

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHARLES EHRESMANN

Complétion des catégories ordonnées

Annales de l'institut Fourier, tome 14, n° 2 (1964), p. 89-144

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_89_0

© Annales de l'institut Fourier, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COMPLÉTION DES CATÉGORIES ORDONNÉES

par Charles EHRESMANN

Introduction.

Étant donnée une catégorie ordonnée régulière $(\mathcal{C}, <)$, on appelle complétion de $(\mathcal{C}, <)$ une catégorie quasi-inductive régulière admettant \mathcal{C} pour sous-catégorie régulière et dont tout élément est un sous-agrégat d'éléments de \mathcal{C} . Le problème universel de la complétion est le suivant : associer canoniquement à une catégorie ordonnée régulière une complétion « minimale ». Nous montrerons que ce problème a en particulier une solution si $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie sous-prélocale régulière vérifiant la condition (P), la complétion étant alors une catégorie sous-locale (et locale si $(\mathcal{C}, <)$ est prélocale). Plus généralement, nous construirons des plongements d'une catégorie ordonnée régulière dans des catégories quasi-inductives régulières.

Le paragraphe 1 associe à une catégorie ordonnée régulière $(\mathcal{C}, <)$ une catégorie $\tilde{\Omega}$ -structurée de fusées, qui admet pour quotient la catégorie quasi-inductive des fusées maximales. Le paragraphe 2 est consacré à l'étude d'une sous-catégorie de la catégorie des fusées, à savoir la catégorie des fusées strictes régulières; elle admet pour catégorie quotient la catégorie des fusées strictes maximales. Si $(\mathcal{C}, <)$ est préinductive, la catégorie des fusées strictes maximales a une sous-catégorie inductive, qui est une complétion de $(\mathcal{C}, <)$. En considérant certains couples $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F})$, où \mathcal{F}_1 est une fusée majorée par la fusée stricte \mathcal{F} , on obtient la notion de superfusée. Les superfusées, qui font l'objet du paragraphe 3, forment une catégorie quasi-inductive régulière. On montre que, si $(\mathcal{C}, <)$ est sous-prélocale et vérifie la condition (P), elle

admet pour complétion « universelle » une catégorie sous-locale régulière quotient d'une sous-catégorie de la catégorie des superfusées.

Ces résultats ont été résumés dans 2 Notes [0]. Le cas particulier des groupoïdes sous-locaux a été étudié dans [3]. Dans un prochain travail, nous étudierons le problème de la complétion d'une catégorie sous-prélocale au-dessus d'une catégorie sous-locale, généralisant les théorèmes indiqués dans [4] pour les groupoïdes sous-prélocaux, et nous montrerons comment les catégories des fusées, des fusées strictes et des superfusées interviennent dans divers problèmes, en particulier celui de la cohomologie.

Cet article est la suite de [1] et nous supposons connues les notations et la terminologie des nos 1 et 2 [1]. En particulier, si \mathcal{C} est une catégorie, nous désignons par \mathcal{C}_0 la classe de ses unités, par \mathcal{C}_γ la classe des éléments inversibles, par α et β les applications source et but. Si A et B sont deux sous-classes de \mathcal{C} , les classes $B.A$ et BA sont respectivement formées de tous les composés $b.a$ et de tous les pseudoproduits ba tels que $b \in B$ et $a \in A$; on pose $A_0 = A \cap \mathcal{C}_0$.

1. Fusées dans les catégories ordonnées.

DÉFINITION 1. — Soit $(\mathcal{C}, <)$ une catégorie $\tilde{\Omega}$ -structurée. On appelle fusée neutre de $(\mathcal{C}, <)$ une sous-catégorie \mathcal{B} de \mathcal{C} vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $(\mathcal{B}, <)$ et $(\mathcal{B}_\gamma, <)$ sont des catégories semi-régulières.
- 2) Soient $f \in \mathcal{B}$ et $f' \in \mathcal{B}$. Si $\alpha(f) = \alpha(f')$ (resp. $\beta(f) = \beta(f')$), il existe $f_1 \in \mathcal{B}$ et $g \in \mathcal{B}_\gamma$ tels que $f_1 < f$ et $g.f_1 < f'$ (resp. $f_1.g < f'$)

Si \mathcal{B} est un sous-groupoïde de \mathcal{C} , alors \mathcal{B} est une fusée neutre de $(\mathcal{C}, <)$ si, et seulement si, $(\mathcal{B}, <)$ est une catégorie semi-régulière.

Si \mathcal{C} est une fusée neutre de la catégorie $\tilde{\Omega}$ -structurée $(\mathcal{C}, <)$, alors $(\mathcal{C}, <)$ est semi-régulière et toute sous-catégorie pleine de \mathcal{C} , saturée par induction dans $(\mathcal{C}, <)$, est une fusée neutre de $(\mathcal{C}, <)$.

Soit $(\mathcal{C}, <)$ une catégorie $\tilde{\Omega}$ -structurée semi-régulière telle que $(\mathcal{C}_\gamma, <)$ soit un groupoïde $\tilde{\Omega}$ -structuré semi-régulier.

DÉFINITION 2. — Soit \mathfrak{B} une fusée neutre de $(\mathcal{C}, <)$. On appelle fusée à droite de $(\mathcal{C}, <)$ compatible avec \mathfrak{B} une sous-classe F de \mathcal{C} vérifiant les conditions suivantes :

(F₁) On a $F \cdot \mathfrak{B} = F$. Pour tout $e \in \mathfrak{B}_0$, il existe $e' \in \alpha(F)$ tel que $e' < e$.

(F₂) Soient $f \in F$, $e \in \mathfrak{B}_0$ et $e < \alpha(f)$; il existe $f_1 \in F$ tel que $f_1 < f$ et $\alpha(f_1) = e$.

(F₃) Soient $f \in F$ et $f' \in F$. Si $\beta(f) = \beta(f')$, il existe $f_1 \in F$, $f'_1 \in F$ et $g \in \mathfrak{B}_\gamma$ tels que $f_1 < f$, $f'_1 < f'$ et $f_1 \cdot g = f'_1$.

On appelle fusée à gauche de $(\mathcal{C}, <)$ compatible avec \mathfrak{B} une fusée à droite de $(\mathcal{C}^*, <)$ compatible avec \mathfrak{B} , où \mathcal{C}^* désigne la catégorie duale de \mathcal{C} .

Dans la définition 2, on peut remplacer la condition (F₃) par : Soient $f \in F$, $f' \in F$ et $\beta(f) = \beta(f')$. Il existe $f_1 \in F$ et $g \in \mathfrak{B}_\gamma$ tels que $f_1 < f$ et $f_1 \cdot g < f'$.

DÉFINITION 3. — On dira que $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$ est une fusée de $(\mathcal{C}, <)$ si \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' sont des fusées neutres de $(\mathcal{C}, <)$ et si F est une fusée à droite de $(\mathcal{C}, <)$ compatible avec \mathfrak{B} et une fusée à gauche de $(\mathcal{C}, <)$ compatible avec \mathfrak{B}' .

En particulier, tout atlas $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$ de \mathcal{C} tel que \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' soient des fusées neutres de $(\mathcal{C}, <)$ est une fusée de $(\mathcal{C}, <)$. (Voir [1].)

PROPOSITION 1. — Soit $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$ une fusée de $(\mathcal{C}, <)$. Alors $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ sont des sous-classes saturées par induction de \mathfrak{B}_0 et de \mathfrak{B}'_0 respectivement. Soient $f \in F$ et $f' \in F$ tels que $\beta(f)$ et $\beta(f')$ admettent un minorant e dans $(\mathfrak{B}'_0, <)$; il existe $f_1 \in F$ et $g \in \mathfrak{B}_\gamma$ tels que $f_1 < f$ et $f_1 \cdot g < f'$. (On a de même la propriété duale.)

En effet, la première partie résulte des conditions (F₁) et (F₂). Comme $e < \beta(f)$, il existe $\bar{f} \in F$ tel que $\bar{f} < f$ et $\beta(\bar{f}) = e$; il existe aussi $\bar{f}' < f'$ tel que $\bar{f}' \in F$ et $\beta(\bar{f}') = e$ et la proposition résulte de la condition (F₃) appliquée aux éléments \bar{f} et \bar{f}' .

Soit I une classe d'indices. Soit $((\mathcal{C}, I), <)$ la catégorie $\bar{\Omega}$ -structurée semi-régulière définie de la façon suivante : (\mathcal{C}, I) est la catégorie produit $\mathcal{C} \times (I \times I)^\perp$, où $(I \times I)^\perp$

est le groupoïde des couples $(j, i) \in I \times I$ muni de la loi de composition :

$$(j', i') \perp (j, i) = (j', i) \quad \text{si, et seulement si, } i' = j.$$

(\mathcal{C}, I) est munie de la relation d'ordre définie par :

$$(f', j', i') < (f, j, i)$$

si, et seulement si, $i' = i$, $j' = j$ et $f' < f$.

Si C est une sous-classe de \mathcal{C} , pour tout $(j, i) \in I \times I$, nous noterons (C, j, i) la sous-classe de (\mathcal{C}, I) ayant pour éléments les (c, j, i) tels que $c \in C$.

Soient $(j, i) \in I \times I$ et $i \neq j$. Soient \mathcal{B} , \mathcal{B}' et F des sous-classes de \mathcal{C} . Soit (\mathcal{F}, j, i) la classe réunion de (\mathcal{B}, i, i) , (\mathcal{B}', j, j) et (F, j, i) . Pour que $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ soit une fusée de $(\mathcal{C}, <)$, il faut et il suffit que (\mathcal{F}, j, i) soit une sous-catégorie de (\mathcal{C}, I) et que

$$\mathcal{F}^{ji} = ((\mathcal{B}', j, j), (F, j, i), (\mathcal{B}, i, i))$$

soit une fusée de $((\mathcal{F}, j, i), <)$. Dans ce cas, $((\mathcal{F}, j, i), <)$ est une sous-catégorie semi-régulière de $((\mathcal{C}, I), <)$.

THÉORÈME 1. — *La classe $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ des fusées $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ de $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie pour la loi de composition définie par :*

$$(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}'_1) \cdot (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}'', F' \cdot F, \mathcal{B})$$

si, et seulement si, $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'$.

Démonstration. — Soit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$; on a

$$(\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <), \quad (\mathcal{B}', \mathcal{B}', \mathcal{B}') \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$$

et

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \cdot (\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}', \mathcal{B}', \mathcal{B}') \cdot (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}),$$

puisque $F \cdot \mathcal{B} = F = \mathcal{B}' \cdot F$. Soit $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$. Montrons que $(\mathcal{B}'', F' \cdot F, \mathcal{B})$ est une fusée de $(\mathcal{C}, <)$. En effet, on a :

$$F' \cdot F \cdot \mathcal{B} = F' \cdot F = \mathcal{B}' \cdot F' \cdot F.$$

Supposons $f \in F$, $f' \in F'$ et $\alpha(f') = \beta(f)$. Si $e \in \mathcal{B}_0$ et $e < \alpha(f)$, il existe $f_1 \in F$ tel que $f_1 < f$ et $\alpha(f_1) = e$; comme

$$\beta(f_1) \in \beta(F) \subset \mathcal{B}'_0 \quad \text{et} \quad \beta(f_1) < \alpha(f'),$$

il existe $f'_1 < f'$ tel que $f'_1 \in F'$ et $\alpha(f'_1) = \beta(f_1)$, d'où

$$f'_1 \cdot f_1 \in F' \cdot F, \quad f'_1 \cdot f_1 < f' \cdot f \quad \text{et} \quad \alpha(f'_1 \cdot f_1) = e.$$

Démonstration analogue si $e'' < \beta(f' \cdot f)$. — Soit $\bar{f} \in F$ et $\bar{f}' \in F'$, tels que $\alpha(\bar{f}') = \beta(\bar{f})$ et $\alpha(f) = \alpha(\bar{f})$. Il existe $f_1 < f$, $\bar{f}_1 < \bar{f}$ et $g' \in \mathfrak{B}'_\gamma$ tels que $f_1 = g' \cdot \bar{f}_1$. Comme F' est une fusée de $(\mathcal{C}, <)$, il existe $f'_1 \in F'$ tel que $f'_1 < f'$ et $\alpha(f'_1) = \beta(g')$. D'après la proposition 1, les relations $f'_1 \cdot g' \in F' \cdot \mathfrak{B}' = F'$, $\bar{f}' \in F'$ et $\alpha(g') < \alpha(\bar{f}')$ entraînent qu'il existe $f'' \in F'$, $\bar{f}'_1 \in F'$ et $g'' \in \mathfrak{B}'_\gamma$ tels que $\bar{f}'_1 < \bar{f}'$, $f'' < f'_1 \cdot g'$ et $f'' = g'' \cdot \bar{f}'_1$. Puisque $\alpha(\bar{f}'_1) \in \mathfrak{B}'_0$ et $\alpha(\bar{f}'_1) < \beta(\bar{f}_1)$ il existe $\bar{f}_2 \in F$ tel que $\bar{f}_2 < \bar{f}_1$ et $\beta(\bar{f}_2) = \alpha(\bar{f}'_1)$ et il existe $g'_1 \in \mathfrak{B}'_\gamma$ vérifiant les conditions :

$$g'_1 < g' \quad \text{et} \quad \alpha(g'_1) = \alpha(\bar{f}'_1).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \bar{f}'_1 \cdot \bar{f}_2 &< \bar{f}' \cdot \bar{f}, & g'_1 \cdot \bar{f}_2 &\in F, \\ g'_1 \cdot \bar{f}_2 &< g' \cdot \bar{f}_1 = f_1 < f, \\ f'' \cdot g'^{-1} &\in F' & \text{et} & f'' \cdot g'^{-1} < (f'_1 \cdot g') \cdot g'^{-1} < f'. \end{aligned}$$

Donc

$$(f'' \cdot g'^{-1}) \cdot (g'_1 \cdot \bar{f}_2) \in F' \cdot F, \quad \bar{f}'_1 \cdot \bar{f}_2 < \bar{f}' \cdot \bar{f}$$

et

$$g'' \cdot (\bar{f}'_1 \cdot \bar{f}_2) = (f'' \cdot g'^{-1}) \cdot (g'_1 \cdot \bar{f}_2) < f' \cdot f.$$

On montre de même que la condition duale est vérifiée. De plus si $e \in \mathfrak{B}_0$, il existe $f \in F$ tel que $\alpha(f) < e$; comme $\beta(f) \in \mathfrak{B}'$, il existe $f' \in F'$ tel que $\alpha(f') < \beta(f)$ et il existe $f_1 \in F$ tel que $f_1 < f$ et $\beta(f_1) = \alpha(f')$; il en résulte $f' \cdot f_1 \in F' \cdot F$ et $\alpha(f' \cdot f_1) < e$. Donc $(\mathfrak{B}'', F' \cdot F, \mathfrak{B})$ est une fusée de $(\mathcal{C}, <)$. Comme la loi de composition entre classes :

$$(F', F) \rightarrow F' \cdot F$$

est associative, on en déduit que $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie. Nous identifions la classe des unités à la classe des fusées neutres de $(\mathcal{C}, <)$ en identifiant $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ avec \mathfrak{B} .

Pour tout $f \in \mathcal{C}$, nous désignons par $f^>$ la classe des mineurs de f .

DÉFINITION 4. — *Nous dirons que $(\mathcal{C}, <)$ vérifie la condition (C) si, pour tout $f \in \mathcal{C}$, le triplet $(\beta(f)^>, f^>, \alpha(f)^>)$ est une fusée de $(\mathcal{C}, <)$.*

PROPOSITION 2. — *Supposons que $(\mathcal{C}, <)$ vérifie la condition (C) et soit $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\geq}$ la sous-classe de \mathcal{C} obtenue en saturant par induction $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ dans $(\mathcal{C}, <)$. Alors $(\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}, \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\geq}, \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}})$ est une fusée de $(\mathcal{C}, <)$.*

Démonstration. — $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ est une fusée neutre de $(\mathcal{C}, <)$ et $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\geq}$ est saturé par induction dans $(\mathcal{C}, <)$. Soient $g \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ et $g' \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ tels que $\alpha(g) = \alpha(g') = e$. Il existe $\gamma \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ et $\gamma' \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ tels que $g < \gamma$ et $g' < \gamma'$. Puisque $(\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}, <)$ est semi-régulier, il existe $\gamma_1 \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ et $\gamma'_1 \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ tels que :

$$\gamma_1 < \gamma, \quad \gamma'_1 < \gamma' \quad \text{et} \quad \alpha(\gamma_1) = e = \alpha(\gamma'_1).$$

Comme $\gamma^>$ définit une fusée, il existe $g_1 < g$ et $\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ tels que $\bar{\gamma} \cdot g_1 < \gamma_1$. Soit $\bar{\gamma}_1 \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ vérifiant $\bar{\gamma}_1 < \gamma'_1 \cdot \bar{\gamma}_1^{-1}$ et $\alpha(\bar{\gamma}_1) = \beta(\bar{\gamma})$. Les relations :

$$\begin{aligned} & \bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma} \cdot g_1 < \gamma'_1 \cdot \bar{\gamma}_1^{-1} \cdot \gamma_1 < \gamma', \quad g' < \gamma' \\ \text{et} \quad & \alpha(\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma} \cdot g_1) = \alpha(g_1) < \alpha(g) = \alpha(g') \end{aligned}$$

assurent, en vertu de la proposition 1 appliquée à la fusée déterminée par $\gamma'^>$, l'existence de $g'_1 < g'$ et de $\bar{\gamma}' \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ tels que :

$$\bar{\gamma}' \cdot g'_1 < (\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}) \cdot g_1.$$

Soit $\bar{\gamma}_2 \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ tel que $\bar{\gamma}_2 < \bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}$ et $\beta(\bar{\gamma}_2) = \beta(\bar{\gamma}')$. On obtient :

$$\bar{\gamma}_2^{-1} \cdot \bar{\gamma}' \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}} \quad \text{et} \quad (\bar{\gamma}_2^{-1} \cdot \bar{\gamma}') \cdot g'_1 < (\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma})^{-1} \cdot (\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}) \cdot g_1 < g.$$

Ainsi $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ est une fusée compatible à gauche avec $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$. Par dualité, on voit que $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$ est une fusée compatible à droite avec $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}$. Donc $(\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}, \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\geq}, \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}})$ est une fusée de $(\mathcal{C}, <)$.

Soit $(\mathcal{C}, <)$ une catégorie ordonnée régulière telle que $(\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^{\dot{\geq}}, <)$ soit un groupoïde ordonné semi-régulier. Alors $((\mathcal{C}, \mathbb{I}), <)$ est une catégorie ordonnée régulière.

DÉFINITION 5. — *On dira qu'une fusée $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ de $(\mathcal{C}, <)$ est régulière si la sous-catégorie (\mathcal{F}, j, i) de $(\mathcal{C}, \mathbb{I})$ correspondante est une sous-catégorie régulière de $((\mathcal{C}, \mathbb{I}), <)$.*

Pour que la fusée $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ de $(\mathcal{C}, <)$ soit régulière, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) \mathcal{B}_0 et \mathcal{B}'_0 sont des sous-classes de \mathcal{C}_0 , saturées par intersection finie (c'est-à-dire contenant avec deux éléments leur intersection dans $(\mathcal{C}_0, <)$ si celle-ci existe).

2) On a : $\mathcal{B}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}'\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}'$, $F\mathcal{B} \subset F$ et $\mathcal{B}'F \subset F$.

THÉORÈME 2. — Soit $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ la classe des fusées régulières de $(\mathcal{C}, <)$. $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$. Munie de la relation d'ordre

$(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ si, et seulement si, \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}'_1 sont des sous-catégories pleines saturées par induction de \mathcal{B} et \mathcal{B}' respectivement et si $F_1 \subset F$,

$\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ devient une catégorie $\tilde{\Omega}^s$ -structurée assez régulière.

Démonstration. — Soient

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <).$$

Il en résulte $\mathcal{B} \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ et $\mathcal{B}' \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$. Soient $f \in F$, $f' \in F'$ et $g \in \mathcal{B}$ tels que $(f' \cdot f)g \in (F' \cdot F)\mathcal{B}$. Puisque $(\mathcal{C}, <)$ est supposée régulière, le pseudoproduit est associatif (proposition 5-2 [1]) et on a :

$$(f' \cdot f)g = (f' \beta(fg)) \cdot (fg).$$

Les relations :

$$fg \in F\mathcal{B} \subset F$$

et

$$f' \beta(fg) \in F' \beta(F) \subset F' \mathcal{B}' = F'$$

entraînent $(f' \cdot f)g \in F' \cdot F$. Par suite $(F' \cdot F)\mathcal{B} \subset F' \cdot F$. Par dualité, on a $\mathcal{B}'(F' \cdot F) \subset F' \cdot F$. Donc $(\mathcal{B}'', F', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$, de sorte que $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$.

