ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LAURE BLASCO
CORINNE BLONDEL

Types induits des paraboliques maximaux de $Sp_4(F)$ et $GSp_4(F)$

Annales de l'institut Fourier, tome 49, nº 6 (1999), p. 1805-1851
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_6_1805_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
49, 6 (1999), 1805–1851

TYPES INDUITS DES PARABOLIQUES MAXIMAUX DE $Sp_4(F)$ ET $GSp_4(F)$

par L. BLASCO et C. BLONDEL

Soit F un corps local non archimédien et G le groupe des points rationnels sur F d'un groupe algébrique réductif connexe défini sur F.

L'étude de la catégorie $\mathcal{R}(G)$ des représentations lisses complexes de G se réduit, grâce à la décomposition de Bernstein ([Be] ou l'introduction de [BK2]), à celle des sous-catégories pleines $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ indexées par les classes d'inertie $\mathfrak{s}$ dans G (1).

Afin de préciser la structure de $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ pour chaque classe d'inertie $\mathfrak{s}$, C. Bushnell et P. Kutzko ont développé la notion de $\mathfrak{s}$-*type* [BK2]. Il s'agit de paires (J,τ) constituées d'un sous-groupe ouvert compact J de G et d'une représentation irréductible τ de J telles que les objets de $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ soient exactement les représentations lisses de G engendrées par leur composante τ-isotypique. Lorsque $\mathfrak{s}$ est la classe d'inertie d'une représentation supercuspidale de G, trouver un $\mathfrak{s}$-type est fortement lié à construire σ par induction à partir d'un sous-groupe ouvert compact de G ([BK2], §5). Lorsque $\mathfrak{s}$ est la classe d'inertie d'une représentation supercuspidale σ d'un sous-groupe de Levi propre M de G, on espère obtenir des $\mathfrak{s}$-*types induits*, c'est-à-dire des $\mathfrak{s}$-types (J,τ) permettant d'interpréter la restriction à $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}_M}(M)$ ($\mathfrak{s}_M$ la classe d'inertie de σ dans M) du foncteur d'induction parabolique, à partir d'un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi

Mots-clés : Représentations – Groupes réductifs p-adiques – Types.
Classification math : 22E50 – 20G05.

(1) Une classe d'inertie est une classe d'équivalence de paires (M,σ) formées d'un sous-groupe de Levi M de G et d'une représentation supercuspidale irréductible de M, pour une relation d'équivalence combinant l'équivalence des représentations, la torsion par un caractère non ramifié de M et la conjugaison dans G.

M jusqu'à G, en termes d'homomorphisme injectif d'une algèbre de Hecke sur M associée à un $\mathfrak{s}_M$-type, dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,\tau)$ ([BK2]).

Dans [BK2], C. Bushnell et P. Kutzko formalisent ce problème de la façon suivante. Ils définissent les paires couvrantes d'un type (J_M, τ_M) dans M (ou G-cover) relativement à un sous-groupe parabolique P de G de facteur de Levi M, ce que nous répétons ici.

Notons N^+ le radical unipotent de P et N^- celui du parabolique opposé par rapport à M. Une *paire décomposée* (J,τ) *relativement à* P est une paire formée d'un sous-groupe ouvert compact J possédant une décomposition d'Iwahori par rapport à M et P (c'est-à-dire que $J = J^-(J \cap M)J^+$ où $J^\pm = J \cap N^\pm$) et d'une représentation irréductible τ de J dont les restrictions à J^+ et J^- sont triviales. Une *paire couvrante de* (J_M, τ_M) *dans* G *relativement à* P est une paire décomposée (J,τ) relativement à P telle que l'intersection de J et de M soit J_M, la restriction de τ à cette intersection soit τ_M et que pour toute représentation lisse irréductible (π, V) de G, la restriction à la composante τ-isotypique V^τ de l'application de Jacquet r_{N^+} soit injective.

Ils montrent alors que les paires couvrantes de types possèdent les propriétés espérées :

THÉORÈME [BK2]. — *Soit σ une représentation supercuspidale irréductible d'un sous-groupe de Levi propre M de G. Notons $\mathfrak{s}$ sa classe d'inertie dans G et $\mathfrak{s}_M$ celle dans M. Si (J_M, τ_M) est un $\mathfrak{s}_M$-type dans M et si (J,τ) est une paire couvrante de (J_M, τ_M) relativement à tout parabolique de facteur de Levi M, alors la paire (J,τ) est un $\mathfrak{s}$-type induit dans G.*

À l'heure actuelle, il est intéressant d'illustrer cette théorie par des exemples explicites. Le but principal de cet article est de compléter l'exemple de $G = Sp_4(F)$, où F est de caractéristique résiduelle impaire, par le calcul des types induits associés aux classes d'inertie des représentations supercuspidales des sous-groupes de Levi maximaux. Le lecteur trouvera les résultats analogues pour les paraboliques minimaux dans [Ro] et une synthèse de résultats concernant les types de $Sp_4(F)$ dans [Actes Luminy].

La bibliographie cite quelques-uns des travaux récents contenant des constructions de types : [Mo], [MP], [BK3], [Bl2], [Le], [Ad], [Ki], [Au], [St]. Les types induits de niveau 0 que nous obtenons en II.4 et III.5 (correspondant à $n = l = 1$ dans la série non ramifiée) sont identiques à ceux obtenus par L. Morris dans [Mo]. En outre, J. Kim [Ki] construit dans un groupe classique général G une famille de paires (J, τ) et annonce qu'il s'agit de types dans G, ceci avec des hypothèses plus restrictives sur le corps de base, qui doit être de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle p au moins égale à 17, la valuation de p étant explicitement bornée. La comparaison avec son travail s'avère plus délicate, en particulier parce que les paires qu'elle obtient ne sont pas nécessairement décomposées. Parmi les cas examinés, la construction de [Ki] fournit parfois des paires décomposées qui sont alors des paires couvrantes déterminées ici (par exemple n et l pairs dans III.2 et III.3), parfois des paires non décomposées comparables à celles-ci en ce sens qu'une d'entre elles apparaît comme un sous-espace totalement isotrope maximal dans la construction de Heisenberg de [Ki, 3.4.3] (par exemple n pair et l impair dans III.2 et III.3), parfois aussi des paires non décomposées contenant une telle paire couvrante en un sens plus complexe.

Le premier paragraphe contient les rappels nécessaires : rappels sur les types associés aux classes d'inertie supercuspidales des sous-groupes de Levi maximaux de $Sp_4(F)$ d'une part (I.1, 2) ; sur la méthode de construction de paires couvrantes qui est reprise de [Bl2] d'autre part (I.3). Cette dernière repose sur la détermination de "bonnes" suites infinies de paires décomposées, étape qui occupe l'essentiel des deux paragraphes suivants.

Le paragraphe II est consacré au cas du sous-groupe de Levi attaché à la racine longue. On suit la même démarche que dans [Bl2] : les fonctions concaves sur le système de racines de G utilisées ici sont des "restrictions" de celles déterminées là.

Par contre, l'étude du sous-groupe de Levi de Siegel (§III), isomorphe à $GL_2(F)$, conduit à exhiber d'autres suites que celles attachées aux fonctions concaves sur le système de racines. En effet, il s'avère parfois impossible d'obtenir des paires couvrantes au-dessus des types supercuspidaux de taille maximale dans $GL_2(F)$ (représentations de $GL_2(\mathfrak{o})$ ou du sous-groupe d'Iwahori standard). On doit alors choisir, pour une classe d'inertie supercuspidale $\mathfrak{s}$ donnée du sous-groupe de Levi, un $\mathfrak{s}$-type assez petit pour servir de base à la construction d'une paire couvrante. Cette situation nous conduit à faire une étude systématique des réseaux de l'algèbre de Lie du radical unipotent du parabolique de Siegel normalisés par des sous-groupes remarquables de $GL_2(F)$ (§III.1). Cette étude nous permet de construire les types induits cherchés (III.3,4 et 7) et de prouver en III.9 que des $\mathfrak{s}$-types plus gros n'admettent pas de paires couvrantes. On utilise dans ces paragraphes des propriétés des paires couvrantes qui sont démontrées dans un cadre général en I.4.

Un récapitulatif des résultats obtenus figure en II.4, III.5 et III.8 : pour chaque classe d'inertie $\mathfrak{s}$ associée à une représentation supercuspidale d'un sous-groupe de Levi maximal de $Sp_4(F)$, est explicité un $\mathfrak{s}$-type induit.

Le dernier paragraphe contient les résultats analogues quand G est le groupe $GSp_4(F)$ (IV.2). Cette fois-ci, la construction repose sur l'idée naïve que $Sp_4(F)$ et $GSp_4(F)$ ayant les mêmes radicaux unipotents et des sous-groupes de Levi qui ne diffèrent que d'un tore, les suites obtenues dans le cas du premier doivent convenir dans le cas du second. Ceci est exposé précisément en IV.1.

Les résultats que nous présentons ici ont été établis en vue du colloque de Luminy, "Analyse harmonique sur le groupe Sp(4)", en juin 1998 : nous en remercions les organisateurs Paul J. Sally et Marie-France Vignéras. Nous avons apprécié les conditions de travail offertes par l'hospitalité de Peter Schneider, à Münster lors du groupe de travail "K-types pour les groupes p-adiques" en mai 1998.

Mille et un mercis à Guy Henniart : son soutien attentif tout au long de ce travail a été une précieuse stimulation. Et les sympathiques encouragements de Colette Moeglin nous ont bien efficacement accompagnées.

I. Préparatifs.

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle impaire. On note $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F et $\mathfrak{p} = \varpi\mathfrak{o}$ son idéal maximal. On fixe un caractère additif ψ de F de conducteur $\mathfrak{p}$; pour $n \in \mathbb{N}$ on notera ψ_n le caractère de conducteur $\mathfrak{p}^n$ défini par $\psi_n(t) = \psi(\varpi^{1-n}\, t)$, $t \in F$.

Soit $G = Sp_4(F)$ que l'on identifie au groupe des matrices $g \in M_4(F)$ fixant la forme alternée sur F^4 de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À conjugaison près, G possède deux sous-groupes paraboliques maximaux notés P_α (parabolique de Siegel) et P_β dont les sous-groupes de Levi M_α et M_β sont isomorphes respectivement à $GL_2(F)$ et $F^\times \times SL_2(F)$ – la notation fait référence au choix d'une base α (racine courte) et β (racine longue) du système de racines Φ de G. Ce choix est fait ici, relativement au sous-groupe T des matrices diagonales, de telle sorte que les sous-groupes radiciels $X_r = x_r(F)$ – dans les notations de [BT], 6.1.3.b –, soient pour $r \in \Phi^+$:

$$X_\alpha = \left\{ x_\alpha(u) = \begin{pmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u \in F \right\},\ X_{\alpha+\beta} = \left\{ x_{\alpha+\beta}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u \in F \right\},$$
$$X_\beta = \left\{ x_\beta(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u \in F \right\},\ X_{2\alpha+\beta} = \left\{ x_{2\alpha+\beta}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u \in F \right\},$$

et pour $r \in \Phi^-$: $X_r = {}^tX_{-r}$. Pour $r \in \Phi$, on note ζ_r et h_r les homomorphismes de $SL_2(F)$ dans G et de $F^\times$ dans G respectivement tels que

$$\zeta_r\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = x_r(u) \text{ et } \zeta_r\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}\right) = x_{-r}(u),\ (u \in F)$$
$$h_r(x) = \zeta_r\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}\right)\ (x \in F^\times).$$

On note N_α^+ et N_β^+ les radicaux unipotents de P_α et P_β, et N_α^- et N_β^- leurs opposés par rapport à M_α et M_β respectivement. Dans la suite on abrègera les notations en M, P, N^+ et N^- chaque fois que la racine α ou β sera fixée.

La construction de types attachés aux classes d'inertie dans $Sp_4(F)$ de représentations irréductibles supercuspidales de M_α (ou M_β) s'appuie sur la description qui suit des types attachés aux classes d'inertie dans M_α (ou M_β) de représentations irréductibles supercuspidales de M_α (ou M_β).

I.1. Les représentations supercuspidales de M_α et leurs types.

Les représentations supercuspidales irréductibles de $GL_2(F)$ sont toutes induites à partir des sous-groupes compacts modulo le centre maximaux de $GL_2(F)$, qui apparaissent comme les normalisateurs des ordres principaux de $M_2(F)$. Soit $\mathfrak{s} = [M,\pi]_M$ la classe d'inertie dans $M \simeq GL_2(F)$ d'une représentation π irréductible et supercuspidale de $M = M_\alpha$. Il résulte de [Ku] et [BK2] que $\mathfrak{s}$ possède un type de la forme $(\mathfrak{A}^\times, \tau)$ où $\mathfrak{A}$ est un ordre principal de $M_2(F)$ et τ une représentation irréductible de $\mathfrak{A}^\times$ de quasi-conducteur $n \geqslant 1$ et de défaut 0.

Pour $\mathfrak{A}$ un ordre principal de $M_2(F)$, on note $\mathfrak{P}$ son radical de Jacobson, $\mathfrak{e}$ sa période et $K_\mathfrak{A} = \{g \in GL_2(F),\ g\mathfrak{A}g^{-1} = \mathfrak{A}\}$ son normalisateur, muni de sa filtration standard :

$$K_\mathfrak{A} \supset K_\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}^\times \supset K_\mathfrak{A}^1 = I + \mathfrak{P} \supset \ldots \supset K_\mathfrak{A}^n = I + \mathfrak{P}^n \supset \ldots$$

Quitte à conjuguer par un élément de $GL_2(F)$, on suppose $\mathfrak{A}^\times = GL_2(\mathfrak{o})$ quand $\mathfrak{e}=1$ et $\mathfrak{A}^\times = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix}$, le sous-groupe d'Iwahori, quand $\mathfrak{e}=2$.

Considérons donc $(\mathfrak{A}^\times, \tau)$ un $\mathfrak{s}$-type de M comme ci-dessus. Le quasi-conducteur de τ est le plus petit entier n tel que τ soit triviale sur $K_{\mathfrak{A}}^{n\mathfrak{e}} \cap SL_2(F)$; la représentation τ est de défaut 0 si et seulement si sa restriction à $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u \in \mathfrak{p}^{n-1} \right\}$ ne contient pas la représentation triviale [Ku].

On note χ le caractère central de τ et $l = \min\{r \in \mathbb{N}^* / \chi(1+\mathfrak{p}^r) = 1\}$. On appelle l le conducteur de χ ; on attire l'attention sur le fait que, par définition, l est au moins égal à 1.

Excluant maintenant le cas où $\mathfrak{e}=1$ et $n=1$, d'après [Ku], il existe un caractère χ_0 de $F^\times$ tel que la restriction de $\tau \otimes \chi_0 \circ \det$ à $K_{\mathfrak{A}}^{[\frac{n\mathfrak{e}+1}{2}]}$ contienne un caractère de la forme

$$\psi_{n+\mathfrak{e}-1,\,\delta} \;:\; g \mapsto \psi \circ \mathrm{Tr}(\varpi^{2-\mathfrak{e}-n}\, \delta\, (g-1)), \quad g \in K_{\mathfrak{A}}^{[\frac{n\mathfrak{e}+1}{2}]}$$

où l'élément δ possède les propriétés suivantes :

- δ engendre une extension quadratique E de F telle que $E^\times \subset K_{\mathfrak{A}}$;
- δ est une uniformisante de E si E/F est ramifiée, δ engendre $\mathfrak{o}_E$ sur $\mathfrak{o}_F$ si E/F est non ramifiée.

Soit ρ une représentation irréductible de $\mathfrak{o}_E^\times K_{\mathfrak{A}}^{[\frac{n\mathfrak{e}}{2}]}$ contenue dans τ et telle que $\rho \otimes \chi_0 \circ \det$ contienne $\psi_{n+\mathfrak{e}-1,\,\delta}$; pour tout entier m vérifiant $0 \leqslant m \leqslant [\frac{n\mathfrak{e}}{2}]$, la paire $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ définie par :

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} J_{M,m} = \mathfrak{o}_E^\times\, K_{\mathfrak{A}}^m \text{ et } & \tau_{M,m} = \mathrm{Ind}_{J_{M,[\frac{n\mathfrak{e}}{2}]}}^{J_{M,m}} \rho \quad \text{si } m \geqslant 1, \\ J_{M,0} = \mathfrak{A}^\times \qquad \text{ et } & \tau_{M,0} = \mathrm{Ind}_{J_{M,[\frac{n\mathfrak{e}}{2}]}}^{J_{M,0}} \rho \quad \text{si } m = 0, \end{cases}$$

est encore un $\mathfrak{s}$-type.

I.2. Les représentations supercuspidales de M_β et leurs types.

Comme M_β est identifié à $F^\times \times SL_2(F)$, commençons par décrire les représentations supercuspidales irréductibles de $SL_2(F)$. Pour ce faire, rappelons ([BK1], prop. 1.17, 1.20) que toute représentation supercuspidale irréductible de $SL_2(F)$ est isomorphe à un $SL_2(F)$-sous-espace d'une représentation supercuspidale irréductible de $GL_2(F)$. On note $\bar{L}$ l'intersection de L et $SL_2(F)$ pour tout sous-groupe L de $GL_2(F)$. En utilisant la classification des représentations supercuspidales irréductibles de $GL_2(F)$ précédemment citée et le critère de Mackey, on obtient (voir [KS], en particulier les propositions 3.5 et 3.7) qu'une représentation supercuspidale irréductible de $SL_2(F)$ est une induite compacte $\mathrm{Ind}_{\bar{K}_{\mathfrak{A}}}^{SL_2(F)} \bar{\tau}$ avec

(2.1)

$$\begin{cases} \mathfrak{A} = M_2(\mathfrak{o}) \text{ ou } \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{pmatrix} \text{ou } M_2(\mathfrak{o})^w = w^{-1} M_2(\mathfrak{o})\, w\,, \ w = \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \bar{\tau} \text{ composante irréductible de la restriction à } \bar{K}_{\mathfrak{A}} \text{ d'une} \\ \quad \text{représentation de } K_{\mathfrak{A}} \text{ de quasi} - \text{conducteur } n \text{ et de défaut } 0. \end{cases}$$

Notons que $\bar{\tau}$ est elle-même de conducteur n et de défaut 0.

Soit $(\bar{K}_{\mathfrak{A}}, \bar{\tau})$ comme en (2.1) et χ un caractère de $F^{\times}$. Il découle de [BK2], (5.4), que la classe d'inertie $[M, \pi]_M$ de la représentation supercuspidale irréductible π induite compacte de $\chi \otimes \bar{\tau}$ à $M \simeq F^{\times} \times SL_2(F)$ possède un type dans $M = M_{\beta}$, à savoir la paire :

$$(\mathfrak{o}^{\times} \times \bar{K}_{\mathfrak{A}}\,,\ \chi_{|\mathfrak{o}^{\times}} \otimes \bar{\tau}). \tag{2.2}$$

On appelle encore $l := \min\{r \in \mathbb{N}^* / \chi(1 + \mathfrak{p}^r) = 1\}$ le conducteur de χ.

En II on construit des paires couvrantes au-dessus de chaque type de (2.2) pour lequel $\mathfrak{A}$ est égal à $M_2(\mathfrak{o})$ ou à $\begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{pmatrix}$. Le cas où $\mathfrak{A}$ est égal à $M_2(\mathfrak{o})^w$ se déduit du premier par conjugaison par l'élément $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varpi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varpi \end{pmatrix}$ de $GSp_4(F)$, qui normalise P et M. La définition des paires couvrantes entraîne en effet :

(2.3) — *Soit ϕ un automorphisme continu de G laissant P et M invariants. Si (J, τ) est une paire couvrante dans G relativement à P d'un type (J_M, τ_M) dans M, alors $(\phi(J), \tau \circ \phi^{-1})$ est une paire couvrante dans G relativement à P du type $(\phi(J_M), \tau_M \circ \phi^{-1})$ dans M.*

Remarque. — Ce fait est bien sûr valide dans le cadre général de la définition des paires couvrantes.

I.3. Méthode de construction de paires couvrantes [Bl1][Bl2].

