Annales de l'institut Fourier

Joseph Grifone
Zoltán Muzsnay

Sur le problème inverse du calcul des variations : existence de lagrangiens associés à un spray dans le cas isotrope

Annales de l'institut Fourier, tome 49, n° 4 (1999), p. 1387-1421
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_4_1387_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
49, 4 (1999), 1387–1421

SUR LE PROBLÈME INVERSE DU CALCUL DES VARIATIONS : EXISTENCE DE LAGRANGIENS ASSOCIÉS À UN SPRAY DANS LE CAS ISOTROPE

par J. GRIFONE et Z. MUZSNAY

À la mémoire de M. le Professeur Joseph Klein

Introduction.

Le problème qui consiste à caractériser les opérateurs différentiels provenant d'un principe variationnel a été posé pour la première fois par H. Helmholtz en 1887. Largement étudié par de nombreux auteurs, il a abouti à une classification complète des opérateurs différentiels variationnels. Il reste cependant largement ouvert si l'on s'intéresse non pas à l'opérateur différentiel, mais, comme il est d'ailleurs plus naturel, à l'équation différentielle elle-même. Il s'agit du problème des *multiplicateurs variationnels*, selon la terminologie utilisée par [1], et que l'on peut présenter comme suit.

Considérons tout d'abord le problème classique du calcul des variations. Dans le cas particulier qui nous intéresse ici, il peut être formulé de la manière suivante. Soit $E = E(t, x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$ un lagrangien, t désignant la variable indépendante, x^α ($\alpha = 1, \ldots, n$) les variables dépendantes, les $\dot{x}^\alpha$

Mots-clés : Problème inverse – Calcul des variations – Équations d'Euler-Lagrange – Sprays – Connexions – Espaces de Finsler – Courbure sectionnelle – Systèmes surdéterminés d'équations aux dérivées partielles – Théorème de Cartan-Kähler.
Classification math. : 58E30 – 35N10 – 53B05 – 53C21 – 53C60.

les dérivées premières. Comme il est bien connu, une condition nécessaire pour qu'une courbe paramétrée $\gamma : x^\alpha = x^\alpha(t)$ minimise la fonctionnelle

$$I[\gamma] = \int_a^b E(t, x^\alpha(t), \dot{x}^\alpha(t))dt$$

parmi les courbes à extrémités fixes $x^\alpha(a) = A$, $x^\alpha(b) = B$, est que E vérifie l'équation

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial E}{\partial x^\alpha} = 0.$$

L'opérateur différentiel du second ordre

$$\mathcal{E}_\alpha(E) = \frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial E}{\partial x^\alpha}$$

est dit opérateur d'Euler-Lagrange. Le problème inverse du calcul des variations, consiste à caractériser les opérateurs différentiels du second ordre $P_\alpha(t, x^\alpha, \dot{x}^\alpha, \ddot{x}^\alpha)$ qui sont d'Euler-Lagrange, c'est-à-dire pour lesquels il existe un lagrangien E tel que

$$P_\alpha = \mathcal{E}_\alpha(E).$$

Le problème des multiplicateurs variationnels consiste en revanche à classifier non pas les opérateurs variationnels, mais les équations variationnelles. Il peut être formulé de la manière suivante. Soit $P_\alpha(t, x^\alpha, \dot{x}^\alpha, \ddot{x}^\alpha)$ un opérateur différentiel du second ordre. En notant que les équations d'Euler-Lagrange sont quasi-linéaires, on peut supposer que P_α est quasi-linéaire. Il est clair que pour toute matrice inversible $B = [B^\alpha_\beta](t, x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$, P détermine la même équation différentielle que l'opérateur $B^\alpha_\beta P_\alpha$. Le problème consiste donc à caractériser les opérateurs différentiels quasi-linéaires du second ordre $P_\alpha(t, x^\alpha, \dot{x}^\alpha, \ddot{x}^\alpha)$ pour lesquels il existe une matrice inversible $B = [B^\alpha_\beta](t, x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$ et un lagrangien E tels que

$$B^\alpha_\beta P_\alpha = \mathcal{E}_\beta(E).$$

On dit alors que le système d'équations différentielles $P_\alpha(t, x^\alpha, \dot{x}^\alpha, \ddot{x}^\alpha) = 0$ est *variationnel*. C'est à ce problème que nous nous intéressons dans cet article.

Une élégante formulation géométrique en a été donnée par Klein [10]. Elle utilise la notion de spray. Soit S un spray, c'est-à-dire un champ de vecteurs sur le fibré tangent TM de la variété M tel que $JS = C$, où J est l'endomorphisme vertical et C le champ de Liouville. La donnée d'un spray équivaut à la donnée d'un système d'équations du second ordre : les solutions (dites *chemins du spray*) sont les courbes γ sur M telles que γ' est une courbe intégrale de S. Comme il est bien connu, à tout lagrangien

E non-dégénéré – c'est-à-dire tel que la matrice $\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\right)$ est inversible – est associé un spray S par l'équation

$$i_S dd_J E = d(E - \mathcal{L}_C E). \tag{1}$$

Les chemins de S sont justement les solutions des équations d'Euler-Lagrange associées à E. Le problème des multiplicateurs variationnels est donc équivalent à la caractérisation des *sprays variationnels*, c'est-à-dire des sprays S pour lesquels il existe un lagrangien non dégénéré E vérifiant (1).

La contribution la plus importante à ce problème est l'article classique de J. Douglas [4] où, à l'aide de la théorie de Riquier, sont classifiés les systèmes d'équations différentielles variationnelles du second ordre en dimension 2, en d'autres termes les sprays variationnels lorsque $\dim M = 2$. Même dans ce cas particulier le problème est extrêmement difficile, car l'on est amené à étudier l'intégrabilité d'un système d'équations aux dérivées partielles largement surdéterminé et de nombreuses obstructions apparaissent. En dimension supérieure, Douglas lui-même avoue l'impossibilité de traiter ce problème par les méthodes qu'il emploie.

Dans cet article, nous donnons les bases d'une généralisation en dimension n du travail de Douglas, d'une part en le présentant d'une manière intrinsèque par l'utilisation du formalisme naturel du fibré tangent (cf. [9]), et d'autre part en employant non pas la théorie de Riquier, mais la version de Spencer-Goldschmidt du théorème de Cartan-Kähler. Ceci permet de mieux comprendre la nature géométrique des formules de Douglas, qui apparaissent liées au tenseur de courbure, et de donner une interprétation cohomologique – par la cohomologie de Spencer – des obstructions qui interviennent dans le problème.

Nous généralisons d'abord en dimension n le Théorème I de Douglas, qui concerne le cas le plus simple de sprays – ceux pour lesquels le tenseur de Douglas est proportionnel à l'endomorphisme vertical. Ces sprays sont toujours variationnels. Notons que ce résultat a été déjà obtenu par Anderson et Thomson (*cf.* [2]) à l'aide de la théorie des systèmes différentiels extérieurs et par Sarlet, Crampin et Martinez à l'aide de la théorie de Riquier (*cf.* [13]).

La partie la plus importante de cet article consiste à étudier le premier cas, si l'on peut dire, où des obstructions apparaissent pour que le spray soit variationnel. Il s'agit des sprays que nous appelons *à courbure isotrope*. Nous mettons en évidence leur signification géométrique : d'une certaine manière ils généralisent aux variétés munies d'un lagrangien non homogène les équations des géodésiques sur les variétés riemanniennes ou finslériennes à courbure constante. Pour ce type de sprays nous étudions les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'ils soient variationnels. Ces conditions dépendent de la géométrie de la distribution $\mathcal{D}$ définie par le champ canonique et par le spray. Nous étudions ici le cas où $\mathcal{D}$ est intégrable (en particulier, les sprays homogènes et quadratiques vérifient cette condition). Le cas non intégrable n'est pas essentiellement différent et seuls les calculs sont plus compliqués : nous signalons à la fin de l'article le type d'obstructions qui interviennent naturellement dans le cas général.