— Montrons que la relation $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$ entraîne que F_1 est une sous-classe saturée par induction de F . En effet, soient $f_1 \in F_1$ et $f \in F$ tels que $f < f_1$; on a $\alpha(f) \in \mathcal{B}_1$ et $\beta(f) \in \mathcal{B}'_1$, car \mathcal{B}_1 est saturé par induction dans $(\mathcal{B}, <)$. Comme $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie ordonnée, on obtient :

$$f = \beta(f)(f_1 \alpha(f)) \in \mathcal{B}'_1(F_1 \mathcal{B}_1) \subset F_1.$$

Si $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$, on trouve $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$. Supposons de plus $(\mathcal{B}''_1, F'_1, \mathcal{B}'_1) < (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}')$ dans

$$(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <).$$

Alors :

$$(\mathcal{B}''_1, F'_1 \cdot F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}'', F' \cdot F, \mathcal{B}).$$

Ainsi $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}^s$ -structurée.

— Soient $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$, où $i \in I$. Soit $\mathcal{B}_I = \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}} \mathcal{B}_i$ (resp. $\mathcal{B}'_I = \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}'} \mathcal{B}'_i$) la sous-catégorie pleine de \mathcal{B} (resp. de \mathcal{B}') ayant pour classe de ses unités la classe réunion des $\alpha(\mathcal{B}_i)$ (resp. des $\alpha(\mathcal{B}'_i)$), $i \in I$; alors \mathcal{B}_I est saturé par induction dans \mathcal{B} et c'est un sous-agrégat des \mathcal{B}_i . Soit F_I la classe des $f \in F$ qui sont majorés par un élément de $\mathcal{B}'_I.F_i.\mathcal{B}_I$, où $i \in I$. On a : $F_I.\mathcal{B}_I = F_I = \mathcal{B}'_I.F_I$. Pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_I)$ (resp. $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_I)$), il existe $i \in I$ et $f_i \in F_i$ tels que $\alpha(f_i) < e$ (resp. $\beta(f_i) < e'$). Comme F_I est saturée par induction dans F , $\mathcal{A} = (\mathcal{B}_I, F_I, \mathcal{B}_I)$ vérifie aussi l'axiome (F_3) , de sorte que \mathcal{A} est une fusée régulière de $(\mathcal{C}', <)$, majorée par $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$. Puisque \mathcal{B}'_i est une sous-catégorie pleine saturée par induction de $\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}'} \mathcal{B}'_i$, on en déduit $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < \mathcal{A}$, pour tout $i \in I$, et \mathcal{A} est un sous-agrégat des $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i)$. Ainsi $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$ est une classe sous-inductive.

— Supposons $\mathcal{B}_1 \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <)_0$ et $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <)$; soit $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$. On a :

$$F.\mathcal{B}_1 \subset F.\mathcal{B} = F \quad \text{et} \quad F.\mathcal{B}_1 \subset F.\alpha(\mathcal{B}_1),$$

d'où

$$F.\mathcal{B}_1 = F.\alpha(\mathcal{B}_1).$$

Soit \mathcal{B}' la sous-catégorie pleine de \mathcal{B}' ayant pour unités les $e' \in \mathcal{B}'_0$ tels qu'il existe $f \in F.\mathcal{B}_1$ pour lequel $\beta(f) < e'$. On a :

$$\mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}'.F.\mathcal{B}_1 = F.\mathcal{B}_1$$

et

$$F.\mathcal{B}_1 = \beta(F).F.\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1,$$

c'est-à-dire $\mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1 = F.\mathcal{B}_1$. La classe \mathcal{B}_1 étant saturée par induction dans \mathcal{B} , la classe $F.\alpha(\mathcal{B}_1)$ est saturée par induction dans F et $F.\alpha(\mathcal{B}_1) = F.\alpha(\mathcal{B}_1)$. Puisque \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}'_1 sont des sous-catégories pleines de \mathcal{B} et \mathcal{B}' respectivement, $(\mathcal{B}'_1, F.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$ est une fusée régulière, qui est le pseudoproduit de $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ et de \mathcal{B}_1 dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$. De même si $\mathcal{B}'_2 < \mathcal{B}'$, il existe un pseudoproduit $\mathcal{B}'_2(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ admettant \mathcal{B}'_2 pour unité à gauche. Ceci montre que $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$ -structurée assez régulière, et par suite, en utilisant ce qui précède et la proposition 12-2 [1], une catégorie $\tilde{\Omega}^s$ -structurée.

Remarques. — 1) Munie de la relation d'ordre définie par : $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ si, et seulement si, \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}'_1 sont des sous-catégories pleines saturées par induction de \mathcal{B} et \mathcal{B}' respectivement et si F_1 est une sous-classe saturée par induction de F ,

la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ peut ne pas être $\tilde{\Omega}$ -structurée.

2) Avec les hypothèses du théorème 2, $(\mathcal{F}(\mathcal{C}, <), <)$ peut ne pas être une catégorie ordonnée.

3) Si $(\mathcal{C}, <)$ est seulement une catégorie ordonnée assez régulière, alors $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ peut ne pas être une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$.

Soit $(\mathcal{C}, <)$ une catégorie $\tilde{\Omega}$ -structurée semi-régulière telle que $(\mathcal{C}, <)$ soit un groupoïde ordonné semi-régulier.

THÉORÈME 3. — $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ admet une catégorie quotient strict [2] par la relation d'équivalence ρ :

$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$ si, et seulement si, pour tout $f_i \in F_i$ il existe $f_j \in F_j$ tel que $f_j < f_i$, où $i, j = 1, 2$ et $i \neq j$.

Démonstration. — La relation ρ est évidemment symétrique et réflexive. Montrons qu'elle est transitive. En effet, supposons

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}).$$

Soit $f_i \in F_i$, où $i = 1, 2$; il existe $f \in F$ tel que $f < f_i$ et il existe $f_j \in F_j$, $j = 1, 2$, $j \neq i$, tel que $f_j < f$, d'où $f_j < f_i$ et :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}).$$

Par suite ρ est une relation d'équivalence.

— Montrons que si $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$, on a

$$(\mathcal{B}', F \cup F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <),$$

où $F \cup F_1$ désigne la classe réunion de F et de F_1 . Pour cela, prouvons que les conditions $f \in F$, $f_1 \in F_1$ et $\alpha(f) = \alpha(f_1)$ assurent l'existence de $h \in F \cup F_1$, de $h' \in F \cup F_1$ et de $g' \in \mathcal{B}'_1$ tels que :

$$h < f, \quad h' < f_1 \quad \text{et} \quad h' = g'.h;$$

la propriété analogue si $\beta(f) = \beta(f_1)$ s'en déduira par dualité, et les autres conditions d'une fusée sont évidemment vérifiées.

Puisque $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$, il existe $f' \in F$ tel que $f' < f_1$. Des relations $\alpha(f') \in \mathcal{B}$ et $\alpha(f') < \alpha(f)$, on déduit qu'il existe $f'' \in F$ tel que $f'' < f$ et $\alpha(f'') = \alpha(f')$. Par conséquent il existe aussi $h \in F$, $h' \in F$ et $g' \in \mathcal{B}'_1$ tels que $h' = g'.h$, $h' < f'' < f$ et $h' < f' < f_1$, ce qui démontre l'affirmation précédente.

— Soit $\rho(F)$ la classe réunion des classes F_i telles que

$$(\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}).$$

Si $f \in \rho(F)$ et $f' \in \rho(F)$, il existe F_i et F_j tels que $f \in F_i$ et $f' \in F_j$. D'après ce qui précède, il existe $h \in F_i \cup F_j \subset \rho(F)$ et $g' \in \mathcal{B}'_j$ tels que, si $\alpha(f) = \alpha(f')$:

$$h < f \quad \text{et} \quad g'.h < f'.$$

Il en résulte que $(\mathcal{B}', \rho(F), \mathcal{B})$ est une fusée. Cette fusée est équivalente à $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ et c'est le plus grand élément de la classe $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \bmod \rho$ relativement à la relation d'ordre :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{si, et seulement si,} \quad F_1 \subset F.$$

L'application $\tilde{\rho}$:

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \bmod \rho \rightarrow (\mathcal{B}', \rho(F), \mathcal{B})$$

est une bijection de la classe quotient $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)/\rho$ sur une sous-classe de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$.

— Montrons que la relation d'équivalence ρ est compatible sur la classe multiplicative $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$, c'est-à-dire [2] que les relations :

$$(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \sim (\mathcal{B}'_2, F_2, \mathcal{B}_2)$$

et

$$(\mathcal{B}''_1, F'_1, \mathcal{B}'_1) \sim (\mathcal{B}''_2, F'_2, \mathcal{B}'_2)$$

entraînent $(\mathcal{B}'_1, F'_1.F_1, \mathcal{B}_1) \sim (\mathcal{B}''_2, F'_2.F_2, \mathcal{B}_2)$. En effet, soit $i = 1, 2$, $f_i \in F_i$, $f'_i \in F'_i$ et $f'_i.f_i \in F'_i.F_i$; il existe $f_j \in F_j$ tel que $f_j < f_i$, où $j = 1, 2$ et $j \neq i$. Comme

$$\beta(f_j) \in \mathcal{B}' \quad \text{et} \quad \beta(f_j) < \alpha(f'_i),$$

il existe $f''_i < f'_i$, $f''_i \in F'_i$ tel que $\alpha(f''_i) = \beta(f_j)$. Il existe aussi $f'_j \in F'_j$ pour lequel $f'_j < f''_i$. Puisque $\alpha(f'_j) \in \mathcal{B}'$ et $\alpha(f'_j) < \beta(f_j)$, il existe $\bar{f}_j \in F_j$ tel que $\bar{f}_j < f_j$ et $\beta(\bar{f}_j) = \alpha(f'_j)$, d'où :

$$f'_j.\bar{f}_j \in F'_j.F_j \quad \text{et} \quad f'_j.\bar{f}_j < f'_i.f_i.$$

— La relation ρ n'identifiant pas deux unités différentes de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$, il existe [2] une catégorie quotient strict de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ par ρ . Cette catégorie admet pour classe de ses unités la classe des triplets $(\mathcal{B}, \rho(\mathcal{B}), \mathcal{B})$ où \mathcal{B} est une fusée neutre de $(\mathcal{C}, <)$.

Nous désignerons par $\Phi(\mathcal{C}, <)$ la catégorie quotient strict de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ ayant pour support la classe $\tilde{\rho}(\mathcal{F}(\mathcal{C}, <))/\rho$.

PROPOSITION 3. — Soit $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$. Si

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi(\mathcal{C}, <)$$

et si F est une sous-classe saturée par induction de F_1 , on a $F = F_1$.

Démonstration. — Montrons que l'on a

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$$

modulo ρ , d'où résultera la proposition. Soit $f_1 \in F_1$; comme $\alpha(f_1) \in \mathcal{B}$, il existe $f \in F$ tel que $\alpha(f) < \alpha(f_1)$; puisque $\alpha(f) \in \mathcal{B}$, il existe $f'_1 \in F_1$ tel que $f'_1 < f_1$ et $\alpha(f'_1) = \alpha(f)$. Dans la fusée $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B})$, il existe $\bar{f}_1 \in F_1$, $\bar{f}'_1 \in F_1$ et $g' \in \mathcal{B}'_1$ vérifiant :

$$\bar{f}_1 < f, \quad \bar{f}'_1 < f'_1 \quad \text{et} \quad \bar{f}'_1 = g' \cdot \bar{f}_1.$$

La classe F étant saturée par induction dans F_1 , on a $\bar{f}_1 \in F$, d'où $\bar{f}'_1 \in \mathcal{B}' \cdot F = F$ et $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$, car $\bar{f}'_1 < f_1$.

COROLLAIRE. — Soient $(\mathcal{C}, <)$ une catégorie ordonnée assez régulière et $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ une fusée régulière de $(\mathcal{C}, <)$. On a

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi(\mathcal{C}, <)$$

si, et seulement si, les conditions $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ et $F \subset F_1$ entraînent $F = F_1$.

En effet, supposons ces conditions vérifiées. Si

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}),$$

on a $(\mathcal{B}', F \cup F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$, d'après la démonstration du théorème 3. Mais par hypothèse il en résulte $F \cup F_1 = F$. Donc $F = \rho(F)$. Inversement, soit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi(\mathcal{C}, <)$; soit $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ et $F \subset F_1$. Si $f \in F$ et $f_1 \in F_1$ sont tels que $f_1 < f$, on a :

$$f_1 = \beta(f_1)(f\alpha(f_1)) \in \mathcal{B}'(F\mathcal{B}) = F.$$

Par suite F est saturée par induction dans F_1 et le corollaire résulte de la proposition 3.

Nous supposons désormais que $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie ordonnée régulière telle que $(\mathcal{C}_i, <)$ soit un groupoïde ordonné semi-régulier.

THÉORÈME 4. — $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ admet une catégorie quotient strict relativement à la relation d'équivalence ρ^r induite par ρ . De plus la classe $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)/\rho^r$ est isomorphe à une sous-classe de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$.

Démonstration. — Comme ρ est compatible et n'identifie pas deux unités distinctes de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$, il en est de même pour ρ^r et $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ admet une catégorie quotient strict par ρ^r . Si $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \bmod \rho^r$ on a $(\mathcal{B}', F \cup F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ d'après la démonstration du théorème 3. Puisque

$$(F \cup F_1)\mathcal{B} \subset (F\mathcal{B} \cup F_1\mathcal{B}) \subset F \cup F_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'(F \cup F_1) \subset F \cup F_1,$$

on trouve $(\mathcal{B}', F \cup F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$. Il en résulte que, si $\rho^r(F)$ désigne la classe réunion des F_i tels que

$$(\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{modulo } \rho^r,$$

on a $(\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ et $(\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B})$ est le plus grand élément de la classe $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \bmod \rho^r$ relativement à la relation d'ordre :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) < (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}) \quad \text{si, et seulement si,} \quad F_1 \subset F_2.$$

L'application $\tilde{\rho}^r$:

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \bmod \rho^r \rightarrow (\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B})$$

est une bijection de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)/\rho^r$ sur une sous-classe de

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}, <).$$

Remarquons que si $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ est une fusée régulière de $(\mathcal{C}, <)$, on peut avoir $\rho(F) \neq \rho^r(F)$.

Nous désignerons par $\Phi^r(\mathcal{C}, <)$ la catégorie quotient strict de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ ayant pour support la classe

$$\tilde{\rho}^r(\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)/\rho^r).$$

PROPOSITION 4. — Supposons $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <)$. On a $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$ si, et seulement si, la condition

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) < (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B})$$

dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$ entraîne $F = F_1$.

En effet, si la condition est vérifiée, on a $F = \rho^r(F)$. Inversement, supposons $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$ et

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) < (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}).$$

D'après la démonstration du théorème 2, F est une sous-classe saturée par induction de F_1 . Une démonstration analogue à celle de la proposition 3 prouve que l'on a

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \text{ modulo } \rho^r,$$

d'où $F = F_1$.

DÉFINITION 6. — On appelle fusée maximale de $(\mathcal{C}', <)$ une fusée régulière de $(\mathcal{C}', <)$ appartenant à $\Phi^r(\mathcal{C}', <)$.

THÉORÈME 5. — La catégorie $\Phi^r(\mathcal{C}', <)^*$ des fusées maximales de $(\mathcal{C}', <)$, munie de la relation d'ordre induite par

$$(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <),$$

est une catégorie quasi-inductive régulière, qui est une catégorie quotient $\tilde{\Omega}^s$ -structurée de $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$.

Démonstration. — Supposons $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$, c'est-à-dire (théorème 2) \mathcal{B}'_1 et \mathcal{B}_1 sont des sous-catégories pleines saturées par induction de \mathcal{B}' et \mathcal{B} resp. et F_1 est une sous-classe de F ; on sait qu'alors F_1 est saturée par induction dans F .

— Si $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <)$, soit $f \in F$; si $f_1 \in \mathcal{B}'_0 \cdot f \cdot \mathcal{B}_0$ on a :

$$f_1 = \beta(f_1)(f\alpha(f_1)) \in \mathcal{B}'(F\mathcal{B}) = F.$$

— Montrons que la relation ρ^r est équivalente à la relation :

$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$ si, et seulement si, $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B})$ est une fusée de $(\mathcal{C}', <)$.

En vertu de la démonstration du théorème 4, il suffit de montrer que les conditions :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <), \quad (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$$

et

$$(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$$

entraînent $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$ modulo ρ^r . En effet, soit $i = 1, 2$ et $f_i \in F_i$; il existe $f_j \in F_j$, $j = 1, 2$ et $j \neq i$, tel que $\alpha(f_j) < \alpha(f_i)$ et il existe $f'_i \in F_i$ tel que $\alpha(f'_i) = \alpha(f_j)$ et $f'_i < f_i$. Comme $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B})$ est une fusée, il existe $h \in F_1 \cup F_2$, $h' \in F_1 \cup F_2$ et $g' \in \mathcal{B}'_i$ tels que :

$$h < f_j, \quad h' < f'_i \quad \text{et} \quad h' = g'.h.$$

La fusée $(\mathcal{B}', F_j, \mathcal{B})$ étant régulière, on a :

$$h \in \mathcal{B}'_0.f_j.\mathcal{B}_0 \subset F_j,$$

d'où $h' \in \mathcal{B}'.F_j = F_j$. Par suite $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$ modulo ρ^r .

— Supposons $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi(\mathcal{C}, <)$, $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$ dans $(\mathcal{F}(\mathcal{C}, <), <)$. Posons $F_1 = \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1$. Supposons que, pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$, il existe $f_1 \in F_1$ tel que $\alpha(f_1) < e$ et que, pour tout $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$, il existe $f'_1 \in F_1$ tel que $\beta(f'_1) < e'$ et montrons qu'alors $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$ est une fusée maximale. La classe

$$F_1 = \alpha(\mathcal{B}'_1).F.\alpha(\mathcal{B}_1)$$

étant saturée par induction dans F , $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$ est une fusée régulière de $(\mathcal{C}, <)$. Pour montrer que cette fusée est maximale, nous allons prouver que si on a $(\mathcal{B}'_1, K, \mathcal{B}_1) \sim (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$, alors $(\mathcal{B}', \mathcal{B}'.K.\mathcal{B} \cup F, \mathcal{B})$ est une fusée. En effet, posons $K' = \mathcal{B}'.K.\mathcal{B}$ et $H = K' \cup F$. Soient $k \in K$ et $g \in \mathcal{B}$; si kg est défini, on a : $kg = (ke).(eg)$, où $e = \alpha(k) \cap \beta(g)$ et $eg \in \mathcal{B}$; \mathcal{B}_1 étant saturé par induction dans \mathcal{B} , on a $e \in \mathcal{B}_1$, d'où

$$ke \in K\mathcal{B}_1 \subset K \quad \text{et} \quad kg \in K.\mathcal{B}.$$

Il en résulte $K\mathcal{B} = K.\mathcal{B}$; de même $\mathcal{B}'K = \mathcal{B}'.K$, de sorte que l'on obtient :

$$K' = (\mathcal{B}'K)\mathcal{B}, \quad K'\mathcal{B} = (\mathcal{B}'.K.\mathcal{B})\mathcal{B} \subset (\mathcal{B}'K)(\mathcal{B}\mathcal{B}) = K'$$

et

$$\mathcal{B}'K' \subset K', \quad \text{d'où} \quad H\mathcal{B} = H = \mathcal{B}'H.$$

Pour tout $e \in \mathcal{B}_0$, il existe $f \in F$ tel que $\alpha(f) < e$ et pour tout $e' \in \mathcal{B}'_0$, il existe $f' \in F$ tel que $\beta(f') < e'$. Soit $f \in F$, $g'.k.g \in K'$ et $\alpha(g) = \alpha(f)$, où $g \in \mathcal{B}$, $g' \in \mathcal{B}'$ et $k \in K$. Il existe $f_1 \in F_1$ tel que $f_1 < k$, d'où :

$$g'f_1g \in \mathcal{B}'(F_1\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}'(F\mathcal{B}) = F;$$

comme $e = \alpha(g'f_1g) < \alpha(f)$, d'après la proposition 1 il existe $h \in F$, $h' \in F$ et $\gamma' \in \mathcal{B}'_\gamma$ tels que $h' = \gamma'.h$, $h < g'f_1g < g'.k.g$ et $h' < f$. Par dualité on en déduit que, si $f \in F$, $g'.k.g \in K'$ et $\beta(f) = \beta(g')$, il existe $h_1 \in F$, $h'_1 \in F$ et $\gamma \in \mathcal{B}_\gamma$ tels que :

$$h'_1 < g'.k.g, \quad h_1 < f \quad \text{et} \quad h' = h_1.\gamma.$$

Supposons encore $g'.k.g \in K'$ et soit $\bar{g}'.\bar{k}.\bar{g} \in K'$, où $\bar{g} \in \mathcal{B}$, $\bar{g}' \in \mathcal{B}'$, $\bar{k} \in K$ et $\alpha(g) = \alpha(\bar{g})$. D'après ce qui précède, on a

$$g'f_1g \in F, \quad (\bar{g}'.\bar{k}.\bar{g})e \in K' \quad \text{où} \quad \alpha(g'f_1g) = e;$$

donc il existe $\bar{h} \in F$, $\bar{h}' \in F$ et $\bar{\gamma}' \in \mathcal{B}'_\gamma$ tels que

$$\bar{h} < g'f_1g, \quad \bar{h}' < \bar{g}'.\bar{k}.\bar{g} \quad \text{et} \quad \bar{h}' = \bar{\gamma}'.\bar{h}.$$

Dualement les conditions $k_1 \in K'$, $k'_1 \in K'$ et $\beta(k_1) = \beta(k'_1)$ assurent l'existence de $h_1 \in F$, de $h'_1 \in F$ et de $\gamma_1 \in \mathcal{B}_\gamma$ tels que : $h'_1 < k'_1$, $h_1 < k_1$ et $h'_1 = h_1.\gamma_1$. Ceci prouve que $(\mathcal{B}', H, \mathcal{B})$ est une fusée. La fusée $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ étant maximale, on en déduit $H = F$, c'est-à-dire $K \subset F$. Par suite on a : $F_1 \subset \rho^r(F_1) \subset F$, d'où $\rho^r(F_1) = F_1$, car $\rho^r(F_1) \subset \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1 = F_1$. Ceci prouve que $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$ est une fusée maximale, majorée par $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$.