Le but de ce paragraphe est de décrire la méthode que nous employons pour construire des paires couvrantes dans $Sp_4(F)$ relativement à P_α ou P_β des types de M_α ou M_β décrits en I.1 et I.2. On se place dans un cadre général :

G est le groupe des points sur F d'un groupe réductif connexe défini sur F,

P est un sous-groupe parabolique de G de radical unipotent N^+,

M est un facteur de Levi de P,

N^- est le sous-groupe unipotent opposé de N^+ par rapport à M,

(J_M, τ_M) est un type dans M dont on veut trouver une paire couvrante dans G relativement à P.

Étape 1 — On construit une suite infinie $(J_i, \tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de paires décomposées relativement à P; rappelons ([Bl1] lemme 1) que pour tout i, J_i est le produit $J_i^- J_M J_i^+$ où J_i^- et J_i^+ sont des sous-groupes ouverts compacts de N^- et N^+ respectivement vérifiant

(3.1) $\quad J_M$ *normalise* J_i^+ *et* J_i^-; $J_i^+ J_i^- \subset J_i^- \ker \tau_M J_i^+$.

La représentation τ_i est alors le prolongement de τ_M à J_i trivial sur J_i^+ et J_i^-.

Les sous-groupes J_i sont reliés par :

(3.2) $\quad (J_i^+)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante et* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i^+ = N^+$;

$(J_i^-)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante.*

Un aspect crucial de la construction de cette suite est la mise en œuvre de la notion de *maximalité* inhérente à la définition d'une paire couvrante – voir (4.1) :

(3.3) *on choisit pour chaque i, à J_i^- fixé, le plus grand sous-groupe J_i^+ réalisant les conditions* (3.1) *et* (3.2).

Étape 2 — Ayant construit selon les principes ci-dessus une suite $(J_i, \tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$, on cherche à montrer à chaque pas, c'est-à-dire à chaque passage de i à $i+1$, que l'un des critères formulés dans le théorème ci-dessous s'applique; si c'est le cas on conclut grâce au théorème.

THÉORÈME 3.4. — *Soit* $(J_i, \tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *une suite de paires décomposées relativement à* P *vérifiant les conditions* (3.1) *et* (3.2). *Si pour chaque* $i \in \mathbb{N}$ *l'un des trois critères énoncés ci-dessous est satisfait, alors* (J_i, τ_i) *est une paire couvrante de* (J_M, τ_M) *dans* G *relativement à* P *quel que soit* $i \in \mathbb{N}$.

Critère 1. — *Pour tout* $x \in J_{i+1}^+$, $x \notin J_i^+$, *il existe un sous-groupe fermé* $H_{i,x}$ *de* J_i^- *dont le conjugué* $x^{-1} H_{i,x} x$ *soit un sous-groupe de* J_i *n'ayant aucun vecteur fixe non nul dans la représentation* τ_i.

Critère 2. — *Le sous-groupe* K_i *de* G *engendré par* J_i *et* J_{i+1} *est compact et le support de l'algèbre* $\mathcal{H}(K_i, J_i, \tilde{\tau}_i)$ *est* J_i *ou la réunion de deux doubles classes modulo* J_i, *soit* $J_i \cup J_i \sigma J_i$, *où* σ *vérifie les conditions suivantes :*

$$\sigma^{-1} J_M \sigma = J_M \ ; \quad \sigma^{-1} J_i^- \sigma = J_{i+1}^+ \ ; \quad \sigma^{-1} J_i^+ \sigma = J_{i+1}^- .$$

Critère 3. — *Il existe une racine* $r \in \Phi^+$ *non multipliable telle que*

(i) $J_i^+ \cap X_r = x_r(\mathfrak{p}^{t+1})$ *et* $J_{i+1}^+ = x_r(\mathfrak{p}^t) J_i^+$,

$J_{i+1}^- \cap X_{-r} = x_{-r}(\mathfrak{p}^u)$ *et* $J_i^- = x_{-r}(\mathfrak{p}^{u-1}) J_{i+1}^-$;

(ii) $h_r(\mathfrak{o}^\times) \subset J_M$ *et la restriction de* $\tau_M \circ h_r$ *à* $\mathfrak{o}^\times$ *est multiple d'un caractère* χ_r *tel que* $\min\{n \in \mathbb{N}^* / \chi_r(1+\mathfrak{p}^n) = 1\} = t + u$.

Démonstration. — Soit (π, V) une représentation de G. D'après [Bl2, I. prop.1], il suffit d'étudier pour chaque $i \in \mathbb{N}$, l'injectivité de l'opérateur $\mathfrak{N}_i^\pi$ défini sur la composante τ_i-isotypique V^{τ_i} par

$$\mathfrak{N}_i^\pi(w) = \int_{J_i^-} \pi(y) dy \int_{J_{i+1}^+} \pi(n) w dn , \quad w \in V^{\tau_i}.$$

Le théorème 1 (resp. les théorème et proposition 2) de [Bl2, I] montre que le critère 1 (resp. critère 2) est une condition suffisante.

Plaçons-nous maintenant dans la situation du critère 3. Les conditions (i) permettent de faire le même calcul que celui de la démonstration de la proposition 5 de [Bl2, II]. On obtient ainsi que pour tout $w \in V^{\tau_i}$,

$$\mathfrak{N}_i^\pi(w) = c \, \widetilde{\mathfrak{N}_i^\pi}(w) \quad (c \text{ constante non nulle})$$

où $\widetilde{\mathfrak{N}_i^\pi}$ est associé à la représentation lisse $\widetilde{\pi} = \pi \circ \zeta_r$ de $SL_2(F)$ et aux paires $(\widetilde{J}_i = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^{t+1} \\ \mathfrak{p}^{u-1} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix}, \widetilde{\tau}_i = \tau_i \circ \zeta_r)$ et $(\widetilde{J}_{i+1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^t \\ \mathfrak{p}^u & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix}, \widetilde{\tau}_{i+1} = \tau_{i+1} \circ \zeta_r)$. Grâce à la condition (ii), on conclut comme dans la démonstration sus-citée. □

I.4. Paires couvrantes et maximalité.

Nous regroupons dans ce paragraphe quelques résultats utiles sur les paires couvrantes; les notations sont celles de I.3.

Le premier résultat précise la notion intuitive suivante : une paire décomposée, pour être couvrante, doit au moins être maximale.

LEMME 4.1. — *Soient* (J_1, τ_1) *et* (J_2, τ_2) *deux paires décomposées au-dessus de* (J_M, τ_M) *relativement à* P, *telles que* $J_1 \cap N^- = J_2 \cap N^-$ *et* $J_1 \cap N^+ \subsetneq J_2 \cap N^+$. *Alors* (J_1, τ_1) *n'est pas une paire couvrante de* (J_M, τ_M).

Démonstration. — En vertu de [BK2], Théorème 7.9, il suffit d'exhiber une représentation lisse (π, V) de G pour laquelle la restriction de Jacquet r_{N^+} n'est pas injective sur V^{τ_1}, la composante isotypique de type τ_1 de V sous l'action de J_1. Prenons $\pi = \mathrm{Ind}_{J_1}^G \tau_1$ et notons V son espace, W celui de τ_M, τ_1 et τ_2, enfin U l'espace de la représentation $\mathrm{Ind}_{J_1}^{J_2} \tau_1$ de J_2, considéré comme un sous-espace de V via l'injection canonique. Il suffit de montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi : U^{\tau_1} &\longrightarrow U \\ v &\longmapsto \phi(v) = \int_{J_2^+} \pi(n)\, v\, dn \end{aligned}$$

n'est pas injective. D'après [Bl1], lemme 2, ϕ est un opérateur d'entrelacement pour l'action de J_1 sur U^{τ_1} et U et l'image de ϕ est contenue dans U^{τ_2}. Par réciprocité de Frobenius la multiplicité de τ_2 dans U est 1 : U^{τ_2} est une représentation irréductible de J_2 équivalente à τ_2, sa restriction à J_1 est donc une représentation irréductible de J_1 équivalente à τ_1, et on aura gagné si on montre que la multiplicité de τ_1 dans U^{τ_1} est au moins 2. Or cela découle de

$$\mathrm{Hom}_{J_2}(\mathrm{Ind}_{J_1}^{J_2} \tau_1, \mathrm{Ind}_{J_1}^{J_2} \tau_1) \simeq \mathrm{Hom}_{J_1}(\tau_1, (\mathrm{Ind}_{J_1}^{J_2} \tau_1)_{|J_1})$$

puisque $\mathrm{Ind}_{J_1}^{J_2} \tau_1$ n'est pas irréductible, τ_1 se prolongeant à J_2. □

Complétons ce lemme par une remarque :

4.2. — *Soient* $(J_1 = J^- J_M J_1^+, \tau_1)$ *et* $(J_2 = J^- J_M J_2^+, \tau_2)$ *deux paires décomposées au-dessus de* (J_M, τ_M) *relativement à* P, *et soit* H^+ *le sous-groupe de* N^+ *engendré par* J_1^+ *et* J_2^+. *Alors* $J^- J_M H^+$ *est un groupe auquel la représentation* τ_M *se prolonge en une représentation triviale sur* J^- *et* H^+.

En effet J_M normalise H^+ et le produit H^+J^- est, comme $J_1^+J^-$ et $J_2^+J^-$, contenu dans $J^- \ker \tau_M H^+$.

Le deuxième résultat a trait au choix du type (J_M, τ_M) au-dessus duquel on cherche à construire des paires couvrantes : dans la situation de (1.1) par exemple, on a mentionné $[\frac{n\mathfrak{e}}{2}]$ paires $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ possibles et il s'avère que toute construction de paire couvrante de $(J_{M,0}, \tau_{M,0})$ fournit une paire couvrante de $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ pour $m \leqslant [\frac{n\mathfrak{e}}{2}]$.

PROPOSITION 4.3. — *Soit K_M un sous-groupe ouvert compact de J_M et θ_M une représentation lisse irréductible de K_M telle que la représentation induite de θ_M à J_M soit isotypique de type τ_M.*

1. *Soit $(J = J^- J_M J^+, \tau)$ une paire décomposée au-dessus de (J_M, τ_M) relativement à P.*
   a) *Le produit $J^- K_M J^+ = K$ est un groupe et θ_M s'y prolonge en une représentation θ telle que (K, θ) soit une paire décomposée au-dessus de (K_M, θ_M) relativement à P.*
   b) *Si (J, τ) est une paire couvrante de (J_M, τ_M) dans G relativement à P, alors (K, θ) est une paire couvrante de (K_M, θ_M) dans G relativement à P.*
2. *Soit $(K = J^- K_M J^+, \theta)$ une paire décomposée au-dessus de (K_M, θ_M) relativement à P, telle que J_M normalise J^- et J^+.*
   a) *Le produit $J^- J_M J^+ = J$ est un groupe et τ_M s'y prolonge en une représentation τ telle que (J, τ) soit une paire décomposée au-dessus de (J_M, τ_M) relativement à P.*
   b) *Si (K, θ) est une paire couvrante de (K_M, θ_M) dans G relativement à P, alors (J, τ) est une paire couvrante de (J_M, τ_M) dans G relativement à P.*

Démonstration. — 1.a) et 2.a) Par hypothèse K_M et J_M normalisent J^+ et J^- : il suffit de montrer que le produit J^+J^- est contenu dans $J^- \ker \theta_M J^+$ pour 1, dans $J^- \ker \tau_M J^+$ pour 2, sachant qu'il est contenu dans le premier pour 2, dans le second pour 1. Or le noyau de τ_M est celui de la représentation induite de θ_M à J_M, soit

$$\ker \tau_M = \bigcap_{s \in J_M / K_M} (\ker \theta_M)^s.$$

En particulier $\ker \tau_M$ est contenu dans $\ker \theta_M$ d'où 1.a). Pour 2.a), la normalisation de J^+ et J^- par J_M entraîne : $J^+J^- \subset J^-(\ker \theta_M)^s J^+$

pour tout s dans J_M ; l'écriture d'un élément de J^+J^- dans le produit N^-MN^+ étant unique, la composante en M d'un tel produit appartient bien à $\ker \tau_M$.

1.b) Il suffit de montrer que pour toute représentation lisse (π, V) de G on a l'inclusion entre composantes isotypiques : $V^\theta \subset V^\tau$. Les sous-espaces vectoriels V^θ et V^τ de V sont tous deux contenus dans le sous-espace vectoriel W formé des éléments de V sur lesquels J^+ et J^- agissent trivialement; c'est un sous-espace stable par l'action de J_M et on a $V^\theta = W^{\theta_M}$ et $V^\tau = W^{\tau_M}$. Or W^{θ_M} est engendré par les images des entrelacements $f \in \mathrm{Hom}_{K_M}(\theta_M, W)$ et de même pour W^{τ_M} ; un tel entrelacement f se prolonge de manière unique en un entrelacement $F \in \mathrm{Hom}_{J_M}(\mathrm{Ind}_{K_M}^{J_M}\theta_M, W)$, dont l'image est isotypique de type τ_M sous J_M, donc W^{θ_M} est contenu dans W^{τ_M}.

2.b) On garde les notations de 1.b), on veut cette fois montrer, d'après [BK2], Théorème 7.9, que

$$\begin{aligned} q:\ \mathrm{Hom}_{J_M}(\tau_M\,, W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{J_M}(\tau_M\,, V_{N^+}) \\ f &\longmapsto r_{N^+} \circ f \end{aligned}$$

est *injectif.* Soit un homomorphisme non nul $j \in \mathrm{Hom}_{K_M}(\theta_M, \tau_M)$. Si $q(f) = 0$ alors $r_{N^+} \circ f \circ j = 0$ et comme $q : \mathrm{Hom}_{K_M}(\theta_M\,, W) \to \mathrm{Hom}_{K_M}(\theta_M\,, V_{N^+})$ est injectif par hypothèse on en déduit $f \circ j = 0$, d'où $f = 0$ puisque l'image de j engendre l'espace de τ_M sous l'action de J_M. $\square$

Comme nous le verrons au paragraphe III, il arrive que l'on obtienne une paire couvrante de $(J_{M,[\frac{n}{2}]}, \tau_{M,[\frac{n}{2}]})$ – dans les notations de (1.1) avec $\mathfrak{e} = 1$ – alors qu'il n'existe pas de paire couvrante de $(J_{M,[\frac{n}{2}]-1}, \tau_{M,[\frac{n}{2}]-1})$.

II. Types induits de M_β.

Dans ce paragraphe, on identifie $M = M_\beta$ et $F^\times \times SL_2(F)$ grâce à l'isomorphisme $h_{2\alpha+\beta} \times \zeta_\beta : F^\times \times SL_2(F) \to M$.

Fixons (J_M, τ_M) un type dans M de la forme (I.2.2). Pour la première étape (I.3), on construit une "bonne" famille de paires décomposées au-dessus de (J_M, τ_M), c'est-à-dire vérifiant les conditions (I.3.1-I.3.3), à l'aide des fonctions concaves sur le système de racines Φ. Cette méthode est déjà décrite dans [Bl2]. Nous omettrons donc les détails.

II.1. Une famille de paires décomposées.

Considérons une fonction concave v sur Φ à valeurs dans $\mathbb{Z}$; notons, pour $r \in \Phi$, $X_r(v(r))$ le sous-groupe $x_r(\mathfrak{p}^{v(r)})$ et J_v^ϵ ($\epsilon = \pm$) le sous-groupe de N^ϵ : $J_v^\epsilon = \prod_{r \in \Phi^\epsilon - \{\epsilon\beta\}} X_r(v(r))$. D'après [BT] (6.4) et le lemme 1 de [Bl1], une condition suffisante pour que le produit $J_v = J_v^- J_M J_v^+$ soit un groupe est que la fonction v vérifie :

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} v(r) + v(-r) > 0 \text{ pour tout } r \in \Phi - \{\pm\beta\}, \\ v(\beta) \geqslant 0 \text{ et } v(-\beta) \geqslant \mathfrak{e} - 1, \\ v(\alpha) - (\mathfrak{e} - 1) \leqslant v(\alpha + \beta) \leqslant v(\alpha), \\ v(-\alpha) \leqslant v(-\alpha - \beta) \leqslant v(-\alpha) + (\mathfrak{e} - 1). \end{cases}$$

Si v est une telle fonction, on note indifféremment $\begin{bmatrix} v(\alpha) & v(\alpha+\beta) & v(2\alpha+\beta) \\ v(-\alpha) & v(-\alpha-\beta) & v(-2\alpha-\beta) \end{bmatrix}$, ou même $\begin{bmatrix} v(\alpha) & v(2\alpha+\beta) \\ v(-\alpha) & v(-2\alpha-\beta) \end{bmatrix}$ si $v(\alpha) = v(\alpha+\beta)$ et $v(-\alpha) = v(-\alpha-\beta)$, le sous-groupe J_v associé à v et la fonction v elle-même.

Puisque la représentation τ_M est de quasi-conducteur n et que son caractère central est de conducteur l, son noyau contient $H_M(n, l) = h_{2\alpha+\beta}(1 + \mathfrak{p}^l) \times \zeta_\beta(\bar{K}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{e}n})$. Par le lemme 1 de [Bl1], τ_M se prolonge en une représentation τ_v de J_v triviale sur $J_v^\pm$ dès que v satisfait les conditions supplémentaires :

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} v(\beta) = n \text{ et } v(-\beta) = n + (\mathfrak{e} - 1), \\ v(\alpha) + v(-\alpha) \geqslant \max(n, l), \quad v(\alpha+\beta) + v(-(\alpha+\beta)) \geqslant \max(n, l), \\ v(2\alpha+\beta) + v(-(2\alpha+\beta)) \geqslant l, \\ v(\alpha) + v(-(\alpha+\beta)) \geqslant n + (\mathfrak{e} - 1), \quad v(-\alpha) + v(\alpha+\beta) \geqslant n. \end{cases}$$

Lorsque la fonction concave v vérifie toutes les conditions (1.1) et (1.2), (J_v, τ_v) est une paire décomposée au-dessus de (J_M, τ_M) relativement à P.

Il reste à traduire la condition de maximalité (I.3.3) sur la fonction v. On impose :

$$\text{(1.3)} \qquad v(\alpha) + v(-\alpha) = \max(n, l), \quad v(2\alpha+\beta) + v(-(2\alpha+\beta)) = l.$$

Par la suite, on note $k = \max(n, l)$.

Exemples de fonctions concaves satisfaisant (1.1) – (1.3).

(1.4) *Cas non ramifié*, c'est-à-dire $\mathfrak{A} = M_2(\mathfrak{o})$ ou $\mathfrak{e} = 1$.

Si $l \geqslant 2$, considérons un entier $i \in \mathbb{N}$ écrit sous la forme $i = 3t + r$ avec $r, t \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < 3$. On définit la fonction concave v_i sur Φ par : $v_i = \begin{bmatrix} -t & -(k-l)-2t-r \\ k+t & k+2t+r \end{bmatrix}$.

Si $l = 1$, on écrit $i \in \mathbb{N}$ sous la forme $i = 2t + r$ avec $0 \leqslant r < 2$. On définit v_i par : $v_i = \begin{bmatrix} -(t-1) & -(n-3)-2t-r \\ n+(t-1) & n+2(t-1)+r \end{bmatrix}$.

(1.5) *Cas ramifié*, c'est-à-dire $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{pmatrix}$ ou $\mathfrak{e} = 2$.

Si $l \geqslant n + 1$, pour un entier $i \in \mathbb{N}$ écrit sous la forme $i = 4t + r$ avec $0 \leqslant r < 4$, la fonction v_i est donnée par : $\begin{bmatrix} -t & -t & -(2t+r) \\ l+t & l+t & l+(2t+r) \end{bmatrix}$ si $r = 0$ ou 1, $\begin{bmatrix} -t & -t-1 & -(2t+r)+1 \\ l+t & l+t+1 & l+(2t+r)-1 \end{bmatrix}$ si $r = 2$ ou 3.

Si $1 < l \leqslant n$, pour un entier $i \in \mathbb{N}$ écrit sous la forme $i = 4t+r$ avec $0 \leqslant r < 4$, la fonction v_i est donnée par : $\begin{bmatrix} -t & -t & -(2t+r)-(n+1-l) \\ n+t & n+t+1 & n+1+(2t+r) \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -t-(r-2) & -t-1 & -2t-1-(n+1-l) \\ n+t+1 & n+t+r-1 & 2t+n+2 \end{bmatrix}$ selon que $r < 2$ ou non.