Remerciements. — Les auteurs tiennent à exprimer leur reconnaissance au referee pour les corrections et les précisions qu'il leur a signalées.

1. Préliminaires.

1.1. Le formalisme algébrique de la théorie des connexions.

On désigne par X une variété différentiable de dimension finie et $\Lambda^p T^*X$ (resp. S^pT^*X) le fibré des p-formes antisymétriques (resp. symétriques) sur M. Si $E \longrightarrow X$ est un fibré vectoriel sur X, on notera $C^\infty(E)$ l'espace des sections C^∞ de E et $J_k(E)$ le fibré des jets d'ordre k des sections de E. On note $\pi_k : J_{k+1}(E) \to J_k(E)$ la projection naturelle.

Dans cet article, on travaillera le plus souvent dans le cas où $X = TM$, avec M variété différentiable de dimension n. S'il n'y a pas d'ambiguïté, TTM (resp. T^*TM) sera noté plus simplement T (resp. T^*) et l'espace vertical sera noté T^v.

Une p-forme $\omega \in \otimes^p T^*$ est dite *semi-basique* si $\omega(X_1, \ldots, X_p) = 0$ chaque fois que l'un des vecteurs X_i est vertical. De même, une ℓ-forme L à valeurs vectorielles ($L \in \otimes^\ell T^* \otimes T$) est dite semi-basique si elle est à valeurs verticales et $L(X_1, \ldots, X_\ell) = 0$ chaque fois que l'un des vecteurs X_i est vertical.

On notera $\Lambda^p T_v^*$ (resp. $S^pT_v^*$) l'espace des p-formes semi-basiques antisymétriques (resp. symétriques) (pour $p = 1$ ces espaces sont notés T_v^*).

Dans cet article nous utilisons d'une manière essentielle le formalisme de Frölicher-Nijenhuis [5], ainsi que le formalisme algébrique de la théorie des connexions introduit par [9] et repris ensuite par divers auteurs avec des notations un peu différentes. En voici les éléments :

Soit $\pi : TM \longrightarrow M$ le fibré tangent à M et $\Pi : TTM \longrightarrow TM$ le fibré tangent à TM. On a la suite exacte

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow TM \underset{M}{\times} TM \xrightarrow{i} TTM \xrightarrow{j} TM \underset{M}{\times} TM \longrightarrow 0$$

où $i(v,w) = \dfrac{d}{dt}(v+tw)\Big|_{t=0}$ est l' injection naturelle dans le fibré vertical et $j = (\Pi, \pi)$. Le tenseur de type $(1{-}1)$ $J = i \circ j$ sur TM est appelé *endomorphisme vertical* (ou *structure presque-tangente*) et le champ vertical $z \in TM \to C_z = i(z,z)$ est dit *champ canonique* ou champ de Liouville. Notons que $J^2 = 0$, $[J,J] = 0$ et $\operatorname{Ker} J = \operatorname{Im} J = T^v$.

On appelle *spray* un champ S sur TM tel que $JS = C$. Un champ S est un spray si, et seulement si, dans les coordonnées locales naturelles (x^α, y^α) de TM, il s'écrit

$$(3) \qquad S = y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + f^\alpha(x,y)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

On dit que S est *homogène* si $[C,S] = S$ et s'il est $\mathcal{C}^\infty$ sur $TM \setminus \{0\}$ et $\mathcal{C}^1$ sur la section nulle; dans ce cas les fonctions $f^\alpha(x,y)$ sont homogènes de degré 2 en les y^α. Si de plus S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur la section nulle les $f^\alpha(x,y)$ sont quadratiques en les y^α. On dira alors que le spray est *quadratique*.

À tout spray est associé canoniquement un système d'équations différentielles du second ordre sur M (et réciproquement à tout système d'équations différentielles du second ordre correspond un spray) de la manière suivante. On appelle *chemin* de S une courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ telle γ' est une courbe intégrale de S, c'est-à-dire $S_{\gamma'} = \gamma''$. En coordonnées locales, si $(x^\alpha(t))$ est un chemin sur M, les x^α vérifient l'équation du second ordre

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = f^\alpha\Big(x, \frac{dx}{dt}\Big), \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Réciproquement, si l'on a une équation du second ordre, on définit le spray par cette formule et l'on vérifie que la définition est invariante par changement de coordonnées locales.

Si L est une ℓ-forme semi-basique (scalaire ou vectorielle), $\ell \geq 1$, on note L^0 le *potentiel* de L, c'est-à-dire la $(\ell - 1)$ forme définie par $L^0 = i_S L$, où S est un spray arbitraire. Il est clair que L^0 ne dépend pas du choix de S.

DÉFINITION 1.1.1 (cf. [9]). — *On appelle* connexion *sur M un champ de tenseurs Γ de type $(1{-}1)$ sur TM tel que $J\Gamma = J$ et $\Gamma J = -J$.*

La connexion est dite homogène si $[C,\Gamma]=0$ et si Γ est C^∞ sur $TM\setminus\{0\}$ et C^0 sur la section nulle. Si de plus Γ est C^1 sur la section nulle, on dit qu'elle est linéaire.

Dans la base $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha},\dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)$ une connexion est représentée par la matrice
$$\begin{pmatrix} \delta^\alpha_\beta & 0 \\ -2\Gamma^\alpha_\beta & -\delta^\alpha_\beta \end{pmatrix}.$$
Les fonctions Γ^α_β sont appelées *coefficients de la connexion.* Si la connexion est homogène les Γ^α_β sont homogènes de degré 1 en les y^γ ; si la connexion est linéaire, les Γ^α_β sont linéaires en les variables y^γ : $\Gamma^\alpha_\beta(x,y)=y^\gamma\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}(x)$.

On vérifie facilement que $\Gamma^2=\mathrm{I}$ et que l'espace propre correspondant à la valeur propre -1 est l'espace vertical. On en déduit une décomposition de TTM en somme directe
$$TTM=T^h\oplus T^v,$$
où T^h est l'espace propre correspondant à la valeur propre $+1$, appelé *espace horizontal.* On note h et v les projecteurs horizontal et vertical :
$$h=\frac{1}{2}(\mathrm{I}+\Gamma),\quad v=\frac{1}{2}(\mathrm{I}-\Gamma).$$

PROPOSITION 1.1.2 (cf. [9]). — *Si S est un spray alors $\Gamma=[J,S]$ est une connexion.*

DÉFINITION 1.1.3. — *On appelle* torsion *de la connexion la 2-forme à valeurs vectorielles $t=[J,h]$ et* courbure *la 2-forme à valeurs vectorielles $R=-\dfrac{1}{2}[h,h]$.*

Dans le cas d'une connexion linéaire, on retrouve à isomorphisme près la torsion et la courbure habituelles (cf. [9]).

Toute connexion Γ sur M détermine une structure presque-complexe F sur TM qui échange l'espace vertical et l'espace horizontal; plus précisément F est l'unique champ de tenseurs de type $(1-1)$ sur TM tel que $FJ=h$ et $Fh=-J$. Alors F s'exprime en fonction du spray de la connexion par
$$F=h\,[S,h]-J. \tag{4}$$

Comme il est bien connu, à tout lagrangien conduisant à un problème régulier de calcul des variations est associé canoniquement un spray (cf. par exemple [7], [9]), de la manière suivante :

DÉFINITION 1.1.4. — *On appelle* lagrangien *une application E : $TM \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $TM \setminus (0)$ et $\mathcal{C}^1$ sur la section nulle. On dit que E est* régulier *si la 2-forme $\Omega = dd_J E$ est de rang maximal $(= 2n)$.*

En coordonnées locales, le lagrangien E est régulier si, et seulement si,

$$\det\Big(\frac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\Big) \neq 0.$$

Par exemple, si g est une métrique riemannienne sur M, la forme quadratique sur TM $E(v) = \frac{1}{2}g(v,v)$ est un lagrangien régulier.

