta \in \triangle_{\mathcal{G}}(\mathcal{H})$ telle que $e^{\beta(h_0)} = 1$ ; donc l'arc $((U_1 + Z)t + \sum_{i\geqslant 2} U_i t^i)$ est un arc logarithmique formel. Autrement dit

$$(*) \qquad \begin{cases} -\delta U_2 &= \frac{1}{2}(U_1 + Z) \smile (U_1 + Z) \\ -\delta U_i &= \zeta_i(U_1 + Z, U_2, \ldots, U_{i-1}) \quad \text{pour tout } i \geqslant 3. \end{cases}$$

Considérons le cocycle $\mathcal{U}_1 = W_1 + U_1 + Z$ ; alors on montre par récurrence sur $i \geqslant 2$ qu'on peut résoudre toutes les équations d'obstruction relatives à $\mathcal{U}_1$. Plus précisément, pour tout $i \geqslant 2$, il existe une cochaîne $\mathcal{U}_i$ solution de la $i$-ème équation d'obstruction qui s'écrit sous la forme $\mathcal{U}_i = U_i + W_i$ où $W_i \in C^1(\Pi, \sum_{e^{\beta(h_0)}=1} \mathcal{H}_\beta \oplus \mathcal{G}_\beta \oplus \mathcal{G}_{-\beta})$.

D'après le théorème 4.12, il existe un arc de représentations $\rho_t$ dans $R(\Pi, G)$ tangent à $\mathcal{U}_1$ et d'extrémité $\rho_0$. L'arc $(tB)\,\rho_t\,(-tB)$ est donc un arc de représentations dans $R(\Pi, G)$ tangent à $U = \delta B + \mathcal{U}_1$ et $U \in C^T_{\rho_0}(\Pi, G)$.

Le calcul des dimensions des composantes du cône tangent est une conséquence immédiate des calculs des dimensions des groupes de cohomologie. □

COROLLAIRE 5.3. — *Soit $G$ un groupe de Lie complexe connexe réductif. Sous les hypothèses du théorème 5.2, considérons l'ensemble des composantes irréductibles de $R(\Pi, G)$ passant par $\rho_0$. Elles sont de dimension inférieure ou égale à* $\dim G + 1$. *Il y en a au moins une, la composante $S(\Pi, G)$, qui est de dimension égale à* $\dim G$ *et au moins une autre, de dimension égale à* $\dim G + 1$, *qui contient des représentations non métabéliennes. Ces deux composantes ne sont pas tangentes entre elles.*

*Démonstration.* — C'est une conséquence du fait que le cône tangent admet deux composantes, l'une est de dimension égale à $\dim G$ et l'autre de dimension $\dim G + 1$ (voir théorème 5.2) et que $\dim_{\rho_0} R(\Pi, G) = \dim C^T_{\rho_0}(\Pi, G)$ ([CLO, Chapitre 9, §7, Théorème 8]). □

## BIBLIOGRAPHIE

[Ar] M. ARTIN, On the Solutions of Analytic Equations, Inventiones Math., 5 (1968), 277-291.

[BA] L. BEN ABDELGHANI, Arcs de représentations du groupe d'un noeud dans un groupe de Lie, Thèse de Doctorat de l'Université de Bourgogne, (1998).

[BK] E. BRIESKORN, H. KNOERRER, Plane Algebraic Curves, Birkhaeuser Verlag, Basel, 1986. translated from the German by John Stillwell.

[Boi] C.M. BOILEAU, Nœuds rigidement inversibles, Knot Theory and Manifolds (Proc. Vancouver, 1983) ed. D.Rolfsen, New York, Springer-Verlag, LNM 1144, (1985).

[Bou] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 2 et 3, (1972) Hermann, Paris.

[Br] K.S. BROWN, Cohomology of Groups, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.

[CLO] D. COX, J. LITTLE, D. O'SHEA, Ideals, Varieties, and Algorithms Second Edition, Undergraduate Texts in Mathematics, 1997, 1992 Springer-Verlag, New York, Inc..

[CS] M. CULLER, P.B. SHALEN, Varieties of Group Representations and Splittings of 3-manifolds, Annals of Mathematics, 117 (1983), 109-146.

[FK] C. FROHMAN, E. KLASSEN, Deforming Representations of Knot Groups in $SU(2)$, Comment. Math. Helv., 66 (1991), 340-361.

[G] C. McA.GORDON, Some Aspects of Classical Knot Theory, Knot Theory Proceedings, Plans sur Bex, Switzerland 1977 Springer, LNM 685 (1978).

[GM] L. GUILLOU, A. MARIN, Notes sur l'invariant de Casson des sphères d'homologie de dimension trois, L'Enseignement Mathématique, tome 38 (1992), 233-290.

[H] C.M. HERALD, Existence of Irreducible Representations for Knot Complements with Nonconstant Equivariant Signature, Math. Ann., 309, Number 1, (1997).

[HK] M. HEUSENER, J. KROLL, Deforming Abelian $SU(2)$-Representations of Knot Groups, Comentari Math. Helv., 73 (1998), 480-498.

[K] E.P. KLASSEN, Representations of Knot Groups in $SU(2)$, Transactions of The American Mathematical Society, Volume 326, Number 2, August 1991.

[LM] A. LUBOTZKY, A. MAGID, Varieties of Representations of Finitely Generated Groups, Memoirs of the A.M.S., (58) 336 (1985).

[OV] A.L. ONISHCHIK, E.B. VINBERG, Lie Groups and Lie Algebras III, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Volume 41, Springer-Verlag (1991).

[P] J. PORTI, Torsion de Reidemeister pour les variétés hyperboliques, Mémoirs AMS, Vol. 128, n° 612, Am. Math. Soc., Providence (1997).

[PV] V.L. POPOV, E.B. VINBERG, Invariant Theory, Algebraic Geometry IV, A.N. Parshin, I.R. Shafarevich (Eds.) Encyclopaedia of Mathematical Sciences Volume 55, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1994).

[St] R. STEINBERG, Conjugacy classes in algebraic groups, LNM 366, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag (1974).


Manuscrit reçu le 29 septembre 1998,
révisé le 21 juillet 1999,
accepté le 21 décembre 1999.

Leila BEN ABDELGHANI,
Faculté des Sciences de Monastir
Département de Mathématiques
5000 Monastir (Tunisie).