Si $l = 1$, pour un entier $i \in \mathbb{N}$ écrit sous la forme $i = 2t+r$ avec $0 \leqslant r < 2$, la fonction v_i est donnée par : $v_i = \begin{bmatrix} -t & -t-r & -(2t+r)-n \\ n+t+r & n+t+1 & n+1+(2t+r) \end{bmatrix}$.

On obtient immédiatement

(1.6) *Soient* (J_M, τ_M) *un type de la forme* (I.2.2) *où* $\mathfrak{A}$ *est* $M_2(\mathfrak{o})$ *ou* $\begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{pmatrix}$ *et* $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *la suite de fonctions définie en* (1.4) *ou* (1.5) *selon* $\mathfrak{A}$. *On note* $J_i = J_{v_i}$ *le sous-groupe associé à* v_i.

Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, τ_M *se prolonge trivialement à* J_i *en une représentation* τ_i *et la suite de paires* $(J_i, \tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *est une suite de paires décomposées au-dessus de* (J_M, τ_M) *relativement à* P *satisfaisant* (I.3.2).

L'étape suivante (étape 2 de I.3) consiste à vérifier pour chaque passage de i à $i+1$ l'un des critères énoncés en I.3 afin d'obtenir, grâce au théorème I.3.4 le résultat :

PROPOSITION 1.7. — *Soient* (J_M, τ_M) *un type de la forme* (I.2.2) *et* $(J_i, \tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *la suite de paires décomposées décrite en* (1.6). *Alors,* $(J_i, \tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *est une suite de paires couvrantes de* (J_M, τ_M) *relativement à* P.

On distingue alors les deux cas, non ramifié (II.2) et ramifié (II.3).

II.2. Démonstration dans le cas non ramifié.

On considère un type (J_M, τ_M) de la forme (I.2.2) avec $\mathfrak{A} = M_2(\mathfrak{o})$.

Cas où $l \geqslant 2$. Nous utilisons le critère 1 à chaque pas, c'est-à-dire que nous déterminons pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $x \in J_{i+1}^+ - J_i^+$, un sous-groupe fermé $H_{i,x}$ de J_i^- dont le conjugué $x^{-1}H_{i,x}\,x$ soit un sous-groupe de J_i n'ayant aucun vecteur fixe non nul dans la représentation τ_i.

Rappelons qu'un tel sous-groupe ne dépend que de la classe à droite de x modulo J_i^+ et que son existence ne dépend que de la classe de conjugaison sous J_M de x ([Bl2]).

Le premier rappel permet de se restreindre aux $x \in X_{\alpha}(-t-1)\, X_{\alpha+\beta}(-t-1)$ si $i \equiv 2$ [3], $x \in X_{2\alpha+\beta}(-(k-l)-2t-r-1)$ sinon.

Le deuxième rappel permet de se restreindre aux $x \in X_{\alpha+\beta}(-t-1)$ si $i \equiv 2$ [3] car $X_{\alpha}\, X_{\alpha+\beta}$ s'identifie à $F \times F$ et l'action par conjugaison de J_{M_β} sur $X_{\alpha}\, X_{\alpha+\beta}$ se traduit en l'action naturelle de $\mathfrak{o}^{\times} \times SL_2(\mathfrak{o})$ sur $F \times F : (\lambda, g)\cdot(a,b) = (\lambda a, \lambda b)g^{-1}$.

Si $i \not\equiv 2\,[3]$, $x = x_{2\alpha+\beta}(c)$ où $\mathrm{val}(c) = -(k-l)-2t-r-1$. Considérons le sous-groupe fermé $H_{i,x} = X_{-(2\alpha+\beta)}(k+2t+r)$ de J_i^-. Si $y = x_{-(2\alpha+\beta)}(v) \in H_{i,x}$, alors

$$x^{-1}yx = h_{2\alpha+\beta}(1-cv)x_{-(2\alpha+\beta)}(v(1-cv))x_{2\alpha+\beta}(-c^2v(1-cv)^{-1})$$

appartient à $J_M J_i^- J_i^+$ puisque v est dans $\mathfrak{p}^{k+2t+r}$. Donc $x^{-1}H_{i,x}x \subset J_i$ et $\tau_i(x^{-1}yx) = \tau_M(h_{2\alpha+\beta}(1-cv)) = \chi(1-cv)$. Comme $v \mapsto cv$ définit une bijection de $\mathfrak{p}^{k+2t+r}$ sur $\mathfrak{p}^{l-1}$, aucun vecteur ne peut être fixe sous $x^{-1}H_{i,x}x$ dans la représentation τ_i.

Si $i \equiv 2\,[3]$, $x = x_{\alpha+\beta}(c)$ où $\mathrm{val}(c) = -t-1$ et nous considérons le sous-groupe fermé $H_{i,x} = X_{-(\alpha+\beta)}(k+t)$ si $l > n$ ou $H_{i,x} = X_{-\alpha}(k+t)$ si $l \leqslant n$. Quand $l > n$, $y \in H_{i,x}$ est de la forme $x_{-(\alpha+\beta)}(v)$, $v \in \mathfrak{p}^{l+t}$, et

$$\begin{aligned}
&x^{-1}yx = h_{\alpha+\beta}(1-cv)x_{-(\alpha+\beta)}(v(1-cv))x_{\alpha+\beta}(-c^2v(1-cv)^{-1}),\\
&\tau_i(x^{-1}yx) = \tau_M(h_{\alpha+\beta}(1-cv)) = \chi(1-cv)\tau\left(\begin{pmatrix} 1-cv & 0 \\ 0 & (1-cv)^{-1}\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Or, cv parcourt $\mathfrak{p}^{l-1}$ quand v parcourt $\mathfrak{p}^{l+t}$ et $h_\beta(1+\mathfrak{p}^{l-1})$ est contenu dans $H_M(n,l)$ car $l > n$. On conclut alors comme précédemment.

Quand $l \leqslant n$, si $y = x_{-\alpha}(v) \in H_{i,x}$ alors $x^{-1}yx = x_\beta(2cv)y$ et $\tau_i(x^{-1}yx) = \tau_{M_\beta}(x_\beta(2cv))$.

Or, $2cv$ parcourt $\mathfrak{p}^{k-1} = \mathfrak{p}^{n-1}$. Puisque τ_i est de défaut 0, sa restriction à $x^{-1}H_{i,x}\,x$ ne contient pas la représentation triviale. Ainsi, $x^{-1}H_{i,x}\,x$ est un sous-groupe de J_i n'ayant aucun vecteur fixe non nul dans la représentation τ_i.

Nous avons donc vérifié le critère 1 pour chaque paire (J_i, τ_i) de la proposition quand $l \geqslant 2$.

Cas où $l = 1$. Si i est pair, on se trouve dans la situation du critère 3. En effet,

$$J_i^- = x_{-(2\alpha+\beta)}(\mathfrak{p}^{(i+k-2)})J_{i+1}^- \qquad \text{et } J_i^- \cap x_{-(2\alpha+\beta)}(\mathfrak{p}^{i+k-2}) = x_{-(2\alpha+\beta)}(\mathfrak{p}^{(i+k-1)}),$$

$$J_{i+1}^+ = x_{(2\alpha+\beta)}(\mathfrak{p}^{(-i-k+2)})J_i^+ \qquad \text{et } J_i^+ \cap x_{(2\alpha+\beta)}(\mathfrak{p}^{(-i-k+2)}) = x_{(2\alpha+\beta)}(\mathfrak{p}^{(-i-k+2)+1}).$$

La restriction de $\tau_M \circ h_{2\alpha+\beta}$ à $\mathfrak{o}^\times$ est χ et on a bien $(-i-k+1)+(i+k-1) = 1 = l$.

Si i est impair, on trouve les conditions du critère 2. Pour s'en convaincre, on calcule le support de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(K_i, J_i, \tilde{\tau}_i)$ où K_i est le sous-groupe engendré par J_i et J_{i+1}. Les techniques sont identiques à celles développées (en détail) dans [Bl2], lemmes 6 et 7. On distingue les cas $n = 1$ et $n > 1$.

Quand $n = 1$, on se ramène au cas où $i = 1$ en conjuguant par une puissance convenable de $z = h_{2\alpha+\beta}(\varpi)$ (puisque $z^{-1}J_i z = J_{i+2}$). Le groupe K_1 est le groupe engendré par les $h_r(\mathfrak{o}^\times)$ et $x_r(\mathfrak{o})$, $r \in \Phi$, c'est-à-dire $G(\mathfrak{o})$. Grâce à la décomposition de Bruhat sur le corps résiduel, ramenée aux trois doubles classes du groupe de Weyl modulo le sous-groupe $\left\{1,\ s_\beta = \zeta_\beta\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right\}$, on voit que K_1 est la réunion des doubles classes modulo J_1 de 1, $\sigma = \zeta_{2\alpha+\beta}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $s_\alpha = \zeta_\alpha\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Le critère de Mackey affirme alors que

$$\mathrm{Hom}_{K_1}(\mathrm{Ind}_{J_1}^{K_1}\tau_1, \mathrm{Ind}_{J_1}^{K_1}\tau_1) \simeq \bigoplus_{x \in \{1, \sigma, s_\alpha\}} \mathrm{Hom}_{J_1 \cap x^{-1}J_1 x}(\tau_1, {\tau_1}^x).$$

Mais s_α étant dans la même double classe que $x = x_\alpha(1)$, n'entrelace pas τ_1 car τ_1 est de défaut 0 (il suffit de considérer la restriction de τ_1 et ${\tau_1}^x$ à $X_{-(\alpha+\beta)}$). Ainsi le support de $\mathcal{H}(K_1, J_1, \tilde{\tau}_1)$ est contenu dans $J_1 \cup J_1\sigma J_1$ et il est aisé de vérifier que σ jouit des propriétés énoncées au critère 2.

Quand $n > 1$, on se ramène à l'aide de la conjugaison par une puissance de z, au cas $i = 3$. La fonction concave $v_3 = \begin{bmatrix} -1 & -n \\ n & n+1 \end{bmatrix}$ définit un groupe H_3 avec décomposition d'Iwahori : $H_3 = J_3^- J_M H_3^+$. De plus, l'élément $\sigma = \zeta_{2\alpha+\beta}\left(\begin{pmatrix} 0 & \varpi^{-(n+1)} \\ -\varpi^{n+1} & 0 \end{pmatrix}\right)$ vérifie les conditions du critère 2. On en déduit que le groupe K_3 est égal à $H_3 \cup H_3\,\sigma H_3$. Mais $H_3\,\sigma H_3 = J_3\,\sigma J_3$ et $H_3 = J_3\,H_3^+ = J_3 \cup J_3 x_{\alpha+\beta}(\varpi^{-1})J_3$. Donc K_3 est réunion des doubles classes modulo J_3 de 1, σ et $x_{\alpha+\beta}(\varpi^{-1})$. On raisonne alors comme ci-dessus.

Ceci achève la démonstration du cas non ramifié.

II.3. Démonstration dans le cas ramifié.

C'est la même démarche avec les mêmes arguments que le cas précédent. On les adapte aux nouvelles données : le type (J_M, τ_M) est de la forme I.2.2 avec $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{pmatrix}$ et les paires décomposées sont définies en (1.5). On distingue trois cas : $l \geqslant n+1$, $1 < l \leqslant n$ et $l = 1$.

Cas où $l \geqslant n+1$. On applique le premier critère. Si $i \equiv 0$ ou $2\,[4]$, il suffit de considérer les x de la forme $x = x_{2\alpha+\beta}(u)$ avec u de valuation minimale. On choisit alors $H_{i,x} = X_{-(2\alpha+\beta)} \cap J_i^-$. On montre que $x^{-1}H_{x,i}x \subset J_i$ et que pour tout $y = x_{-(2\alpha+\beta)}(v) \in H_{x,i}$, $\tau_M(x^{-1}yx) = \chi(1-uv)$. Or uv parcourt $\mathfrak{p}^{l-1}$ quand y parcourt $H_{x,i}$: $\tau_{M|x^{-1}H_{i,x}x}$ ne contient pas la représentation triviale.

Si $i \equiv 1\,[4]$, il suffit de considérer les x de la forme $x = x_{\alpha+\beta}(u)$ avec u de valuation $-t-1$, de prendre $H_{i,x} = X_{-(\alpha+\beta)} \cap J_i$ et de procéder comme précédemment.

Si $i \equiv 3\,[4]$, c'est encore le même argument en remplaçant $\alpha+\beta$ par α.

Cas où $1 < l \leqslant n$. On procède comme ci-dessus. Quand $i \equiv 0\,[4]$, la démonstration est celle du cas $l \geqslant n+1$. Elle s'applique aussi quand $i \equiv 3\,[4]$. Si $i \equiv 1\,[4]$ (resp. $i \equiv 2\,[4]$), les x sont de la forme $x_{\alpha+\beta}(u)$ (resp. $x_\alpha(u)$) où u est de valuation minimale, le sous-groupe $H_{i,x}$ est $X_{-\alpha} \cap J_i^-$ (resp. $X_{-(\alpha+\beta)} \cap J_i^-$). Alors la conjuguée par x de τ_i agit sur $H_{i,x}$ via : $x_{-\alpha}(v) \mapsto \tau_M \circ x_\beta(uv)$ (resp. $x_{-(\alpha+\beta)}(v) \mapsto \tau_M \circ x_{-\beta}(uv)$). On conclut grâce à l'hypothèse sur le défaut.

Cas où $l = 1$. Supposons i pair et étudions le support de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(K_i, J_i, \tau_i)$ où K_i est le sous-groupe engendré par J_i et J_{i+1}. On montre tout d'abord que $K_i = J_i \cup J_i x J_i \cup J_i \sigma J_i$ avec $x = x_{\alpha+\beta}(\varpi^{-t-1})$ et $\sigma = \zeta_{2\alpha+\beta}(\begin{pmatrix} 0 & \varpi^{-(2t+n+1)} \\ \varpi^{2t+n+1} & 0 \end{pmatrix})$.

Soit H_i le sous-groupe de K_i défini par la fonction concave $v_i = \begin{bmatrix} -t & -t-1 & -2t-n \\ n+t & n+t+1 & 2t+n+1 \end{bmatrix}$ (qui vérifie bien (1.1)). Alors H_i contient J_i et $H_i = J_i^- J_M H_i^+$ avec $H_i^+ = J_i^+ x_{\alpha+\beta}(\mathfrak{p}^{-t-1})$, d'où $H_i = J_i \cup J_i x J_i$. De plus, puisque σ possède les propriétés énoncées au critère 2, $H_i \cup H_i \sigma H_i$ est un groupe contenant J_i et J_{i+1} qui n'est autre que K_i et $H_i \sigma H_i = J_i \sigma J_i$ (cf. [Bl2], lemme 6). Ensuite, on constate que la double classe $J_i x J_i$ ne peut appartenir au support de $\mathcal{H}(K_i, J_i, \tau_i)$ puisque x n'entrelace pas τ_i (il suffit de considérer la restriction de τ_i et celle de sa conjuguée par x au sous-groupe $X_\alpha \cap J_i^-$. L'hypothèse sur le défaut assure que leur entrelacement est trivial). Ainsi supp $\mathcal{H}(K_i, J_i, \tau_i) \subset J_i \cup J_i \sigma J_i$. C'est le deuxième critère.

Si i est impair, on raisonne de la même manière avec

$$H_i = \begin{bmatrix} -t-1 & -t-1 & -2t-n-1 \\ n+t+1 & n+t+1 & 2t+n+2 \end{bmatrix},$$

$x = x_\alpha(\varpi^{-t-1})$ et $\sigma = \zeta_{2\alpha+\beta}(\begin{pmatrix} 0 & \varpi^{-(2t+n+2)} \\ \varpi^{2t+n+2} & 0 \end{pmatrix})$. □

II.4. Synthèse.

THÉORÈME 4.1. — *Soit $\mathfrak{s}$ une classe d'inertie dans G de la forme $[M_\beta, \pi_{M_\beta}]_G$ où π_{M_β} est une représentation irréductible supercuspidale de M_β obtenue par induction à partir d'une représentation de quasi-conducteur n et de défaut 0 de $F^\times \times \mathfrak{A}^\times$, dont la restriction à $F^\times$ est un caractère de conducteur l. On note $k = \max(n, l)$.*

Soit $(J_{M_\beta}, \tau_{M_\beta})$ un type pour la classe d'inertie $[M_\beta, \pi_{M_\beta}]_{M_\beta}$ dans M_β décrit en (I.2.2). Le produit $J^- J_{M_\beta} J^+$ où

– si $\mathfrak{A} = SL_2(\mathfrak{o})$,

$$J^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{p}^k & 1 & 0 & 0 \\ \mathfrak{p}^k & 0 & 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^k & \mathfrak{p}^k & \mathfrak{p}^k & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J^+ = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{l-k} \\ 0 & 1 & 0 & \mathfrak{o} \\ 0 & 0 & 1 & \mathfrak{o} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

– *si* $\mathfrak{A} = \overline{\begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix}}$,

$$J^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{p}^k & 1 & 0 & 0 \\ \mathfrak{p}^{k+1} & 0 & 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^{k+1} & \mathfrak{p}^{k+1} & \mathfrak{p}^k & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J^+ = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{-1} & \mathfrak{p}^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & \mathfrak{p}^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \mathfrak{o} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{si } l > n \\ \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{l-n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \mathfrak{o} \\ 0 & 0 & 1 & \mathfrak{o} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{si } l \leqslant n \end{cases}$$

est un sous-groupe ouvert compact J de G auquel τ_{M_β} se prolonge en une représentation τ triviale sur J^- et J^+.

La paire (J, τ) ainsi obtenue est un $\mathfrak{s}$-type dans G.

Démonstration. — Dans le cas où $\mathfrak{A} = SL_2(\mathfrak{o})$, on obtient J^- et J^+ en choisissant v_0 si $l \geqslant 2$ et v_2 si $l = 1$ dans la liste (1.4) ; dans le cas où $\mathfrak{A} = \overline{\begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix}}$, $J^\pm$ est $J^\pm_{v_2}$ de la liste (1.5) si $l \geqslant n+1$ et $J^\pm_{v_0}$ de cette même liste si $l \leqslant n$. Le théorème est alors l'énoncé de (1.7) dans ces cas particuliers. □

Remarque. — Soient $(J_{M_\beta}, \tau_{M_\beta})$ et $(J^- J_{M_\beta} J^+, \tau)$ comme dans le théorème précédent. Si τ_{M_β} est l'induite à partir d'un sous-groupe compact ouvert J'_{M_β} d'une représentation irréductible τ'_{M_β} de J'_{M_β}, alors on obtient les mêmes énoncés en remplaçant J_{M_β} et τ_{M_β} par J'_{M_β} et τ'_{M_β} respectivement, ceci en vertu de I.4.2.

III. Types induits du parabolique de Siegel.

Le but de ce paragraphe est de construire des paires couvrantes dans G relativement à P_α des types de $M_\alpha \simeq GL_2(F)$ décrits en (I.1.1). Les sous-groupes de $N^\pm$ construits comme en II à partir de fonctions concaves sur Φ n'y suffisent plus : les paires décomposées obtenues par cette méthode sont souvent trop petites pour être couvrantes. Il nous faudra déterminer systématiquement les sous-groupes ouverts compacts de $N^\pm$ normalisés par les sous-groupes $J_{M,m}$ de I.1.

Il est commode d'utiliser les conventions suivantes. Pour $X \in M_2(F)$, on note X^+ la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$, élément de $GL_4(F)$; on note de même $X^- = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}$. Soit $\Delta_2(F)$ le sous-groupe de $M_2(F)$ formé des matrices dont les coefficients diagonaux sont égaux : $X \mapsto X^+$ et $X \mapsto X^-$ sont des isomorphismes de $\Delta_2(F)$ sur N_α^+ et N_α^- respectivement.