PROPOSITION 1.1.5 (cf. [7]). — *Soit $E \in C^\infty(TM)$ un lagrangien régulier. Le champ S sur TM défini par*

$$i_S\Omega = d(E - \mathcal{L}_C E) \tag{5}$$

est un spray et les chemins de S sont les solutions du système des équations d'Euler-Lagrange défini par E :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial E}{\partial x^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n.$$

Nous dirons que $\Gamma = [J, S]$ est la *connexion naturelle* associée à E. En particulier, si E est la forme quadratique associée à une métrique riemannienne, la connexion naturelle est la connexion de Levi-Civita. Si E définit une structure finslérienne, la connexion $\Gamma = [J, S]$ est la connexion canonique définie par [9].

On est ainsi amené à la définition suivante :

DÉFINITION 1.1.6. — *On dit qu'un spray S est* variationnel, *s'il existe un lagrangien régulier vérifiant l'équation Euler-Lagrange (5).*

La caractérisation des sprays variationnels sur un voisinage de $x_0 \in TM$ – c'est-à-dire la caractérisation locale des équations différentielles du second ordre qui proviennent d'un principe variationnel – revient donc à étudier l'existence des solutions régulières en $x_0 \in TM$ de l'opérateur différentiel d'ordre 2

$$P_1 : \mathcal{C}^\infty(TM, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(T_v^*)$$

défini par

$$P_1 = i_S dd_J + d\mathcal{L}_C - d. \tag{6}$$

Nous utiliserons pour cela la version de Spencer-Goldschmidt du théorème de Cartan-Kähler (cf. [3], [6]).

On fera souvent appel à la propriété suivante :

PROPOSITION 1.1.7. — *Soit Ω un champ de $(p+1)$-formes scalaires antisymétriques dans les derniers p arguments (c'est-à-dire Ω section du fibré $T^*M \otimes \Lambda^p T^*M$), $L \in T^*M \otimes TM$ et soit $\tau_L : T^*M \otimes \Lambda^p T^*M \longrightarrow \Lambda^{p+1}T^*M$ définie par*

$$(\tau_L\Omega)(X_1,\dots,X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}\Omega(LX_i, X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{p+1}).$$

Si $\omega \in \Lambda^p(M)$ est une p-forme scalaire s'annulant en un point $x \in TM$, alors pour toute connexion linéaire ∇ sur M on a

$$(\tau_L\nabla\omega)_x = (d_L\omega)_x \tag{7}$$

où d_L est la dérivation de type d_* associée à L.

En effet,

$$\begin{aligned}(d_L\omega)_x(X_1,\dots,X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}(LX_i)_x\big(\omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{p+1})\big)\\ &= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}(\nabla\omega)_x(LX_i, X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{p+1})\\ &= \big(\tau_L\nabla\omega\big)_x(LX_i, X_1,\dots,X_{p+1}).\end{aligned}$$

2. Courbure sectionnelle d'un lagrangien convexe.

2.1. Tenseur de Douglas, courbure sectionnelle.

Dans son article (cf. [4], (3.2), (4.4)), Douglas a introduit un tenseur qui joue un rôle essentiel dans la théorie. Voici sa présentation intrinsèque (cf. aussi [10]).

DÉFINITION 2.1.1. — *On appelle* tenseur de Douglas *le tenseur* $(1-1)$ *sur* TM

$$A = v[h, S],$$

où h et v sont les projecteurs horizontal et vertical de la connexion $[J, S]$.

On voit facilement que A est semi-basique et que

$$A = [h, S] + F + J,$$

où F est la structure presque-complexe associée à la connexion. Le tenseur A est lié à la courbure par la relation

$$R = \frac{1}{3}[J, A]. \tag{8}$$

En effet

$$\begin{aligned}[J, A] &= [J, [h, S]] + [J, F] = [h, [J, S]] - R \\ &= -[h, \Gamma] - R = -2[h, h] - R = 3R.\end{aligned}$$

En d'autres termes, le tenseur de Douglas contient toutes les informations sur la courbure de la connexion.

Le but de cet article est de caractériser les sprays variationnels dont le tenseur de Douglas est du type $A = \lambda J + \alpha \otimes C$. Nous allons donner maintenant une interprétation géométrique de cette restriction sur la courbure.

Un lagrangien non dégénéré E permet de définir une métrique sur le fibré vertical en posant

$$g(JX, JY) = \Omega_E(JX, Y)$$

où $\Omega_E = dd_J E$. Supposons que E est *convexe*, c'est-à-dire que la matrice $\left(\dfrac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\right)$ est définie positive, ce qui se traduit par le fait que g est une métrique riemannienne sur le fibré vertical. Cette hypothèse est nécessaire uniquement dans ce paragraphe pour donner une interprétation géométrique de la notion d'isotropie; elle n'interviendra pas par la suite. On vérifie facilement le lemme suivant :

LEMME 2.1.2. — *Soit L un tenseur $(1-1)$ semi-basique sur TM et $\widetilde{k}_L : T^v \backslash \{\lambda C\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$\widetilde{k}_L(JX) = \frac{2g(L^0, JX)g(JX, C) - g(LX, JX)g(C, C)}{g(C, C)[g(JX, JX)g(C, C) - g(C, JX)^2]}.$$

Si $i_L \Omega_E = 0$ et $g(L^0, C) = 0$, alors pour toutes fonctions $a, b \in C^\infty(TM)$, avec $a(x) \neq 0$ pour tout x, on a

$$\widetilde{k}_L(JX) = \widetilde{k}_L(a\, JX + b\, C). \tag{9}$$

Interprétation de ce résultat.

Soit $TM \times_M TM \xrightarrow{i} T^v$ l'isomorphisme naturel. Considérons un vecteur $JX_{z_1} \in T^v_{z_1}$ et soit $(z_1, z_2) = i^{-1}JX_{z_1}$. Puisque $i^{-1}C_{z_1} = (z_1, z_1)$, JX et C sont indépendants en z_1 si, et seulement si, $\{z_1, z_2\}$ forment une famille libre dans $T_{\pi(z_1)}M$. Soit $\mathcal{P}_{JX}$ le 2-plan engendré par $\{z_1, z_2\}$. Puisque $i^{-1}(aJX + bC) = \{z_1, az_2 + bz_1\}$, on a

$$\mathcal{P}_{JX} = \mathcal{P}_{aJX+bC}.$$

Ainsi la propriété (9) exprime le fait que $\widetilde{k}_L$ ne dépend que de z_1 et d'un 2-plan contenant z_1.

Remarque. — Soit L un tenseur (1−1) semi-basique, tel que $i_L\Omega_E = 0$ et soit $\bar{L} = L - \dfrac{g(L^0, C)}{g(C, C)}$; alors $i_{\bar{L}}\Omega_E = 0$ et $g(\bar{L}^0; C) = 0$. On peut donc donner la définition suivante :

DÉFINITION 2.1.3. — *Soit L un tenseur* (1−1) *semi-basique tel que $i_L\Omega_E = 0$. On appelle* fonction sectionnelle *associée à L l'application $k_L = \widetilde{k}_{\bar{L}}$. En particulier, si E est un lagrangien convexe, on appelle* courbure sectionnelle *la fonction sectionnelle k_A (notée aussi k) associée au tenseur de Douglas.*

Comme on vient de le voir, la courbure sectionnelle ne dépend que d'un vecteur $z \in TM$ et d'un 2-plan contenant z. Un simple calcul montre que

$$\begin{aligned} k_L(JX) =& \frac{2g(L^0, C)}{g(C, C)^2} \\ &+ \frac{-g(LX, JX)g(C, C)) + 2g(L^0, JX)g(C, JX) - g(JX, JX)g(L^0, C)}{g(C, C)[g(JX, JX)g(C, C) - g(JX, C)^2]}. \end{aligned}$$

Exemples.