— Soit $(\mathcal{B}'_1, F', \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ dans $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$. Comme pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$ (resp. tout $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$), il existe

$$f' \in F' \subset \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1$$

tel que $\alpha(f') < e$ (resp. $\beta(f') < e'$), on a aussi, d'après ce qui précède, $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$. Puisque

$$F' \subset \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1,$$

il résulte de la proposition 4 que $F' = \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1$. Par suite si $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$ et $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <)$, on a

$$(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$$

dans $(\Phi^r(\mathcal{C}, \langle \rangle, \langle \rangle)$ si, et seulement si, $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'_1 < \mathfrak{B}'$ et $F_1 = \mathfrak{B}'_1 \cdot F \cdot \mathfrak{B}_1$. En particulier, on a $\bar{\rho}^r(\mathfrak{B}_1) < \bar{\rho}^r(\mathfrak{B})$ si, et seulement si, $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}$ dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle, \langle \rangle)$, où \mathfrak{B} et \mathfrak{B}_1 sont des fusées neutres régulières de $(\mathcal{C}, \langle \rangle)$ et $\bar{\rho}^r(\mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, \rho^r(\mathfrak{B}), \mathfrak{B})$. Si $(\mathfrak{B}', F_1, \mathfrak{B}) < (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$, on a $F_1 = \mathfrak{B}' \cdot F \cdot \mathfrak{B} = F$.

— Nous désignerons par \bullet la loi de composition de la catégorie $\Phi^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$ quotient de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$. Supposons

$$(\mathfrak{B}'_1, F_1, \mathfrak{B}_1) < (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$$

et

$$(\mathfrak{B}''_1, F'_1, \mathfrak{B}'_1) < (\mathfrak{B}''_1, F', \mathfrak{B}')$$

dans $(\Phi^r(\mathcal{C}, \langle \rangle, \langle \rangle)$; on a :

$$(\mathfrak{B}''_1, \rho^r(F' \cdot F), \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}''_1, F', \mathfrak{B}') \bullet (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$$

et

$$(\mathfrak{B}''_1, \rho^r(F'_1 \cdot F_1), \mathfrak{B}_1) = (\mathfrak{B}''_1, F'_1, \mathfrak{B}'_1) \bullet (\mathfrak{B}'_1, F_1, \mathfrak{B}_1).$$

Comme $F'_1 \cdot F_1 \subset \mathfrak{B}''_1 \cdot \rho^r(F' \cdot F) \cdot \mathfrak{B}_1$ et que

$$(\mathfrak{B}''_1, F'_1 \cdot F_1, \mathfrak{B}'_1) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle),$$

on trouve, en utilisant ce qui précède, $\mathfrak{K} \in \Phi^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$, où

$$\mathfrak{K} = (\mathfrak{B}''_1, \mathfrak{B}'_1 \cdot \rho^r(F' \cdot F) \cdot \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1),$$

$\mathfrak{K} \sim (\mathfrak{B}''_1, F'_1 \cdot F_1, \mathfrak{B}'_1)$, d'où

$$\mathfrak{K} = (\mathfrak{B}''_1, \rho^r(F'_1 \cdot F_1), \mathfrak{B}'_1) < (\mathfrak{B}''_1, \rho^r(F' \cdot F), \mathfrak{B}).$$

On en déduit que $(\Phi^r(\mathcal{C}, \langle \rangle), \bullet, \langle \rangle)$ est une catégorie ordonnée.

— Supposons $(\mathfrak{B}'_i, F_i, \mathfrak{B}_i) < (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$ pour tout $i \in I$. Soit $\tilde{\mathfrak{B}}$ la sous-catégorie pleine de \mathfrak{B} ayant pour classe de ses unités la classe réunion des $\alpha(\mathfrak{B}_i)$, où $i \in I$; comme \mathfrak{B}_i est saturé par induction dans \mathfrak{B} , la classe $\tilde{\mathfrak{B}}$ est saturée par induction dans \mathfrak{B} et on a $\mathfrak{B}_i < \tilde{\mathfrak{B}} < \mathfrak{B}$; donc $\bar{\rho}^r(\tilde{\mathfrak{B}})$ est le $\bar{\rho}^r(\mathfrak{B})$ -agrégat de la classe des $\bar{\rho}^r(\mathfrak{B}_i)$. Posons $\tilde{\mathfrak{B}}' = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}'_i$. Pour tout $e \in \tilde{\mathfrak{B}}_0$ (resp. tout $e' \in \tilde{\mathfrak{B}}'_0$), il existe i tel que $e \in \alpha(\mathfrak{B}_i)$ (resp. $e' \in \alpha(\mathfrak{B}'_i)$) de sorte qu'il existe $f_i \in F_i \subset \tilde{\mathfrak{B}}' \cdot F \cdot \tilde{\mathfrak{B}}$ pour lequel $\alpha(f_i) < e$ (resp. $\beta(f_i) < e'$). Il résulte du début de la démonstration que l'on a :

$$\mathfrak{A}_I = (\tilde{\mathfrak{B}}', \tilde{\mathfrak{B}}' \cdot F \cdot \tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{\mathfrak{B}}) \in \Phi^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$$

et $\mathcal{A}_1 < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$. La relation :

$$F_i = \mathcal{B}'_i . F . \mathcal{B}_i = \mathcal{B}'_i . \tilde{\mathcal{B}}' . F . \tilde{\mathcal{B}} . \mathcal{B}_i$$

entraîne $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < \mathcal{A}_1$, pour tout $i \in I$. On en déduit que \mathcal{A}_1 est le $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ -agrégat de la classe des $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i)$. Donc $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$ est une classe sous-inductive.

— Supposons $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$ et $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$; soit $\alpha(\mathcal{B}'_1)$ la sous-classe de \mathcal{B}'_0 formée des $e' \in \mathcal{B}'_0$ tels qu'il existe $h \in F . \mathcal{B}'_1$ vérifiant $\beta(h) < e'$. Soit \mathcal{B}'_1 la sous-catégorie pleine de \mathcal{B}' ayant $\alpha(\mathcal{B}'_1)$ pour classe de ses unités; on a $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$. Pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$, il existe $f \in F$ tel que $\alpha(f) < e$; on en déduit :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$$

et $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$ est le pseudoproduit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})\mathcal{B}_1$ dans $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$. De même si $\mathcal{B}'_2 < \mathcal{B}'$, il existe un pseudoproduit $\mathcal{B}'_2(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ ayant \mathcal{B}'_2 pour unité à gauche. Ceci prouve que $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$ est une catégorie ordonnée assez régulière et par suite, en utilisant ce qui précède et le corollaire 2 de la proposition 12-2[1], une catégorie quasi-inductive.

— Soient $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$, $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$ et :

$$(\mathcal{B}'_1, K, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}'', \rho^r(F' . F), \mathcal{B}')$$

dans $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$. Soit E' la classe des $e' \in \mathcal{B}'_0$ tels qu'il existe $f \in F$ et $f' \in F'$ vérifiant les conditions :

$$\alpha(f) \in \mathcal{B}_1, \quad \beta(f') \in \mathcal{B}'_1 \quad \text{et} \quad \alpha(f') = \beta(f) < e'.$$

Si $e'' \in \mathcal{B}'_0$ et $e'' < e'$, on a : $h = (f'e'') . (e''f) \in F' . F$ et $h < f' . f$, d'où $e'' \in E'$. Par suite E' est une sous-classe saturée par induction de \mathcal{B}'_0 et la sous-catégorie pleine \mathcal{B}'_1 de \mathcal{B}' ayant E' pour classe de ses unités est telle que l'on ait $\bar{\rho}^r(\mathcal{B}'_1) < \bar{\rho}^r(\mathcal{B}')$ dans $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$. Pour tout $e \in \mathcal{B}_1$, il existe $k \in K \subset \rho^r(F' . F)$ tel que $\alpha(k) < e$; comme

$$(\mathcal{B}'', F' . F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}'', \rho^r(F' . F), \mathcal{B}),$$

il existe $f \in F$ et $f' \in F'$ tels que $f' . f < k$, d'où $\alpha(f') \in E'$ et $\alpha(f) < e$. Donc

$$\mathcal{A}_1 = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$$

et

$$\mathcal{A}_1 < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}).$$

De même :

$$\mathcal{A}'_1 = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1.F'.\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$$

et

$$\mathcal{A}'_1 < (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}').$$

De ce qui précède, il résulte : $\mathcal{A}'_1 \bullet \mathcal{A}_1 < (\mathcal{B}'', \rho^r(F'.F), \mathcal{B})$ et :

$$\mathcal{A}'_1 \bullet \mathcal{A}_1 = (\mathcal{B}'', K, \mathcal{B}_1),$$

car ces deux fusées maximales ont même source \mathcal{B}_1 , même but \mathcal{B}'_1 et sont majorées par $(\mathcal{B}'', \rho^r(F'.F), \mathcal{B})$. Ceci montre que $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$ est une catégorie quasi-inductive régulière.

— Montrons que $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$ est une classe sous-inductive quotient de $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$. En effet, soit $\bar{\rho}^r$ l'application :

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B})$$

de

$$\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <) \quad \text{sur} \quad \Phi^r(\mathcal{C}', <).$$

Supposons $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$. Comme $F_1 \subset \rho^r(F)$ on a, en vertu de ce qui précède :

$$\mathcal{A} = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1.\rho^r(F).\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$$

et

$$\mathcal{A} < (\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B}).$$

La condition $F_1 \subset \mathcal{B}'_1.\rho^r(F).\mathcal{B}_1$ entraînant $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \sim \mathcal{A}$, on a :

$$\mathcal{B}'_1.\rho^r(F).\mathcal{B}_1 = \rho^r(F_1)$$

et

$$\bar{\rho}^r(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < \bar{\rho}^r(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}).$$

Soient $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$, où $i \in I$; soit $(\tilde{\mathcal{B}}', F_I, \tilde{\mathcal{B}})$ le $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ -agrégat des $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i)$ (voir théorème 2). Puisque $F_I \subset \tilde{\mathcal{B}}'.F.\tilde{\mathcal{B}}$, on obtient :

$$(\tilde{\mathcal{B}}', F_I, \tilde{\mathcal{B}}) \sim (\tilde{\mathcal{B}}', \tilde{\mathcal{B}}'.F.\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}),$$

ce qui signifie que $\bar{\rho}^r$ est une application quasi-inductive. La restriction de $\bar{\rho}^r$ à $\Phi^r(\mathcal{C}', <)$ étant l'identité, la condition (q^s) (proposition 30, [2]) est vérifiée et $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$ est une classe sous-inductive quotient de $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$ en vertu de la même proposition. $\bar{\rho}^r$ définissant aussi la catégorie $\Phi^r(\mathcal{C}', <)^*$ comme catégorie quotient strict de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <)$, on en déduit que

$(\Phi^r(\mathcal{C}, <)^*, <)$, $<$) est une catégorie quotient $\tilde{\Omega}^s$ -structurée de $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$.

COROLLAIRE. — Si $(\mathcal{C}, <)$ vérifie la condition (C) (définition 4), alors $(\Phi^r(\mathcal{C}, <)^*, <)$ admet une sous-catégorie ordonnée, isomorphe à une catégorie quotient de $(\mathcal{C}, <)$.

Démonstration. — Pour tout $f \in \mathcal{C}$, désignons par \tilde{f} la fusée maximale :

$$\bar{\rho}^r(\beta(f)^>, f^>, \alpha(f)^>).$$

Si $f' \in \mathcal{C}$ et si $f'.f$ est défini, on a : $(f'.f)^> = (f')^>.(f)^>$, d'où : $(\widetilde{f'.f}) = \tilde{f}' \cdot \tilde{f}$. Si $f_1 < f$ dans $(\mathcal{C}, <)$, pour tout $f'_1 < f$ tel que : $\alpha(f'_1) < \alpha(f_1)$ et $\beta(f'_1) < \beta(f_1)$, on a $f'_1 < f_1$, d'où $\tilde{f}'_1 < \tilde{f}$ dans $(\Phi^r(\mathcal{C}, <), <)$. Par suite la classe $\tilde{\mathcal{C}}$ des \tilde{f} , où $f \in \mathcal{C}$, est une sous-catégorie ordonnée de

$$(\Phi^r(\mathcal{C}, <)^*, <),$$

équivalente à la catégorie quotient de $(\mathcal{C}, <)$ par la relation d'équivalence :

$f_1 \sim f_2$ si, et seulement si, $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$, $\beta(f_1) = \beta(f_2)$ et si, pour tout $f'_i < f_i$, il existe $f'_j < f_j$ tel que $f'_j < f'_i$, où $i, j = 1, 2$ et $j \neq i$.

Cas particuliers :

A) Supposons que $(\mathcal{C}, <)$ admette une plus petite unité notée 0. Une sous-catégorie \mathcal{B} de \mathcal{C} contenant 0 est une fusée neutre de $(\mathcal{C}, <)$ si, et seulement si, $(\mathcal{B}, <)$ et $(\mathcal{B}', <)$ sont des catégories semi-régulières. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' des fusées neutres de $(\mathcal{C}, <)$ et F une sous-classe de \mathcal{C} contenant 0. Pour que $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ soit une fusée de $(\mathcal{C}, <)$, il faut et il suffit que l'on ait $\mathcal{B}' \cdot F = F = F \cdot \mathcal{B}$ et que, si $f \in F$, $e \in \mathcal{B}_0$ et $e < \alpha(f)$ (resp. $e' \in \mathcal{B}'_0$ et $e' < \beta(f)$), il existe $f_1 \in F$ tel que $f_1 < f$ et $\alpha(f_1) = e$ (resp. $\beta(f_1) = e'$). Si $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ est une telle fusée, $\rho(F)$ est la classe des $f \in \mathcal{B}' \cdot \mathcal{C} \cdot \mathcal{B}$ tels que, si $e \in \mathcal{B}_0$ et $e < \alpha(f)$ (resp. $e' \in \mathcal{B}'_0$ et $e' < \beta(f)$), il existe $f_1 < f$ pour lequel $\alpha(f_1) = e$ et $\beta(f_1) \in \mathcal{B}'$ (resp. $\beta(f_1) = e'$ et $\alpha(f_1) \in \mathcal{B}$).

Si \mathcal{B}' et \mathcal{B} sont des fusées neutres régulières de $(\mathcal{C}, <)$ et si F est une sous-classe de $\mathcal{B}' \cdot \mathcal{C} \cdot \mathcal{B}$ contenant 0, $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ est une fusée régulière de $(\mathcal{C}, <)$ si, et seulement si, $\mathcal{B}'F = F = F\mathcal{B}$;

dans ce cas, $\rho^r(\mathbb{F})$ est la classe des $f \in \mathcal{B}' \cdot \mathcal{C} \cdot \mathcal{B}$ tels que $\beta(f\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}'$ et $\alpha(\mathcal{B}'f) \subset \mathcal{B}$.

La classe des fusées régulières $(\mathcal{B}', \mathbb{F}, \mathcal{B})$ telles que 0 n'appartienne ni à \mathbb{F} , ni à \mathcal{B} , ni à \mathcal{B}' , est une sous-catégorie de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$, qui est pleine, saturée par induction et saturée pour la relation d'équivalence ρ^r .

B) Soit \mathcal{C} une catégorie; soit $(\mathcal{C}, <)$ la catégorie ordonnée régulière obtenue en munissant \mathcal{C} de la relation d'ordre (triviale):

$$f' < f \text{ si, et seulement si, } f' = f.$$

Soit $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ la catégorie des atlas de \mathcal{C} (voir [1], 1, dont nous reprenons les notations).

PROPOSITION 5. *Les catégories $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$, $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$, $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ et $\Phi^r(\mathcal{C}, <)^*$ sont identiques et $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}), <)$ (théorème 2-2[1]) est une catégorie quasi-inductive identique à $(\Phi^r(\mathcal{C}, <)^*, <)$.*

Démonstration. — Soit $(\mathcal{B}', \mathbb{F}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$. Si $e \in \mathcal{B}_0$, il existe $f \in \mathbb{F}$ tel que $\alpha(f) < e$, d'où $\alpha(f) = e$ et $\mathcal{B}_0 = \alpha(\mathbb{F})$; de même $\mathcal{B}'_0 = \beta(\mathbb{F})$. Soient $f \in \mathbb{F}$ et $f' \in \mathbb{F}$ tels que $\alpha(f) = \alpha(f')$. Il existe $f_1 \in \mathbb{F}$ et $g \in \mathcal{B}'_\gamma$ tels que $f_1 < f$ et $f_1 \cdot g < f'$, c'est-à-dire $f_1 = f$ et $f \cdot g = f'$. Donc \mathbb{F} est un atlas de \mathcal{C} . De plus les conditions $g \in \mathcal{B}$ et $\alpha(g) \in \mathcal{B}_0$ entraînent $g \in \mathcal{B}'_\gamma$, puisque \mathcal{B} est un atlas. Donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}'_\gamma$ et $(\mathcal{B}', \mathbb{F}, \mathcal{B})$ est un atlas de \mathcal{C} . — Inversement, soit $(\mathcal{B}', \mathbb{F}, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$. Comme \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathbb{F} sont des sous-classes saturées par induction de \mathcal{C} , $(\mathcal{B}', \mathbb{F}, \mathcal{B})$ est une fusée régulière de $(\mathcal{C}, <)$. Les conditions $(\mathcal{B}', \mathbb{F}_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ et $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}_1$ entraînent $(\mathcal{B}', \mathbb{F}_1, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ d'après ce qui précède, d'où $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1$, car $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}), <)$ est une catégorie ordonnée. Par suite $(\mathcal{B}', \mathbb{F}, \mathcal{B})$ est une fusée maximale en vertu de la proposition 4. Il en résulte:

$$\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) = \mathcal{F}(\mathcal{C}, <) = \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <) = \Phi^r(\mathcal{C}, <).$$

2. Fusées strictes

Soit $(\mathcal{C}, <)$ une catégorie $\tilde{\Omega}$ -structurée semi-régulière telle que $(\mathcal{C}_\gamma, <)$ soit un groupoïde ordonné semi-régulier.

DÉFINITION 1. — On appelle fusée stricte neutre de $(\mathcal{C}, <)$ une sous-catégorie \mathfrak{B} de \mathcal{C} vérifiant les conditions suivantes :

1) $(\mathfrak{B}, <)$ et $(\mathfrak{B}_\gamma, <)$ sont des catégories semi-régulières.

2) Soient $f \in \mathfrak{B}$ et $f' \in \mathfrak{B}$. Si $\alpha(f) = \alpha(f')$ (resp. $\beta(f) = \beta(f')$), il existe $f_1 \in \mathfrak{B}$ et $g \in \mathfrak{B}_\gamma$ tels que $f_1 < f$, $\alpha(f_1) = \alpha(f)$ et $g \cdot f_1 < f'$ (resp. $f_1 < f$, $\beta(f_1) = \beta(f)$ et $f_1 \cdot g < f'$).

DÉFINITION 2. — Soit \mathfrak{B} une fusée neutre de $(\mathcal{C}, <)$. On appelle fusée stricte à droite de $(\mathcal{C}, <)$ compatible avec \mathfrak{B} une sous-classe F de \mathcal{C} vérifiant les conditions (F_1) et (F_2) (définition 2-1) et la condition :

(F_3) Soient $f \in F$ et $f' \in F$. Si $\beta(f) = \beta(f')$, il existe $f_1 \in F$ et $g \in \mathfrak{B}_\gamma$ tels que $f_1 < f$, $\beta(f_1) = \beta(f)$ et $f_1 \cdot g < f'$.