On note $g \mapsto {}^{\mathrm{d}}g$ l'anti-automorphisme involutif de $GL_2(F)$ défini par ${}^{\mathrm{d}}g = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$ si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Pour g élément de $GL_2(F)$ on note $\tilde{g}$ la matrice par blocs $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^{\mathrm{d}}g^{-1} \end{pmatrix}$, élément de G. Alors $g \mapsto \tilde{g}$ est un isomorphisme de $GL_2(F)$ sur M_α par lequel on identifie les deux groupes. L'action par conjugaison de M_α sur N_α^+ et N_α^- est décrite par

(0.1)
$$\tilde{g}X^+\tilde{g}^{-1} = (gX{}^{\mathrm{d}}g)^+, \quad \tilde{g}^{-1}X^-\tilde{g} = ({}^{\mathrm{d}}gXg)^- \quad (X \in \Delta_2(F),\, g \in GL_2(F)\,).$$

Si X et Y sont des éléments de $\Delta_2(F)$ tels que $I + XY$ soit inversible dans $M_2(F)$, on a l'identité par blocs :

$$(0.2) \qquad \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ Y & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Y(I+XY)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I+XY & 0 \\ 0 & {}^{\mathrm{d}}(I+XY)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (I+XY)^{-1}X \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

III.1. Réseaux remarquables du F-espace vectoriel $\Delta_2(F)$.

Commençons par étudier les sous-groupes de $N^\pm$ normalisés par $\widetilde{\mathfrak{o}_E^\times}$ où E est une extension quadratique de F obtenue comme en I.1 : elle est engendrée par un élément δ de $GL_2(F)$ défini à conjugaison près par $K_{\mathfrak{A}}$, que nous pouvons donc supposer de la forme $\delta = \begin{pmatrix} 0 & -e \\ \varpi^\epsilon & f \end{pmatrix}$, avec $e \in \mathfrak{o}_F^\times$ et

- si E est non ramifiée : $\epsilon = 0$, $f \in \mathfrak{o}_F$ et δ engendre $\mathfrak{o}_E$ sur $\mathfrak{o}_F$;
- si E est ramifiée : $\epsilon = 1$ et $f \in \mathfrak{p}_F$.

On décompose d'abord $\Delta_2(F)$ en sous-espaces stables sous l'action de $E^\times$, c'est-à-dire en sous-espaces stables pour les deux actions :

$$\begin{cases} X \mapsto \delta X + X{}^{\mathrm{d}}\delta \\ X \mapsto \delta X{}^{\mathrm{d}}\delta \end{cases} \qquad (X \in \Delta_2(F)).$$

On obtient que $\Delta_2(F)$ est somme directe de Δ de dimension 1 et Π de dimension 2 définis par

$$\Delta = \{X \in \Delta_2(F) /\, gX + X{}^{\mathrm{d}}g = (\mathrm{Tr}g)X \quad \forall g \in E\},$$
$$\Pi = \{X \in \Delta_2(F) /\, gX + X{}^{\mathrm{d}}g = 2gX \quad \forall g \in E\}.$$

On a $gX^{\mathrm{d}}g = N_{E/F}(g)X$ si $X \in \Delta$ et $gX^{\mathrm{d}}g = g^2X$ si $X \in \Pi$.

On a aussi $\Pi = \{X \in \Delta_2(F) / \, gX \in \Delta_2(F) \; \forall g \in E\} = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & a \end{smallmatrix}\right) / \, af + b\varpi^\epsilon + ce = 0\}$: le plan Π est stable par l'action $X \mapsto gX$ de $E^\times$, équivalente à l'action standard de $E^\times$ sur E par multiplication à gauche.

On utilisera la base (X_0, V_0, V_1) de $\Delta_2(F)$ obtenue lors de l'étude ci-dessus :

$$(1.1) \qquad X_0 = \begin{pmatrix} -\dfrac{f}{2} & e \\ \varpi^\epsilon & -\dfrac{f}{2} \end{pmatrix} \text{ base de } \Delta;$$

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 & -e \\ \varpi^\epsilon & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_1 = \varpi^{-\epsilon}\delta V_0 = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ f & -e \end{pmatrix} \text{ base de } \Pi.$$

Passons à l'action de $\widetilde{\mathfrak{o}_E^\times}$. Trouver des sous-groupes ouverts compacts de $N^\pm$ normalisés par $\widetilde{\mathfrak{o}_E^\times}$, c'est trouver des sous-groupes ouverts compacts Γ de $\Delta_2(F)$ stables par $X \mapsto gX^{\mathrm{d}}g$, $g \in \mathfrak{o}_E^\times$. En particulier Γ doit être stable par multiplication à gauche par $(\mathfrak{o}_F^\times)^2$, et comme tout élément du corps résiduel est somme de deux carrés, Γ est un $\mathfrak{o}_F$-réseau de $\Delta_2(F)$. Alors Γ est stable par $\mathfrak{o}_E^\times$ si et seulement si il est stable par $X \mapsto \delta X + X^{\mathrm{d}}\delta$ et $X \mapsto \delta X^{\mathrm{d}}\delta$, $X \in \Delta_2(F)$. Il en est de même de ses projections sur Δ et Π, qui sont donc de la forme $\mathfrak{p}_F^k X_0$ et $\mathfrak{p}_E^j V_1$ $(k, j \in \mathbb{Z})$. En utilisant les deux actions de δ sur Γ, on montre que Γ est somme de ses projections sur Δ et Π dans le cas non ramifié, et vérifie $\delta\mathfrak{p}_E^j V_1 + \varpi\mathfrak{p}_F^k X_0 \subsetneq \Gamma \subset \mathfrak{p}_E^j V_1 + \mathfrak{p}_F^k X_0$ dans le cas ramifié. Finalement :

Lemme 1.2. — *Les sous-groupes ouverts compacts de $N^\pm$ normalisés par $\widetilde{\mathfrak{o}_E^\times}$ sont les sous-groupes $\Gamma^\pm$ où Γ est un $\mathfrak{o}_F$-réseau de $\Delta_2(F)$ de la forme suivante (avec $j, k \in \mathbb{Z}$) :*

(i) *cas non ramifié* $\Gamma = \Gamma_0(j,k) = \mathfrak{p}_E^j V_1 + \mathfrak{p}_F^k X_0 = \mathfrak{p}_F^j V_0 + \mathfrak{p}_F^j V_1 + \mathfrak{p}_F^k X_0$;

(ii) *cas ramifié* $\begin{cases} \Gamma = \Gamma_1(j,k) = \mathfrak{p}_E^j V_1 + \mathfrak{p}_F^k X_0 = \mathfrak{p}_F^{[\frac{j}{2}]} V_0 + \mathfrak{p}_F^{[\frac{j+1}{2}]} V_1 + \mathfrak{p}_F^k X_0 , \\ \Gamma = \mathfrak{p}_E^{j+1} V_1 + \mathfrak{p}_F^{k+1} X_0 + \mathfrak{o}_F(\delta^j V_1 + \lambda\varpi^k X_0) , \quad \lambda \in \mathfrak{o}_F^\times. \end{cases}$

Pour déterminer les sous-groupes de cette forme qui sont normalisés par $\mathfrak{A}^\times$, faisons le lien avec les chaînes de réseaux standard de $M_2(F)$. On note $\mathfrak{A}_0$ l'ordre principal $M_2(\mathfrak{o})$ correspondant au cas non ramifié, $\mathfrak{A}_1$ l'ordre principal $\left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{smallmatrix}\right)$ correspondant au cas ramifié, puis les chaînes de réseaux associées de $M_2(F)$:

$$\mathfrak{P}_0^i = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}^i & \mathfrak{p}^i \\ \mathfrak{p}^i & \mathfrak{p}^i \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{P}_1^i = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}^{[\frac{i+1}{2}]} & \mathfrak{p}^{[\frac{i}{2}]} \\ \mathfrak{p}^{[\frac{i}{2}]+1} & \mathfrak{p}^{[\frac{i+1}{2}]} \end{pmatrix} \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

Les sous-groupes $\widetilde{K_{\mathfrak{A}}^m}$ de I.1 seront notés :

$$\text{si } \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 : \quad K = K_0 = \widetilde{GL_2(\mathfrak{o})}, \quad K_m = \widetilde{\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^m & \mathfrak{p}^m \\ \mathfrak{p}^m & 1+\mathfrak{p}^m \end{pmatrix}} \ (m > 0) ;$$

$$\text{si } \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 : \ K' = K'_0 = \widetilde{\begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix}}, \ K'_{2m} = \widetilde{\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^m & \mathfrak{p}^m \\ \mathfrak{p}^{m+1} & 1+\mathfrak{p}^m \end{pmatrix}} \ (m \geqslant 1),$$

$$K'_{2m+1} = \widetilde{\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p}^{m+1} & \mathfrak{p}^m \\ \mathfrak{p}^{m+1} & 1+\mathfrak{p}^{m+1} \end{pmatrix}} \ (m \geqslant 0).$$

LEMME 1.3.

(i) *Les seuls sous-groupes ouverts compacts de $N^\pm$ normalisés par $\mathfrak{A}_0^\times$ sont les*

$$\Gamma_0(i)^\pm = \Gamma_0(i,i)^\pm = \left(\mathfrak{P}_0^i \cap \Delta_2(F)\right)^\pm \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

(ii) *Les seuls sous-groupes ouverts compacts de $N^\pm$ normalisés par $\mathfrak{A}_1^\times$ sont les*

$$\Gamma_1(i)^\pm = \Gamma_1\left(i, \left[\frac{i}{2}\right]\right)^\pm = \left(\mathfrak{P}_1^i \cap \Delta_2(F)\right)^\pm \quad (i \in \mathbb{Z}),$$

ainsi que les $\left(\mathfrak{P}_0^i \cap \Delta_2(F)\right)^\pm$ et leurs conjugués par $\widetilde{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}}$.

Occupons-nous à présent de la normalisation par les sous-groupes K_m et K'_m.

LEMME 1.4. — *Soit m un entier au moins égal à 1.*

(i) *On a l'inclusion $\mathfrak{P}_0^{\max(j,k)} \cap \Delta_2(F) \subset \Gamma_0(j,k) \subset \mathfrak{P}_0^{\min(j,k)} \cap \Delta_2(F)$.*

Le sous-groupe K_m normalise $\Gamma_0(j,k)^\pm$ si et seulement si $|j-k| \leqslant m$. Son action sur le quotient $\Gamma_0(j,k)/\Gamma_0(\max(j,k))$ est alors triviale.

(ii) *On a l'inclusion*

$$\begin{cases} \mathfrak{P}_1^j \cap \Delta_2(F) \subset \Gamma_1(j,k) \subset \mathfrak{P}_1^{2k+1} \cap \Delta_2(F) \text{ si } k \leqslant \left[\dfrac{j-1}{2}\right], \\ \mathfrak{P}_1^{2k} \cap \Delta_2(F) \subset \Gamma_1(j,k) \subset \mathfrak{P}_1^j \cap \Delta_2(F) \text{ si } k \geqslant \left[\dfrac{j+1}{2}\right]. \end{cases}$$

Le sous-groupe K'_m *normalise* $\Gamma_1(j,k)^{\pm}$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} j-2k-1 \leqslant m & \text{si } k \leqslant \left[\dfrac{j-1}{2}\right], \\ \quad 2k-j \leqslant m & \text{si } k \geqslant \left[\dfrac{j+1}{2}\right]. \end{cases}$$

Son action sur le quotient $\Gamma_1(j,k)/\Gamma_1(\max(j,2k))$ *est alors triviale.*

(iii) *Soit* Γ *un réseau défini comme en* 1.2(ii), *i.e.* $\Gamma_1(j+1,k+1) \subsetneq \Gamma \subset \Gamma_1(j,k)$. *Si* K'_m *normalise* $\Gamma^{\pm}$, *alors il normalise* $\Gamma_1(j,k)^{\pm}$.

III.2. Série non ramifiée : le cas $l \geqslant n$.

Réglons tout d'abord le cas le plus facile, celui d'une représentation lisse irréductible τ_M de quasi-conducteur n et de défaut 0 de $K \simeq GL_2(\mathfrak{o})$, de caractère central χ non trivial sur $1+\mathfrak{p}^{n-1}$ si $n>1$: le conducteur l de χ vérifie $1 \leqslant n \leqslant l$.

Pour $i \in \mathbb{Z}$, les sous-groupes $\Gamma_0(i)^{\pm} = \left(\mathfrak{P}_0^i \cap \Delta_2(F)\right)^{\pm}$ sont normalisés par K (1.3) et l'application de (0.1), (0.2) et de [Bl1], lemme 1, fournit

(2.1) *pour* $i,j \in \mathbb{Z}$ *et* $m \geqslant 1$, *le produit* $\Gamma_0(i)^- K_m \Gamma_0(j)^+$ *est un groupe si* $i+j \geqslant m$;

pour $i,j \in \mathbb{Z}$ *tels que* $i+j \geqslant 1$, *le produit* $\Gamma_0(i)^- K\, \Gamma_0(j)^+$ *est un groupe.*

Proposition 2.2. — *Posons* $J_i = \Gamma_0(i)^- K\, \Gamma_0(l-i)^+$ *avec* $i \in \mathbb{Z}$. *La représentation* τ_M *se prolonge à* J_i *en une représentation* τ_i *telle que la paire* (J_i, τ_i) *soit décomposée par rapport à* (K, τ_M) *relativement à* P. *La suite de paires* $(J_i,\tau_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de paires couvrantes de la paire* (K,τ_M) *relativement à* P.

Démonstration. — Montrons d'abord que τ_M est triviale sur $1+XY$ avec $X \in \Gamma_0(l-i)$, $Y \in \Gamma_0(i)$: comme l est au moins égal à n, les éléments de K_n agissent par un caractère du déterminant qui est, comme χ, trivial sur $1+\mathfrak{p}^l$; or XY est à coefficients dans $\mathfrak{p}^l$.

Montrons à présent que le critère 1 de I.3 est vérifié si $l \geqslant n$ et $l>1$. Si X appartient à $\Gamma_0(l-i-1)$ et Y à $\Gamma_0(i)$, alors $X^+Y^-(-X)^+$ appartient à J_i (noter que $l-1 \geqslant 1$). Le résultat est clair si $l>n$: XY est à coefficients dans $\mathfrak{p}^{l-1} \subset \mathfrak{p}^n$ et $1+XY$ agit donc par le caractère du déterminant ci-dessus qui est, comme χ, non trivial sur $1+\mathfrak{p}^{l-1}$.

Si $l = n$ et $l > 1$, trouver un vecteur non nul fixé par les éléments de K_{n-1} de la forme $1 + XY$ avec X, Y comme ci-dessus revient à trouver un caractère de K_{n-1}/K_n figurant dans la restriction de τ_M et trivial sur les $1 + XY$. Écrivons ce caractère sous la forme $1 + XY \mapsto \psi_n(\mathrm{Tr}UXY)$ avec $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Posant $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$, ce caractère s'écrit encore

$$\psi_n[((A + D)a + Bc + Cb)x + (Ca + Dc)y + (Ab + Ba)z].$$

S'il est trivial pour tout $Y \in \Gamma_0(i)$, les coefficients de x, y et z sont nuls modulo $\mathfrak{p}^{n-i}$, donc (a, b, c) est solution du système de trois équations linéaires associé, de déterminant $(A+D)(AD-BC)$ non nul modulo $\mathfrak{p}$ vu les hypothèses sur τ_M : U est une unité de l'extension quadratique non ramifiée qu'il engendre, et le centre agit par $(1 + \lambda)I \mapsto \chi(1 + \lambda) = \psi_n((A + D)\lambda)$, non trivial sur $1 + \mathfrak{p}^{n-1}$. C'est donc que X appartient à $\Gamma_0(n - i)$, ce qu'il fallait démontrer.

Reste le cas $l = n = 1$; c'est le critère 2 de I.3 que l'on applique alors. Comme l'action par conjugaison de $\zeta = h_{\alpha+\beta}(\varpi)$ transforme J_i en $\zeta^{-1}J_i\zeta = J_{i+2}$, il nous suffit de travailler sur les paires (J_0, J_1) et (J_1, J_2) ; par conjugaison par l'élément $\begin{pmatrix} \varpi I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ de $GSp_4(F)$, on se ramène au seul cas $i = 0$. Le sous-groupe engendré par $J_0 = \Gamma_0(0)^-K\Gamma_0(1)^+$ et $J_1 = \Gamma_0(1)^-K\Gamma_0(0)^+$ est $Sp_4(\mathfrak{o})$, compact, réunion de trois doubles classes modulo J_0, celle de 1, celle de s_β, qui ne peut pas entrelacer τ_M vu l'hypothèse de défaut 0 puisque $s_\beta X_\alpha(\mathfrak{o})s_\beta^{-1} = X_{\alpha+\beta}(\mathfrak{o})$, enfin celle de w_0, l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl, qui envoie chaque racine sur son opposée et vérifie donc les conditions du critère 2. $\square$

III.3. Série non ramifiée : le cas $1 < l < n$.

On travaille dans ce paragraphe et le suivant sur une représentation lisse irréductible τ_M de quasi-conducteur $n \geqslant 2$ et de défaut 0 de $K \simeq GL_2(\mathfrak{o})$, triviale sur K_n et de caractère central χ trivial sur $1 + \mathfrak{p}^{n-1}$: le conducteur l de χ vérifie $1 \leqslant l < n$. La démonstration de la proposition 2.2 ne se généralise pas à ce cas : le fait que le caractère central soit non trivial sur $1 + \mathfrak{p}^{n-1}$ y joue un rôle déterminant. Comme la normalisation par K est une condition très forte qui n'autorise que les $\Gamma_0(k)^\pm$ pour sous-groupes J_i^+ ou J_i^-, on cherche à fabriquer des paires couvrantes des $\mathfrak{s}$-types $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ associés à τ_M, décrits en (I.1.1), pour certains m, $\left[\frac{n}{2}\right] \geqslant m \geqslant 1$.

Remarquons que la restriction de τ_M à K_n est un caractère du déterminant trivial sur $(1+\mathfrak{p}^n)I$ comme χ, de sorte que le caractère χ_0 utilisé en I.1 est ici trivial. Les paires $(J_{M,m},\tau_{M,m})$ sont définies en I.1 en fonction du choix d'un élément δ, engendrant une extension quadratique non ramifiée E, tel que la restriction de τ_M à $K_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ contienne le caractère

$$\psi_{n,\delta} : g \mapsto \psi \circ \mathrm{Tr}(\varpi^{1-n}\delta(g-1)), \quad g \in K_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}.$$

Comme en III.1, on choisit δ de la forme $\delta = \begin{pmatrix} 0 & -e \\ 1 & f \end{pmatrix}$ avec $e \in \mathfrak{o}^\times$, $-e \notin {\mathfrak{o}^\times}^2$; on a $\mathrm{val} f \geqslant 1$ car $l < n$. Le caractère $\psi_{n,\delta}$ ne dépend que de la classe $\delta + {\mathfrak{P}_0}^{n-\left[\frac{n+1}{2}\right]}$; on peut donc supposer $f=0$ si $\mathrm{val} f \geqslant \left[\dfrac{n}{2}\right]$. Comme la restriction de χ à $1+\mathfrak{p}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ est $\lambda \mapsto \psi_n(f(\lambda-1))$, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}\delta = 0 \quad (\text{i.e. } f=0 \text{ ou encore } \mathrm{val} f = +\infty) & \text{si} \quad l \leqslant \left[\dfrac{n+1}{2}\right], \\ \mathrm{val}\,(\mathrm{Tr}\delta) = n-l \quad (\text{i.e. } \mathrm{val} f = n-l) & \text{si} \quad l > \left[\dfrac{n+1}{2}\right]. \end{cases}$$

Les conditions de normalisation des sous-groupes de $N^\pm$ par $J_{M,m} = \mathfrak{o}_E^\times K_m$ sont données par (1.2) et (1.4). Lorsque $f=0$ l'élément X_0 de la base des réseaux $\Gamma_0(i,k)$ coïncide avec l'élément $\xi = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui vérifie $\xi^2 = eI$ et $\mathrm{Tr}\delta\xi = 0$. Dans tous les cas

$$\text{(3.0)} \qquad X_0 = \xi - \frac{f}{2}I, \quad \text{et} \quad \Gamma_0(i,k) = \mathfrak{p}_E^i V_0 + \mathfrak{p}_F^k \xi \iff i-k \leqslant \mathrm{val} f.$$

Or

– on recherche des paires couvrantes de $(J_{M,m},\tau_{M,m})$ pour m aussi petit que possible, la proposition I.4.3 permettant toujours d'augmenter m jusqu'à $\left[\frac{n}{2}\right]$;

– par (2.1) le produit $\Gamma_0(i)^- J_{M,m} \Gamma_0(n-i)^+$ fournit toujours une paire décomposée; prenant en compte le lemme I.4.1 on cherche à grossir les facteurs en N^+ et N^- de ce produit jusqu'à obtenir une paire couvrante, si c'est possible.