1. *Cas finslérien* (E homogène).

Soit E homogène de degré 2 et $R = -\frac{1}{2}[h, h]$ sa courbure, on a

$$R^0 = -\frac{1}{2}[h, h]^0 = -[hS, h] + h[S, h] = [h, S] - [h, vS] - h[h, S] = A - [h, vS].$$

Or

$$vS = \frac{1}{2}(I - [J, S]S) = \frac{1}{2}(S - [C, S]) = 0$$

car $[C,S]=S$, puisque E est homogène de degré 2. Donc $R^0=A$ et $A^0=0$, d'où

$$k(JX)=\frac{g(R^0X,JX)}{g(C,JX)^2-g(C,C)g(JX,JX)}.$$

On obtient ainsi la courbure sectionnelle que l'on définit habituellement dans le cadre finslérien (cf. [12], p. 117).

2. *Cas riemannien* (E quadratique).

Notons $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire défini par E sur la variété M et $\mathcal{R}(u,v)w = D_uD_vw - D_vD_uw - D_{[u,v]}w$ la courbure de la connexion de Levi-Civita. Si $JX=i(u,v)$, on a

$$g(R^0X,JX)=\langle\mathcal{R}(u,v)u,v\rangle,\quad g(C,JX)=\langle u,v\rangle,$$
$$g(C,C)=\langle u,u\rangle,\quad g(JX,JX)=\langle v,v\rangle,$$

d'où

$$k(JX)=\frac{\langle\mathcal{R}(u,v)u,v\rangle}{\langle u,v\rangle^2-\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle}.$$

2.2. Isotropie.

DÉFINITION 2.2.1. — *On dit qu'un lagrangien convexe est à courbure* isotrope *en $z\in TM$, $z\neq 0$, si la courbure sectionnelle ne dépend pas du plan passant par z.*

Exemple. — Un calcul simple montre que si $A=\lambda J$ alors $k=0$ et que si $A=\mu i_C\Omega_E\otimes C$, alors $k=\mu$. Puisque k_L est une fonction C^∞-linéaire de L, on a

$$k_{\lambda J+\mu i_C\Omega_E\otimes C}=\mu.$$

PROPOSITION 2.2.2. — *Un lagrangien est à courbure isotrope k si, et seulement si, le tenseur de Douglas est du type*

$$A=\lambda J+\alpha\otimes C+\beta\otimes A^0$$

où

$$\lambda=\frac{g(A^0,C)}{g(C,C)}-kg(C,C),$$
$$\alpha=\Big(k-\frac{2g(A^0,C)}{g(C,C)^2}\Big)i_C\Omega_E+\frac{1}{g(C,C)}i_{A^0}\Omega_E,$$
$$\beta=\frac{1}{g(C,C)}i_C\Omega_E.$$

En effet, d'après la définition de la courbure sectionnelle, le lagrangien est à courbure isotrope si, et seulement si, pour tout $JX \in T_z^v$ la forme quadratique q donnée par

$$q(JX) = \big(kg(C,C) - 2g(A^0,C)\big)[g(JX,JX)g(C,C) - g(JX,C)^2] \\ +g(AX,JX)g(C,C) - 2g(A^0,JX)g(C,JX) + g(JX,JX)g(A^0,C)$$

est identiquement nulle. En polarisant et en tenant compte du fait que $g(AX,JY) = g(AY,JX)$ pour tous $X,Y \in T$, on trouve facilement l'expression de A.

Soit S est un spray *variationnel* dont le tenseur de Douglas est du type

$$(*) \qquad A = \lambda J + \alpha \otimes C + \beta \otimes A^0$$

avec α et β semi-basiques. La condition $i_A\Omega_E = 0$ donne $\alpha \wedge i_C\Omega_E + \beta \wedge i_{A^0}\Omega_E = 0$. Si A^0 et C sont indépendants, d'après le lemme de Cartan, on a : $\alpha = ai_C\Omega_E + bi_{A^0}\Omega$ et $\beta = bi_C\Omega_E + di_{A^0}\Omega$. D'autre part une condition de compatibilité de l'équation $(*)$ s'obtient en prenant le potentiel des deux membres, ce qui donne $A^0 = \lambda C + \alpha^0 C + \beta^0 A^0$, donc $\beta^0 = 1$ et $\alpha^0 = -\lambda$. Puisque C et A^0 sont indépendants, les conditions de la proposition sont satisfaites si, et seulement si, $d = 0$ (on prend $b = \dfrac{1}{g(C,C)}, \beta = \dfrac{1}{g(C,C)} i_C\Omega_E$ et $k = a + \dfrac{2g(A^0,C)}{g(C,C)^2}$ pour la courbure sectionnelle). Par conséquent le lagrangien d'un spray variationnel dont le tenseur de Douglas a la forme $(*)$ n'est pas forcément à courbure isotrope.

En revanche si C et A^0 sont liés (donc A est du type $A = \lambda J + \alpha \otimes C$, avec α 1-forme semi-basique), alors le lagrangien est à courbure isotrope. En effet, puisque $i_A\Omega_E = 0$, on a : $\alpha \wedge i_C\Omega_E = 0$; d'où $\alpha = \mu i_C\Omega_E$. Les conditions de la proposition sont donc vérifiées et la courbure sectionnelle vaut μ, comme nous l'avons vu.

On est ainsi amené à la définition suivante :

DÉFINITION 2.2.3. — *Un spray est dit* isotrope *si le tenseur de Douglas est du type*

$$(10) \qquad A = \lambda J + \alpha \otimes C$$

avec $\lambda \in C^\infty(TM)$ et α 1-forme semi-basique.

Comme on vient de le voir, si un spray isotrope est variationnel, alors le lagrangien associé est à courbure isotrope. Le but de cet article est d'étudier les conditions pour qu'un spray isotrope soit variationnel (et donc qu'il soit le spray d'un lagrangien à courbure isotrope).

3. Résultats généraux en dimension n.

3.1. Obstructions au premier relèvement des solutions d'ordre 2 de l'opérateur d'Euler-Lagrange.

On note $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ le fibré trivial en droites sur TM et $R_2 \subset J_2(\mathbb{1}_{\mathbb{R}})$ l'équation différentielle linéaire des solutions formelles d'ordre 2 de l'opérateur d'Euler-Lagrange

$$P_1 = i_S dd_J + d\mathcal{L}_C - d. \tag{11}$$

Notons que P_1 admet des solutions *régulières* d'ordre 2 en tout point $x \in TM$. En effet, soit $p = j_2(E)(x) \in J_{2,x}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}})$. Alors p est une solution formelle *régulière* en $x \in TM$ si, et seulement si, localement on a

$$\begin{cases} y^k p_{k\bar{i}} + f^k p_{\bar{k}\bar{i}} - p_i = 0 \\ \det(p_{\bar{i}\bar{j}}) \neq 0\ , \quad i,j = 1,\ldots,n, \end{cases} \tag{12}$$

où on note $p_i = \dfrac{\partial E}{\partial x^i}(x)$, $p_{i\bar{j}} = \dfrac{\partial^2 E}{\partial x^i \partial y^j}(x)$, et $p_{\bar{i}\bar{j}} = \dfrac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j}(x)$. Soit g_{ij} une matrice symétrique arbitraire telle que $\det(g_{ij}) \neq 0$. On pose $p_{\bar{i}\bar{j}} = g_{ij}$. On choisit ensuite les $p_{i\bar{j}}$ arbitrairement et les p_i en résolvant les équations du système (12).

PROPOSITION 3.1.1. — *Soit $p = j_2(E)(x)$ une solution formelle d'ordre 2 en $x \in TM \setminus \{0\}$ de R_2. Alors p se relève en une solution formelle d'ordre 3 si, et seulement si,*

$$i_\Gamma \Omega_E(x) = 0. \tag{13}$$

Remarque. — Cette condition est équivalente à $\Omega_E(hX, hY)(x) = 0$ pour tous $X, Y \in T_x$, comme on le voit facilement. Elle exprime donc le fait que la distribution horizontale est lagrangienne par rapport à Ω_E, en x.