On appelle fusée stricte à gauche de $(\mathcal{C}, <)$ compatible avec \mathfrak{B} une fusée stricte à droite de $(\mathcal{C}^*, <)$, compatible avec \mathfrak{B} . On appelle fusée stricte de $(\mathcal{C}, <)$ un triplet $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$ tel que \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' soient des fusées strictes neutres de $(\mathcal{C}, <)$ et F une fusée stricte à droite compatible avec \mathfrak{B} et une fusée stricte à gauche compatible avec \mathfrak{B}' .

Une fusée stricte (resp. stricte neutre) de $(\mathcal{C}, <)$ est aussi une fusée (resp. fusée neutre) de $(\mathcal{C}, <)$.

THÉORÈME 1. — La classe $\mathfrak{F}^s(\mathcal{C}, <)$ des fusées strictes de $(\mathcal{C}, <)$ est une sous-catégorie de $\mathfrak{F}(\mathcal{C}, <)$, qui admet une catégorie quotient strict par la relation d'équivalence ρ^s :

$(\mathfrak{B}', F_1, \mathfrak{B}) \sim (\mathfrak{B}', F_2, \mathfrak{B})$ si, et seulement si, pour tout $f_i \in F_i$ il existe $f_j \in F_j$ tel que $f_j < f_i$ et $\alpha(f_i) = \alpha(f_j)$, où $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, et $f'_j \in F_j$ tel que $f'_j < f_i$ et $\beta(f'_j) = \beta(f_i)$.

La classe quotient $\mathfrak{F}^s(\mathcal{C}, <)/\rho^s$ est isomorphe à une sous-classe de $\mathfrak{F}^s(\mathcal{C}, <)$.

Démonstration. — Si $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}) \in \mathfrak{F}^s(\mathcal{C}, <)$, on a par définition $\mathfrak{B} \in \mathfrak{F}^s(\mathcal{C}, <)$ et $\mathfrak{B}' \in \mathfrak{F}^s(\mathcal{C}, <)$. Supposons de plus $(\mathfrak{B}'', F', \mathfrak{B}') \in \mathfrak{F}^s(\mathcal{C}, <)$ et montrons que $(\mathfrak{B}'', F'.F, \mathfrak{B})$ est une fusée stricte. Comme $(\mathfrak{B}'', F'.F, \mathfrak{B})$ est une fusée d'après le théorème 1-1, il suffit de montrer que (F_3) est vérifié. Soient $f' \cdot f \in F'.F$, $\bar{f}' \cdot \bar{f} \in F'.F$, $f \in F'$, $f' \in F'$, $\bar{f} \in F$ et $\bar{f}' \in F'$ tels que $\alpha(f) = \alpha(\bar{f})$. Il existe $f_1 \in F$ et $g' \in \mathfrak{B}'_\gamma$ tels que $f_1 < f$, $\alpha(f_1) = \alpha(f)$ et $\bar{f}'_1 = g' \cdot f_1 < \bar{f}'$. Comme $\alpha(g') \in \mathfrak{B}'$, il existe, en vertu de (F_1) ,

$f'_1 \in F'$ tel que $f'_1 < f'$ et $\alpha(f'_1) = \alpha(g')$ et il existe $\bar{f}'_1 \in F'$ tel que $\bar{f}'_1 < \bar{f}'$ et $\alpha(\bar{f}'_1) = \beta(g')$. Puisque $\bar{f}'_1 \cdot g' \in F' \cdot \mathcal{B}' = F'$, il existe $f'_2 \in F'$ et $g'' \in \mathcal{B}'_1$ tels que :

$$f'_2 < f'_1, \quad \alpha(f'_2) = \alpha(f'_1) \quad \text{et} \quad \bar{f}'_2 = g'' \cdot f'_2 < \bar{f}'_1 \cdot g'.$$

Des relations :

$$\begin{aligned} f'_2 \cdot f_1 &\in F' \cdot F, & f'_2 \cdot f_1 &< f' \cdot f, \\ g'' \cdot (f'_2 \cdot f_1) &= \bar{f}'_2 \cdot f_1 = (f'_2 \cdot g'^{-1}) \cdot \bar{f}'_1 \end{aligned}$$

et

$$(\bar{f}'_2 \cdot g'^{-1}) \cdot \bar{f}'_1 < \bar{f}'_1 \cdot g' \cdot g'^{-1} \cdot \bar{f}'_1 = \bar{f}'_1 \cdot \bar{f}'_1 < \bar{f}' \cdot \bar{f},$$

on déduit que $F' \cdot F$ est une fusée stricte à gauche, compatible avec \mathcal{B}'' . Par dualité on en déduit que $F' \cdot F$ est une fusée stricte à droite, compatible avec \mathcal{B}'' . Donc $(\mathcal{B}'', F' \cdot F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^s(\mathcal{C}', <)$ et $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}', <)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\mathcal{C}', <)$.

— La relation ρ^s est évidemment symétrique et réflexive. Supposons :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}).$$

Soient $i, j = 1, 2, i \neq j$ et $f_i \in F_i$; il existe $f \in F$ tel que $f < f_i$ et $\alpha(f_i) = \alpha(f)$; il existe aussi $f_j \in F_j$ tel que $\alpha(f_j) = \alpha(f)$ et $f_j < f$, d'où $f_j < f_i$ et $\alpha(f_i) = \alpha(f_j)$. De même on construit $f'_j \in F_j$ tel que $f'_j < f_i$ et $\beta(f'_j) = \beta(f_i)$. Par suite

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$$

et ρ^s est une relation d'équivalence. Remarquons que la classe d'équivalence de $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ modulo ρ^s est contenue dans la classe d'équivalence de $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ modulo ρ (théorème 3-1).

— Montrons que ρ^s est compatible sur la classe multiplicative $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}', <)$. Supposons $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$ et

$$(\mathcal{B}'', F'_1, \mathcal{B}') \sim (\mathcal{B}'', F'_2, \mathcal{B}').$$

Soit $f'_i \cdot f_i \in F'_i \cdot F_i$, où $i = 1, 2, f_i \in F_i$ et $f'_i \in F'_i$. Soit $j = 1, 2, j \neq i$; il existe $f_j \in F_j$ tel que $\alpha(f_j) = \alpha(f_i)$ et $f_j < f_i$. Les relations $\beta(f_j) \in \mathcal{B}'$ et $\beta(f_j) < \alpha(f'_i)$ entraînent qu'il existe $f''_i \in F'_i$ pour lequel $f''_i < f'_i$ et $\alpha(f''_i) = \beta(f_j)$; de plus il existe $f'_j \in F'_j$ tel que $\alpha(f'_j) = \alpha(f''_i)$ et $f'_j < f''_i$. On en déduit :

$$f'_j \cdot f_j \in F'_j \cdot F_j, \quad f'_j \cdot f_j < f'_i \cdot f_i$$

et

$$\alpha(f'_j \cdot f_j) = \alpha(f'_i \cdot f_i).$$

On construit de même $\bar{f}'_j \cdot \bar{f}_j \in F'_j \cdot F_j$ tel que $\bar{f}'_j \cdot \bar{f}_j < f'_i \cdot f_i$ et $\beta(\bar{f}'_j \cdot \bar{f}_j) = \beta(f'_i \cdot f_i)$. Par conséquent $(\mathcal{B}'', F'_1 \cdot F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}'', F'_2 \cdot F_2, \mathcal{B})$ et ρ^s est compatible sur $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$.

— Comme ρ^s n'identifie pas deux unités différentes de

$$\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <),$$

il existe une catégorie quotient strict $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)/\rho^s$.

— Montrons que si $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$, alors

$$(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B})$$

est une fusée stricte, où $F_1 \cup F_2$ désigne la classe réunion de F_1 et F_2 . D'après la démonstration du théorème 3-1, on a $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$. Soient $h \in F_1 \cup F_2$ et $h' \in F_1 \cup F_2$ tels que $\alpha(h) = \alpha(h')$ (le cas $\beta(h) = \beta(h')$ s'en déduit par dualité). Il existe $h_1 \in F_1$ et $h'_1 \in F_1$ tels que :

$$h_1 < h, \quad h'_1 < h' \quad \text{et} \quad \alpha(h_1) = \alpha(h'_1) = \alpha(h).$$

Comme $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B})$ est une fusée stricte, il existe $\bar{h}_1 \in F_1$ et $g' \in \mathcal{B}'_1$ vérifiant les conditions :

$$\bar{h}_1 < h_1 < h, \quad \bar{h}'_1 = g' \cdot \bar{h}_1 < h'_1 < h' \quad \text{et} \quad \alpha(\bar{h}_1) = \alpha(h_1).$$

Il en résulte que $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B})$ est une fusée stricte.

— Soit $\rho^s(F)$ la classe réunion des F_i tels que :

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \text{ modulo } \rho^s.$$

La démonstration précédente montre aussi que l'on a

$$(\mathcal{B}', \rho^s(F), \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$$

et

$$(\mathcal{B}', \rho^s(F), \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}),$$

de sorte que l'application $\tilde{\rho}^s$:

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \text{ modulo } \rho^s \rightarrow (\mathcal{B}', \rho^s(F), \mathcal{B})$$

est une bijection de $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)/\rho^s$ sur une sous-classe de $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$.

COROLLAIRE. — $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$ admet pour sous-catégorie la classe $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$ des fusées strictes $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ telles que $\alpha(F) = \mathcal{B}_0$ et $\beta(F) = \mathcal{B}'$. $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$ est une sous-classe saturée relativement à ρ^s .

Démonstration. — Supposons $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$ et $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$. Soit $e \in \alpha(\mathcal{B})$; il existe $f \in F$ tel que $\alpha(f) = e$; comme $\beta(f) \in \mathcal{B}'_0$, il existe $f' \in F'$ tel que $\alpha(f') = \beta(f)$ et on a $f'.f \in F'.F$ et $\alpha(f'.f) = e$. Donc $\alpha(F'.F) = \mathcal{B}_0$; de même $\beta(F'.F) = \mathcal{B}'_0$, de sorte que $(\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B})$ appartient à $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$ et $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$.

— Supposons $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$ modulo ρ^s . On a évidemment :

$$\alpha(F_1) = \alpha(F_2) \quad \text{et} \quad \beta(F_1) = \beta(F_2).$$

Par suite si $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$, on a aussi

$$(\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <).$$

Soit $(\mathcal{C}, <)$ une catégorie ordonnée régulière telle que $(\mathcal{C}_\gamma, <)$ soit un groupoïde ordonné semi-régulier.

Nous désignerons par $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$ la classe des fusées strictes régulières de $(\mathcal{C}, <)$, c'est-à-dire la classe intersection de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ et de $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$. Soit $\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}, <)$ la classe intersection de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ et de $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$ (corollaire du théorème 1).

PROPOSITION 1. — $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$ est une sous-catégorie saturée par induction de $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$ (théorème 2-1), dont $\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}, <)$ est une sous-catégorie.

Démonstration. — $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$ et $\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}, <)$ sont évidemment des sous-catégories de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$. Supposons

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$$

et soit :

$$(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{dans} \quad (\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <).$$

Comme $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$ et F_1 sont des sous-classes saturées par induction de $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et F respectivement, ce sont des fusées strictes de la sous-catégorie de (\mathcal{C}, I) correspondant à $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ (déf. 5-1) et par suite $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$ est une fusée stricte. Ainsi $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$ est saturée par induction dans la classe $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$.

THÉORÈME 2. — $(\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <), <)$ et $(\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <), <)$ sont des catégories $\tilde{\Omega}^s$ -structurées assez régulières, la structure d'ordre étant celle induite par $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$.

Démonstration. — Comme $\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)$ est une sous-catégorie saturée par induction de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$, $(\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <), <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}^s$ -structurée assez régulière. — $(\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <), <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$ -structurée. Soient $i \in I$ et

$$(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{dans} \quad (\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <), <).$$

Il existe un $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ -agrégat $\mathcal{A}_I = \left(\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}'} \mathcal{B}'_i, F_I, \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}} \mathcal{B}_i \right)$ dans $(\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <), <)$. Pour tout $e \in \alpha \left(\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}} \mathcal{B}_i \right)$ il existe $i \in I$ et $f_i \in F_i$ tel que $e = \alpha(f_i)$, d'où $f_i \in F_I$ et $\alpha(F_I) = \alpha \left(\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}} \mathcal{B}_i \right)$. De même $\beta(F_I) = \alpha \left(\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}'} \mathcal{B}'_i \right)$, de sorte que $\mathcal{A}_I \in \mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <)$ et $(\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <), <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}^s$ -structurée. — Soit

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_I < \mathcal{B}.$$

Soit \mathcal{B}'_1 la sous-catégorie pleine de \mathcal{B}' ayant pour unités les éléments de $\beta(F, \mathcal{B}_1)$. Comme pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$ il existe $f \in F$ tel que $\alpha(f) = e$ on a $\alpha(F, \mathcal{B}_1) = \alpha(\mathcal{B}_1)$. Par suite :

$$\mathcal{A}_1 = (\mathcal{B}'_1, F, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <)$$

et \mathcal{A}_1 est le pseudoproduit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})\mathcal{B}_1$ dans $(\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <), <)$. De même si $\mathcal{B}'_2 < \mathcal{B}'$, on a $\mathcal{B}'_2(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_2.F, \mathcal{B}_2)$, ce qui prouve que $(\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <), <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}^s$ -structurée assez régulière.

THÉORÈME 3. — La relation d'équivalence ρ^s (Théorème 1) induit sur $\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)$ la relation d'équivalence σ définie par :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$$

si, et seulement si,

$$\alpha(F_1) = \alpha(F_2), \quad \beta(F_1) = \beta(F_2)$$

et

$$(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <).$$

$\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)$ admet une catégorie quotient strict par σ et la classe quotient $\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)/\sigma$ s'identifie à la sous-classe de $\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)$ formée des fusées strictes $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ telles que les relations :

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <), \\ \alpha(F_1) = \alpha(F), \quad \beta(F_1) = \beta(F) \quad \text{et} \quad F \subset F_1 \end{aligned}$$

entraînent $F = F_1$.

Démonstration. — D'après la démonstration du théorème 1, si $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$ sont équivalentes modulo ρ^s , on a $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)$. Inversement supposons

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}) \text{ modulo } \sigma.$$

Soit $f_i \in F_i$, où $i = 1, 2$. Comme $\alpha(f_i) \in \alpha(F_j)$, où $j = 1, 2$ et $j \neq i$, il existe $f_j \in F_j$ tel que $\alpha(f_i) = \alpha(f_j)$; comme

$$(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B})$$

est une fusée stricte, il existe $h \in F_1 \cup F_2$ et $g' \in \mathcal{B}'_1$ tels que $g'.h \in F_1 \cup F_2$, $h < f_j$, $\alpha(h) = \alpha(f_i)$ et $g'.h < f_i$. La fusée $(\mathcal{B}', F_j, \mathcal{B})$ étant régulière, on a :

$$g'.h = g'.(\alpha(g')f_j)\alpha(h) \in \mathcal{B}' \cdot F_j = F_j.$$

De même on construit $f'_j \in F_j$ tel que $\beta(f'_j) = \beta(f_i)$ et $f'_j < f_i$. Donc $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$ modulo ρ^s .

— Comme ρ^s est compatible sur $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$, la relation d'équivalence σ est compatible sur $\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)$ et il existe une catégorie quotient strict. Soit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)$ et $\sigma(F)$ la classe réunion des F_i tels que

$$(\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \text{ modulo } \sigma.$$

On a $(\mathcal{B}', \sigma(F), \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)$ et l'application $\tilde{\sigma}$:

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \text{ modulo } \sigma \rightarrow (\mathcal{B}', \sigma(F), \mathcal{B})$$

est une bijection de $\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)/\sigma$ sur une sous-classe de $\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)$.

— Si $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \tilde{\sigma}(\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)/\sigma)$ et si on a $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)$,

$$\alpha(F_1) = \alpha(F), \quad \beta(F_1) = \beta(F) \quad \text{et} \quad F \subset F_1,$$

alors $F_1 \cup F = F_1$ et on a $(\mathcal{B}', F_1 \cup F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)$, de sorte que, d'après ce qui précède, on trouve

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}),$$

d'où

$$\sigma(F_1) = \sigma(F) = F = F_1.$$

Inversement soit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)$; supposons que les relations :

$$\alpha(F) = \alpha(F_1), \quad \beta(F) = \beta(F_1) \quad \text{et} \quad F \subset F_1$$

entraînent $F = F_1$. On a :

$$F \subset \sigma(F), \quad \alpha(F) = \alpha(\sigma(F)) \quad \text{et} \quad \beta(F) = \beta(\sigma(F)),$$

par suite $F = \sigma(F)$ et $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \tilde{\sigma}(\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)/\sigma)$, ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE. — $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ admet une catégorie quotient strict par la relation d'équivalence σ' induite par σ et qui est aussi définie par :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$$

si, et seulement si,

$$(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <).$$

La classe $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)/\sigma'$ est isomorphe à la classe $\Sigma(\mathcal{C}, <)$ des fusées strictes $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ telles que les relations $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ et $F \subset F_1$ entraînent $F = F_1$.

En effet, si $(\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$, où $i = 1, 2$, et si de plus $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$, on a $\alpha(F_i) = \mathcal{B}_0 = \alpha(F_1 \cup F_2)$ et $\beta(F_i) = \mathcal{B}'_0$; par suite le corollaire résulte du théorème 3.

Nous désignerons par $\overline{\Phi}(\mathcal{C}, <)^{\perp}$ la catégorie quotient strict de $\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)$ ayant pour support la classe $\tilde{\sigma}(\overline{\mathcal{F}^r}(\mathcal{C}, <)/\sigma)$ et par $\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}$ la catégorie quotient strict de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ ayant pour support la classe $\tilde{\sigma}(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)/\sigma')$; nous munirons $\Sigma(\mathcal{C}, <)$ de la relation d'ordre induite par $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$.

DÉFINITION 3. — Un élément de $\Sigma(\mathcal{C}, <)$ sera appelé fusée maximale stricte de $(\mathcal{C}, <)$.

THÉORÈME 4. — $(\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}, <)$ est une catégorie quasi-inductive régulière qui est une catégorie quotient $\bar{\Omega}^s$ -structurée de $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$.

Démonstration. — $(\Sigma(\mathcal{C}, <), <)$ est une classe ordonnée quotient de la classe ordonnée $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$ et on a

$$\bar{\sigma}(\mathcal{B}_1) < \bar{\sigma}(\mathcal{B})$$

si, et seulement si, $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$, où \mathcal{B}_1 et \mathcal{B} sont des fusées neutres strictes et $\bar{\sigma}(\mathcal{B}) = (\mathcal{B}, \sigma(\mathcal{B}), \mathcal{B})$.

— Supposons $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Sigma(\mathcal{C}, <)$, $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$. Soit :

$$F_1 = \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1 = \alpha(\mathcal{B}'_1) . F . \alpha(\mathcal{B}_1).$$

Supposons que, pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$ (resp. tout $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$), il existe $f_1 \in F_1$ tel que $\alpha(f_1) = e$ (resp. $\beta(f_1) = e'$). Montrons qu'alors on a : $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \Sigma(\mathcal{C}, <)$. En effet, on a

$$\alpha(F_1) = \alpha(\mathcal{B}_1) \quad \text{et} \quad \beta(F_1) = \beta(\mathcal{B}'_1).$$

Comme F_1 est une sous-classe saturée par induction de F , on a aussi $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$. Soit

$$(\mathcal{B}'_1, K, \mathcal{B}_1) \sim (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \text{ modulo } \sigma'.$$

Une démonstration analogue à celle du théorème 5-1 prouve que $\mathcal{B}' . K . \mathcal{B} = (\mathcal{B}'K)\mathcal{B}$. Nous allons montrer que $(\mathcal{B}', H, \mathcal{B})$, où $H = \mathcal{B}' . K . \mathcal{B} \cup F$, appartient à $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$. On a :

$$\mathcal{B}_0 = \alpha(F) \subset \alpha(H) \subset \mathcal{B}_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'_0 = \beta(F) \subset \beta(H) \subset \mathcal{B}'_0;$$

par conséquent :

$$\alpha(H) = \alpha(F) = \mathcal{B}_0 \quad \text{et} \quad \beta(H) = \mathcal{B}'_0.$$

Soient $f \in F$, $k' = g' . k . g$, $k \in K$, $g \in \mathcal{B}$, $g' \in \mathcal{B}'$ et $\alpha(g) = \alpha(f)$. Il existe $f_1 \in F_1$ tel que $\alpha(f_1) = \alpha(k)$ et $f_1 < k$, d'où

$$(g'f_1) . g \in (\mathcal{B}'F_1) . \mathcal{B} \subset F.$$

Comme $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ est une fusée stricte, il existe $f' \in F$ et $\gamma' \in \mathcal{B}'_{\gamma}$ tels que $f' < f$, $\alpha(f') = \alpha(f)$ et $\gamma' . f' < (g'f_1) . g < k'$. Soit de plus $\bar{k}' = \bar{g}' . \bar{k} . \bar{g} \in \mathcal{B}' . K . \mathcal{B}$, où $\bar{k} \in K$ et $\alpha(g) = \alpha(\bar{g})$; on construit d'une manière analogue $(\bar{g}'\bar{f}_1) . \bar{g} \in F$ tel que

$(\bar{g}'\bar{f}'_1).\bar{g} < \bar{k}'$ et, d'après ce qui précède, il existe $\bar{f}' \in F$ et $\bar{\gamma}' \in \mathcal{B}'_1$ tels que :

$$\bar{f}' < \bar{g}'\bar{f}'_1\bar{g} < \bar{k}', \quad \alpha(\bar{f}') = \alpha(g) \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}'.\bar{f}' < \gamma'.f' < k'.$$

Par conséquent $(\mathcal{B}', H, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'(\mathcal{C}, <)$ et $H = F$, en vertu du corollaire du théorème 3. On en déduit $K \subset F$ et $F_1 \subset \sigma(F_1) \subset F$. Par ailleurs, on a : $\sigma(F_1) \subset \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1 = F_1$, c'est-à-dire $F_1 = \sigma(F_1)$ et $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \Sigma(\mathcal{C}, <)$.