On se restreint donc dans ce qui suit à la recherche de paires couvrantes (J,τ) de $(J_{M,m},\tau_{M,m})$ où J a la forme (imposée dans toute la suite) :

$$\text{(3.1)} \quad J = \Gamma_0(i,k)^- J_{M,m} \Gamma_0(i',k')^+, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 \leqslant i-k \leqslant \min(m, n-l), \\ 0 \leqslant i'-k' \leqslant \min(m, n-l). \end{cases}$$

On s'appuie sur l'étude du noyau du bi-caractère $(X,Y) \mapsto \psi_n(\mathrm{Tr}\delta XY)$ sur $\Delta_2(F)$. Commençons par des faits élémentaires :

$$\begin{aligned} I + \mathfrak{p}^{k'}\xi\, \mathfrak{p}^{k}\xi = (1+\mathfrak{p}^{k+k'})\, I \ &\subset \ker \tau_{M,m} \iff k+k' \geqslant l \\ I + \mathfrak{p}_E^{i'} V_0\, \mathfrak{p}_E^{i} V_0 \ &\subset \ker \tau_{M,m} \iff i+i' \geqslant n \\ \text{précisément : } \ X \in \mathfrak{p}_E^{i'} V_0,\ X \notin \mathfrak{p}_E^{i'+1} V_0 \ &\Longrightarrow \mathrm{Tr}(\delta X \mathfrak{p}_E^{i} V_0) = \mathfrak{p}^{i+i'}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Pour le premier on rappelle que l est le conducteur du caractère central de $\tau_{M,m}$; si $l=1$ il faut encore remarquer que $(1+\mathfrak{o})\, I$ contient des éléments non inversibles.

Pour le troisième on pose $X = aV_0 + bV_1$, $Y = cV_0 + dV_1$, avec $a, b \in \mathfrak{p}^{i'}$, $c, d \in \mathfrak{p}^{i}$. De $\mathrm{Tr}\delta \in \mathfrak{p}$ et $V_0^2 = -eI$ on tire

$$\mathrm{Tr}\delta^2 V_0^2 \equiv 2e^2\ [\mathfrak{p}]\,,\ \ \mathrm{Tr}(\delta V_0)^2 = \mathrm{Tr} V_1^2 = 2e^2,\ \ \mathrm{Tr}\delta V_1^2 \equiv 0\ [\mathfrak{p}]\,.$$

Cela implique $\mathrm{Tr}\delta XY \equiv 2e^2(ad+bc)\left[\mathfrak{p}^{i+i'+1}\right]$ d'où le résultat. La seconde assertion en découle : le caractère $\psi_{n,\delta}$ est non trivial sur $I + \mathfrak{p}_E^{i'} V_0\, \mathfrak{p}_E^{i} V_0$ si $\left[\frac{n+1}{2}\right] \leqslant i+i' < n$; la réciproque provient de $\mathfrak{P}_0^{i'}\, \mathfrak{P}_0^{i} = \mathfrak{P}_0^{i+i'}$.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\delta\xi\, \Gamma_0(i) = \mathrm{Tr}\delta\, \Gamma_0(i)\, \xi = \mathfrak{p}^{i+\mathrm{val}\, f} \\ &I + \Gamma_0(i',k')\, \Gamma_0(i,k)\ \subset \ker\tau_{M,m} \iff i+i' \geqslant n \text{ et } k+k' \geqslant l, \\ &\quad \text{et on a alors : } I + \Gamma_0(i',k')\, \Gamma_0(i,k)\ \subset (1+\mathfrak{p}^l) K_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \cap \ker \tau_{M,m} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Le premier fait découle du calcul suivant :

$$\mathrm{Tr}\delta V_0 \xi = ef = -\mathrm{Tr}\delta\xi V_0,\ \ \mathrm{Tr}\delta V_1\xi = ef^2,\ \ \mathrm{Tr}\delta\xi V_1 = 0 \text{ et } \mathrm{Tr}\delta\, \xi^{\,2} = ef.$$

Pour le second, les conditions $i+i' \geqslant n$ et $k+k' \geqslant l$ sont nécessaires par (3.2). Pour montrer qu'elles sont suffisantes, reste à étudier les parties "croisées" $I + \Gamma_0(i')\, \mathfrak{p}^k\, \xi$ et $I + \mathfrak{p}^{k'} \xi\, \Gamma_0(i)$. Les hypothèses (3.1) et $m \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ permettent de vérifier qu'elles appartiennent à $I + \mathfrak{P}_0^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ (en effet $i + k' \geqslant i + i' - \min(m, n-l) \geqslant n - \min(m, n-l) \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$). Le calcul de traces précédent montre alors qu'elles sont dans le noyau de $\psi_{n,\delta}$ (en effet $i + k' + \mathrm{val}\, f \geqslant n$ est toujours vérifié si $f = 0$; sinon cela équivaut à $i + k' \geqslant l$, or $i + k' \geqslant i - k + l \geqslant l$). Finalement $I + \Gamma_0(i',k')\, \Gamma_0(i,k)$ est contenu dans $(1+\mathfrak{p}^l) \ker \psi_{n,\delta}$; comme c'est une partie normalisée par $J_{M,m}$ elle est aussi contenue dans tous les conjugués de $(1+\mathfrak{p}^l)\ker\psi_{n,\delta}$ par $J_{M,m}$, donc dans $\ker\tau_{M,m}$.

On recherche à présent la maximalité, à savoir : $k + k' + 2(i + i')$ minimal. On impose donc la contrainte supplémentaire : $k+k' = l$, $i+i' = n$. Cela implique $i-k+i'-k' = n-l$ et n'est compatible avec les conditions (3.1) que si $m \geqslant \left[\frac{n-l+1}{2}\right]$.

Proposition 3.4. — *Soit m un entier vérifiant $\left[\frac{n-l+1}{2}\right] \leqslant m \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, avec $1 \leqslant l < n$. Pour tout entier r tel que $0 \leqslant r \leqslant m$ et $0 \leqslant n-l-r \leqslant m$, et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, la représentation $\tau_{M,m}$ se prolonge à*

$$J_{j,r,0;m} = \Gamma_0(n+j\,,\, l+j+r)^- J_{M,m}\, \Gamma_0(-j\,,\, -j-r)^+$$

en une représentation $\tau_{j,r,0;m}$ telle que la paire $(J_{j,r,0;m}, \tau_{j,r,0;m})$ soit décomposée par rapport à $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ relativement à P.

Démonstration. — Le produit $J = J_{j,r,0;m}$ est de la forme (3.1) avec $i-k = n-l-r$, $i'-k' = r$, et les conditions de (3.2) et (3.3) sont vérifiées. La normalisation par $J_{M,m}$ de $J \cap N^{\pm} = J^{\pm}$ est déjà assurée dans (3.1). Il reste à établir : $J^+J^- \subset J^- \ker\tau_{M,m} J^+$, au moyen de l'identité (0.2). La partie en M d'un élément X^+Y^- de J^+J^-, soit $I+XY$, appartient à $\ker\tau_{M,m}$ par (3.3). Encore faut-il vérifier que les parties en J^- et J^+, soit $\left(Y(I+XY)^{-1}\right)^-$ et $\left((I+XY)^{-1}X\right)^+$ appartiennent bien à J^- et J^+ respectivement. Or, au centre près, le produit XY appartient à $\mathfrak{P}_0^{\min(k+i',i+k')} = \mathfrak{P}_0^{\min(n-r,l+r)}$; il suffit donc de vérifier les inégalités : $(n-r)+(l+j+r) \geqslant n+j$, $(l+r)+(l+j+r) \geqslant n+j$, $(n-r)+(-j-r) \geqslant -j$ et $(l+r)+(-j-r) \geqslant -j$. Elles se ramènent à $l \geqslant 0$, $r+l \geqslant \dfrac{n}{2}$ et $r \leqslant \dfrac{n}{2}$ qui découlent des hypothèses. □

Proposition 3.5. — *Supposons $1 < l < n$ et fixons un entier m compris entre $\left[\frac{n-l+1}{2}\right]$ et $\left[\frac{n}{2}\right]$. Posons $r = \left[\frac{n-l}{2}\right]$. La suite de paires $(J_{i,r,0;m}, \tau_{i,r,0;m})_{i\in\mathbb{Z}}$ est une suite de paires couvrantes de la paire $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ relativement à P.*

Démonstration. — La proposition 3.4 fournit les paires décomposées $(J_{i,r,0;m}, \tau_{i,r,0;m})$. Posons pour simplifier les notations $J_i = J_{i,r,0;m}$, $\tau_i = \tau_{i,r,0;m}$. Appliquant le critère 1 de I.3, il suffit d'établir pour $X^+ \in J_{i+1}^+$, i.e. $X \in \Gamma_0(-i-1\,,\,-i-1-r)$, que $X^+J_i^-\,(-X)^+$ est un sous-groupe de J_i n'ayant pas de vecteur fixe non nul dans la représentation τ_i.

Remarquons que

$$\Gamma_0(n+i\,,\, l+i+r)^-(1+\mathfrak{p}^{l-1})\, K_{\left[\frac{n}{2}\right]}\, \Gamma_0(-i-1\,,\, -i-1-r)^+$$

est un groupe ; en effet $\Gamma_0(n+i\,,\, l+i+r)^- J_{M,\left[\frac{n-1}{2}\right]}\, \Gamma_0(-i-1\,,\, -i-1-r)^+$ est un groupe par application de 3.4 en remplaçant (n,l) par $(n-1,l-1)$, et les produits $I+XY$ avec $X \in \Gamma_0(-i-1\,,\,-i-1-r)$, $Y \in \Gamma_0(n+i\,,\,l+i+r)$, appartiennent à $(1+\mathfrak{p}^{l-1})(I+\mathfrak{P}_0^{\min(n-r-1,l+r-1)})$, contenu dans $(1+\mathfrak{p}^{l-1})\,K_{[\frac{n}{2}]}$ pour $r=\left[\frac{n-l}{2}\right]$.

On en déduit pour $Y^- \in J_i^-$:

$$X^+Y^- = Y_0^-(\widetilde{I+XY})X_0^+$$

$$\text{avec } Y_0^- \in J_i^-, X_0^+ \in J_{i+1}^+,\ I+XY \in (1+\mathfrak{p}^{l-1})\,K_{[\frac{n}{2}]}.$$

Alors (0.2) $X_0-X = \big((I+XY)^{-1}-I\big)\,X$ appartient à $\Gamma_0(-i\,,\,-i-r)$ car $l-1 \geqslant 1$ et $\left[\frac{n}{2}\right] > r$. Ainsi $X^+Y^-(-X)^+$ appartient à J_i et opère dans τ_i comme $I+XY$.

L'application de J_i^- dans l'image de τ_i donnée par

$$Y^- \longmapsto \tau_i\,(X^+Y^-(X^+)^{-1}) = \tau_{M,m}\,(I+XY)$$

est clairement un homomorphisme; son image a pour image inverse par $\tau_{M,m}$ un sous-groupe H_X de $J_{M,m}$: $H_X = \{(I+XY)h\,/\,Y^- \in J_i^-,\ h \in \operatorname{Ker}\tau_{M,m}\}$. Un vecteur fixe par H_X est fixe par $H'_X = H_X \cap (1+\mathfrak{p}^{l-1})\,K_{[\frac{n+1}{2}]}$ qui opère par une somme de caractères conjugués (sous $J_{M,m}$) de $\chi.\psi_{n,\delta}$. Comme $kH_Xk^{-1} = H_{kXk^{-1}}$ pour tout $k \in J_{M,m}$, on aura gagné si on montre que $\chi.\psi_{n,\delta}$ est non trivial sur H'_X pour tout $X^+ \in J_{i+1}^+ - J_i^+$.

– Si $X \in \mathfrak{p}_E^{-i}V_0+\mathfrak{p}^{-i-1-r}\xi$, on peut supposer, par invariance par J_i^+, que $X \in \mathfrak{p}^{-i-1-r}\xi$, $X \notin \mathfrak{p}^{-i-r}\xi$; alors $I+X\mathfrak{p}^{l+i+r}\xi = (1+\mathfrak{p}^{l-1})I$ est un sous-groupe de H'_X sur lequel χ est non trivial.

– Si $X \in \mathfrak{p}_E^{-i-1}V_0+\mathfrak{p}^{-i-1-r}\xi$, $X \notin \mathfrak{p}_E^{-i}V_0+\mathfrak{p}^{-i-1-r}\xi$, alors $X\mathfrak{p}_E^{n+i}V_0$ est contenu dans $\mathfrak{P}_0^{n-1}+\mathfrak{p}^{-i-1-r}\xi\,\mathfrak{p}_E^{n+i}V_0$. On vérifie d'abord que $\mathfrak{p}^{-i-1-r}\xi\,\mathfrak{p}_E^{n+i}V_0$ est contenu dans $\mathfrak{P}_0^{[\frac{n+1}{2}]}$; par (3.3), comme $(-i-1-r)+(n+i)+\operatorname{val} f$ est toujours au moins égal à n, ce morceau est toujours dans le noyau de $\psi_{n,\delta}$. Autrement dit on peut supposer $X \in \mathfrak{p}_E^{-i-1}V_0$, $X \notin \mathfrak{p}_E^{-i}V_0$, et par (3.2) $I+X\mathfrak{p}_E^{n+i}V_0$ n'est pas contenu dans le noyau de $\psi_{n,\delta}$. □

III.4. Série non ramifiée : le cas $l=1, l<n$.

Sous les hypothèses de III.3 et si $l=1$ les conditions de la proposition 3.4 deviennent :

$$m = \left[\frac{n}{2}\right] \quad \text{et} \quad \left[\frac{n+1}{2}\right]-1 \leqslant r \leqslant \left[\frac{n}{2}\right].$$

Il devient utile de distinguer deux cas en fonction de la parité de n.

PROPOSITION 4.1. — *Supposons* $l = 1$ *et notons* $n' = \left[\frac{n}{2}\right]$. *Pour* $i \in \mathbb{Z}$, *posons :*

– si n est impair : $(J_i, \tau_i) = (J_{i,n',0;n'}, \tau_{i,n',0;n'})$, *soit*

$$J_i = \Gamma_0(n+i\,,\, n'+1+i)^- J_{M,n'}\, \Gamma_0(-i\,,\, -i-n')^+,$$

– si n est pair : $(J_i, \tau_i) = (J_{[\frac{i}{2}],r(i),0;n'}, \tau_{[\frac{i}{2}],r(i),0;n'})$ *avec* $r(i) = n' + \left[\frac{i+1}{2}\right] - \left[\frac{i}{2}\right] - 1$, *soit*

$$J_i = \begin{cases} \Gamma_0(n+t\,,\, n'+t)^- J_{M,n'}\, \Gamma_0(-t\,,\, -t-n'+1)^+ & \text{si } i = 2t, t \in \mathbb{Z}, \\ \Gamma_0(n+t\,,\, n'+t+1)^- J_{M,n'}\, \Gamma_0(-t\,,\, -t-n')^+ & \text{si } i = 2t+1, t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La suite de paires $(J_i, \tau_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de paires couvrantes de* $(J_{M,n'}, \tau_{M,n'})$ *relativement à* P.

Démonstration. — La proposition 3.4 assure que les paires (J_i, τ_i) sont décomposées par rapport à $(J_{M,[\frac{n}{2}]}, \tau_{M,[\frac{n}{2}]}) = (J_M, \tau_M)$. L'action par conjugaison de $z = h_{\alpha+\beta}(\varpi)$, élément central de M, transforme un $J_{j,r,0;m}$ de la proposition 3.4 en $z^{-1}J_{j,r,0;m}z = J_{j+2,r,0;m}$. Ici, si n est pair on a $z^{-1}J_i z = J_{i+4}$, si n est impair $z^{-1}J_i z = J_{i+2}$: on a des filtrations «à 4 pas» ou «à 2 pas». Cette action du centre nous permet ([Bl2] lemme 1) de restreindre notre étude aux plages d'indices, i.e. aux passages i à $i+1$, que voici :

$$n \text{ impair, } n = 2n'+1 \begin{cases} J^-_{-n'-2} = \Gamma_0(n'-1\,,-1)^-, & J^+_{-n'-2} = \Gamma_0(n'+2\,,2)^+, \\ J^-_{-n'-1} = \Gamma_0(n'\,,0)^-, & J^+_{-n'-1} = \Gamma_0(n'+1\,,1)^+, \\ J^-_{-n'} = \Gamma_0(n'+1\,,1)^-, & J^+_{-n'} = \Gamma_0(n'\,,0)^+; \end{cases}$$

$$n \text{ pair, } n = 2n' \begin{cases} J^-_{-2n'-3} = \Gamma_0(n'-2\,,-1)^-, & J^+_{-2n'-3} = \Gamma_0(n'+2\,,2)^+, \\ J^-_{-2n'-2} = \Gamma_0(n'-1\,,-1)^-, & J^+_{-2n'-2} = \Gamma_0(n'+1\,,2)^+, \\ J^-_{-2n'-1} = \Gamma_0(n'-1\,,0)^-, & J^+_{-2n'-1} = \Gamma_0(n'+1\,,1)^+, \\ J^-_{-2n'} = \Gamma_0(n'\,,0)^-, & J^+_{-2n'} = \Gamma_0(n'\,,1)^+, \\ J^-_{-2n'+1} = \Gamma_0(n'\,,1)^-, & J^+_{-2n'+1} = \Gamma_0(n'\,,0)^+. \end{cases}$$

Dans chacun de ces six cas nous voulons montrer qu'un des trois critères de I.3 s'applique. L'énoncé élémentaire suivant va faciliter l'application du critère 2.

LEMME 4.2. — *Pour tout $\mu \in GL_2(F)$ on définit les éléments suivants de $GL_4(F)$:*

$$x_\mu(t) = \begin{pmatrix} I & t\mu \\ 0 & I \end{pmatrix},\ x_{-\mu}(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ t\mu^{-1} & I \end{pmatrix}\ (t \in F);$$
$$n_\mu(t) = \begin{pmatrix} 0 & t\mu \\ -t^{-1}\mu^{-1} & 0 \end{pmatrix}\ (t \in F^\times),$$

qui vérifient :

$$\begin{aligned}
&n_\mu(t) = x_\mu(t)x_{-\mu}(-t^{-1})x_\mu(t) = x_{-\mu}(-t^{-1})x_\mu(t)x_{-\mu}(-t^{-1}),\\
&n_\mu(t)n_\mu(-1) = \begin{pmatrix} tI & 0 \\ 0 & t^{-1}I \end{pmatrix} = h_{\alpha+\beta}(t),\\
&n_\mu(t)^{-1} = n_\mu(-t) = h_{\alpha+\beta}(-1)n_\mu(t) = n_\mu(t)h_{\alpha+\beta}(-1),\\
&n_\mu(t)^{-1}\begin{pmatrix} I & 0 \\ Y & I \end{pmatrix} n_\mu(t) = \begin{pmatrix} I & -t^2\mu Y\mu \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (Y \in M_2(F)),\\
&n_\mu(t)^{-1}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^{\mathrm{d}}g^{-1} \end{pmatrix} n_\mu(t) = \begin{pmatrix} \mu^{\mathrm{d}}g^{-1}\mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu^{-1}g\mu \end{pmatrix} \quad (g \in GL_2(F)).
\end{aligned}$$

Pour $\mu = \xi$ les éléments considérés appartiennent à $Sp_4(F)$ et on a

$$\begin{cases} n_\xi(t)^{-1}\Gamma_0(i\,,k)^- n_\xi(t) = \Gamma_0(i + 2\mathrm{val}\,t\,, k + 2\mathrm{val}\,t)^+ \\ n_\xi(t)^{-1}\Gamma_0(i\,,k)^+ n_\xi(t) = \Gamma_0(i - 2\mathrm{val}\,t\,, k - 2\mathrm{val}\,t)^-. \end{cases}$$

Enfin $n_\xi(t)$ normalise $\widetilde{GL_2}(\mathfrak{o})$ et les sous-groupes $J_{M,m}$ pour $m \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$.