Démonstration. — L'opérateur étant d'ordre 2, on est amené à étudier la surjectivité de l'application $\bar{\pi}_2 = \pi_2\big|_{R_3}$ dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & S^3T^* & \xrightarrow{\sigma_3(P_1)} & T^*\otimes T_v^* & \xrightarrow{\tau_\Gamma} & K_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & & & \\
R_3 & \xrightarrow{i} & J_3(\mathbb{1}_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{p_1(P_1)} & J_1(T_v^*) & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle \bar\pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & & & \\
R_2 & \xrightarrow{i} & J_2(\mathbb{1}_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{p_0(P_1)} & T_{v,x}^* & & & &
\end{array}$$

où $K_1 = \operatorname{Coker}\sigma_3(P_1)$. Un calcul simple montre que le symbole $\sigma_2(P_1)$: $S^2T^* \longrightarrow T_v^*$ de P_1 est donné par

$$[\sigma_2(P_1)\alpha](X) = \alpha(S, JX).$$

Il s'ensuit que le symbole du premier prolongement $\sigma_3(P_1)$: $S^3T^* \longrightarrow T^*\otimes T_v^*$ est donné par

$$[\sigma_3(P_1)\alpha](X,Y) = \alpha(X,S,JY).$$

Notons que l'opérateur P_1 est régulier dans un voisinage de $x \in TM\setminus\{0\}$, car S ne peut s'annuler que sur la section nulle.

Soit $B \in S^3T^*$; alors $B \in g_3(P_1)$ si, et seulement si, pour tous $X, Y \in T_x$

$$B(X,S,JY) = 0. \tag{14}$$

Si $\mathcal{B} = \{h_1,\dots,h_n, v_1\cdots v_n\}$ est une base adaptée à la connexion Γ, c'est-à-dire $h_i \in T_x^h$ et $v_i = Jh_i$ pour $i = 1,\dots,n$, alors les équations (14) s'écrivent :

$$(15)\quad \begin{array}{l} \text{a) } B(h_i,S,v_j) = 0, \quad i,j = 1,\dots,n \\ \text{b) } B(v_i,S,v_j) = 0. \end{array}$$

On voit facilement que, si $x \neq 0$:

$$\operatorname{rang}\sigma_3(P_1) = n^2 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Considérons l'application $\tau_\Gamma : T^*\otimes T_v^* \longrightarrow \Lambda_v^2 T^*$ définie par

$$(\tau_\Gamma B)(X,Y) = B(JX,Y) - B(JY,X).$$

On a $\tau_\Gamma\circ\sigma_3 = 0$ et $\dim\operatorname{Ker}\tau_\Gamma = n^2 + \dfrac{n(n+1)}{2}$. Ainsi la suite

$$S^3T^* \xrightarrow{\sigma_3(P_1)} T^*\otimes T_v^* \xrightarrow{\tau_\Gamma} \Lambda^2 T_v^* \longrightarrow 0 \tag{16}$$

est exacte. On peut donc identifier l'espace de obstructions K_1 à $\Lambda^2 T_v^*$. Par conséquent, si ∇ est une connexion linéaire sur TM, une solution d'ordre 2 $j_2(E)(x)$ se relève en une solution d'ordre 3 si, et seulement si, $\tau_\Gamma[\nabla(P_1 E)]_x = 0$. En utilisant le fait que la 1-forme $P_1 E$ est semi-basique et s'annule au point x, on a, d'après (1.1.7) :

$$\begin{aligned}
\tau_\Gamma[\nabla(P_1 E)]_x &= d_J(P_1 E)_x = d_J(i_S dd_J E + d(\mathcal{L}_C E - E))_x \\
&= i_J d(i_S dd_J E + d(\mathcal{L}_C E - E))_x = (i_J d i_S dd_J E)_x \\
&= (i_J(\mathcal{L}_S + i_S d) dd_J E)_x \\
&= (i_J \mathcal{L}_S dd_J E)_x = (\mathcal{L}_S i_J dd_J E)_x + i_{[J,S]}(dd_J E)_x \infty \\
&= (\mathcal{L}_S d_J^2 E)_x + i_\Gamma(dd_J E)_x = (i_\Gamma \Omega_E)_x
\end{aligned}$$

ce qui montre la proposition. □

3.2. Obstructions au premier relèvement des solutions d'ordre 2 de l'opérateur P_2.

Si $\dim M = 1$ la condition de compatibilité (13) est automatiquement vérifiée; dans le cas général, on est amené à l'introduire dans le système et à étudier l'intégrabilité de l'opérateur

$$P_2 = (P_1, P_\Gamma) : \quad C^\infty(TM, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(T_v^* \oplus \Lambda^2 T_v^*),$$

où

$$P_\Gamma = i_\Gamma dd_J : \quad C^\infty(TM, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^2 T_v^*).$$

Un calcul simple montre que le symbole $\sigma_2(P_\Gamma) : S^2 T^* \to \Lambda^2 T_v^*$ est donné par

$$(\sigma_2(P_\Gamma))\alpha)(X, Y) = 2\big[\alpha(hX, JY) - \alpha(hX, JY)\big].$$

Comme $\sigma_3(P_2) = \big(\sigma_3(P_1), \sigma_3(P_\Gamma)\big)$, on a

$$\big(\sigma_3(P_2)\alpha\big)(X, Y, Z) = \big(\alpha(X, S, JY), 2[\alpha(X, hY, JZ) - \alpha(X, hZ, JY)]\big)$$

aussi l'opérateur P_2, comme P_1, est régulier au voisinage de $x \in TM \setminus \{0\}$.

LEMMA 3.2.1. — *L'opérateur P_2 admet des solutions formelles régulières d'ordre 2 en tout $x \in TM \setminus \{0\}$.*

En effet, $p = j_2(E)(x) \in J_{2,x}(\mathbb{1}_\mathbb{R})$ est une solution formelle d'ordre 2 régulière en $x \in TM \setminus \{0\}$ si, et seulement si, localement on a

$$(17) \qquad \begin{cases} y^k p_{k\bar{i}} + f^k p_{\bar{k}\bar{i}} - p_i = 0, \\ 2(p_{j\bar{i}} - p_{i\bar{j}}) + \dfrac{\partial f^k}{\partial y^j} p_{\bar{i}\bar{k}} - \dfrac{\partial f^k}{\partial y^i} p_{\bar{k}\bar{j}} = 0 \\ \det(p_{\bar{i}\bar{j}}) \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Soit g_{ij} une matrice symétrique arbitraire telle que $\det(g_{ij}) \neq 0$. On pose $p_{\bar{i}\bar{j}} = g_{ij}$. Ensuite le système (17) se résout immédiatement, car les variables p_i sont des pivots dans le premier groupe d'équations et les variables $p_{i\bar{j}}$ sont des pivots dans le second groupe. □

PROPOSITION 3.2.2. — *Une solution formelle $p = j_2(E)(x)$ d'ordre 2 de l'opérateur P_2 en $x \in TM \setminus \{0\}$ se relève en une solution d'ordre 3 si, et seulement si, on a*

$$\begin{cases} i_A\Omega_E(x) = 0, \\ i_R\Omega_E(x) = 0, \end{cases} \tag{18}$$

où $\Omega_E = dd_J E$.