— Supposons $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$. Comme on a :

$$F_1 \subset \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1, \quad \alpha(F_1) = \alpha(\mathcal{B}_1) \quad \text{et} \quad \beta(F_1) = \beta(\mathcal{B}'_1),$$

le résultat précédent entraîne $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Sigma(\mathcal{C}, <)$ et, en vertu du corollaire du théorème 3, $F_1 = \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1$. De plus F_1 est saturé par induction dans F . En particulier, si $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'$, on en déduit $F_1 = F$. Une démonstration analogue à celle du théorème 5-1 montre que $(\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}, <)$ est une catégorie quasi-inductive assez régulière, le pseudoproduit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})\mathcal{B}_1$, où $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$, étant égal à

$$(\mathcal{B}'_1, F.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1),$$

en désignant par \mathcal{B}'_1 la sous-catégorie pleine de \mathcal{B}' ayant $\beta(F.\mathcal{B}_1)$ pour classe de ses unités.

— Enfin, supposons

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Sigma(\mathcal{C}, <), \quad (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \Sigma(\mathcal{C}, <)$$

et

$$(\mathcal{B}'_1, K, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}'', \sigma(F'.F), \mathcal{B}) \quad \text{dans} \quad (\Sigma(\mathcal{C}, <), <).$$

Soit E' la sous-classe de \mathcal{B}' formée des $e' \in \mathcal{B}'_0$ tels qu'il existe $f \in F$ et $f' \in F'$ vérifiant les conditions :

$$\alpha(f') = \beta(f) = e', \quad \alpha(f) \in \alpha(K) \quad \text{et} \quad \beta(f') \in \beta(K).$$

Cette sous-classe est saturée par induction dans \mathcal{B}'_0 , puisque K est saturé par induction dans $\sigma(F'.F)$. Soit \mathcal{B}'_1 la sous-catégorie pleine de \mathcal{B}' ayant E' pour classe de ses unités. On a $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$. Soit $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$; il existe $k \in K$ tel que $\alpha(k) = e$. Comme

$$K \subset \sigma(F'.F),$$

il existe $f'.f \in F'.F$ tel que $f'.f < k$ et $\alpha(f) = e$. Par suite on

obtient :

$$\mathcal{A} = (\mathcal{B}'_1, E'.F.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{dans} \quad (\Sigma(\mathcal{C}', <), <),$$

et

$$\mathcal{A}' = (\mathcal{B}''_1, \mathcal{B}''_1.F.E', \mathcal{B}'_1) < (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \quad \text{dans} \quad (\Sigma(\mathcal{C}', <), <).$$

Comme $(\Sigma(\mathcal{C}', <)^{\perp}, <)$ est une catégorie ordonnée, il en résulte :

$$(\mathcal{B}''_1, K, \mathcal{B}_1) = \mathcal{A}' \perp \mathcal{A}.$$

Ainsi $(\Sigma(\mathcal{C}', <)^{\perp}, <)$ est une catégorie quasi-inductive régulière.

— Une démonstration analogue à la fin de la démonstration du théorème 5-1 prouve que $(\Sigma(\mathcal{C}', <)^{\perp}, <)$ est une catégorie quotient $\tilde{\Omega}^s$ -structurée de $(\mathcal{F}''(\mathcal{C}', <), <)$.

DÉFINITION 4. — *On dira que $(\mathcal{C}', <)$ vérifie la condition (C^s) si, pour tout $f \in \mathcal{C}$, le triplet $(\beta(f)^>, f^>, \alpha(f)^>)$ est une fusée stricte de $(\mathcal{C}', <)$.*

PROPOSITION 2. — *Si $(\mathcal{C}', <)$ est un groupoïde ordonné régulier, $(\mathcal{C}', <)$ vérifie la condition (C^s) .*

En effet, soit $f \in \mathcal{C}$; si $f_1 < f$, $f_2 < f$ et $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$, on a $f_1^{-1}.f_2 < \alpha(f)$ et $f^>$ est un atlas de $(\mathcal{C}', <)$, donc définit une fusée stricte, puisque $(\mathcal{C}', <)$ est régulier.

PROPOSITION 3. — *Si $(\mathcal{C}', <)$ est une catégorie sous-pré-inductive régulière, $(\mathcal{C}', <)$ vérifie la condition (C^s) .*

En effet, soient $f \in \mathcal{C}$, $f_1 < f$, $f_2 < f$ et $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$. Il existe $f_1 \cap f_2$ et on a $\alpha(f_1 \cap f_2) = \alpha(f_1) \cap \alpha(f_2)$; donc

$$(\beta(f)^>, f^>, \alpha(f)^>)$$

est une fusée stricte de $(\mathcal{C}', <)$.

THÉORÈME 5. — *Supposons que $(\mathcal{C}', <)$ vérifie la condition (C^s) ; alors $(\Sigma(\mathcal{C}', <)^{\perp}, <)$ admet pour sous-catégorie régulière une catégorie $c(\mathcal{C})^{\perp}$ quotient strict de \mathcal{C}' . La classe $\Sigma'(\mathcal{C}', <)$ des fusées maximales strictes $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ telles que \mathcal{B} , \mathcal{B}' et F soient des sous-classes saturées par induction de \mathcal{C} est une sous-catégorie pleine saturée par induction de $(\Sigma(\mathcal{C}', <)^{\perp}, <)$.*

Démonstration. — L'application :

$$f \rightarrow (\beta(f)^>, f^>, \alpha(f)^>), \quad \text{où } f \in \mathcal{C},$$

identifie \mathcal{C} à une sous-catégorie de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$. Comme la relation d'équivalence σ' n'identifie pas deux unités distinctes, l'application c :

$$f \rightarrow (\beta(f)^>, \sigma(f^>), \alpha(f)^>)$$

définit une sous-catégorie $c(\mathcal{C})^\perp$ de $\Sigma(\mathcal{C}, <)^\perp$ comme catégorie quotient strict de \mathcal{C} .

— Soient $f \in \mathcal{C}$, $f_1 \in \mathcal{C}$ et $f_1 < f$. Les relations :

$$h < \alpha(f), \quad \alpha(h) < \alpha(f_1) \quad \text{et} \quad \beta(h) < \alpha(f_1)$$

entraînent $h = \beta(h)h\alpha(h) < \alpha(f_1)$, donc $\alpha(f_1)^>$ est une sous-catégorie pleine saturée par induction de $\alpha(f)^>$; de même $\beta(f_1)^>$ est une sous-catégorie pleine saturée par induction de $\beta(f)^>$. Par suite $c(f_1) < c(f)$ dans $(\Sigma(\mathcal{C}, <), <)$. Soit $e \in \mathcal{C}_0$ tel que $e < \alpha(f)$; on a :

$$fe \in f^>e^>, \quad \text{d'où } c(fe) = c(f)c(e).$$

— Montrons que si $f_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2$, on a $c(f_1) = c(f_2)$ si, et seulement si, $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$, $\beta(f_1) = \beta(f_2)$ et si, pour tout $f'_i < f_i$, il existe h et h' tels que : $h < f_i$, $h < f_j$, $h' < f_i$, $h' < f_j$, $\alpha(h) = \alpha(f'_i)$ et $\beta(h') = \beta(f'_i)$, où $j = 1, 2$ et $j \neq i$. En effet, ces conditions sont vérifiées, si $c(f_1) = c(f_2)$. Inversement, supposons-les remplies; soit $f'_i < f_i$. Il existe $f''_j < f_j$ tel que $\alpha(f''_j) = \alpha(f'_i)$ et $f''_j < f_i$; comme $f_i^>$ est une fusée stricte, il existe $h < f_i$ et $\gamma \in \beta(f_i)^>$ tels que :

$$h < f'_i, \quad \alpha(h) = \alpha(f'_i) \quad \text{et} \quad \gamma \cdot h < f''_j,$$

d'où $h < \gamma^{-1}f''_j < f_j$. On construit de même $h' < f_j$ tel que $h' < f'_i < f_i$ et $\beta(h') = \beta(f'_i)$. Ainsi $c(f_1) = c(f_2)$. De plus soit $k < f'_i$ un majorant de h et de h' ; on a :

$$\alpha(f'_i) = \alpha(h) < \alpha(k) \quad \text{et} \quad \beta(f'_i) = \beta(h') < \beta(k),$$

d'où $\alpha(f'_i) = \alpha(k)$, $\beta(f'_i) = \beta(k)$ et, puisque $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie ordonnée, $f'_i = k$. Ceci démontre que f'_i est le f_i -agré-gat de h et de h' . En particulier, il existe $f < f_1$ et $f' < f_1$ tels que $f_2 = f \bigcup_{f_2} f'$; dans ce cas, on a aussi $f_1 = f \bigcup_{f_1} f'$.

— Soit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Sigma(\mathcal{C}', <)$; supposons \mathcal{B} et \mathcal{B}' saturés par induction dans $(\mathcal{C}, <)$. Soit $f \in F$ et $f' < f$ dans $(\mathcal{C}, <)$. On a $\beta(f') \in \mathcal{B}'$, $\alpha(f') \in \mathcal{B}$ et $f' = \beta(f')(f\alpha(f')) \in \mathcal{B}'(F\mathcal{B}) \subset F$, donc F est une sous-classe saturée par induction de $(\mathcal{C}, <)$. On en déduit que $\Sigma'(\mathcal{C}', <)$ est la sous-catégorie pleine de $\Sigma(\mathcal{C}', <)^{\perp}$ ayant pour unités les fusées $(\mathcal{B}, \sigma(\mathcal{B}), \mathcal{B})$ telles que \mathcal{B} soit une sous-catégorie de \mathcal{C}' , saturée par induction dans $(\mathcal{C}, <)$.

— Soit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Sigma'(\mathcal{C}', <)$; si $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ dans $(\Sigma(\mathcal{C}', <), <)$, \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}'_1 sont des sous-classes saturées par induction de \mathcal{B} et \mathcal{B}' respectivement et on a $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \Sigma'(\mathcal{C}', <)$, donc $\Sigma'(\mathcal{C}', <)$ est une sous-classe saturée par induction de $(\Sigma(\mathcal{C}', <), <)$. Enfin $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ est un sous-agrégat de la classe des $c(f)$, où $f \in F$, si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont majorés dans \mathcal{C}_0 .

Remarque. — c ne définit pas un foncteur quasi-inductif de $(\mathcal{C}', <)$ vers $(\Sigma(\mathcal{C}', <)^{\perp}, <)$, car, si $A \subset \mathcal{C}$, on a seulement $c\left(\bigcup^f A\right) > \bigcup^{\alpha(f)} c(A)$.

Application aux catégories préinductives et aux groupoïdes ordonnés :

A) Soit $(\mathcal{C}', <)$ une catégorie préinductive régulière telle que $(\mathcal{C}'_{\gamma}, <)$ soit un groupoïde ordonné semi-régulier. Si F est une sous-classe de \mathcal{C} , soit $F^<$ la classe de ses majorants. Soit $\bar{\mathcal{C}}$ la classe des sous-classes F de \mathcal{C} qui sont majorées et saturées par induction dans $(\mathcal{C}, <)$ et qui contiennent tout élément $f' \in \beta(F) \cdot \mathcal{C} \cdot \alpha(F)$ tel que $f' < F^>$.

THÉORÈME 6. — $c(\mathcal{C})^{\perp}$ (th. 5) est équivalente à \mathcal{C}' et la sous-classe $\bar{\mathcal{C}}'$ de $\Sigma'(\mathcal{C}', <)$ formée des fusées majorées par un élément de $c(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie saturée par induction de $(\Sigma(\mathcal{C}', <)^{\perp}, <)$. L'application $\pi: (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \rightarrow F$ définit une équivalence de $\bar{\mathcal{C}}'^{\perp}$ sur une catégorie $\bar{\mathcal{C}}^{\perp}$ et $(\bar{\mathcal{C}}^{\perp}, \subset)$ est une catégorie inductive.

Démonstration. — Soient $f \in \mathcal{C}$, $f' \in \mathcal{C}$ et $c(f) = c(f')$. D'après la démonstration du théorème 5, il existe $f_1 < f$ et $f_2 < f'$ tels que :

$$f = f_1 \bigcup^f f_2 \quad \text{et} \quad f' = f_1 \bigcup^{f'} f_2.$$

Soit $\bar{f} = f \cap f'$; on a $f_1 < \bar{f}$ et $f_2 < \bar{f}$, d'où $f = f_1 \bigcup^{\bar{f}} f_2 = f'$.
Par suite c est une bijection de \mathcal{C} sur $c(\mathcal{C})$.

— Supposons $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) < c(f)$ et $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') < c(f')$ dans $(\Sigma(\mathcal{C}', <), <)$. Soit $e = \beta(f) \cap \alpha(f')$; on a :

$$(\mathcal{B}'', \sigma(F'.F), \mathcal{B}) < c(f'e) \perp c(ef),$$

de sorte que $\bar{\mathcal{C}'}$ est une sous-catégorie de $\Sigma(\mathcal{C}', <)^{\perp}$. Comme $\bar{\mathcal{C}'}$ est une sous-classe saturée par induction de $(\Sigma(\mathcal{C}', <), <)$, le couple $(\bar{\mathcal{C}}^{\perp}, <)$ est une catégorie quasi-inductive.

— Soit F une sous-classe de \mathcal{C} majorée par $f \in \mathcal{C}$ et saturée par induction dans $(\mathcal{C}, <)$. Posons :

$$\mathcal{B}_F = \alpha(F). \alpha(f)^>. \alpha(F) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'_F = \beta(F). \beta(f)^>. \beta(F).$$

\mathcal{B}_F et \mathcal{B}'_F sont des sous-catégories de \mathcal{C}' , saturées par induction dans $(\mathcal{C}, <)$. Puisque $(\mathcal{C}', <)$ vérifie la condition (C') d'après la proposition 3, $(\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F)$ est une fusée stricte de $(\mathcal{C}', <)$.

Remarquons que, si \bar{f} est un autre majorant de F , on a :

$$\mathcal{B}_F = \alpha(F). \alpha(f \cap \bar{f})^>. \alpha(F) = \alpha(F). \alpha(\bar{f})^>. \alpha(F),$$

car $\alpha(f \cap \bar{f})^>$ est une sous-catégorie pleine de $\alpha(f)^>$ et de $\alpha(\bar{f})^>$. Soit F' la classe des $f' \in \beta(F). \mathcal{C}. \alpha(F)$ tels que $f' < F^<$; cette classe est majorée par f et saturée par induction dans $(\mathcal{C}, <)$; d'après ce qui précède, $(\mathcal{B}'_F, F', \mathcal{B}_F)$ est aussi une fusée stricte de $(\mathcal{C}', <)$. Soit $f' \in F'$; il existe $f_1 \in F$ et $f_2 \in F$ tels que

$$\alpha(f_1) = \alpha(f') \quad \text{et} \quad \beta(f_2) = \beta(f');$$

en posant :

$$h_1 = f' \cap f_1 \in F \quad \text{et} \quad h_2 = f' \cap f_2 \in F,$$

on trouve :

$$\begin{aligned} h_1 < f', \quad h_2 < f', \\ \alpha(h_1) = \alpha(f' \cap f_1) = \alpha(f') \cap \alpha(f_1) = \alpha(f') \end{aligned}$$

et

$$\beta(h_2) = \beta(f').$$

Il s'ensuit :

$$(\mathcal{B}'_F, F', \mathcal{B}_F) \sim (\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F) \text{ mod } \sigma'.$$

Supposons de plus $(\mathcal{B}'_F, F'', \mathcal{B}_F) \sim (\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F) \text{ mod } \sigma'$. Soit

$f'' \in F''$. Il existe $f''_1 \in F$ et $f''_2 \in F$ tels que :

$$f''_1 < f'', \quad f''_2 < f'', \quad \alpha(f''_1) = \alpha(f''), \quad \beta(f''_2) = \beta(f'').$$

Étant donné que $(\mathcal{C}, <)$ est ordonnée, ces relations entraînent :

$$f'' = f''_1 \bigcup^{f''} f''_2, \quad \text{d'où} \quad f'' \in F'.$$

Par suite $(\mathcal{B}'_F, F', \mathcal{B}_F)$ est une fusée stricte maximale de $(\mathcal{C}, <)$.

— Si $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Sigma'(\mathcal{C}, <)$ et si $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) < c(f)$, alors \mathcal{B} est la sous-catégorie pleine de $\alpha(f)^>$ ayant $\alpha(F)$ pour classe de ses unités et la classe F est majorée par f et saturée par induction. Il en résulte :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \quad \text{et de même} \quad \mathcal{B}' = \mathcal{B}'_F,$$

de sorte que π est une bijection de $\bar{\mathcal{C}}'$ sur une classe de parties de \mathcal{C} . Soit F' la classe des $f' \in \beta(F)$. \mathcal{C} . $\alpha(F)$ tels que $f' < F^<$; nous avons vu que l'on a $(\mathcal{B}'_F, F', \mathcal{B}_F) \sim (\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F)$. Puisque $(\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F)$ est maximale, on en déduit $F = F'$, c'est-à-dire $F \in \bar{\mathcal{C}}$. Inversement, si $F \in \bar{\mathcal{C}}$, on a :

$$F = \pi(\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F).$$

Donc π est une bijection de $\bar{\mathcal{C}}'$ sur $\bar{\mathcal{C}}$.

— Soit $\bar{\mathcal{C}}^\perp$ la catégorie image de $\bar{\mathcal{C}}'^\perp$ par π , dont la loi de composition est définie par :

$$F_1 \perp F = \text{classe des } f' \in \beta(F_1) \cdot \mathcal{C} \cdot \alpha(F) \text{ tels que } f' < (F_1 \cdot F)^<, \\ \text{si, et seulement si, } \alpha(F_1) = \beta(F).$$

L'unité à droite $\alpha^\perp(F)$ de F est $\alpha(F) \cdot \alpha(f)^> \cdot \alpha(F)$, son unité à gauche est $\beta^\perp(F) = \beta(F) \cdot \beta(f)^> \cdot \beta(F)$, où f est un majorant quelconque de F . Soient $F_1 \in \bar{\mathcal{C}}$ et $F \in \bar{\mathcal{C}}$. Si $\pi^{-1}(F_1) < \pi^{-1}(F)$, on a $F_1 \subset F$; si $F_1 \subset F$, la catégorie \mathcal{B}_{F_1} (resp. \mathcal{B}'_{F_1}) est une sous-catégorie pleine saturée par induction de \mathcal{B}_F (resp. \mathcal{B}'_F), de sorte que $\pi^{-1}(F_1) < \pi^{-1}(F)$. Par suite π est un isomorphisme de $(\bar{\mathcal{C}}', <)$ sur $(\bar{\mathcal{C}}, \subset)$. En utilisant le fait que $(\bar{\mathcal{C}}'^\perp, <)$ est une catégorie quasi-inductive, on voit que $(\bar{\mathcal{C}}^\perp, \subset)$ est une catégorie quasi-inductive régulière. Pour montrer que $(\bar{\mathcal{C}}^\perp, \subset)$ est inductive, il suffit de prouver qu'elle est préinductive.

— Soient $F_1 \in \bar{\mathcal{C}}$ et $F_2 \in \bar{\mathcal{C}}$; désignons par K la classe intersection de F_1 et F_2 . Soit $k \in \beta(K) \cdot \mathcal{C} \cdot \alpha(K)$ tel que $k < K^<$. Pour tout majorant f_i de F_i , où $i = 1, 2$, on a $k < f_i$, d'où $k \in F_i$. Donc $k \in K$, $K \in \bar{\mathcal{C}}$ et K est l'intersection de F_1 et F_2 dans $(\bar{\mathcal{C}}, <)$. Si de plus F_1 et F_2 sont majorés par un élément de $\bar{\mathcal{C}}$, il existe aussi $f \in \mathcal{C}$ tel que $F_1 < f$ et $F_2 < f$. Soit $e \in \alpha(F_1)$, $e \in \alpha(F_2)$; il existe $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$ tels que $e = \alpha(f_1) = \alpha(f_2)$; puisque $f_1 < f$ et $f_2 < f$, on a :

$$\alpha(f_1 \cap f_2) = \alpha(f_1) \cap \alpha(f_2) = e,$$

ce qui entraîne $e \in \alpha(K)$. Ceci montre que l'on a :

$$\alpha^\perp(F_1 \cap F_2) = \alpha^\perp(F_1) \cap \alpha^\perp(F_2).$$

De même $\beta^\perp(F_1 \cap F_2) = \beta^\perp(F_1) \cap \beta^\perp(F_2)$. Ainsi $(\bar{\mathcal{C}}^\perp, <)$ est une catégorie inductive régulière.