Posons alors $\sigma_0 = n_\xi(-1)$ et $\sigma_1 = n_\xi(\varpi)$. Le lemme 4.2 implique :

$$n \text{ impair, } n = 2n'+1 \begin{cases} \sigma_0^{-1}J^-_{-n'-1}\,\sigma_0 = J^+_{-n'}, & \sigma_0^{-1}J^+_{-n'-1}\,\sigma_0 = J^-_{-n'},\\ \sigma_1^{-1}J^-_{-n'-2}\,\sigma_1 = J^+_{-n'-1}, & \sigma_1^{-1}J^+_{-n'-2}\,\sigma_1 = J^-_{-n'-1}; \end{cases}$$

$$n \text{ pair, } n = 2n' \begin{cases} \sigma_0^{-1}J^-_{-2n'}\,\sigma_0 = J^+_{-2n'+1}, & \sigma_0^{-1}J^+_{-2n'}\,\sigma_0 = J^-_{-2n'+1},\\ \sigma_1^{-1}J^-_{-2n'-2}\,\sigma_1 = J^+_{-2n'-1}, & \sigma_1^{-1}J^+_{-2n'-2}\,\sigma_1 = J^-_{-2n'-1}. \end{cases}$$

Cette liste correspond aux quatre passages de J_i à J_{i+1} auxquels on va appliquer le critère 2. On pose $j = 1$ si $i = -n'-2$ ou $-2n'-2$ et $j = 0$ si $i = -n'-1$ ou $-2n'$, de façon à travailler avec l'élément σ_j adapté à l'indice i considéré. Il reste à montrer que le groupe K_i engendré par J_i et J_{i+1} est compact et que les seuls éléments de K_i entrelaçant la représentation τ_i appartiennent soit à J_i, soit à la double classe de σ_j modulo J_i. Comme dans [Bl2], Lemme 6, on va établir plus précisément :

LEMME 4.3. — *Supposons n impair et $i = -n' - 1$ ou $-n' - 2$, ou n pair et $i = -2n' - 2$ ou $-2n'$, et posons :*

$$H^+_{-n'-2} = \Gamma_0(n'+1\,,2)^+,\ H^+_{-n'-1} = \Gamma_0(n'\,,1)^+ \quad \text{si } n \text{ est impair,}$$
$$H^+_{-2n'-2} = J^+_{-2n'-2},\ H^+_{-2n'} = J^+_{-2n'} \quad \text{si } n \text{ est pair.}$$

a) *Le produit $H_i = J_i^- J_{M,n'} H_i^+$ est un groupe tel que $H_i = J_i H_i^+$ et $J^+_{i+1} = x_\xi(\mathfrak{p}^j)\, H_i^+$.*

b) *Le groupe engendré par J_i et J_{i+1} est $K_i = H_i \cup H_i\,\sigma_j H_i$. De plus :*

$$H_i\,\sigma_j H_i = J_i\,\sigma_j J_i = J_i\,\sigma_j J_i^- = J_i^- J_{M,n'}\,\sigma_j J_i^- .$$

c) *La représentation $\mathrm{Ind}_{J_i}^{H_i}\tau_i$ est irréductible et :*

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{K_i}(\mathrm{Ind}_{J_i}^{K_i}\tau_i,\ \mathrm{Ind}_{J_i}^{K_i}\tau_i)\\ &\qquad\simeq \mathrm{Hom}_{J_{M,n'}}(\tau_{M,n'}, \tau_{M,n'}) \oplus \mathrm{Hom}_{J_{M,n'}}(\tau_{M,n'}, {\tau_{M,n'}}^{\sigma_j}).\end{aligned}$$

Démonstration. — On se place dans le cas où n est impair, $i = -n'-2$ et $j = 1$; les autres cas se traitent de manière identique, et même plus simple si n est pair puisque $H_i = J_i$.

a) Le produit $H_i = \Gamma_0(n'-1,-1)^- J_{M,n'}\Gamma_0(n'+1,2)^+$ est bien un groupe, par application de la proposition 3.4 en remplaçant (n,l) par $(n-1,l)$ – noter que $n \geqslant 3$ –, car la différence $(n'+1)-2 = r$ satisfait les inégalités voulues.

b) Les formules du lemme 4.2 permettent d'exprimer $\sigma_1 = n_\xi(\varpi)$ comme produit $x_{-\xi}(-\varpi^{-1})x_\xi(\varpi^1)x_{-\xi}(-\varpi^{-1})$ donc comme élément de la double classe $J_i^- x_\xi(\varpi^1) J_i^- \subset J_i^- J^+_{i+1} J_i^-$. Il reste à montrer que $H_i \cup H_i\,\sigma_1 H_i$ est un groupe, soit $\sigma_1 H_i\,\sigma_1 \subset H_i \cup H_i\,\sigma_1 H_i$. Comme $\sigma_1 = \sigma_1^{-1} h_{\alpha+\beta}(-1)$ avec $h_{\alpha+\beta}(-1) \in J_{M,n'}$, on a

$$\sigma_1 H_i\,\sigma_1 = \sigma_1 H_i^+\sigma_1^{-1}\ \sigma_1 J_{M,n'}\sigma_1^{-1}\ \sigma_1 J_i^-\sigma_1^{-1} = (\sigma_1 H_i^+\sigma_1^{-1})\, J_{M,n'} J^+_{i+1}$$

soit $\sigma_1 H_i\,\sigma_1 \subset J_i^- J_{M,n'}\,(H_i^+ \cup H_i^+\, x_\xi(\varpi^1\mathfrak{o}^\times)) \subset H_i \cup H_i\, x_\xi(\varpi^1\mathfrak{o}^\times)$.

Soit $u \in \mathfrak{o}_F^\times$, et soit $a \in \mathfrak{o}_E^\times$ tel que $N_{E/F}(a) = u$. On a $\xi = X_0$ i.e. ξ appartient à Δ (en effet $l = 1$ est au plus égal à $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, on a donc supposé $f = 0$), d'où par III.1 : $a\xi^{\mathrm{d}}a = N(a)\xi$, c'est-à-dire $\tilde{a}x_\xi(\varpi^1)\tilde{a}^{-1} = x_\xi(u\varpi^1)$. On en déduit

$$x_\xi(\varpi^1\mathfrak{o}^\times) \subset J_{M,n'}x_\xi(\varpi^1)J_{M,n'} \subset J_{M,n'}J_i^-\sigma_1 J_i^- J_{M,n'},$$

donc que K_i est un groupe. En outre, comme $\sigma_1 H_i^+ \sigma_1^{-1}$ est contenu dans J_i^-, on a

$$H_i \sigma_1 H_i = J_i^- J_{M,n'} H_i^+ \sigma_1 H_i = J_i^- J_{M,n'} \sigma_1 H_i^+ J_{M,n'} J_i^- = J_i^- J_{M,n'} \sigma_1 J_i^- .$$

c) Montrons qu'aucun élément non trivial de $H_i^+ - J_i^+$ n'entrelace la représentation τ_i. Modulo J_i^+ on choisit un tel élément sous la forme X^+ avec $X \in \mathfrak{p}_E^{n'+1} V_0$, $X \notin \mathfrak{p}_E^{n'+2} V_0$. On vérifie comme d'habitude que $X^+ J_i^- (-X^+)^{-1}$ est un sous-groupe de J_i ; il opère non trivialement sous τ_i car $\psi_{n,\delta}$ n'est pas trivial sur $\left\{ I + XY / Y \in \mathfrak{p}_E^{n'-1} V_0 \right\}$ d'après (3.2), d'où l'irréductibilité de l'induite à H_i. La suite est claire. □

Reste les cas $i = -2n' - 3$ ou $i = -2n' - 1$ (n pair) ; pour ceux-ci le critère 1 est vérifié : on a $J_i^- = \Gamma_0(k, s)^-$ et $J_{i+1}^+ = \Gamma_0(k', s')^+$ avec $k + k' = n - 1$, $s + s' = 1$, $k + s' = s + k' = n'$, et on vérifie aisément que $x J_i^- x^{-1}$ est contenu dans J_i pour tout x de J_{i+1}^+. Comme $J_{i+1}^+ = \left[\mathfrak{p}_E^{k'} V_0 + \mathfrak{p}^{s'} \xi\right]^+$ avec $(\mathfrak{p}^{s'} \xi)^+ \subset J_i^+$, on peut choisir des représentants X^+ de J_{i+1}^+ / J_i^+ tels que $X \in \mathfrak{p}_E^{k'} V_0$, $X \notin \mathfrak{p}_E^{k'+1} V_0$. On conclut alors grâce à (3.2), comme dans la preuve de la proposition 3.5, ce qui achève la démonstration de la proposition 4.1. □

III.5. Série non ramifiée : synthèse.

Explicitons pour conclure certains types induits construits ci-dessus :

THÉORÈME 5.1. — *Soit $\mathfrak{s}$ une classe d'inertie dans G de la forme $[M_\alpha, \pi_{M_\alpha}]_G$ où π_{M_α} est une représentation irréductible supercuspidale de M_α obtenue par induction à partir d'une représentation de défaut 0 et de quasi-conducteur n de $F^\times GL_2(\mathfrak{o})$, et soit l le conducteur de son caractère central.*

Soit $(J_{M,m}, \tau_{M,m})_{0 \leqslant m \leqslant [\frac{n}{2}]}$ la famille de types pour la classe d'inertie $[M, \pi_M]_M$ de π_M dans M décrite en I.1 : pour $m \geqslant 1$, $J_{M,m}$ est de la forme $\mathfrak{o}_E^\times K_{\mathfrak{A}}^m$ où E est une extension quadratique non ramifiée de F telle que $E^\times \subset K_{\mathfrak{A}}$; on note ξ un générateur de l'unique droite de $\Delta_2(F)$ stable par conjugaison par $\widetilde{E^\times}$, vérifiant val det $\xi = 0$.

Chacun des produits $J^- J_{M,m} J^+$ caractérisés par

$$\text{si } l \geqslant n : \quad \begin{cases} J^- = \Gamma_0(l)^-, \\ J^+ = \Gamma_0(0)^+, \end{cases} \qquad 0 \leqslant m \leqslant \left[\tfrac{n}{2}\right],$$

$$\textit{si } l < n \ : \quad \begin{cases} J^- = \left(\mathfrak{p}^{\left[\frac{n+l}{2}\right]}\xi + \Gamma_0(n)\right)^- , \\ J^+ = \left(\mathfrak{p}^{-\left[\frac{n-l}{2}\right]}\xi + \Gamma_0(0)\right)^+ , \end{cases} \qquad \left[\tfrac{n-l+1}{2}\right] \leqslant m \leqslant \left[\tfrac{n}{2}\right],$$

est un sous-groupe ouvert compact $J^{(m)}$ de G auquel $\tau_{M,m}$ se prolonge en une représentation $\tau^{(m)}$ triviale sur J^- et J^+.

Les paires $(J^{(m)}, \tau^{(m)})$ ainsi obtenues sont des $\mathfrak{s}$-types dans G.

Démonstration. — On obtient le premier cas en faisant $i = l$ dans la proposition 2.2, le deuxième en faisant $i = 0$ dans la proposition 3.5, le troisième en faisant $i = 0$ dans la proposition 4.1. Bien que les calculs des paragraphes III.1 à III.4 utilisent une forme particulière du générateur δ de E, celle-ci n'est plus nécessaire dans l'énoncé du théorème car la conjugaison par $\mathfrak{A}^\times$ transforme paire couvrante en paire couvrante, et transforme l'élément ξ particulier de III.3, III.4, en un élément ξ comme ci-dessus. □

Nous verrons plus loin, en III.9, que si $l < n$ il n'existe pas de paire couvrante de $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ pour $m < \left[\frac{n-l+1}{2}\right]$.

III.6. Série ramifiée : le cas $l \geqslant n$ et $l \neq 1$.

Dans un premier temps, on considère une représentation irréductible τ_M de quasi-conducteur n, de défaut 0 du sous-groupe K' ; on note χ son caractère central, de conducteur l. À l'aide des lemmes 1.3 et 1.4, de (0.2) et du lemme 1 de [Bl1], on montre :

(6.1) *pour $i, j \in \mathbb{Z}$ et $m \geqslant 1$, le produit $\Gamma_1(i)^- K'_m \Gamma_1(j)^+$ est un groupe si $i + j \geqslant m$;*

pour $i, j \in \mathbb{Z}$ tels que $i + j \geqslant 1$, le produit $\Gamma_1(i)^- K' \Gamma_1(j)^+$ est un groupe.

Proposition 6.2. — *On suppose $l \geqslant n+1$. On définit les groupes J_i, $i \in \mathbb{Z}$, par*

$$J_i = \Gamma_1(i)^- K' \Gamma_1(2l - 1 - i)^+.$$

La représentation τ_M se prolonge à J_i en une représentation τ_i telle que la paire (J_i, τ_i) est décomposée par rapport à (K', τ_M). La suite de paires $(J_i, \tau_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite de paires couvrantes de (J_M, τ_M) dans G relativement à P.

Démonstration. — Comme de coutume, on note $J_i^{\pm} = J_i \cap N^{\pm}$. Les produits J_i sont des groupes par (6.1). Montrer que τ_M s'y prolonge comme indiqué se réduit, par [Bl1] lemme 1, à montrer que $J_i^- H_M J_i^+$ est un groupe pour un sous-groupe convenable H_M du noyau de τ_M : la restriction de τ_M à K'_{2n} est multiple d'un caractère du déterminant de conducteur l, son noyau contient donc K'_{2l-1}, et $J_i^- K'_{2l-1} J_i^+$ est un groupe par (6.1).

On montre qu'on obtient une suite de paires couvrantes en appliquant le critère 1 de I.3. De (6.1) et (0.2) on tire que $J_i^- K'_{2l-2} J_{i+1}^+$ est un groupe et que les conjugués $X^+ J_i^- (X^+)^{-1}$ sont des sous-groupes de $J_i^- K'_{2l-2} J_i^+$: ils opèrent via τ_i par le même caractère du déterminant sur K'_{2l-2} que précédemment. Comme $\Gamma_1(i)$ est un $\mathfrak{o}_F$-réseau, Il suffit de vérifier que pour $X \in \Gamma_1(2l-1-i-1)$, $X \notin \Gamma_1(2l-1-i)$, il existe $Y \in \Gamma_1(i)$ tel que val $\mathrm{Tr}XY = l-1$, ce qui est élémentaire. □

PROPOSITION 6.3. — *On suppose $l = n > 1$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on définit les groupes*

$$J_i = \Gamma_1(2i+1)^- K' \Gamma_1(2n-2i-1)^+.$$

Pour chaque entier i, la représentation τ_M se prolonge en une représentation τ_i de J_i triviale sur J_i^- et J_i^+. La paire décomposée (J_i, τ_i) ainsi obtenue est une paire couvrante de (J_M, τ_M) dans G relativement à P.

Démonstration. — Les produits $\Gamma_1(2i+1)^- K'_{2n} \Gamma_1(2n-2i-1)^+$ sont des groupes par (6.1), d'où les paires décomposées (J_i, τ_i). Il reste à appliquer le critère 1 de I.3 à la suite des J_i. On le fait comme dans la démonstration de la proposition 2.2, dans le cas analogue $l = n > 1$, en remplaçant K_{n-1} par K'_{2n-2}, ψ_n par ψ_{n+1}. On obtient un système de trois équations linéaires en les coefficients de $X \in \Gamma_1(2n-2i-3)$ dont le déterminant est $\varpi^{-1}(A+D)\varpi^{-1}(AD-BC)$, non nul modulo $\mathfrak{p}$ car l'élément $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ considéré a un déterminant de valuation 1, comme uniformisante de l'extension quadratique ramifiée qu'il engendre, et une trace de valuation 1, car le caractère central est non trivial sur $1+\mathfrak{p}^{n-1}$. □

Remarque. — L'argument donné échoue si on considère la suite «des termes pairs» $\Gamma_1(2i)^- K' \Gamma_1(2n-2i)^+$: soit $\delta = \begin{pmatrix} 0 & -e \\ \varpi & f \end{pmatrix}$ comme en III.1 ; l'élément $X = \begin{pmatrix} 0 & e \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}$ de $\Gamma_1(0)$ vérifie $\mathrm{Tr}\delta XY \in \mathfrak{p}^{n+1}$ pour tout $Y \in \Gamma_1(2n-2)$ (cf 7.3).

III.7. Série ramifiée : le cas $1 \leqslant l \leqslant n$.

Considérons à présent une représentation irréductible τ_M de quasi-conducteur n et défaut 0 du sous-groupe K', dont le conducteur l du caractère central χ vérifie $1 \leqslant l \leqslant n$. On retrouve une situation analogue à celle de la série non ramifiée : on ne peut, à l'aide des critères précédents, construire une paire couvrante de (K', τ_M). Ceci est essentiellement dû à l'incompatibilité de la condition très forte de normalisation de $J_i^{\pm}$ par K' (cf. lemme 1.3) avec la condition de maximalité relative à la taille du noyau de τ_M, le noyau du caractère central devenant "trop gros". On reprend ici les arguments de III.3 mutatis mutandis.

Remplaçons donc le $\mathfrak{s}$-type (K', τ_M) par un $\mathfrak{s}$-type $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ décrit en I.1.1, en choisissant δ de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -e \\ \varpi & f \end{pmatrix}$ où $f \in \mathfrak{p}$ et $e \in \mathfrak{o}^\times$, comme en III.1. On peut supposer

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}\delta = 0 \quad \text{(i.e. } f = 0 \text{ ou encore } \mathrm{val}\, f = +\infty) & \text{si} \quad l \leqslant [\frac{n+1}{2}], \\ \mathrm{val}\,(\mathrm{Tr}\delta) = n+1-l \quad \text{(i.e. } \mathrm{val}\, f = n-l+1) & \text{si} \quad l > [\frac{n+1}{2}]. \end{cases}$$

La normalisation des sous-groupes de $N^{\pm}$ par $J_{M,m} = \mathfrak{o}_E^\times K'_m$ est étudiée dans (1.2) et (1.4). L'élément $\xi = \begin{pmatrix} 0 & e \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $\xi^2 = \varpi e I$ et $\mathrm{Tr}\delta\xi = 0$; on a

$$(7.0) \qquad X_0 = \xi - \frac{f}{2} I\,; \quad \Gamma_1(i,k) = \mathfrak{p}_E^i V_0 + \mathfrak{p}_F^k \xi \iff i - 2k \leqslant 2\mathrm{val}\, f.$$

On se restreint donc à la recherche de paires couvrantes (J, τ) de $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ avec $m \leqslant n$, où J a la forme (imposée dans toute la suite)

$$(7.1) \qquad J = \Gamma_1(i,k)^- J_{M,m}\, \Gamma_1(i',k')^+,$$
$$\text{avec} \begin{cases} -1 \leqslant i - 2k - 1 \leqslant \min\,(m, 2(n-l)+1)\,, \\ -1 \leqslant i' - 2k' - 1 \leqslant \min\,(m, 2(n-l)+1). \end{cases}$$

Les ingrédients nécessaires, basés sur l'étude du bi-caractère $(X, Y) \mapsto \psi_{n+1}(\mathrm{Tr}\delta XY)$ de $\Delta_2(F)$, sont les suivants :

$$I + \mathfrak{p}^{k'}\xi\ \mathfrak{p}^k\xi = (1 + \mathfrak{p}^{k+k'+1})\, I \ \subset \ker \tau_{M,m} \iff k + k' + 1 \geqslant l$$

$$(7.2) \qquad I + \mathfrak{p}_E^{i'} V_1\, \mathfrak{p}_E^i V_1 \ \subset \ker \tau_{M,m} \iff i + i' \geqslant 2n$$

$$\text{précisément : } X \in \mathfrak{p}_E^{i'} V_1,\ X \notin \mathfrak{p}_E^{i'+1} V_1 \implies \mathrm{Tr}(\delta X \mathfrak{p}_E^i V_1) = \mathfrak{p}^{\left[\frac{i+i'+2}{2}\right]}$$

$$\mathrm{Tr}\delta\xi\, \Gamma_1(i) = \mathrm{Tr}\delta\, \Gamma_1(i)\, \xi = \mathfrak{p}^{\left[\frac{i}{2}\right]+1+\mathrm{val}\, f}$$

$$(7.3)\ I + \Gamma_1(i',k')\, \Gamma_1(i,k) \ \subset \ker \tau_{M,m} \iff i + i' \geqslant 2n \text{ et } k + k' + 1 \geqslant l,$$
$$\text{et on a alors : } I + \Gamma_1(i',k')\, \Gamma_1(i,k) \ \subset (1 + \mathfrak{p}^l) K'_n \cap \ker \tau_{M,m}.$$

Pour avoir maximalité on exige $k + k' = l - 1$ et $i + i' = 2n$. Posons $i - 2k - 1 = r$, d'où $i' - 2k' - 1 = 2(n - l) - r$. Les conditions de (7.1) sont réalisables avec ces contraintes si on peut choisir r tel que

$$-1 \leqslant r \leqslant \min(m,\, 2(n-l)+1) \text{ et } -1 \leqslant 2(n-l) - r \leqslant \min(m,\, 2(n-l)+1),$$

ce qui n'est possible que si $m \geqslant n - l$.