Démonstration. — Considérons l'application

$$\tau_2 : (T^* \otimes T_v^*) \oplus (T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) \longrightarrow \Lambda^2 T_v^* \oplus \Lambda_v^2 \oplus \Lambda^3 T_v^* \oplus \Lambda^3 T_v^*$$

définie par $\tau_2 = \big(\tau_\Gamma, \tau_A, \tau_R, \tau_{[J,J]}\big)$, où :

$$\begin{aligned} \tau_\Gamma(B,C)(X,Y) &= B(JX,Y) - B(JY,X) \\ \tau_A(B,C)(X,Y) &= B(hX,Y) - B(hY,X) - \frac{1}{2}C(S,X,Y) \\ \tau_R(B,C)(X,Y,Z) &= C(hX,Y,Z) + C(hY,Z,X) + C(hZ,X,Y) \\ \tau_{[J,J]}(B,C)(X,Y,Z) &= C(JX,Y,Z) + C(JY,Z,X) + C(JZ,X,Y) \end{aligned}$$

et montrons que la suite

$$S^3T^* \xrightarrow{\sigma_3(P_2)} (T^* \otimes T_v^*) \oplus (T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) \xrightarrow{\tau_2} K_2 \longrightarrow 0 \tag{19}$$

est exacte, où K_2 désigne l'image de τ_2.

On voit facilement, tout d'abord, que $\tau_2 \circ \sigma_3(P_2) = 0$. D'autre part, $g_3(P_2) = g_3(P_1) \cap g_3(P_\Gamma)$, donc $B \in S^3T^*$ est dans $g_3(P_2)$ si, et seulement si, l'équation (14) et l'équation

$$B(X, hY, JZ) - B(X, hZ, JY) = 0 \tag{20}$$

sont satisfaites pour tous $X, Y, Z \in T_x$. Soit $\mathcal{A} = \{h_i, v_j\}_{\{i,j=1\cdots n\}}$ une base de T_x adaptée à la connexion Γ, c'est-à-dire telle que $h_i \in T_x^h$ et $v_i = Jh_i \in T_x^v$. Un élément $B \in S^3T^*$ est dans $g_3(P_2)$ si, et seulement si, les équations (15) et les équations

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) } B(h_i, h_j, v_k) = B(h_i, h_k, v_j) \\ &\text{b) } B(v_i, h_j, v_k) = B(v_i, h_k, v_j) \end{aligned}\right\} , \quad i, j, k = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

sont satisfaites. D'après les équations (21), $B \in g_3(P_\Gamma)$ si, et seulement si, les blocs $B_{ij\bar{k}} = B(h_i, h_j, v_k)$ et $B_{i\bar{j}\bar{k}} = B(h_i, v_j, v_k)$ sont symétriques en

i, j, k. Puisqu'aucune condition n'est imposée sur les blocs $B(h_i, h_j, h_k)$ et $B(v_i, v_j, v_k)$ qui sont aussi symétriques, on en déduit immédiatement que B se décompose en 4 blocs symétriques, et donc que

$$\dim g_3(P_\Gamma) = 4\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

D'autre part un élément $B \in g_3(P_\Gamma)$ appartient à $g_3(P_1)$ si, et seulement si, les équations (15) sont satisfaites. Compte tenu du fait que $B \in S^3T^*$, (15.b) donne $\dfrac{n(n+1)}{2}$ équations indépendantes. De plus, puisque $B \in g_3(P_\Gamma)$, les composantes de B intervenant dans (15.a) sont elles aussi symétriques en i, j, et donc les équations (15.a) donnent $\dfrac{n(n+1)}{2}$ relations. Ainsi

$$\dim g_3(P_2) = 4\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} = 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \tag{22}$$

et

$$\operatorname{rang} \sigma_3(P_2) = \dim S^3T^* - \dim g_3(P_2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}. \tag{23}$$

Considérons maintenant le système définissant $\operatorname{Ker} \tau_2$. Comme on le voit facilement, les équations $\tau_\Gamma = 0$, $\tau_A = 0$, $\tau_R = 0$ et $\tau_{[J,J]} = 0$ sont indépendantes entre elles, car elles concernent des composantes différentes dans $(T^* \otimes T_v^*) \oplus (T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*)$. Ainsi le rang de τ_2 est la somme des rangs des applications $\tau_\Gamma, \tau_A, \tau_R$ et $\tau_{[J,J]}$. Un calcul facile donne : $\operatorname{rang} \tau_\Gamma = \operatorname{rang} \tau_A = \frac{1}{2}n(n-1)$ et $\operatorname{rang} \tau_R = \operatorname{rang} \tau_{[J,J]} = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ker} \tau_2 &= \dim \big((T^* \otimes T_v^*) \oplus (T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*)\big) \\ &\qquad - \frac{2n(n-1)}{2} - \frac{2n(n-1)(n-2)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}.\end{aligned}$$

On a donc $\operatorname{rang} \sigma_3(P_2) = \dim \operatorname{Ker} \tau_2$, ce qui montre que $\operatorname{Im} \sigma_3(P_2) = \operatorname{Ker} \tau_2$ et ainsi la suite (19) est exacte.

Soit maintenant ∇ une connexion linéaire sur TM. Une solution $p = j_2(E)(x)$ d'ordre 2 en x de l'opérateur P_2 se relève en une solution d'ordre 3, si, et seulement si, $[\tau_2 \nabla(P_2 E)]_x = 0$.

Soit $(\omega_E)_x = (i_S dd_J E + d\mathcal{L}_C E - dE)_x$. En utilisant (1.1.7) et le fait que, $(\omega_E)_x = 0$ et $(i_\Gamma \Omega_E)_x = 0$, on trouve :

$$\tau_\Gamma[\nabla(P_1E)]_x = (d_J P_1 E)_x = (d_J \omega_E)_x = (i_\Gamma \Omega_E)_x = 0$$
$$\tau_A[\nabla(P_2E)]_x = \Big(d_h\omega_E - \frac{1}{2}\mathcal{L}_S i_\Gamma \Omega\Big)_x = (i_A dd_J E)_x$$
$$\tau_R[\nabla(P_2E)]_x = (d_h P_\Gamma E)_x = d_h(i_\Gamma \Omega_E)_x = \frac{1}{2}(i_{[h,h]}\Omega_E)_x = (i_R\Omega_E)_x$$
$$\tau_{[J,J]}[\nabla(P_2E)]_x = (d_J P_\Gamma E)_x = d_J(d_J\omega_E)_x = \frac{1}{2}(d_{[J,J]}\omega_E)_x = 0,$$

d'où

$$[\tau_2\nabla(P_2E)]_x = \big(\tau_1, \tau_A, \tau_R, \tau_{[J,J]}\big)[\nabla(P_2E)]_x = \big(0, i_A\Omega_x, i_R\Omega_x, 0\big) \tag{24}$$

ce qui prouve la proposition. □

4. Étude de l'intégrabilité formelle dans le cas isotrope.

4.1. Le cas plat.

DÉFINITION 4.1.1. — *Un spray sera dit* plat *si le tenseur de Douglas est du type $A = \lambda J$.*

Il s'agit donc de sprays isotropes à courbure sectionnelle nulle. Ils correspondent au cas envisagé par Douglas dans son Théorème I. Le théorème suivant généralise le Théorème I de Douglas. Anderson et Thompson [2] ont déjà obtenu ce résultat en dimension n à l'aide de la théorie des systèmes différentiels extérieurs de Cartan. Récemment, Sarlet, Crampin et Martinez ont démontré le même résultat à l'aide de la théorie de Riquier ([13]).

THÉORÈME 1. — *Tout spray analytique plat est variationnel dans un voisinage de $x \in TM \setminus \{0\}$.*

Démonstration. — Comme on l'a vu, P_2 est un opérateur régulier et admet des solutions régulières d'ordre 2. D'autre part, toute solution formelle d'ordre 2 de P_2 se relève en une solution formelle d'ordre 3. En effet si $p = j_2(E)(x)$ est une solution d'ordre 2 en x on a, au point x,

$$i_A\Omega_E = i_{\lambda J}\Omega_E = \lambda i_J \Omega_E = \lambda d_J^2 E = \lambda d_{[J,J]}E = 0.$$

D'autre part, d'après (8), on a

$$i_R\Omega_E = -i_{\frac{1}{3}[\lambda J, J]}\Omega_E = -\frac{1}{3}d_{[\lambda J,J]}d_J E = -\frac{1}{3}\big(d_{\lambda J}d_J^2 E + d_J(\lambda d_J^2 E)\big) = 0.$$

Ainsi $\tau_2\,[\nabla P_2 E]_x = 0$, et donc toute solution d'ordre 2 se relève en une solution d'ordre 3.