COROLLAIRE. — Si $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie inductive, elle est isomorphe à $(\bar{\mathcal{C}}_1^\perp, <)$, où $\bar{\mathcal{C}}_1$ est la sous-catégorie pleine de $\bar{\mathcal{C}}$ ayant pour unités les classes $B \in \bar{\mathcal{C}}$ telles que $\cup(B \cap \mathcal{C}_0) \in B$.

En effet, on a $\pi\mathcal{C}(\mathcal{C}) \subset \bar{\mathcal{C}}_1$. Soit $F \in \bar{\mathcal{C}}_1$; comme F est majorée dans $(\mathcal{C}, <)$, elle admet un agrégat f et on a $\alpha(f) = \cup \alpha(F)$; la relation $\alpha(F) = \alpha^\perp(F) \cap \mathcal{C}_0$ entraîne $\alpha(f) \in \alpha(F)$; de même $\beta(f) \in \beta(F)$. Donc

$$f \in \beta(F) \cdot \mathcal{C} \cdot \alpha(F) \quad \text{et} \quad f < F^<.$$

Il en résulte $f \in F$, d'après la démonstration du théorème 6, d'où $F = f^>$.

B) Soit $(\mathcal{C}, <)$ un groupoïde ordonné régulier. Soit $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <)$ la classe des atlas réguliers de \mathcal{C} , qui définit (théorème 3-2 [1]) un sous-groupoïde saturé par induction de $(\mathcal{A}(\mathcal{C}), <)$.

THÉORÈME 7. — L'application: $F \rightarrow (b(F), F, a(F))$ est un isomorphisme de $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$ sur le groupoïde quasi-inductif régulier $(\Sigma(\mathcal{C}, <)^\perp, <)$; par suite $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$ est un groupoïde quasi-inductif régulier; \mathcal{C} s'identifie à un sous-groupoïde régulier de $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$.

Démonstration. — On a évidemment $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <) \subset \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$. Supposons que l'on ait $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ et montrons que

dans ce cas $F \in \mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <)$. En effet, supposons $f \in F$ et $f_1 \in F$. Si $f_1 < f$ et $\alpha(f) = \alpha(f_1)$, on a $f \cdot f_1^{-1} < \beta(f)$, $\alpha(f \cdot f_1^{-1}) = \beta(f_1)$ et $\beta(f \cdot f_1^{-1}) = \beta(f)$, d'où :

$$f \cdot f_1^{-1} = \beta(f)\beta(f_1) \in \mathcal{B}',$$

car \mathcal{B}' est une sous-catégorie régulière du groupoïde ordonné $(\mathcal{C}, <)$. De même on trouve $f_1 \cdot f^{-1} \in \mathcal{B}'$, et par suite $f \cdot f_1^{-1} \in \mathcal{B}'_{\gamma}$. Supposons de plus $f' \in F$ et $\alpha(f) = \alpha(f')$. Il existe $f_1 \in F$, $f'_1 \in F$ et $g' \in \mathcal{B}'_{\gamma}$ tels que :

$$\alpha(f_1) = \alpha(f), \quad f_1 < f, \quad f'_1 < f' \quad \text{et} \quad f'_1 = g' \cdot f_1;$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} f_1 &= \beta(f_1)f\alpha(f_1) = \beta(f_1)f, \\ g'' &= (\beta(f')\beta(f'_1)) \cdot g' \cdot (\beta(f_1)\beta(f)) \in \mathcal{B}'_{\gamma} \quad \text{et} \quad f' = g'' \cdot f, \end{aligned}$$

car :

$$\begin{aligned} g'' \cdot f &= \beta(f')\beta(f'_1)g'\beta(f_1)\beta(f)f < \beta(f')g'f_1 = \beta(f')f'_1 < f', \\ \alpha(g'' \cdot f) &= \alpha(f') \quad \text{et} \quad \beta(g'' \cdot f) = \beta(f'). \end{aligned}$$

Ceci montre que F est un atlas régulier de \mathcal{C} . En particulier, si $g \in \mathcal{B}$ il existe $g' \in \mathcal{B}'_{\gamma}$ tel que $g' \cdot \alpha(g) = g$, c'est-à-dire $g \in \mathcal{B}'_{\gamma}$ et \mathcal{B} est un sous-groupoïde de \mathcal{C} . Il en résulte $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ et, en vertu du théorème 1-1 [1], $\mathcal{B} = a(F)$ et $\mathcal{B}' = b(F)$. L'application $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \rightarrow F$ est donc une équivalence de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ sur $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <)$.

— $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$ étant une catégorie ordonnée, puisque $(\mathcal{A}(\mathcal{C}), <)$ est une catégorie ordonnée (corollaire 2 théorème 2-2 [1]), les conditions :

$$F \subset F_1, \quad a(F_1) = a(F) \quad \text{et} \quad b(F_1) = b(F)$$

entraînent $F = F_1$; en tenant compte du corollaire du théorème 3, on en déduit que $(b(F), F, a(F))$ est une fusée stricte maximale. Ceci montre qu'il existe une bijection de $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <)$ sur $\Sigma(\mathcal{C}, <)$ (et aussi sur $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$). Il en résulte que les catégories

$$\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), \quad \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad \Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}$$

sont équivalentes et que la catégorie quasi-inductive

$$(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$$

est isomorphe à la catégorie quasi-inductive $(\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}, <)$. Enfin l'application : $f \rightarrow f^>$ est une équivalence de \mathcal{C} sur un sous-groupeïde de $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <)$.

COROLLAIRE. — Si $(\mathcal{C}, <)$ est un groupeïde préinductif, $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$ admet $(\bar{\mathcal{C}}, <)$ pour sous-groupeïde inductif.

En effet, $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie préinductive; d'après le théorème 6, $(\bar{\mathcal{C}}, <)$ est inductif et forme un sous-groupeïde de $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$.

3. Superfusées.

Soit $(\mathcal{C}, <)$ une catégorie ordonnée régulière telle que $(\mathcal{C}, <)$ soit un groupeïde ordonné semi-régulier. Nous désignerons par π l'application qui associe à une fusée $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ de $(\mathcal{C}, <)$ la classe F .

DÉFINITION 1. — On appelle superfusée de $(\mathcal{C}, <)$ un triplet $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$ vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$; \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}'_1 sont des fusées neutres de \mathcal{C} ; on a $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$ dans $(\mathcal{F}(\mathcal{C}, <), <)$.
- 2) Pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$ (resp. tout $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$), il existe

$$f \in \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1$$

tel que $\alpha(f) < e$ (resp. que $\beta(f) < e'$).

Soit $\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)$ la classe des superfusées de $(\mathcal{C}, <)$.

PROPOSITION 1. — L'application φ :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \rightarrow ((\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1.F.\mathcal{B}_1), \mathcal{F})$$

est une bijection de $\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)$ sur la sous-classe de

$$\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <) \times \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$$

formée des couples $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F})$ tels que $\mathcal{F}_1 < \mathcal{F}$ et $F_1 = \mathcal{B}'_1.\pi(\mathcal{F}).\mathcal{B}_1$, où $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$.

Démonstration. — Soit $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}(\mathcal{C}, <)$; posons :

$$\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad F_1 = \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1.$$

Puisque \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}'_1 sont saturées par induction dans $(\mathcal{B}, <)$ et $(\mathcal{B}', <)$ respectivement, F_1 est une sous-classe saturée par induction dans $(F, <)$ et on a $F_1 = \mathcal{B}'_1(F\mathcal{B}_1)$. Il en résulte, en posant $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$:

$$\mathcal{F}_1 \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1 < \mathcal{F} \quad \text{dans} \quad (\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <).$$

— Inversement, si $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F})$ est un couple vérifiant les conditions de la proposition, alors $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$ est évidemment une super-fusée de $(\mathcal{C}', <)$. La proposition 1 s'en déduit.

Soit I une classe d'indices contenant en particulier 1 et 2; soit $i \in I, j \in I$. Nous désignerons par (\mathcal{F}, j, i) la sous-catégorie régulière de la catégorie ordonnée régulière $((\mathcal{C}', I), <)$ réunion de $(\alpha(\mathcal{F}), i, i)$, $(\beta(\mathcal{F}), j, j)$ et $(\pi(\mathcal{F}), j, i)$, par \mathcal{F}^{ji} la fusée régulière

$$((\beta(\mathcal{F}), j, j), (\pi(\mathcal{F}), j, i), (\alpha(\mathcal{F}), i, i)).$$

de $((\mathcal{F}, j, i), <)$.

PROPOSITION 2. — Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <)$ et $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <)$. Pour que l'on ait

$$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) \in \varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}', <)),$$

il faut et il suffit que l'on ait $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}'_1 \subset \mathcal{B}'$ et que \mathcal{F}_1^{21} soit une fusée maximale de $((\mathcal{F}, 2, 1), <)$.

En effet, les conditions sont évidemment suffisantes. Si on a $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) \in \varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}', <))$, d'après la démonstration du théorème 5-1, \mathcal{F}_1^{21} est une fusée maximale de $((\mathcal{F}, 2, 1), <)$.

THÉORÈME 1. — $(\mathcal{J}(\mathcal{C}', <), <)$ est une catégorie quasi-inductive régulière, la loi de composition étant définie par:

$$(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}') \cdot (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) = (\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}' \cdot \mathcal{F}) \text{ si, et seulement si, } \\ \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}'_1 \text{ et } \alpha(\mathcal{F}') = \beta(\mathcal{F}),$$

et la relation d'ordre par:

$$(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}') < (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \text{ si, et seulement si, } \mathcal{F}' = \mathcal{F} \text{ et si } \\ \mathcal{B}_2 < \mathcal{B}_1 \text{ et } \mathcal{B}'_2 < \mathcal{B}'_1 \text{ dans } (\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <))_0, <).$$

Démonstration. — La loi de composition est celle induite sur $\mathcal{J}(\mathcal{C}', <)$ par la catégorie \mathcal{G} produit du groupoïde de couples $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <))_0 \times \mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <))_0^\perp$ associé à $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <))_0$ avec la catégorie

$\mathcal{F}'(\mathcal{C}, <)$. La superfusée $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$ admet $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1, \alpha(\mathcal{F}))$ et $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1, \beta(\mathcal{F}))$ pour uniques unités à droite et à gauche respectivement. Soit aussi $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1, \mathcal{F}')$ une superfusée. Posons :

$$F = \pi(\mathcal{F}), \quad F' = \pi(\mathcal{F}'), \quad F_1 = \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1$$

et

$$F'_1 = \mathcal{B}'_1 \cdot F' \cdot \mathcal{B}'_1.$$

On a : $F'_1 \cdot F_1 \subset \mathcal{B}'_1 \cdot F' \cdot F \cdot \mathcal{B}_1$. Pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$, il existe $f \in F_1$ tel que $\alpha(f) < e$; comme $\beta(f) \in \mathcal{B}'_1$, il existe $f' \in F'_1$ tel que $\alpha(f') < \beta(f)$. Puisque \mathcal{F} est une fusée et que F_1 est saturée par induction dans $(F, <)$, on a :

$$\alpha(f')f \in F_1,$$

d'où

$$f' \cdot (\alpha(f')f) \in F'_1 \cdot F_1 \subset \mathcal{B}'_1 \cdot \pi(\mathcal{F}' \cdot \mathcal{F}) \cdot \mathcal{B}_1.$$

Par suite la condition 2 de la définition 1 est vérifiée et

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1, \mathcal{F}' \cdot \mathcal{F})$$

est une superfusée. Ceci montre que $\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)$ est une sous-catégorie de \mathcal{F} .

— $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$ est évidemment une catégorie ordonnée, puisque $(\mathcal{F}'(\mathcal{C}, <), <)$ est une catégorie ordonnée, d'après le théorème 3-2. Soit I une classe d'indices et soit

$$(\mathcal{B}'_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{F}) < (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$$

pour tout $i \in I$ dans $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$. Il est évident que le triplet

$\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}'_i, \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i, \mathcal{F} \right)$ est une superfusée, qui est l'agrégat de la

classe $(\mathcal{B}'_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{F})_{i \in I}$ dans la classe ordonnée $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$. Il en résulte que $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$ est une catégorie quasi-inductive.

Soient :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 < \mathcal{B}_1;$$

désignons par \mathcal{B}'_2 la sous-catégorie pleine saturée par induction de $(\mathcal{B}'_1, <)$ ayant pour unités les $e' \in \mathcal{B}'_1$ tels qu'il existe

$$f \in \pi(\mathcal{F}) \cdot \mathcal{B}_2$$

tel que $\beta(f) < e'$. On a :

$$(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}(\mathcal{C}, <)$$

et $(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F})$ est le pseudoproduit $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2, \alpha(\mathcal{F}))$ dans $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <))', <$. De même, si $\mathcal{B}'_3 < \mathcal{B}'_1$, il existe un pseudo-produit

$$(\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_3, \beta(\mathcal{F}))(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}),$$

à savoir la superfusée $(\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}_3, \mathcal{F})$, où \mathcal{B}_3 est la sous-catégorie pleine de \mathcal{B}_1 ayant pour unités les $e \in \mathcal{B}_1$ tels qu'il existe $f \in \mathcal{B}'_3 \cdot \pi(\mathcal{F})$ avec $\alpha(f) < e$. Ainsi $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <))', <$ est une catégorie quasi-inductive assez régulière. Enfin, si on a :

$$(\mathcal{B}''_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{H}) < (\mathcal{B}''_1, \mathcal{B}'_1, \mathcal{F}') \cdot (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}),$$

on trouve :

$$(\mathcal{B}''_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{H}) = (\mathcal{B}''_2, \mathcal{B}'_2, \mathcal{F}') \cdot (\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}),$$

où \mathcal{B}'_2 est la sous-catégorie pleine de \mathcal{B}'_1 ayant pour unités les e' tels qu'il existe $f \in \pi(\mathcal{F}) \cdot \mathcal{B}_2$ et $f' \in \mathcal{B}'_2 \cdot \pi(\mathcal{F}')$ vérifiant :

$$\beta(f) < e' \quad \text{et} \quad \alpha(f') < e'.$$

Donc $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <))', <$ est régulière.

COROLLAIRE. — φ définit un isomorphisme de $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <))', <$ sur la catégorie quasi-inductive régulière $(\varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <))', <$ dont la loi de composition est définie par :

$$(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}') \cdot (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) = ((\beta(\mathcal{F}'_1), \beta(\mathcal{F}'_1) \cdot \pi(\mathcal{F}') \cdot \pi(\mathcal{F}) \cdot \alpha(\mathcal{F}_1), \alpha(\mathcal{F}_1)), \mathcal{F}' \cdot \mathcal{F})$$

si, et seulement si, $\alpha(\mathcal{F}') = \beta(\mathcal{F})$ et $\alpha(\mathcal{F}'_1) = \beta(\mathcal{F}_1)$,

et la relation d'ordre par :

$$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) < (\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}') \text{ si, et seulement si, } \mathcal{F} = \mathcal{F}' \text{ et } \mathcal{F}_1 < \mathcal{F}'_1$$

dans $(\mathcal{F}'(\mathcal{C}, <))', <$.

En effet, ce corollaire se déduit du théorème 1 et de la proposition 1.

Remarque. — On peut démontrer directement que

$$(\varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <))', <$$

est une catégorie quasi-inductive régulière en utilisant la remarque suivante : Si $(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}')$ et $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F})$ sont deux éléments composables, la sous-catégorie pleine saturée par induction engendrée par la classe $\{(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'), (\mathcal{F}_1, \mathcal{F})\}$ dans $(\varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <))', <$ est isomorphe à la catégorie quasi-inductive $(\Phi(\Gamma, <))', <$ où Γ est la sous-catégorie de (\mathcal{C}, I) engendrée par la classe

$$(\mathcal{F}, 2, 1) \cup (\mathcal{F}', 3, 2).$$

DÉFINITION 2. — On dira qu'une catégorie ordonnée assez régulière $(\mathcal{C}, <)$ vérifie la condition (P) si les axiomes suivants sont remplis :

1) Si $f \in \mathcal{C}$, $E \subset \mathcal{C}_0$ et $\alpha(f) = \bigcup^{\alpha(f)} E$, on a $f = \bigcup^f fE$.

2) Si $f \in \mathcal{C}$, $E' \subset \mathcal{C}_0$ et $\beta(f) = \bigcup^{\beta(f)} E'$, on a $f = \bigcup^f E'f$.

Exemple. — Soit $(\mathcal{C}, <)$ une catégorie ordonnée assez régulière telle que les conditions $f < g$ et $\alpha(f) = \alpha(g)$ (resp. et $\beta(f) = \beta(g)$) entraînent $f = g$; alors $(\mathcal{C}, <)$ vérifie la condi-

tion (P). En effet, si $\alpha(f) = \bigcup^{\alpha(f)} E$ et si, pour tout $e \in E$, g est un majorant de fe tel que $g < f$, on a :

$$e < \alpha(g) < \alpha(f), \quad \text{d'où} \quad \alpha(g) = \alpha(f),$$

et par suite $g = f = \bigcup^f fE$. De même la condition 2 est vérifiée dualement. En particulier cette propriété est vérifiée si $(\mathcal{C}, <)$ est un groupoïde fonctoriellement ordonné [1].

Soit $(\mathcal{C}, <)$ une catégorie sous-prélocale [1] régulière telle que $(\mathcal{C}, <)$ soit un groupoïde ordonné semi-régulier et que $(\mathcal{C}, <)$ vérifie la condition (P). Si H est une sous-classe de \mathcal{C} et K une partie de H , nous désignerons par $(\bar{K})_H$ la classe des h -agrégats des sous-classes de K , où $h \in H$. On dira que K est saturé par agrégation dans $(H, <)$ si on a :

$$(\bar{K})_H = K.$$

PROPOSITION 3. — Soit $H \subset \mathcal{C}$; si $K \subset H$ est saturé par induction dans $(H, <)$ et si H est saturé par intersection finie, alors $(\bar{K})_H$ est saturé par induction dans $(H, <)$. Si $K' \subset K \subset H$ et si K est saturé par agrégation dans $(H, <)$, on a $(\bar{K}')_K = (\bar{K}')_H$.

Démonstration. — Soit $h \in H$, $h = \bigcup^h A$, où $A \subset K$, et $h' \in H$ tel que $h' < h$. On a

$$h' = h' \cap h = h' \cap \left(\bigcup^h A \right) = \bigcup_{a \in A}^h (h' \cap a),$$

en utilisant l'axiome de distributivité [1], d'où $h' \in (\bar{K})_H$.

Si $K' \subset K \subset H$, on a $(\overline{K'})_K \subset (\overline{K'})_H$. Si de plus $(\overline{K})_H = K$ et si on a :

$$h = \bigcup^{h'} A, \quad \text{où} \quad A \subset K' \quad \text{et} \quad h' \in H,$$

on obtient $h \in (\overline{K})_H = K$ et $h = \bigcup^h A$, donc $h \in (\overline{K'})_K$ et $(\overline{K'})_K = (\overline{K'})_H$.

DÉFINITION 3. — On appelle (P)-superfusée de $(\mathcal{C}, <)$ une superfusée $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$ telle que l'on ait :

$$\alpha(\mathcal{B}_1) = \overline{(\alpha(F_1))_{\alpha(F)}} \quad \text{et} \quad \alpha(\mathcal{B}'_1) = \overline{(\beta(F_1))_{\beta(F)}},$$

où

$$F = \pi(\mathcal{F}) \quad \text{et} \quad F_1 = \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1.$$

Soit $\mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$ la classe des (P)-superfusées de $(\mathcal{C}, <)$.

PROPOSITION 4. — L'application τ :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$$

est une bijection de $\mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$ sur la classe des couples (F_1, \mathcal{F}) vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'(\mathcal{C}, <)$.
- 2) F_1 est une partie de F , saturée par induction et agrégation dans $(F, <)$.
- 3) On a : $\beta(F_1) \cdot \mathcal{B}' \cdot F_1 = F_1 = F_1 \cdot \mathcal{B} \cdot \alpha(F_1)$.