Noter que sous les conditions (7.1) à (7.3), le produit $J = \Gamma_1(i,k)^- J_{M,m}\Gamma_1(i',k')^+$ est bien un groupe : le seul point à vérifier est, par (0.2) et (7.3), la stabilité de $\Gamma_1(i,k)$ et $\Gamma_1(i',k')$ par produit par certains éléments de $(1+\mathfrak{p}^l)K'_n$; il suffit en fait d'avoir $\mathfrak{P}_1^n\, \mathfrak{p}^k \xi \subset \mathfrak{P}_1^i$, ce qui résulte de $i - 2k - 1 \leqslant n$, et de même en i', k'. En résumé :

Proposition 7.4. — *Supposons $1 \leqslant l \leqslant n$ et fixons un entier m tel que $n - l \leqslant m \leqslant n$. Pour tout entier k, et tout entier r vérifiant*

$$n - l - [\min(m,\, 2(n-l)+1) - (n-l)] \leqslant r \leqslant n - l + [\min(m,\, 2(n-l)+1) - (n-l)]$$

la représentation $\tau_{M,m}$ se prolonge au groupe

$$J_{k,r,1;m} = \Gamma_1(2k+1+r\,,\,k)^- J_{M,m}\Gamma_1(2n-2k-1-r\,,\,l-1-k)^+$$

en une représentation $\tau_{k,r,1;m}$ telle que la paire $(J_{k,r,1;m}, \tau_{k,r,1;m})$ soit décomposée par rapport à $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ relativement à P.

Remarquons que si $m = n - l$, la seule valeur possible est $r = n - l$; la parité de $n - l$ impose donc celle de $i = 2k + 1 + r$. Si $m > n - l$, les valeurs $n-l-1, n-l$ et $n-l+1$ de r nous suffiront dans la suite : avec ces valeurs on extrait de 7.4 les paires décomposées de la proposition ci-dessous, dans laquelle on simplifie les notations.

Proposition 7.5. — *Supposons $1 \leqslant l \leqslant n$ et fixons un entier m tel que $n - l + 1 \leqslant m \leqslant n$. La suite de paires décomposées $(J_j, \tau_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ définie par*

$$J_j = \begin{cases} \Gamma_1(n-l+2k\,,\,k)^- J_{M,m}\Gamma_1(n+l-2k\,,\,l-1-k)^+ & \text{si } j = 3k,\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \Gamma_1(n-l+2k+1\,,\,k)^- J_{M,m}\Gamma_1(n+l-2k-1\,,\,l-1-k)^+ & \text{si } j = 3k+1, \\ \Gamma_1(n-l+2k+2\,,\,k)^- J_{M,m}\Gamma_1(n+l-2k-2\,,\,l-1-k)^+ & \text{si } j = 3k+2, \end{cases}$$

est une suite de paires couvrantes de $(J_{M,m}\,, \tau_{M,m})$ dans G relativement à P.

Démonstration. — On applique le théorème I.3.4 à la suite (J_j, τ_j).

Si $j = 3k$ ou $j = 3k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, les groupes J_j et J_{j+1} sont de la forme :

$$\begin{aligned} J_j &= \Gamma_1(i,\, k)^- J_{M,m}\, \Gamma_1(i',\, l-1-k)^+, \\ J_{j+1} &= \Gamma_1(i+1,\, k)^- J_{M,m}\, \Gamma_1(i'-1,\, l-1-k)^+, \end{aligned}$$

avec $i + i' = 2n$.

Le critère 1 est alors vérifié pour tout $x = X^+$, $X \in \mathfrak{p}_E^{i'-1} V_1$, $X \notin \mathfrak{p}_E^{i'} V_1$, avec le sous-groupe $\Gamma_1(i)^-$ de J_j^-. En effet (voir 0.2) $x\Gamma_1(i)^- x^{-1}$ est bien un sous-groupe de J_j, et $xY^- x^{-1}$, $Y \in \Gamma_1(i)$, opère par $\tau_{M,m}(I+XY)$. Or $I + X\Gamma_1(i)$ est contenu dans K'_{2n-1} et le caractère $\psi_{n+1,\delta}$ n'y est pas trivial puisque $\mathrm{Tr}(\delta X \mathfrak{p}_E^i V_1) = \mathfrak{p}^n$ par (7.2). Ceci étant valide pour tout conjugué de x par $J_{M,m}$, aucun conjugué de $\psi_{n+1,\delta}$ ne peut être trivial sur $I + X\Gamma_1(i)$, c.q.f.d.

Si $j = 3k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, les groupes J_j et J_{j+1} sont de la forme :

$$\begin{aligned} J_j &= \Gamma_1(i,\, k-1)^- J_{M,m}\, \Gamma_1(i',\, l-k)^+, \\ J_{j+1} &= \Gamma_1(i,\, k)^- J_{M,m}\, \Gamma_1(i',\, l-1-k)^+, \end{aligned}$$

avec $i + i' = 2n$.

– Si l est strictement supérieur à 1, le critère 1 s'applique immédiatement : pour $X \in \mathfrak{p}^{l-1-k}\xi$, $X \notin \mathfrak{p}^{l-k}\xi$, on a $I + X\mathfrak{p}^{k-1}\xi = (1 + \mathfrak{p}^{l-1})I$ sur lequel le caractère central est non trivial.

– Si $l = 1$ en revanche, il nous faut appliquer le critère 2 aux groupes

$$\begin{cases} J_j = \Gamma_1(n-1+2k,\, k-1)^- J_{M,m}\, \Gamma_1(n+1-2k,\, 1-k)^+, \\ J_{j+1} = \Gamma_1(n-1+2k,\, k)^- J_{M,m}\, \Gamma_1(n+1-2k,\, -k)^+. \end{cases}$$

Posons $\sigma = n_\xi(\varpi^{-k})$; d'après le lemme 4.2 on a

$$\sigma = x_{-\xi}(-\varpi^k)\, x_\xi(\varpi^{-k})\, x_{-\xi}(-\varpi^k) \text{ où } x_{-\xi}(-\varpi^k) = \left[-\varpi^{k-1}e^{-1}\xi\right]^-$$

appartient à J_j^- et $x_\xi(\varpi^{-k}) = \left[\varpi^{-k}\xi\right]^+$ appartient à J_{j+1}^+. Ainsi σ appartient au groupe K_j engendré par J_j et J_{j+1} et on vérifie aisément que σ normalise $J_{M,m}$ et conjugue J_j^- en J_{j+1}^+, J_j^+ en J_{j+1}^-. Nous allons établir que $K_j = J_j \cup J_j\sigma J_j$; toutes les conditions du critère 2 seront alors satisfaites.

Il suffit que $J_j \cup J_j\sigma J_j$ contienne $\sigma J_j \sigma$, donc, comme $\sigma = \widetilde{-1}\,\sigma^{-1}$, qu'il contienne $J_{j+1}^+ = J_j^+ \left[\mathfrak{p}^{-k}\xi\right]^+$, donc qu'il contienne $x_\xi(\mathfrak{o}^\times \varpi^{-k})$, donc qu'il contienne $n_\xi(\mathfrak{o}^\times\varpi^{-k})$. Or $n_\xi(a\varpi^{-k}) = \tilde{a}\, n_\xi(\varpi^{-k})$ pour $a \in F^\times$. □

COROLLAIRE 7.6. — *Si* $1 \leqslant l \leqslant n$, *la suite de paires décomposées* $(J_{3k+1}, \tau_{3k+1})_{k \in \mathbb{Z}}$ *définie par*

$$J_{3k+1} = \Gamma_1(n-l+2k+1\ ,\ k)^- J_{M,n-l}\,\Gamma_1(n+l-2k-1\ ,\ l-1-k)^+$$

est une suite de paires couvrantes de $(J_{M,n-l}\, , \tau_{M,n-l})$ *dans* G *relativement à* P.

Ces paires correspondent en effet au choix de $r = n - l$ dans 7.4; on applique alors la proposition I.4.3. Si $l = n$ on retrouve ainsi les paires couvrantes de la proposition 6.3.

III.8. Série ramifiée : récapitulation.

THÉORÈME 8.1. — *Soit* $\mathfrak{s}$ *une classe d'inertie dans* G *de la forme* $[M_\alpha, \pi_{M_\alpha}]_G$ *où* π_{M_α} *est une représentation irréductible supercuspidale de* M_α *obtenue par induction à partir d'une représentation de défaut* 0 *et de quasi-conducteur* n *de* $\langle\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}\rangle \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix}$, *et soit* l *le conducteur de son caractère central.*

Soit $(J_{M_\alpha,m}, \tau_{M_\alpha,m})_{0 \leqslant m \leqslant n}$ *la famille de types pour la classe d'inertie* $[M_\alpha, \pi_{M_\alpha}]_{M_\alpha}$ *de* π_{M_α} *dans* M_α *décrite en I.1 : pour* $m \geqslant 1$, $J_{M,m}$ *est de la forme* $\mathfrak{o}_E^\times K_{\mathfrak{A}}^m$ *où* E *est une extension quadratique ramifiée de* F *telle que* $E^\times \subset K_{\mathfrak{A}}$ *; on note* ξ *un générateur de l'unique droite de* $\Delta_2(F)$ *stable par conjugaison par* $\widetilde{E^\times}$, *vérifiant* val det $\xi = 1$.

Chacun des produits $J^- J_{M_\alpha,m} J^+$ *caractérisés par :*

$$\text{si } l > n : \quad \begin{cases} J^- = \Gamma_1(2l-1)^-, \\ J^+ = \Gamma_1(0)^+, \end{cases} \qquad 0 \leqslant m \leqslant n,$$

$$\text{si } l = n : \quad \begin{cases} J^- = \Gamma_1(2n-1)^-, \\ J^+ = \Gamma_1(1)^+, \end{cases} \qquad 0 \leqslant m \leqslant n,$$

$$\text{si } l \leqslant n : \quad \begin{cases} J^- = \left(\mathfrak{p}^{l-1}\xi + \Gamma_1(n+l-1)\right)^-, \\ J^+ = \left(\mathfrak{o}\xi + \Gamma_1(n-l+1)\right)^+, \end{cases} \qquad n-l \leqslant m \leqslant n,$$

est un sous-groupe ouvert compact $J^{(m)}$ *de* G *auquel* $\tau_{M_\alpha,m}$ *se prolonge en une représentation* $\tau^{(m)}$ *triviale sur* J^- *et* J^+, *égale à* $\tau_{M_\alpha,m}$ *sur* $J_{M_\alpha,m}$.

Les paires $(J^{(m)}, \tau^{(m)})$ *ainsi obtenues sont des* $\mathfrak{s}$*-types dans* G.

Remarque. — Pour $l > n$ on peut aussi montrer que le groupe $\Gamma_0(l)^- J_{M_\alpha,m} \Gamma_0(0)^+$ porte une paire couvrante de $(J_{M_\alpha,m}, \tau_{M_\alpha,m})$ pour tout m.

III.9. Compléments.

Soit $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ un $\mathfrak{s}$-type de la forme (I.1.1). Nous avons obtenu dans les paragraphes précédents des paires couvrantes $(J^{(m)}, \tau^{(m)})$ de $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ dans G relativement à P dans les conditions suivantes :

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant m \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] & \text{si } l \geqslant n \text{ et } \mathfrak{e} = 1 \text{ (cas non ramifié),} \\ 0 \leqslant m \leqslant n & \text{si } l \geqslant n \text{ et } \mathfrak{e} = 2 \text{ (cas ramifié);} \end{cases}$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \left[\frac{n-l+1}{2}\right] \leqslant m \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] & \text{si } l < n \text{ et } \mathfrak{e} = 1 \text{ (cas non ramifié),} \\ n-l \leqslant m \leqslant n & \text{si } l < n \text{ et } \mathfrak{e} = 2 \text{ (cas ramifié).} \end{cases}$$

Les cas (A), soit $l \geqslant n$, relèvent tous de la proposition I.4.3 : dans les paires couvrantes obtenues le groupe $J^{(m)}$ a la forme $J^- J_{M,m} J^+$ où J^- et J^+ sont indépendants de m et normalisés par $J_{M,0}$, le plus grand des $J_{M,m}$; on a dans ce cas une famille de paires couvrantes au-dessus de *toutes* les paires $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ de (I.1.1).

Dans les cas (B) en revanche, les parties J^- et J^+ des sous-groupes obtenus sont normalisées par $J_{M,\left[\frac{\mathfrak{e}(n-l)+1}{2}\right]}$ mais pas par $J_{M,\left[\frac{\mathfrak{e}(n-l)-1}{2}\right]}$. Peut-on construire d'autres paires décomposées qui fournissent des paires couvrantes de $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ dans G pour $m < \left[\frac{\mathfrak{e}(n-l)+1}{2}\right]$? Nous montrons ici que c'est impossible.

THÉORÈME 9.1. — *Soit $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ un $\mathfrak{s}$-type de la forme I.1.1 : la représentation induite de $\tau_{M,m}$ à $J_{M,0} = \mathfrak{A}^\times$ est $\tau_{M,0}$, lisse irréductible de défaut 0. Soit n son quasi-conducteur et l le conducteur de son caractère central, au moins égal à 1 par définition. On pose $m_0 = \left[\frac{\mathfrak{e}(n-l)+1}{2}\right]$. Si l est strictement inférieur à n, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe une paire couvrante de $(J_{M,m}, \tau_{M,m})$ dans G relativement à P ;*

(ii) $m \geqslant m_0$.

Démonstration. — L'existence de paires couvrantes pour $m \geqslant m_0$ a été démontrée (théorèmes 5.1 et 8.1) ; il faut établir la réciproque. Par la proposition I.4.3 (1.b), il suffit de montrer qu'il n'existe pas de paire couvrante de $(J_{M,m_0-1}, \tau_{M,m_0-1})$ dans G relativement à P. Supposons donc qu'il en existe une, soit (J, τ) où J est un produit $J^- J_{M,m_0-1} J^+$, et montrons que l'on aboutit à une contradiction.

Cas non ramifié.

1. — Comme J^- et J^+ sont normalisés par J_{M,m_0-1}, ils sont de la forme $J^- = \Gamma_0(i,k)^-$, $J^+ = \Gamma_0(i',k')^+$ avec $|i-k| \leqslant \left[\frac{n-l-1}{2}\right]$ et $|i'-k'| \leqslant \left[\frac{n-l-1}{2}\right]$ (1.2, 1.3, 1.4). Par (3.0) on peut remplacer X_0 par ξ ; par (3.2) on doit avoir : $i+i' \geqslant n$ et $k+k' \geqslant l$.

2. — La paire (J',τ'), où $J' = J^- J_{M,\left[\frac{n}{2}\right]} J^+$ et τ' est le prolongement de $\tau_{M,\left[\frac{n}{2}\right]}$ à J' trivial sur J^- et J^+, est une paire couvrante de $(J_{M,\left[\frac{n}{2}\right]}, \tau_{M,\left[\frac{n}{2}\right]})$ dans G relativement à P (proposition I.4.3, assertion 1.b).

3. — Montrons qu'il existe une paire décomposée au-dessus de $(J_{M,\left[\frac{n}{2}\right]}, \tau_{M,\left[\frac{n}{2}\right]})$ de la forme (J'',τ''), avec $J'' = \Gamma_0(i,k)^- J_{M,\left[\frac{n}{2}\right]}$ $\Gamma_0\left(n-i, n-i-\left[\frac{n-l-1}{2}\right]-1\right)^+$:

- la normalisation par $J_{M,\left[\frac{n}{2}\right]}$ des intersections avec N^- et N^+ est assurée par le lemme 1.4, vu les inégalités de 1- ;
- on a par (3.3) : $I + \Gamma_0(n-i, n-i-\left[\frac{n-l-1}{2}\right]-1)\Gamma_0(i,k) \subset (1+\mathfrak{p}^l)$ $K_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \cap \ker \tau_{M,\left[\frac{n}{2}\right]}$, car $k + \left(n-i-\left[\frac{n-l-1}{2}\right]-1\right) \geqslant l$;
- reste à vérifier – toujours par (0.2) – que la multiplication à gauche ou à droite par $(1+\mathfrak{p}^l)K_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ conserve les réseaux $\Gamma_0(i,k)$ et $\Gamma_0(n-i, n-i-\left[\frac{n-l-1}{2}\right]-1)$; c'est bien le cas puisque $k + \left[\frac{n+1}{2}\right] \geqslant i$ et $n-i-\left[\frac{n-l-1}{2}\right]-1+\left[\frac{n+1}{2}\right] \geqslant n-i$.

4. — D'après les inégalités de 1-, $J^+ = \Gamma_0(i',k')^+$ est *strictement* contenu dans $(J'')^+ = \Gamma_0\left(n-i, n-i-\left[\frac{n-l-1}{2}\right]-1\right)^+$. Par le lemme I.4.1, cela contredit le fait que la paire (J',τ') de 2- soit couvrante, c.q.f.d.

Cas ramifié.

1. — Comme J^- et J^+ sont normalisés par J_{M,m_0-1}, ils sont de la forme $J^- = \Gamma^-$, $J^+ = \Gamma'^+$ avec $\Gamma_1(i+1,k+1) \subsetneq \Gamma \subseteq \Gamma_1(i,k)$ et $\Gamma_1(i'+1,k'+1) \subsetneq \Gamma' \subseteq \Gamma_1(i',k')$ (voir 1.2,ii), et $\Gamma_1(i,k)$ et $\Gamma_1(i',k')$ sont aussi normalisés par J_{M,m_0-1} (1.4,iii), donc : $-(n-l) \leqslant i-2k-1 \leqslant (n-l)-1$ et $-(n-l) \leqslant i'-2k'-1 \leqslant (n-l)-1$ (1.4,ii). Par (7.0) on peut remplacer X_0 par ξ ; par (7.2) on doit avoir : $i+1+i'+1 \geqslant 2n$ et $k+1+k'+1+1 \geqslant l$.

2. — Montrons que $i+i' \geqslant 2n$ et $k+k'+1 \geqslant l$. Dans le cas contraire $i+i'$ vaudrait $2n-1$ ou $2n-2$ et $k+k'+1$ vaudrait $l-1$ ou $l-2$; alors la somme $i+i'-2(k+k'+1)$ serait au moins égale à $2(n-l)$, or cette somme, égale à $(i-2k-1)+(i'-2k'-1)$, est au plus égale à $2(n-l-1)$ vu la condition de normalisation.

3. — On a nécessairement $\Gamma = \Gamma_1(i,k)$ et $\Gamma' = \Gamma_1(i',k')$. On montre en effet comme en (7.3), (7.4) que les produits $\Gamma_1(i,k)^- J_{M,m_0-1}\Gamma_1(i',k')^+$, $\Gamma^- J_{M,m_0-1}\Gamma_1(i',k')^+$, $\Gamma_1(i,k)^- J_{M,m_0-1}\Gamma'^+$, sont des groupes portant des paires décomposées au-dessus de $(J_{M,m_0-1}, \tau_{M,m_0-1})$; on conclut par I.4.1.