Nous allons montrer maintenant que le symbole de P_2 est involutif en construisant une base quasi-régulière en $x \in TM \setminus \{0\}$ (cf. [6]).

Puisque $g_2(P_2) = \operatorname{Ker}\sigma_2(P_2) = g_2(P_1) \cap g_2(P_\Gamma)$, un élément $B \in S^3T^*$ est dans $g_2(P_2)$ si, et seulement si,

(25)
$$\begin{aligned} &\text{a) } B(S, JX) = 0, \\ &\text{b) } B(hX, JY) - B(hY, JX) = 0. \end{aligned}$$

Dans une base adaptée à la connexion $\{h_1, \ldots, h_n, v_1, \ldots, v_n\}$, où les $h_i \in T^h$ sont horizontaux et $v_i = Jh_i$, pour $i = 1, \ldots, n$, les équations ci-dessus s'écrivent

(26)
$$\begin{aligned} &\text{a) } B(S, v_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &\text{b) } B(h_i, v_j) = B(h_j, v_i), \quad i, j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Puisque ces équations sont indépendantes, on a

$$\dim g_2(P_2) = \frac{n(n+1)}{2} + n^2.$$

Pour la suite du calcul il faut distinguer le cas où le spray est homogène et le cas où il ne l'est pas. Notons que S est homogène si, et seulement si, il est horizontal. En effet $\Gamma S = [J, S]S = [C, S] - J[S, S] = [C, S]$, donc

$$vS = \frac{1}{2}(S - [C, S]). \tag{27}$$

• *Cas où le spray est homogène.*

Soit $\mathcal{B} = \{h_i, v_i\}_{i=1,\ldots,n}$ une base de T_x où les vecteurs $h_1, \ldots, h_{n-1}$ sont horizontaux, $h_n = S$ et $Jh_i = v_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Notons que $v_n = C$. Soit

$$\begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ b_{ij} & c_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(h_i, h_j) & B(h_i, v_j) \\ B(v_i, h_j) & B(v_i, v_j) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Compte tenu des équations (26) et de la symétrie de B, on a $a_{ij} = a_{ji}$, $c_{ij} = c_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$, $b_{ni} = 0$, pour $i, j = 1, \ldots, n$.

Considérons maintenant la base $\widetilde{\mathcal{B}} = \{e_i, v_i\}_{i=1,\ldots,n}$, où $e_i = h_i + iv_i$, pour $i = 1, \ldots, n-1$, et $e_n = h_n + \sum_{k=1}^{n} v_k$. Dans cette nouvelle base la matrice de B est

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{ij} & \widetilde{b}_{ij} \\ \widetilde{b}_{ji} & \widetilde{c}_{ij} \end{pmatrix}$$

où $\widetilde{c}_{ij} = c_{ij}$, pour $i, j = 1, \ldots, n$, et

$$\widetilde{b}_{ij} = \begin{cases} b_{ij} + ic_{ij}, & i, j = 1, \ldots, n-1 \ ; \\ c_{in}, & j = n \ ; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} c_{kj}, & i = n. \end{cases}$$

Ainsi les composantes du bloc $(\widetilde{c}_{ij})$ s'expriment à l'aide des $\widetilde{b}_{ij}$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \widetilde{c}_{in} &= \frac{1}{i}\widetilde{b}_{in}, \quad i < n \\ \widetilde{c}_{ij} &= \frac{1}{i-j}(\widetilde{b}_{ij} - \widetilde{b}_{ji}), \quad 1 \leq i < j < n \\ \widetilde{c}_{ii} &= \widetilde{b}_{ni} - \sum_{k \neq i} \frac{1}{k-i}(\widetilde{b}_{ik} - \widetilde{b}_{ki}), \quad i < n \\ \widetilde{c}_{nn} &= \widetilde{b}_{nn} - \sum_{k \neq n} \frac{1}{k}\widetilde{b}_{kn}. \end{aligned}$$

Ceci montre qu'un élément de $g_2(P_2)$ est déterminé par le bloc $\widetilde{a}$, qui est symétrique, et par le bloc $\widetilde{b}$. On a donc

$$\begin{aligned} \dim(g_2)_{e_1 \cdots e_k} &= \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + n(n-k), \\ \dim(g_2)_{e_1 \cdots e_n, v_1 \cdots v_k} &= 0, \end{aligned}$$

pour $k = 1, \ldots, n$. Ainsi

$$\begin{aligned} \dim g_2(P_2) &+ \sum_{k=1}^{n} \dim\big(g_2(P_2)\big)_{e_1 \cdots e_k} + \sum_{k=1}^{n} \dim\big(g_2(P_2)\big)_{e_1 \cdots e_n, v_1 \cdots v_k} \\ &= n^2 + \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-\ell)(n-k+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} n(n-k) \\ &= n^2 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)(n+1)}{6} + \frac{n^2(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} = \dim g_3(P_2), \end{aligned}$$

ce qui montre que la base $\widetilde{\mathcal{B}} = \{e_j, v_j\}_{j=1,\ldots,n}$ est quasi-régulière.

• *Cas où le spray est non homogène*

Soit $\{h_i, v_i\}_{i=1,\dots,n-1}$ une base où $h_n = hS$ et les vecteurs $h_i \in T^h$ sont choisis de telle manière que

$$vS = \sum_{k=1}^{n} v_k, \quad \text{où } v_i = Jh_i \quad (i = 1, \dots, n). \tag{29}$$

En utilisant à nouveau la notation (28) pour la matrice de $B \in g_2(P_2)$ on a toujours $a_{ij} = a_{ji}$, $c_{ij} = c_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$ pour $i, j = 1, \dots, n$. D'autre part compte tenu de (26.a) et (29), on obtient $b_{ni} = -\sum_{k=1}^{n} c_{ki}$.

Considérons maintenant la base $\widehat{\mathcal{B}} = \{e_i, v_i\}_{i=1,\dots,n}$, où $e_i = h_i + iv_i$, pour $i = 1, \dots, n$. Notons $\widehat{a}_{ij}$, $\widehat{b}_{ij}$ et $\widehat{c}_{ij}$ $(i, j = 1, \dots, n)$, les coefficients de la matrice de B dans cette base. On voit facilement que $\widehat{c}_{ij} = c_{ij}$ et

$$\begin{cases} \widehat{b}_{ij} = b_{ij} + ic_{ij}, & i, j = 1, \dots, n-1 \ ; \\ \widehat{b}_{in} = -\sum\limits_{k=1}^{n} c_{kn} + ic_{in}, & i = 1, \dots, n-1 \ ; \\ \widehat{b}_{ni} = -\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ki} + nc_{in}, & i = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Aussi le bloc $(\widehat{c}_{ij})$ s'exprime à l'aide des coefficients du bloc $(\widehat{b}_{ij})$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\widehat{c}_{ij} = \frac{1}{i-j}(\widehat{b}_{ij} - \widehat{b}_{ji}), \quad \text{pour } 1 \le j < i \le n \\ &\widehat{c}_{ii} = \frac{n-1}{n-i}(\widehat{b}_{ni} - \widehat{b}_{in}) - \widehat{b}_{ni} + \sum_{k=1, k\neq i}^{n-1} \frac{1}{k-i}(\widehat{b}_{ki} - \widehat{b}_{ik}), \quad 1 \le i < n \\ &\widehat{c}_{nn} = \frac{1}{n-1}\Big(\widehat{b}_{nn} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k}(\widehat{b}_{nk} - \widehat{b}_{kn}\Big). \end{aligned} \tag{30}$$