Démonstration. — Soit $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$ une (P)-superfusée, où :

$$\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad F_1 = \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1.$$

D'après la proposition 1, $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$ est une fusée majorée par \mathcal{F} , de sorte que la condition 3 est vérifiée et F_1 est saturé par induction dans $(F, <)$. Soit $f = \bigcup^f C$, où $C \subset F_1$. D'après la proposition 12-2 [1], on a :

$$\alpha(f) = \bigcup^{\alpha(f)} \alpha(C) \in \overline{(\alpha(F_1))_{\alpha(F)}} = \alpha(\mathcal{B}_1).$$

De même $\beta(f) \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$, d'où $f \in \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1 = F_1$; ainsi la condition 2 est satisfaite. — Inversement, soit (F_1, \mathcal{F}) un couple

vérifiant les conditions 1, 2 et 3; posons :

$$E = \overline{(\alpha(F_1))_{\alpha(F)}} \quad \text{et} \quad E' = \overline{(\beta(F_1))_{\beta(F)}}.$$

Si $e \in \alpha(F_1)$, $e' \in \alpha(F)$ et $e' < e$, il existe $f_1 \in F_1$ tel que $\alpha(f_1) = e$; on a

$$f_1 e' \in F\alpha(F) = F \quad \text{et} \quad \alpha(f_1 e') = e';$$

comme F_1 est saturé par induction dans $(F, <)$, il en résulte $e' \in \alpha(F_1)$. Ainsi $\alpha(F_1)$ est saturé par induction dans $(\alpha(F), <)$; par dualité, $\beta(F_1)$ est saturé par induction dans $(\beta(F), <)$. D'après la proposition 3, E et E' sont aussi saturés par induction dans $(\alpha(F), <)$ et $(\beta(F), <)$ respectivement, car \mathcal{B}_0 et \mathcal{B}'_0 sont saturés par intersection finie. Par suite, la sous-catégorie pleine \mathcal{B}_1 de \mathcal{B} ayant E pour classe de ses unités est saturée par induction dans $(\mathcal{B}, <)$; de même $\mathcal{B}'_1 = E' \cdot \mathcal{B}' \cdot E'$ est une sous-catégorie pleine saturée par induction de $(\mathcal{B}', <)$ et $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$ est une superfusée de $(\mathcal{C}, <)$. Soit

$$f \in \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1).$$

Il existe $f_1 \in F_1$ tel que $\alpha(f_1) = \alpha(f)$ et, puisque \mathcal{F} est une fusée stricte, il existe $f'_1 \in F$ et $g' \in \mathcal{B}'_1$ tels que :

$$\alpha(f'_1) = \alpha(f_1), \quad f'_1 < f_1 \quad \text{et} \quad \bar{f}_1 = g' \cdot f'_1 < f.$$

Comme $\beta(F_1)$ est saturé par induction dans $(\beta(F), <)$, on a :

$$f'_1 \in F_1, \quad \beta(g') \in \beta(F_1) \quad \text{et} \quad g' \cdot f'_1 \in \beta(F_1) \cdot \mathcal{B}' \cdot F_1 = F_1.$$

De même il existe $f_2 \in F_1$ tel que $f_2 < f$ et $\beta(f_2) = \beta(f)$. On en conclut :

$$f = \bar{f}_1 \bigcup^f f_2 \in (\bar{F}_1)_F = F_1,$$

car $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie ordonnée. Montrons que l'on a $E' \cdot F \cdot E \subset F_1$. Soit $f \in E' \cdot F \cdot E$. Il existe une sous-classe A saturée par induction dans $(\alpha(F_1), <)$ et une sous-classe A' saturée par induction dans $(\beta(F_1), <)$ telles que :

$$\alpha(f) = \bigcup^{\alpha(f)} A \quad \text{et} \quad \beta(f) = \bigcup^{\beta(f)} A'.$$

Pour tout $a \in A$, on a

$$fa \in F \quad \text{et} \quad \beta(fa) = \beta(fa) \cap \beta(f) = \bigcup_{a' \in A'}^{\beta(f)} (\beta(fa) \cap a')$$

puisque $(\mathcal{C}, <)$ est sous-prélocale. Par suite :

$$fa = \bigcup_{a' \in A'}^f (\beta(fa) \cap a')fa.$$

La relation : $(\beta(fa) \cap a')fa \in \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1) \subset F_1$ entraîne :

$$fa \in (\overline{F_1})_F = F_1,$$

d'où

$$f = \bigcup_{a \in A}^f fa \in F_1 \quad \text{et} \quad F_1 = E' \cdot F \cdot E.$$

Donc $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$ et τ est une bijection.

THÉORÈME 2. — $\mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{Y}(\mathcal{C}, <)$ et $(\mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <), <)$

est une catégorie quasi-inductive régulière.

Démonstration. — Soit $S = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$; on a évidemment :

$$\alpha(S) \in \mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad \beta(S) \in \mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <).$$

Soit $S' = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}') \in \mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$ tel que $S' \cdot S$ soit défini. Soit :

$$\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}' = (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}');$$

posons :

$$F_1 = \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1, \quad F'_1 = \mathcal{B}''_1 \cdot F' \cdot \mathcal{B}'_1$$

et

$$F'_1 \cdot F_1 = \mathcal{B}'' \cdot F' \cdot F \cdot \mathcal{B}_1.$$

On a :

$$\overline{(\alpha(F'_1 \cdot F_1))}_{\alpha(F)} \subset \overline{(\alpha(F_1))}_{\alpha(F)} = \alpha(\mathcal{B}_1).$$

Soit $e \in \alpha(F_1)$; il existe $f_1 \in F_1$ tel que $e = \alpha(f_1)$; comme

$$\beta(F_1) \subset \alpha(\mathcal{B}'_1) = \overline{(\alpha(F'_1))}_{\beta(F)},$$

il existe une sous-classe A' de F'_1 telle que $\beta(f_1) = \bigcup_{a' \in A'}^{\beta(f_1)} \alpha(A')$; on peut supposer A' saturée par induction dans $(F', <)$; si $a' \in A'$, on a :

$$\alpha(a')f_1 \in F_1 \quad \text{et} \quad a' \cdot (\alpha(a')f_1) \in F'_1 \cdot F_1.$$

D'après la condition (P), $f_1 = \bigcup^f \alpha(A')f_1$ par suite :

$$e = \bigcup_{a' \in A'}^{\alpha(f_1)} \alpha(a' . (\alpha(a')f_1)) \in \overline{(\alpha(F'_1 \cdot F_1))}_{\alpha(F)}$$

Donc $\overline{(\alpha(F'_1 \cdot F_1))}_{\alpha(F)} = \alpha(\mathcal{B}_1)$. De même

$$\overline{(\beta(F'_1 \cdot F_1))}_{\beta(F')} = \overline{(\beta(F'_1))}_{\beta(F')}$$

de sorte que l'on a $S' . S \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}, <)$. Donc $\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)$ et $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$ est une catégorie ordonnée. Si de plus on a $\xi = (\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}, <)_0$ et $\xi < \alpha(S)$, soit $\mathcal{B}'_2 = E'_2 . \mathcal{B}'_1 . E_2$, où $E'_2 = \overline{(\beta(F . \mathcal{B}_2))}_{\beta(F)}$. Alors $(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F})$, est le pseudoproduit $S\xi$ dans $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$; dualement, il existe un pseudoproduit $\xi'S$ tel que $\beta(\xi'S) = \xi'$, si $\xi' < \beta(S)$. Si $S'' < S' . S$ et $S'' = (\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_3, \mathcal{F}'') \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}, <)$, on a :

$$S'' = (\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_3, \mathcal{F}') . (\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_3, \mathcal{F})$$

où

$$\mathcal{B}'_3 = E'_3 . \mathcal{B}' . E_3, \quad E'_3 = \overline{(E_3)}_{\beta(F) >}$$

E_3 étant la classe intersection de $\beta(F . \mathcal{B}_3)$ avec $\alpha(\mathcal{B}'_3 . F')$. Donc $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$ est régulière.

— Supposons $(\mathcal{B}'_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{F}) < S$ dans $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$, pour tout $i \in I$, où I est une classe donnée. Soit E la sous-classe saturée par induction de \mathcal{B}_0 réunion des $\alpha(F_i)$, où $F_i = \mathcal{B}'_i . F . \mathcal{B}_i$, et $E_I = \overline{(E)}_{\alpha(F)}$; soit de même $E' = \cup \beta(F_i)$ et $E'_I = \overline{(E')}_{\beta(F)}$. Pour tout $i \in I$, on a : $\alpha(\mathcal{B}_i) \subset E_I$. Posons :

$$\mathcal{B}_I = E_I . \mathcal{B} . E_I \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'_I = E'_I . \mathcal{B}' . E'_I$$

Alors $(\mathcal{B}'_I, \mathcal{B}_I, \mathcal{F})$ est une (P)-superfusée, qui est un agrégat de la famille $(\mathcal{B}'_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{F})_{i \in I}$ dans $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$. Ceci prouve que $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$ est une catégorie quasi-inductive régulière.

COROLLAIRE. — La classe $\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <)$ des (P)-superfusées $(\mathcal{B}', \mathcal{B}, \mu(f))$, où $f \in \mathcal{C}$ et $\mu(f) = (\beta(f) >, f >, \alpha(f) >)$, est une sous-catégorie saturée par induction de $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$ et par suite $(\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <), <)$ est une catégorie quasi-inductive régulière.

PROPOSITION 5. — L'application τ' :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mu(f)) \rightarrow (\mathcal{B}'_1 . f > . \mathcal{B}_1, f)$$

est une bijection de $\check{y}''(\mathcal{C}, <)$ (corollaire th. 2) sur la classe $\bar{y}(\mathcal{C}, <)$ des couples (F, f) , où F est une sous-classe de \mathcal{C} majorée par f , saturée par induction et agrégation dans $(f^>, <)$.

Démonstration. — $\tau'(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mu(f))$ vérifie les conditions indiquées d'après la proposition 4. Inversement, soit (F, f) un couple vérifiant ces conditions et montrons que $(F, \mu(f))$ vérifie la condition 3 de la proposition 4, d'où résultera la proposition 5, les conditions 1 et 2 de la proposition 4 étant évidemment satisfaites. Pour cela, montrons que les relations

$$f' < f, \quad \alpha(f') \in \alpha(F) \quad \text{et} \quad \beta(f') \in \beta(F)$$

entraînent $f' \in F$. Il existe $f_1 \in F$ tel que $\alpha(f_1) = \alpha(f')$ et il existe $f_2 \in F$ tel que $\beta(f_2) = \beta(f')$. Comme $(\mathcal{C}, <)$ est sous-préinductive, il existe $f'_1 = f_1 \cap f'$ et $f'_2 = f_2 \cap f'$ et on a :

$$f'_1 \in F, \quad f'_2 \in F, \quad \alpha(f'_1) = \alpha(f_1) \cap \alpha(f') = \alpha(f')$$

et

$$\beta(f'_2) = \beta(f'),$$

d'où $f' = f'_1 \bigcup^f f'_2$, et par suite $f' \in F$, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 3. — τ' (prop. 5) définit un isomorphisme de $(\check{y}''(\mathcal{C}, <), <)$ sur la catégorie sous-inductive $(\bar{y}(\mathcal{C}, <), <)$ dont la loi de composition est définie par :

$$(F', f') \cdot (F, f) = ((\overline{F' \cdot F})_{(f' \cdot f)^>}, f' \cdot f) \text{ si, et seulement si,}$$

$$\alpha(f') = \beta(f) = e \quad \text{et} \quad (\overline{\alpha(F')})_{e>} = (\overline{\beta(F)})_{e>},$$

et la relation d'ordre par :

$$(F', f') < (F, f) \quad \text{si, et seulement si,} \quad f' = f \quad \text{et} \quad F' \subset F.$$

Démonstration. — D'après le corollaire du théorème 2, la catégorie $\bar{y}(\mathcal{C}, <)$ image de $\check{y}''(\mathcal{C}, <)$ par τ' a pour loi de composition :

$$(F', f') \cdot (F, f) = (\mathcal{B}' \cdot f'^> \cdot f^> \cdot \mathcal{B}, f' \cdot f) \text{ si, et seulement si,}$$

$$\alpha(f') = \beta(f) = e \quad \text{et} \quad (\overline{\alpha(F')})_{e>} = (\overline{\beta(F)})_{e>},$$

où \mathcal{B} (resp. où \mathcal{B}') désigne la sous-catégorie pleine de $\alpha(f)^>$

(resp. de $\beta(f')^>$) ayant $\overline{(\alpha(F))_{\alpha(f)^>}}$ (resp. $\overline{(\beta(F'))_{\beta(f')^>}}$) pour classe de ses unités. Posons $f'' = f' \cdot f$. Puisque $(\mathcal{B}', \mathcal{B}, \mu(f''))$ est une (P)-superfusée en vertu du théorème 2, $F'' = \mathcal{B}' \cdot f'^> \cdot f^> \cdot \mathcal{B}$ est une sous-classe saturée par induction dans $(\mathcal{C}, <)$ et on a $\overline{(F' \cdot F)_{f''^>}} \subset F''$. Inversement, soit $h \in F''$; il existe une sous-classe E de $\alpha(F)$ telle que $\alpha(h) = \bigcup^{\alpha(f)} E$ et, d'après la démonstration du théorème 2, pour tout $e \in E$ il existe une sous-classe K_e de $F' \cdot F$ telle que $e = \bigcup^e \alpha(K_e)$. De même il existe une sous-classe E' de $\beta(F')$ telle que $\beta(h) = \bigcup^{\beta(f')} E'$ et, pour tout $e' \in E'$, il existe une sous-classe ${}_e K$ de $F' \cdot F$ telle que $e' = \bigcup^{e'} \beta({}_e K)$. Si k est un élément de K_e (resp. de ${}_e K$), on a :

$$\alpha(k) = \alpha(h \cap k) \quad (\text{resp. } \beta(k) = \beta(h \cap k)),$$

$k \cap h \in F' \cdot F$. Par suite on peut supposer $K_e < h$ et ${}_e K < h$. Il en résulte que h est le $(f' \cdot f)$ -agrégat de la classe réunion des classes K_e et ${}_e K$, où $e \in E$ et $e' \in E'$. Donc $h \in \overline{(F' \cdot F)_{f''^>}}$ et $F'' = \overline{(F' \cdot F)_{f''^>}}$. Ceci prouve que l'on a :

$$(F', f') \cdot (F, f) = \overline{((F' \cdot F)_{f''^>}, f'')}.$$

Nous désignerons par α et β les applications source et but dans $\overline{\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)}$; on a : $\alpha(F, f) = (\mathcal{B}, \alpha(f))$, où \mathcal{B} est la sous-catégorie pleine de $\alpha(f)^>$ ayant $\overline{(\alpha(F))_{\alpha(f)^>}}$ pour classe de ses unités.

— Soient $(F, f) \in \overline{\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)}$ et $(F', f') \in \overline{\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)}$. Si

$$\tau'^{-1}(F', f') < \tau'^{-1}(F, f).$$

on a $F' \subset F$ et $f' = f$. Inversement, supposons $F' \subset F$ et $f' = f$. Comme F et F' sont saturées par induction dans $(f^>, <)$ et que $(\mathcal{C}, <)$ est régulière, $\alpha(F')$, et par suite $\overline{(\alpha(F'))_{\alpha(f)^>}}$, est saturé par induction dans $(\alpha(f)^>, <)$; de même $\overline{(\beta(F'))_{\beta(f')^>}}$ est saturé par induction dans $(\beta(f')^>, <)$. Par conséquent $\tau'^{-1}(F', f') < \tau'^{-1}(F, f)$ dans $(\overline{\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <)}, <)$. Ceci montre que la relation d'ordre indiquée est l'image de la relation d'ordre de $(\overline{\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <)}, <)$. Comme $(\overline{\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <)}, <)$ est une catégorie quasi-inductive régulière (corollaire th. 2), il en résulte que

$(\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)$, $<$) est une catégorie quasi-inductive régulière isomorphe. Pour montrer qu'elle est sous-inductive, il suffit de prouver qu'elle est aussi sous-préinductive.

— Soient $(F_1, f) \in \bar{J}(\mathcal{C}, <)$ et $(F_2, f) \in \bar{J}(\mathcal{C}, <)$. Désignons par $F_1 \cap F_2$ la classe intersection de F_1 et F_2 . Soit C une sous-classe de $F_1 \cap F_2$ ayant un f -agrégat f' . Comme $C \subset F_1$, on a $f' \in F_1$; de même $f' \in F_2$, d'où $(F_1 \cap F_2)_{f'} = F_1 \cap F_2$ et $(F_1 \cap F_2, f)$ est l'intersection de (F_1, f) et de (F_2, f) . Montrons que l'on a :

$$\alpha(F_1 \cap F_2, f) = \alpha(F_1, f) \cap \alpha(F_2, f).$$

Soit $e \in \alpha(F_1)$ et $e \in \alpha(F_2)$. Il existe $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$ tels que $\alpha(f_1) = \alpha(f_2) = e$; puisque $f_1 < f$ et $f_2 < f$ et que $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie sous-prélocale, on a $\alpha(f_1 \cap f_2) = e$ et

$$f_1 \cap f_2 \in F_1 \cap F_2.$$

Soit

$$e' \in (\overline{\alpha(F_1)})_{\alpha(f)'} \cap (\overline{\alpha(F_2)})_{\alpha(f)'}$$

Il existe des sous-classes C_1 et C_2 de F_1 et F_2 resp. telles que :

$$e' = \bigcup^{\alpha(f)'} \alpha(C_1) \quad \text{et} \quad e' = \bigcup^{\alpha(f)'} \alpha(C_2).$$

D'après l'axiome de distributivité, e' est aussi un sous-agrégat de la classe formée des $c_1 \cap c_2$, où $c_1 \in \alpha(C_1)$ et $c_2 \in \alpha(C_2)$. Comme $c_1 \cap c_2 \in \alpha(F_1) \cap \alpha(F_2)$ on trouve $e' \in (\overline{\alpha(F_1 \cap F_2)})_{\alpha(f)'}$; par suite α définit une application sous-préinductive [1]. Pour une raison analogue, β définit une application sous-préinductive, de sorte que $(\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)$ est une catégorie sous-inductive régulière.

THÉORÈME 4. — $(\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)$ admet une catégorie sous-inductive régulière $(J(\mathcal{C}, <)^{\bullet}, <)$ pour quotient [2] relativement à la relation d'équivalence $\nu: (F, f) \sim (F, f')$ si, et seulement si, il existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}$ tel que :

$$\tilde{f} < f, \quad \tilde{f} < f' \quad \text{et} \quad F < \tilde{f}.$$

De plus $(J(\mathcal{C}, <)^{\bullet}, <)$ est une catégorie sous-locale admettant une sous-catégorie régulière isomorphe à $(\mathcal{C}, <)$.

Démonstration. — ν est une relation symétrique et réflexive. Supposons :

$$(F, f') \sim (F, f) \quad \text{et} \quad (F, f) \sim (F, \bar{f}').$$

Il existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}$ et $\tilde{f}' \in \mathcal{C}$ tels que :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f} < f, & \tilde{f} < f', & F < \tilde{f}; & \tilde{f}' < f, \\ & \tilde{f}' < \bar{f}' & \text{et} & F < \tilde{f}', \end{array}$$

de sorte que l'on a :

$$f'' = \tilde{f}' \circ \tilde{f} < f', \quad f'' < \bar{f}' \quad \text{et} \quad F < f'',$$

d'où $(F, f') \sim (F, \bar{f}')$. Ainsi ν est une relation d'équivalence. De plus on a : $(\bar{F})_{\bar{f}'} > = (\bar{F})_{f'} > = F$, c'est-à-dire $(F, \tilde{f}) \in \bar{J}(\mathcal{C}, <)$, d'après la proposition 5.

— ν est compatible avec α et β . Si les composés :

$$(F', f') \cdot (F, f) \quad \text{et} \quad (F', \bar{f}') \cdot (F, \bar{f})$$

sont définis dans $\bar{J}(\mathcal{C}, <)$; et si on a :

$$(F, f) \sim (F, \bar{f}) \quad \text{et} \quad (F', f') \sim (F', \bar{f}'),$$

soient $\tilde{f} \in \mathcal{C}$ et $\tilde{f}' \in \mathcal{C}$ tels que :

$$\tilde{f} < f, \quad \tilde{f} < \bar{f}, \quad F < \tilde{f} \quad \text{et} \quad \tilde{f}' < f', \quad \tilde{f}' < \bar{f}', \quad F' < \tilde{f}'.$$

Posons $e = \alpha(\tilde{f}') \circ \beta(\tilde{f})$ et $F' \cdot F = \overline{(F' \cdot F)}_{(\tilde{f}', \tilde{f})} >$. On trouve

$$(F' \cdot F, f' \cdot f) \sim (F' \cdot F, (f' e) \cdot (ef)) \sim (F' \cdot F, \bar{f}' \cdot \bar{f}).$$

Donc ν est compatible sur $\bar{J}(\mathcal{C}, <)$.