4. — On continue alors comme dans le cas non ramifié :

- $J^- J_{M,n} J^+$ porte une paire couvrante de $(J_{M,n}, \tau_{M,n})$;
- $\Gamma_1(i,k)^- J_{M,n}\Gamma_1(2n-i, n-1-\left[\frac{i+n-l}{2}\right])^+$ porte une paire décomposée au-dessus de $(J_{M,n}, \tau_{M,n})$;
- comme $\Gamma_1(i',k')$ est *strictement* contenu dans $\Gamma_1(2n-i, n-1-\left[\frac{i+n-l}{2}\right])$, les deux assertions précédentes sont incompatibles. □

Notons enfin que les paires couvrantes construites dans ce paragraphe ne sont pas les seules possibles : sur la base des propositions 3.4 et 7.4 on peut en obtenir d'autres, et ce d'autant plus facilement que m est grand. C'est ainsi que les paires couvrantes que nous avons fait figurer dans [Actes Luminy] sont parfois différentes de celles que nous avons retenues ici.

IV. Types induits des paraboliques maximaux de $GSp_4(F)$.

Remarquant que les sous-groupes paraboliques de $GSp_4(F)$ ont les mêmes radicaux unipotents que ceux de $Sp_4(F)$, on cherche à construire leurs types induits en utilisant les parties unipotentes des types induits calculés pour $Sp_4(F)$. Pour ce faire, il faut choisir un type convenable pour chaque classe d'inertie dans un sous-groupe de Levi de $GSp_4(F)$ d'une représentation supercuspidale irréductible de ce sous-groupe.

Dans un premier temps, on précise cette construction dans un cadre un peu général. Dans un deuxième temps, on montre que pour $GSp_4(F)$, elle fournit des types induits pour chaque classe d'inertie d'une représentation irréductible supercuspidale d'un sous-groupe de Levi maximal dans ce sous-groupe.

IV.1. Construction.

Soient $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe isotrope défini sur F et $\mathbf{S}$ un tore F-déployé maximal de $\mathbf{G}$. Le groupe dérivé $\mathbf{G}'$ est un sous-groupe fermé connexe défini sur F et la composante connexe de 1 dans $\mathbf{S} \cap \mathbf{G}'$ est un tore $\mathbf{S}'$ de $\mathbf{G}'$, déployé sur F et maximal.

Soit Φ l'ensemble des racines relatives à F de $\mathbf{G}$ par rapport à $\mathbf{S}$. Il s'identifie à celui de $\mathbf{G}'$ par rapport à $\mathbf{S}'$ via la restriction de $\mathbf{S}$ à $\mathbf{S}'$. On choisit un ordre sur Φ et on nomme $\mathbf{P}_0$ et $\mathbf{P}'_0$ les paraboliques minimaux de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}'$ définis sur F correspondant aux racines positives.

Notons $\mathcal{P}(\mathbf{G})$ l'ensemble des paraboliques standard et définis sur F de $\mathbf{G}$ (c'est-à-dire contenant $\mathbf{P}_0$) et $\mathcal{P}(\mathbf{G}')$ celui des paraboliques standard de $\mathbf{G}'$ (c'est-à-dire ceux contenant $\mathbf{P}'_0$) définis sur F.

Il existe alors une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbf{G})$ et $\mathcal{P}(\mathbf{G}')$ définie par : $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathbf{G})$ et $\mathbf{P}' \in \mathcal{P}(\mathbf{G}')$ se correspondent s'ils sont associés au même sous-ensemble de racines simples de Φ. Dans ce cas, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$ ont même radical unipotent $\mathbf{N}$ (défini sur F). De plus, si $\mathbf{P} = \mathbf{MN}$ est la décomposition de Levi de $\mathbf{P}$ avec $\mathbf{M} \supset \mathbf{S}$ et $\mathbf{P}' = \mathbf{M}'\mathbf{N}$ est celle de $\mathbf{P}'$ avec $\mathbf{M}' \supset \mathbf{S}'$ alors $\mathbf{M}'$ est un sous-groupe de $\mathbf{M}$.

Dans la suite, G, G', S, S',... désignent les groupes des points rationnels sur F de $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}'$,... respectivement.

On s'intéresse à la détermination de types induits de G. Soit P un sous-groupe parabolique standard de G, $P = MN$ une décomposition de Levi de P. On note P' le sous-groupe parabolique de G' qui lui correspond. Il possède une décomposition de Levi $P' = M'N$ où M' est un sous-groupe de M.

Proposition 1.1. — *Soit $\mathfrak{s} = [M, \sigma]_M$ une classe d'inertie dans M d'une représentation σ irréductible et supercuspidale de M. Supposons que $\mathfrak{s}$ possède un type (J_M, τ_M) vérifiant :*

(1.2) *il existe un type $(J'_{M'}, \tau'_{M'})$ de M' tel que $J'_{M'} \subset J_M$ et $\tau_{M|J'_{M'}}$ est isotypique de type $\tau'_{M'}$.*

Si $(J^- J'_{M'} J^+, \tau')$ est une paire couvrante de $(J'_{M'}, \tau'_{M'})$ relativement à P' et si J_M normalise J^- et J^+ alors $J := J^- J_M J^+$ est un groupe auquel τ_M se prolonge en une représentation τ triviale sur J^- et J^+. La paire (J, τ) ainsi obtenue est une paire couvrante de (J_M, τ_M) relativement à P.

Démonstration. — Grâce aux hypothèses de la proposition, les conditions du lemme 1 de [Bl1] sont clairement satisfaites et la paire (J, τ) est donc une paire décomposée au-dessus de (J_M, τ_M).

Il est aussi clair que $\tau_{|J'}$ est isotypique de type τ'. Ainsi, pour toute représentation lisse (π, V) de G, la composante isotypique V^{τ} de type τ est contenue dans la composante isotypique $V^{\tau'}$ de type τ' de $(\pi_{|G'}, V)$. Or $\pi_{|G'}$ est lisse. L'injectivité de la restriction à V^{τ} du foncteur de Jacquet se déduit de celle de la restriction à $V^{\tau'}$ de ce même foncteur. La paire (J, τ) est donc une paire couvrante. $\square$

Une fois déterminées des paires couvrantes relativement à P' dans G', la recherche de paires couvrantes relativement à P consiste à définir pour chaque classe d'inertie $\mathfrak{s}$ dans M d'une représentation irréductible et supercuspidale de M, un type (J_M, τ_M) vérifiant (1.2).

Étude de cas particuliers :

(1.3) *Le sous-groupe de Levi M est produit direct de M' et d'un tore T.*

Dans ce cas, une représentation σ irréductible et supercuspidale de M s'écrit $\sigma' \otimes \chi$ où σ' est une représentation irréductible et supercuspidale de M' et χ un caractère de T. La classe d'inertie $\mathfrak{s}$ de σ dans M admet un type de la forme $(J'_{M'} \times {}^0T, \tau'_{M'} \otimes \chi_0)$ où $(J'_{M'}, \tau'_{M'})$ est un type de la classe d'inertie de σ' dans M' et χ_0 est la restriction de χ au sous-groupe compact maximal ${}^0T$ de T.

Il est clair que $(J'_{M'} \times {}^0T, \tau'_{M'} \otimes \chi_0)$ vérifie l'hypothèse (1.2).

(1.4) *Le type (J_M, τ_M) est de la forme : $J_M = J'_{M'} \rtimes A$ où A est abélien et la restriction de τ_M à $J'_{M'}$ contient une représentation $\tau'_{M'}$ telle que $(J'_{M'}, \tau'_{M'})$ soit un type de M'.*

Notons J''_M l'entrelacement dans J_M de $\tau'_{M'}$. C'est aussi le stabilisateur dans J_M de la composante isotypique W de $\tau_{M|J'_{M'}}$ de type $\tau'_{M'}$. Puisque W est de dimension finie et que τ_M est lisse, J''_M est un sous-groupe ouvert, et par suite compact, de J_M. L'action de J''_M sur W définit une représentation τ''_M de J''_M nécessairement irréductible dont la restriction à $J'_{M'}$ est isotypique de type $\tau'_{M'}$. De plus, J''_M est le produit semi-direct de $J'_{M'}$ par un sous-groupe de A et est donc distingué dans J_M. On en déduit que l'induite $\mathrm{Ind}_{J''_M}^{J_M} \tau''_M$ est irréductible puis, par le théorème de réciprocité de Frobenius, qu'elle est égale à τ_M. En conséquence, la paire (J''_M, τ''_M) est un $\mathfrak{s}$-type vérifiant (1.2).

IV.2. Paires couvrantes de types de paraboliques maximaux de $GSp_4(F)$.

Soit $\widetilde{\mathbf{G}} = GSp_4$ le groupe des similitudes symplectiques d'un espace vectoriel de dimension 4. Son groupe dérivé n'est autre que $\mathbf{G} = Sp_4$. On retrouve donc la situation du premier paragraphe. Ainsi, $\widetilde{G} = GSp_4(F)$ possède deux classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques maximaux représentées par $\widetilde{P}_\alpha$ et $\widetilde{P}_\beta$, les deux sous-groupes paraboliques de $\widetilde{G}$ contenant P_α et P_β respectivement. Les radicaux unipotents de $\widetilde{P}_\alpha$ et $\widetilde{P}_\beta$ ne sont autres que ceux de P_α et P_β. Plus explicitement, on sait que $\widetilde{G}$ s'identifie à $Sp_4(F) \rtimes \widetilde{T}$ où $\widetilde{T}$ est le tore $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in F^\times \right\}$ et l'action de $\widetilde{T}$ sur $G = Sp_4(F)$ est donnée par la conjugaison des matrices. Via cette identification, les sous-groupes $\widetilde{M_\alpha} = M_\alpha \times \widetilde{T}$ et $\widetilde{M_\beta} = M_\beta \rtimes \widetilde{T}$ sont des sous-groupes de Levi de $\widetilde{P}_\alpha$ et $\widetilde{P}_\beta$.

Cas de $\widetilde{M_\alpha}$.

C'est exactement la situation de (1.3). Le sous-groupe compact maximal ${}^0\widetilde{T} \simeq \mathfrak{o}^\times$ de $\widetilde{T}$ agit par multiplication par un scalaire sur $\Delta_2(F)$. Il normalise donc tous les sous-groupes J^- et J^+ décrits dans les propositions de III. En appliquant la proposition 1.1, on obtient :

PROPOSITION 2.1. — *Soit $\widetilde{\mathfrak{s}}$ une classe d'inertie dans $\widetilde{G}$ de la forme $[\widetilde{M_\alpha}, \widetilde{\sigma}]_{\widetilde{G}}$ où $\widetilde{\sigma}$ est une représentation irréductible supercuspidale de $\widetilde{M_\alpha}$. La classe d'inertie $[\widetilde{M_\alpha}, \widetilde{\sigma}]_{\widetilde{M_\alpha}}$ dans $\widetilde{M_\alpha}$ possède un type $(\widetilde{J}_{\widetilde{M_\alpha}}, \widetilde{\tau}_{\widetilde{M_\alpha}})$ où $\widetilde{J}_{\widetilde{M_\alpha}} = J_{M_\alpha} \times \mathfrak{o}^\times$, $\widetilde{\tau}_{\widetilde{M_\alpha}} = \tau_{M_\alpha} \otimes \chi_0$ et $(J_{M_\alpha}, \tau_{M_\alpha})$ est un type de la classe $[M_\alpha, \widetilde{\sigma}_{|J_{M_\alpha}}]_{M_\alpha}$ décrit en* I.1.

Si $(J = J^- J_{M_\alpha} J^+, \tau)$ est une paire couvrante de $(J_{M_\alpha}, \tau_{M_\alpha})$ relativement à P_α décrite en III.5 *ou* III.9 *alors le produit $\widetilde{J} = J^- \widetilde{J}_{\widetilde{M_\alpha}} J^+$ est un groupe auquel $\widetilde{\tau}_{\widetilde{M_\alpha}}$ se prolonge en une représentation $\widetilde{\tau}$ triviale sur J^- et J^+ et la paire $(\widetilde{J}, \widetilde{\tau})$ ainsi obtenue est une paire couvrante de $(\widetilde{J}_{\widetilde{M_\alpha}}, \widetilde{\tau}_{\widetilde{M_\alpha}})$ relativement à $\widetilde{P}_\alpha$.*

Cas de $\widetilde{M_\beta}$.

Soit $\widetilde{\mathfrak{s}} = [\widetilde{M}, \widetilde{\sigma}]_{\widetilde{M}}$ la classe d'inertie dans $\widetilde{M} = \widetilde{M_\beta}$ d'une représentation $\widetilde{\sigma}$ irréductible et supercuspidale de $\widetilde{M}$.

Puisque $\widetilde{M}$ est le produit direct de $GL_2(F)$ et $F^\times$, $\widetilde{\sigma}$ est le produit tensoriel d'une représentation irréductible cuspidale σ de $GL_2(F^\times)$ et d'un caractère χ de $F^\times$. La classe d'inertie $\widetilde{\mathfrak{s}}$ admet un type de la forme $(J \times \mathfrak{o}^\times, \tau \otimes \chi_0)$ où (J, τ) est un type pour $GL_2(F^\times)$ décrit en I.1 et χ_0 la restriction de χ à $\mathfrak{o}^\times$.

Considérons un type $(\widetilde{J}_{\widetilde{M}} = J \times \mathfrak{o}^\times, \widetilde{\tau}_{\widetilde{M}} = \tau \otimes \chi_0)$ de cette forme. Si $\overline{\tau}$ est une composante irréductible de la restriction de τ à $\overline{J} = J \cap SL_2(F)$ alors $(\overline{J}, \overline{\tau})$ est un type pour $SL_2(F)$ décrit en I.2. On obtient ainsi un type de M : $(J_M = \overline{J} \times \mathfrak{o}^\times, \tau_M = \overline{\tau} \otimes \chi_0)$.

On se trouve donc dans la situation de (1.4) où A n'est autre que ${}^0\widetilde{T}$.

Proposition 2.2. — *Soit $\widetilde{\mathfrak{s}} = [\widetilde{M_\beta}, \widetilde{\sigma}]_{\widetilde{G}}$ la classe d'inertie dans $\widetilde{G}$ d'une représentation $\widetilde{\sigma}$ irréductible et supercuspidale de $\widetilde{M_\beta}$. Soit σ une composante irréductible de $\widetilde{\sigma}_{|M_\beta}$ et $(J_{M_\beta}, \tau_{M_\beta})$ un type pour la classe d'inertie de σ dans M_β décrit en I.2. Notons $\widetilde{T}'$ l'entrelacement de τ_{M_β} dans ${}^0\widetilde{T}$.*

1. *La classe d'inertie $[\widetilde{M_\beta}, \widetilde{\sigma}]_{\widetilde{M_\beta}}$ dans $\widetilde{M_\beta}$ possède un type $(\widetilde{J}_{\widetilde{M_\beta}}, \widetilde{\tau}_{\widetilde{M_\beta}})$ où $\widetilde{J}_{\widetilde{M_\beta}} = J_{M_\beta}\widetilde{T}'$ et la restriction de $\widetilde{\tau}_{\widetilde{M_\beta}}$ à J_{M_β} est isotypique de type τ_{M_β}.*

2. *Si $(J = J^- J_{M_\beta} J^+, \tau)$ est une paire couvrante de $(J_{M_\beta}, \tau_{M_\beta})$ relativement à P_β décrite en* II.1 *ou* II.4 *alors le produit $\widetilde{J} = J^- \widetilde{J}_{\widetilde{M_\beta}} J^+$ est un groupe auquel $\widetilde{\tau}_{\widetilde{M_\beta}}$ se prolonge en une représentation $\widetilde{\tau}$ triviale sur J^- et J^+ et la paire $(\widetilde{J}, \widetilde{\tau})$ ainsi obtenue est une paire couvrante de $(\widetilde{J}_{\widetilde{M_\beta}}, \widetilde{\tau}_{\widetilde{M_\beta}})$ relativement à $\widetilde{P}_\beta$.*

Démonstration — La première partie est une redite de (1.4). Pour la deuxième partie, on vérifie que $\widetilde{J}_{\widetilde{M_\beta}}$ normalise $J^\pm$. En effet, J_{M_β} normalise $J^\pm$ et $\widetilde{T}'$, étant contenu dans ${}^0\widetilde{T}$, normalise chaque sous-groupe $X_r(n)$, r une racine et $n \in \mathbb{Z}$, donc il normalise chaque $J^\pm$ construit en II. On applique alors la proposition 1.1. □

BIBLIOGRAPHIE

[Actes Luminy] P.J. SALLY and M.F. VIGNÉRAS, ed., Résumés des conférences du colloque «Analyse harmonique sur le groupe $Sp(4)$», C.I.R.M., Luminy 1998.

[Ad] J. ADLER, Refined anisotropic K-types and supercuspidal representations, Pacific J. Math., Vol. 185 (1998), 1–32.

[Au] F. AUZENDE, Construction de types à la Bushnell et Kutzko dans les groupes Sp_{2N} et SO_{2N}, Prépublication du LMENS, n° 98–15, 1998.

[Be] J.-N. BERNSTEIN (rédigé par P. Deligne), Le «centre» de Bernstein, Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Hermann, Paris, 1984, 1–32.

[Bl1] C. BLONDEL, Critère d'injectivité pour l'application de Jacquet, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I (1997), 1149–1152.

[Bl2] C. BLONDEL, Une méthode de construction de types induits et son application à G_2, J. of Algebra, 213 (1999), 231–271.

[BT] F. BRUHAT et J. TITS, Groupes réductifs sur un corps local I, Publ. Math. de l'IHES, 41 (1972), 1–251.

[BK1] C.J. BUSHNELL and P.C. KUTZKO, The admissible dual of $SL(N)$ I, Ann. Sci. École Norm. Sup., 4^e série, t. 26 (1993), 261–280.

[BK2] C.J. BUSHNELL and P.C. KUTZKO, Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types, Proc. London Math. Soc., Vol. 77 (1998), 582–634.

[BK3] C.J. BUSHNELL and P.C. KUTZKO, Semisimple Types in GL_n, Prépublication KCL-MTH-97-24, King's College, 1997.

[Ki] J. KIM, Hecke algebras of classical groups over p-adic fields and supercuspidal representations, American Journal of Mathematics, à paraître.

[Ku] P.C. KUTZKO, On the supercuspidal representations of GL_2 I et II, American Journal of Mathematics, Vol. 100 (1978), 43–60 et 705–716.

[KS] P.C. KUTZKO and P.J. SALLY Jr., All supercuspidal representations of SL_l over a p-adic field are induced, Proceedings of the Utah Conference on representation Theory, Progress in Math., 40 (1983), 185–196.

[Le] B. LEMAIRE, Strates scindées pour un groupe réductif p-adique, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I (1998), 407–410.

[Mo] L. MORRIS, Level zero G-types, Compositio Math., à paraître.

[MP] A. MOY and G. PRASAD, Jacquet functors and unrefined minimal K-types, Comment. Math. Helvetici, 71 (1996), 98–121.

[Ro] A. ROCHE, Types and Hecke algebras for principal series representations of split reductive p-adic groups, Ann. Sci. École Norm. Sup., 4^e série, t. 31 (1998), 361–413.

[St] S. STEVENS, Types and representations of p-adic symplectic groups, Thèse, King's College, 1998.

[ST] P.J. SALLY and M. TADIĆ, Induced representations and classifications for $GSp(2, F)$ and $Sp(2, F)$, Mémoire Soc. Math. de France, 52 (1993), 75–133.

[T] M. TADIĆ, Representations of p-adic symplectic groups, Compositio Math., 90, n° 2 (1994), 123–181.

Manuscrit reçu le 25 mars 1999,
accepté le 7 juin 1999.

L. BLASCO,
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
Institut de Recherche Mathématique Avancée
7, rue René Descartes
F-67084 Strasbourg cedex.
blasco@math.u-strasbg.fr
&
C. BLONDEL,
Université Paris 7
C.N.R.S. Théorie des Groupes, Représentations, Applications
Case 7012
Institut de Mathématiques de Jussieu
F-75251 Paris cedex 05.
blondel@math.jussieu.fr