— D'après la proposition 21 [2], il existe un graphe multiplicatif quotient [2] de $\bar{J}(\mathcal{C}, <)$ par ν , dont nous désignerons la loi de composition par \bullet , les applications source et but par α^\bullet et β^\bullet respectivement. Soit $\bar{\nu}$ l'homomorphisme de $\bar{J}(\mathcal{C}, <)$ sur $J(\mathcal{C}, <)^\bullet$ défini par : $(F, f) \rightarrow (F, f) \bmod \nu$. Supposons $(F', f') \in \bar{J}(\mathcal{C}, <)$, $(F, f) \in \bar{J}(\mathcal{C}, <)$ et $\alpha^\bullet(\bar{\nu}(F', f')) = \beta^\bullet(\bar{\nu}(F, f))$, c'est-à-dire $\bar{\nu}(\alpha(F', f')) = \bar{\nu}(\beta(F, f))$. Cette condition entraîne

$$E = \overline{(\alpha(F'))}_{\alpha(f)} > = \overline{(\beta(F))}_{\beta(f)} >$$

et il existe $e \in \mathcal{C}_0$ tel que :

$$e < \alpha(f'), \quad e < \beta(f) \quad \text{et} \quad E < e.$$

Il en résulte :

$$(F', f'e) \sim (F', f') \quad \text{et} \quad (F, ef) \sim (F, f).$$

Le composé $S = (F', f'e) \cdot (F, ef)$ est défini dans $\bar{J}(\mathcal{C}, <)$; de sorte que le composé $\bar{v}(F', f') \cdot \bar{v}(F, f)$ est défini dans $J(\mathcal{C}, <)^*$ et égal à $\bar{v}(S)$. Si de plus on a $(F'', f'') \in \bar{J}(\mathcal{C}, <)$ et

$$\alpha(F'', f'') \sim \beta(F', f'),$$

on obtient :

$$\bar{v}(F'', f'') \cdot \bar{v}(S) = (\bar{v}(F'', f'') \cdot \bar{v}(F', f')) \cdot \bar{v}(F, f).$$

Donc $J(\mathcal{C}, <)^*$ est une catégorie, qui est la catégorie quotient strict de $\bar{J}(\mathcal{C}, <)^*$ par ν .

— Considérons sur $J(\mathcal{C}, <)$ la relation :

$N < N'$ si, et seulement si, il existe $(F, f) \in N$ et $(F', f') \in N'$ tels que $F \subset F'$.

Cette relation est équivalente à la relation :

$N < N'$ si, et seulement si, il existe $(F, f) \in N$, $(F', f') \in N'$ et $\tilde{f} \in \mathcal{C}$ tels que $F \subset F'$, $\tilde{f} < f$, $\tilde{f} < f'$ et $F' < \tilde{f}$,

puisque ces dernières conditions entraînent $(F, \tilde{f}) \in N$, $(F', \tilde{f}) \in N'$ et $(F, f') \in N$. Il s'ensuit que $N < N'$ est une relation d'ordre sur $J(\mathcal{C}, <)$. Supposons $N < N' = \bar{v}(F', f')$. Il existe $(F, f) \in N$ et $(F', f') \in N'$ et on a $F \subset F'$; il existe aussi $f'' \in \mathcal{C}$ tel que :

$$f'' < f', \quad f'' < f \quad \text{et} \quad F' < f''.$$

On en déduit $(F, f'') \in N$ et $(F', f'') \in N'$, ce qui a pour conséquence $(F, f') \in N$. Ceci prouve :

$$((J(\mathcal{C}, <), <), \nu, (\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)) \in \tilde{\mathcal{Q}}''$$

(voir [1]). Donc ν vérifie l'axiome (q^*) (prop. 30 [2]) et, en vertu de la proposition 30 [2], $(J(\mathcal{C}, <), <)$ est une classe sous-inductive quotient de $(\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)$. On en conclut, en utilisant le théorème 23 [2], que $(J(\mathcal{C}, <)^*, <)$ est une catégorie sous-inductive.

— Soit $N = \bar{\nu}(F, f)$; si $(F_1, f) < (F, f)$ et $(F_2, f) < (F, f)$ dans $(\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)$, et si $\bar{\nu}(F_1, f) = \bar{\nu}(F_2, f)$, on a $F_1 = F_2$, ce qui signifie que la restriction de $\bar{\nu}$ à la classe des minorants de (F, f) est une bijection sur la classe des minorants de N dans

$$(J(\mathcal{C}, <), <).$$

Il en résulte que, si $A \in J(\mathcal{C}, <)_0^*$ et $A < \alpha^*(N)$, il existe

$$(\mathcal{B}, \alpha(f)) \in A$$

tel que $(\mathcal{B}, \alpha(f)) < \alpha(F, f)$; alors $\bar{\nu}((F, f)(\mathcal{B}, \alpha(f)))$ est le pseudo-produit de N et de A dans $(J(\mathcal{C}, <)_0^*, <)$ et $\alpha^*(NA) = A$. De même si $A' < \beta^*(N)$, il existe $A'N$ et on a $\beta^*(A'N) = A'$. Enfin, si $N' \cdot N$ est défini et si $N'' < N' \cdot N$, il existe $(F', f') \in N'$ et $(F, f) \in N$ tels que $(F', f') \cdot (F, f)$ soit défini et il existe $(F'', f'') \in N''$ tel que :

$$(F'', f'') < (F', f') \cdot (F, f),$$

d'après ce qui précède. Puisque $(\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)$ est régulière, on a :

$$(F'', f'') = (F'_1, f'_1) \cdot (F_1, f_1),$$

où

$$F'_1 \subset F' \quad \text{et} \quad F_1 \subset F;$$

d'où :

$$N'' = N'_1 \cdot N_1, \quad N'_1 = \bar{\nu}(F'_1, f'_1) < N' \quad \text{et} \quad N_1 = \bar{\nu}(F_1, f_1) < N.$$

Ceci montre que $(J(\mathcal{C}, <)_0^*, <)$ est une catégorie sous-inductive régulière quotient de $(\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)$.

— L'application $\theta : f \rightarrow \bar{\nu}(f, f)$ identifie \mathcal{C} à une sous-catégorie régulière de $(J(\mathcal{C}, <)_0^*, <)$.

— Supposons $K_i = \bar{\nu}(F_i, f) \in J(\mathcal{C}, <)$, où $i \in I$. Puisque la classe des K_i , où $i \in I$, est majorée par $\theta(f)$ dans $(J(\mathcal{C}, <), <)$,

il existe $K = \bigcup_{i \in I}^{\theta(f)} K_i = \bar{\nu}(F, f)$, où $F = (\bar{H})_{f, >}$, en désignant

par H la classe réunion des F_i . Soit $K' = \bar{\nu}(F', f') \in J(\mathcal{C}, <)$ tel que $K \cap K' = \bar{\nu}(G, \tilde{f})$ soit défini. On a :

$$(G, f) \sim (G, \tilde{f}) \sim (G, f') \quad \text{et} \quad G \subset F \cap F'.$$

Si C est une sous-classe de $F \cap F'$ admettant un sous-agrégat g ,

les relations $g \in (\overline{F'})_{f'>} = F'$ et $g \in (\overline{F})_{f>} = F$ entraînent $g \in F \cap F'$, d'où :

$$(\overline{F \cap F'})_{f>} = F \cap F' \quad \text{et} \quad G = F \cap F'.$$

De plus, pour tout $i \in I$, $K_i \cap K' = \bar{\nu}(F_i \cap F', f)$ est défini et il existe :

$$K'' = \bar{\nu}(F'', f) = \bigcup_{i \in I}^{\theta(f')} K_i \cap K'.$$

Si G' désigne la classe réunion des $F_i \cap F'$, où $i \in I$, on a :

$$F'' = (\overline{G'})_{f>} \subset F \cap F'.$$

Par ailleurs, soit $g' \in F \cap F'$. Il existe une sous-classe C' de H telle que $g' = \bigcup^{g'} C'$; pour tout $c' \in C'$, il existe $i \in I$ tel que $c' \in F_i \cap F' \subset G'$; donc $g' \in F''$ et $F \cap F' = F''$. Par conséquent : $K'' = K \cap K'$ et $(J(\mathcal{C}, <))^{\bullet}, <$ est une catégorie sous-locale.

COROLLAIRE. — Si $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie prélocale,

$$(J(\mathcal{C}, <))^{\bullet}, <$$

est une catégorie locale, isomorphe à la catégorie locale $(\overline{J}^{\bullet}, <)$, où \overline{J} est la classe des sous-classes de \mathcal{C} qui sont majorées, saturées par induction et par agrégation dans $(\mathcal{C}, <)$, munie de la loi de composition :

$$(F', F) \rightarrow (\overline{F' \cdot F})_{\mathcal{C}} \quad \text{si, et seulement si,} \quad (\overline{\alpha(F')})_{\mathcal{C}} = (\overline{\beta(F)})_{\mathcal{C}},$$

et de la relation d'ordre :

$$F_1 < F \quad \text{si, et seulement si,} \quad F_1 \subset F.$$

Démonstration. — Soit $\nu(F, f) \in J(\mathcal{C}, <)$. Si f' est un autre majorant de F , on a $F < f \cap f'$, car $(\mathcal{C}, <)$ est prélocale, et

$$(\overline{F})_{f>} = (\overline{F})_{(f \cap f')>} = (\overline{F})_{f'>},$$

d'où

$$(F, f') \sim (F, f).$$

En tenant compte de la proposition 5, on voit que l'application

$$\lambda : \bar{\nu}(F, f) \rightarrow F \quad \text{où} \quad \bar{\nu}(F, f) \in J(\mathcal{C}, <)$$

est une bijection de $J(\mathcal{C}, <)$ sur la classe \bar{J} . Comme toute sous-classe C de $J(\mathcal{C}, <)$ majorée par $\lambda^{-1}(F) \in J(\mathcal{C}, <)$ est aussi majorée par $\theta(f)$, où f est un majorant de F dans $(\mathcal{C}, <)$, $\lambda(C)$ admet pour agrégat l'élément $(\bar{C})_{\mathcal{C}}$, où C est la classe réunion des $F \in \lambda(C)$. Le corollaire s'en déduit.

Soit \mathfrak{J}_i^a la catégorie des foncteurs inductifs entre catégories sous-prélocales, c'est-à-dire des foncteurs ordonnés vérifiant la condition U ([1], p. 214), $((\Sigma', <), \varphi, (\mathcal{C}', <))$, tels que $(\mathcal{C}', <)$ et $(\Sigma', <)$ soient des catégories sous-prélocales et que les conditions $f \in \mathcal{C}, f' < f$ et $f'' < f$ entraînent :

$$\varphi(f' \cap f'') = \varphi(f') \cap \varphi(f'').$$

Soit \mathfrak{J}_i^s la sous-catégorie pleine de \mathfrak{J}_i^a ayant pour objets les catégories sous-locales. Soit \mathfrak{J}_i la sous-catégorie pleine de \mathfrak{J}_i^a ayant pour objets les catégories locales.

THÉORÈME 5 (Théorème de complétion). — $(J(\mathcal{C}, <)^{\bullet}, <)$ est une \mathfrak{J}_i^s -projection de $(\mathcal{C}, <)$ dans \mathfrak{J}_i^a (voir [2]).

Démonstration. — Montrons que

$$\bar{\theta} = ((J(\mathcal{C}, <)^{\bullet}, <), \theta, (\mathcal{C}, <))$$

est un \mathfrak{J}_i^s -projecteur dans \mathfrak{J}_i^a . Pour cela, prouvons d'abord que $\bar{\theta} \in \mathfrak{J}_i^a$. En effet, si C est une sous-classe de \mathcal{C} ayant un sous-agrégat f , la classe $\theta(C)$ admet $\theta(f)$ pour sous-agrégat. Si $f' < f$ et $f'' < f$, on a :

$$\theta(f' \cap f'') = \bar{\nu}((f' \cap f'')^{\triangleright}, f' \cap f'') = \theta(f') \cap \theta(f'').$$

donc $\bar{\theta} \in \mathfrak{J}_i^a$.

— Supposons $\Phi = ((\Sigma', <), \varphi, (\mathcal{C}', <)) \in \mathfrak{J}_i^a$ et $(\Sigma', <) \in \mathfrak{J}_i^s$. Soit $\bar{\varphi}$ l'application :

$$\bar{\nu}(F, f) \rightarrow \bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F), \quad \text{où} \quad \bar{\nu}(F, f) \in J(\mathcal{C}, <).$$

Si $(F, f') \sim (F, f)$ modulo ν , il existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}$ tel que :

$$\tilde{f} < f', \quad \tilde{f} < f \quad \text{et} \quad (F, \tilde{f}) \sim (F, f).$$

Par suite :

$$\bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F) = \bigcup^{\varphi(\bar{f})} \varphi(F) = \bigcup^{\varphi(f')} \varphi(F),$$

et l'application $\bar{\varphi}$ est bien définie. Montrons que $\bar{\varphi}$ définit un foncteur. En effet, comme Φ est un foncteur inductif, pour toute sous-classe F de \mathcal{C} , majorée par $f \in \mathcal{C}$, on a :

$$\bigcup^{\bar{f}} \varphi(F) = \bigcup^{\bar{f}} \varphi((\bar{F})_{f>}), \quad \text{où} \quad \bar{f} = \varphi(f).$$

Soit $N = \bar{v}(F, f) \in J(\mathcal{C}, <)$ et $A = \alpha^*(N)$. On a :

$$\begin{aligned} A &= \bar{v}(\mathcal{B}, e), & \text{où} & \quad e = \underline{\alpha(f)}, \\ \mathcal{B} &= E. e^>. E & \text{et} & \quad E = (\underline{\alpha(F)})_{e>}. \end{aligned}$$

Posons :

$$\bar{e} = \varphi(e) \quad \text{et} \quad \bar{e}' = \bigcup^{\bar{e}} \varphi(E).$$

D'après ce qui précède, on a :

$$\bar{e}' = \bigcup^{\bar{e}} \varphi(\alpha(F)) < \bigcup^e \varphi(\mathcal{B}) < \bar{e}.$$

De la relation :

$$\varphi(g) = \varphi(\beta(g) \cdot g \cdot \alpha(g)) = \varphi(\beta(g)) \cdot \varphi(g) \cdot \varphi(\alpha(g)) < \bar{e}' \bar{e} \bar{e}' = \bar{e}',$$

où $g \in \mathcal{B}$, il résulte $\varphi(\mathcal{B}) < \bar{e}'$. Donc :

$$\bar{e}' = \bigcup^{\bar{e}} \varphi(\mathcal{B}) = \bar{\varphi}(A).$$

Comme :

$$\alpha(\bar{\varphi}(N)) = \alpha\left(\bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F)\right) = \bigcup^{\bar{e}} \alpha(\varphi(F)) = \bigcup^{\bar{e}} \varphi(\alpha(F)) = \bar{e}',$$

on obtient : $\alpha(\bar{\varphi}(N)) = \bar{\varphi}(\alpha^*(N))$. De même

$$\beta(\bar{\varphi}(N)) = \bar{\varphi}(\beta^*(N)).$$

Soit $N' \in J(\mathcal{C}, <)$ tel que $\alpha^*(N') = \beta^*(N)$; on peut supposer qu'il existe $(F', f') \in N'$ tel que $(F', f') \cdot (F, f)$ soit défini; posons :

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \varphi(f), & \bar{f}' &= \varphi(f'), & \bar{f}'' &= \varphi(f' \cdot f), \\ h &= \bar{\varphi}(N), & h' &= \bar{\varphi}(N') & \text{et} & \quad h'' = \bar{\varphi}(N' \cdot N). \end{aligned}$$

On a :

$$h'' = \bigcup_{\bar{f}''} \varphi(F' \cdot F) < \left(\bigcup_{\bar{f}'} \varphi(F') \right) \cdot \left(\bigcup_{\bar{f}} \varphi(F) \right) = h' \cdot h.$$

D'après le début de la démonstration, on trouve :

$$\alpha(h' \cdot h) = \alpha(h) = \bar{\varphi}(\alpha^*(N)) = \bar{\varphi}(\alpha^*(N' \cdot N)) = \alpha(h'')$$

et de même $\beta(h' \cdot h) = \beta(h'')$. Il s'ensuit $h' \cdot h = h''$, car $(\Sigma', <)$ est ordonnée. Par suite $\bar{\varphi}(N' \cdot N) = \bar{\varphi}(N') \cdot \bar{\varphi}(N)$ et $\bar{\varphi}$ définit un foncteur.

— Supposons $K_i = \bar{v}(F_i, f) < \bar{v}(F, f)$, pour tout $i \in I$. Le $\bar{v}(F, f)$ -agrégat K des K_i est égal à $\bar{v}((\bar{F}')_{f>}, f)$, où F' est la classe réunion des F_i , de sorte que :

$$\bar{\varphi}(K) = \bigcup_{\varphi(f)} \varphi(F') = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{\varphi(f)} \varphi(F_i) \right) = \bigcup_{i \in I} \bar{\varphi}(K_i).$$

Enfin, on a :

$$\bar{\varphi}(K_1 \cap K_2) = \bar{\varphi}(\bar{v}(F_1 \cap F_2, f)) = \bigcup_{\varphi(f)} \varphi(F_1 \cap F_2),$$

d'après la démonstration du théorème 4, et

$$\bar{\varphi}(K_1) \cap \bar{\varphi}(K_2) = \left(\bigcup_{\varphi(f)} \varphi(F_1) \right) \cap \left(\bigcup_{\varphi(f)} \varphi(F_2) \right) = \bigcup_{f_1 \in F_1} (\varphi(f_1) \cap \varphi(f_2)),$$

en vertu de l'axiome de distributivité dans $(\Sigma', <)$. Puisque F_1 et F_2 sont majorés par f et que $\bar{\varphi}$ est un foncteur inductif, on a :

$$\varphi(f_1) \cap \varphi(f_2) = \varphi(f_1 \cap f_2),$$

quels que soient $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$. Par conséquent :

$$\bar{\varphi}(K_1) \cap \bar{\varphi}(K_2) < \bar{\varphi}(K_1 \cap K_2)$$

et

$$\bar{\varphi}(K_1) \cap \bar{\varphi}(K_2) = \bar{\varphi}(K_1 \cap K_2),$$

car $\bar{\varphi}(K_1 \cap K_2) < \bar{\varphi}(K_1) \cap \bar{\varphi}(K_2)$. Ceci démontre que $\bar{\varphi}$ définit un foncteur inductif $\bar{\Phi} = ((\Sigma', <), \bar{\varphi}, (J(\mathcal{C}', <)^*, <))$ tel que $\bar{\Phi} \cdot \bar{\theta} = \Phi$.

— Soit $\bar{\Phi}_1$ un autre foncteur inductif de $(J(\mathcal{C}', <)^*, <)$ vers $(\Sigma', <)$ tel que $\bar{\Phi}_1 \cdot \bar{\theta} = \Phi$. Soit $K = \bar{v}(F, f)$; comme K est le

$\bar{v}(F, f)$ -agrégat des éléments $\theta(f_i)$, où $f_i \in F$, on doit avoir :

$$\bar{\Phi}_1(K) = \bigcup_{\varphi(F)} \bar{\Phi}_1(\theta(F)) = \bigcup_{\varphi(F)} \varphi(F) = \bar{\varphi}(K),$$

ce qui entraîne $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_1$. Donc $\bar{\theta}$ est un \mathfrak{J}_i^* -projecteur [2] et par suite $(J(\mathcal{C}, <))^*, <$ est une \mathfrak{J}_i^* -projection de $(\mathcal{C}, <)$ dans \mathfrak{J}_i^* .

COROLLAIRE 1. — *Si $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie sous-locale régulière, $\bar{\theta}$ est un isomorphisme de $(\mathcal{C}, <)$ sur $(J(\mathcal{C}, <))^*, <$.*

Ceci résulte de l'unicité, à un isomorphisme près, d'une \mathfrak{J}_i^* -projection (voir [2]).

COROLLAIRE 2. — *Si $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie prélocale régulière, $(J(\mathcal{C}, <))^*, <$ est une \mathfrak{J}_i -projection de $(\mathcal{C}, <)$.*

Ce corollaire résulte du théorème 5 et du corollaire du théorème 4.

Remarque. — Le théorème 5 et le corollaire 2 de ce théorème admettent pour cas particuliers des théorèmes de complétion démontrés dans [2] et [3], dans lesquels $(\mathcal{C}, <)$ est supposé être un groupoïde sous-local.

BIBLIOGRAPHIE

- [0] Complétion des catégories ordonnées, *C.R.A.S.*, 257, 1963, p. 4110; Complétion des catégories sous-prélocales, *C.R.A.S.*, 259, 1964, p. 701.
- [1] Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie, *Ann. Fourier*, 14, 1 (1964), p. 205-268.
- [2] Structures quotient, *Comm. Math. Helv.*, 1963, p. 219-283.
- [3] Groupoïdes sous-inductifs, *Ann. Fourier*, 13, 2 (1963), p. 1-60.
- [4] Espèces de structures locales, élargissement de catégories, *Séminaire Topologie et Géo. diff.* (Ehresmann), vol. III, 1961, Paris.

Manuscrit reçu en octobre 1964.

Charles EHRESMANN,
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-Curie,
Paris (5^e).