En effet, si $1 \le i < n$ on a, avec (29)

$$\begin{aligned} \widehat{b}_{ni} = b_{ni} + nc_{in} = -\sum_{k=1}^{n} c_{ki} + nc_{in} &= -\sum_{k=1, k\neq i}^{n-1} c_{ki} - c_{ii} - c_{ni} + nc_{in} \\ &= -\sum_{k=1, k\neq i}^{n-1} c_{ki} - c_{ii} + (n-1)c_{in} \end{aligned}$$

et donc, d'après (30)

$$\begin{aligned} \widehat{c}_{ii} &= (n-1)c_{in} - \widehat{b}_{in} - \sum_{k=1, k\neq i}^{n-1} c_{ki} \\ &= \frac{n-1}{n-i}(\widehat{b}_{ni} - \widehat{b}_{in}) - \widehat{b}_{ni} - \sum_{k=1, k\neq i}^{n-1} \frac{(\widehat{b}_{ki} - \widehat{b}_{ik})}{k-i}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\widehat{b}_{nn} = b_{nn} + nc_{nn} = -\sum_{k=1}^{n-1} c_{kn} + (n-1)c_{nn}$$

et

$$c_{nn} = \frac{1}{n-1}\Big(\widehat{b}_{nn} + \sum_{k=1}^{n-1} c_{kn}\Big) = \frac{1}{n-1}\Big(\widehat{b}_{nn} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k}(\widehat{b}_{nk} - \widehat{b}_{kn}\Big).$$

Par conséquent dans la base $\widehat{\mathcal{B}}$, un élément de $g_2(P_2)$ est déterminé par les blocs $\widehat{a}_{ij}$ et $\widehat{b}_{ij}$, où le bloc $\widehat{a}_{ij}$ est symétrique. Donc, comme dans le cas où le spray est homogène, on trouve

$$\dim(g_2)_{e_1\cdots e_k} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + n(n-k),$$
$$\dim(g_2)_{e_1\cdots e_n, v_1\cdots v_k} = 0$$

pour $k = 1, \dots, n$, d'où

$$\dim g_2(P_2) + \sum_{k=1}^{n} \dim\big(g_2(P_2)\big)_{e_1\cdots e_k} + \sum_{k=1}^{n} \dim\big(g_2(P_2)\big)_{e_1\cdots e_n, v_1\cdots v_k} = \dim g_3(P_2),$$

ce qui montre que la base $\widehat{\mathcal{B}}$ est quasi-régulière. Ceci achève la démonstration du théorème. □

4.2. Cas isotrope non plat.

4.2.1. Généralités.

Nous allons étudier maintenant le cas où le tenseur de Douglas est de la forme $A = \lambda J + \alpha \otimes C$, avec $\alpha \neq 0$. Commençons par quelques définitions.

Soit L un tenseur de type $(1-1)$, semi-basique sur TM. On pose

$$\widetilde{L} = LF + FL,$$

où F est la structure presque-complexe associée à la connexion $[J, S]$ (cf. (4)). Dans un système de coordonnées locales, si

$$L = L^\beta_\alpha(x,y)dx^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial y^\beta},$$

on a

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} L^\beta_\alpha & 0 \\ L^\beta_\gamma \Gamma^\gamma_\alpha - \Gamma^\beta_\gamma L^\gamma_\alpha & L^\beta_\alpha \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les valeurs propres de $\widetilde{L}$ sont les valeurs propres de la matrice (L^β_α) (comptées deux fois).

Remarques.

1. Si X est un vecteur propre de $\widetilde{L}$, alors FX est aussi vecteur propre de $\widetilde{L}$ pour la même valeur propre. En particulier, si X est un vecteur propre horizontal pour la valeur propre λ, alors JX est aussi vecteur propre pour la valeur propre λ .

2. Soit $x \in TM$ et $L(x) : T^v_x \to T^v_x$ l'endomorphisme défini par $L(x)JX = LX$. Alors $L(x)JX$ ne dépend pas du choix de X, car si X' est tel que $JX' = JX$, on a $X' = X + U$, avec U vertical, donc $LX = LX'$. On voit facilement que $\widetilde{L}_x$ diagonalisable équivaut à $L(x)$ diagonalisable : si $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base qui diagonalise $L(x)$, alors $\{v_1, \dots, v_n, F_{v_1}, \dots, F_{v_n}\}$ diagonalise $\widetilde{L}_x$ et réciproquement, si une base diagonalise $\widetilde{L}_x$ son image par J diagonalise $L(x)$. En d'autres termes, puisque $(L^\beta_\alpha)(x)$ est la matrice de $L(x)$ dans la base $\left\{\dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\right\}_x$, $\widetilde{L}$ est diagonalisable si, et seulement si, la matrice (L^β_α) est diagonalisable.

DÉFINITION 4.2.1. — *On dit que le tenseur* $(1-1)$ *semi-basique* L *est* de type algébrique constant *sur un ouvert* U, *si les degrés des diviseurs élémentaires dans la décomposition de Jordan de* $\widetilde{L}$ *sont constants sur* U.

DÉFINITION 4.2.2. — *Soit* E *un lagrangien; un vecteur* $v \in TM$ *est dit* de longueur nulle *si* $\Omega(C,S)_v = 0$, *où* S *est un spray quelconque.*

Cette condition ne dépend pas du choix de S. En effet, en coordonnées locales, le vecteur $v = (x^\alpha, z^\beta) \in TM$ est de longueur nulle si, et seulement si, $g_{\alpha\beta}(x,z)z^\alpha z^\beta = 0$, où $g_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2 E}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}$.

LEMME 4.2.3. — *Si* E *est un lagrangien régulier, l'ensemble des vecteurs de longueur nulle est d'intérieur vide. En particulier, soit* $f \in C^\infty(TM, \mathbb{R})$ *telle que* $f\,\Omega_E(C,S) = 0$ *sur un ouvert* U, *alors* $f = 0$ *sur* U.

En effet, puisque $i_C\Omega_E = d_J(\mathcal{L}_C E - E)$, on a $\Omega_E(C,S) = \mathcal{L}_C(\mathcal{L}_C E - E)$. Si $\Omega_E(C,S)$ s'annulait sur un ouvert U, $\mathcal{L}_C E - E$ serait homogène de degré 0 sur U et par conséquent, étant C^0 sur la section nulle, elle serait constante sur les fibres de TM. On aurait donc $d_J(\mathcal{L}_C E - E) = 0$, c'est-à-dire $i_C\Omega_E = 0$, ce qui est exclu car Ω_E est non dégénérée. □

Dans la suite nous nous intéressons à l'existence de lagrangiens locaux qui vérifient cette propriété.

LEMME 4.2.4. — *Soit S un spray isotrope non plat, c'est-à-dire $\alpha \neq 0$, et $x_0 \in TM$. Alors :*

1. $\alpha(S)_{x_0} \neq 0 \Longleftrightarrow \widetilde{A}_{x_0}$ *est diagonalisable.*

2. *Si $\widetilde{A}$ est de type algébrique constant sur U et si S est variationnel sur U, alors $\alpha(S)_x \neq 0$ pour tout $x \in U$ et, en particulier, $0 \notin U$.*

Démonstration.

1. Supposons $\widetilde{A}_{x_0}$ diagonalisable. Les valeurs propres de $\widetilde{A}_{x_0}$ sont $\lambda(x_0)$ et $\lambda(x_0) + \alpha(S)_{x_0}$. Si $\alpha(S)_{x_0}$ s'annulait, $\lambda(x_0)$ serait valeur propre de multiplicité $2n$ et donc on aurait $\widetilde{A}_{x_0} = \lambda(x_0)I$, c'est-à-dire $A = \lambda J$ en x_0, ce qui est exclu car $\alpha_{x_0} \neq 0$. Réciproquement, si $\alpha(S)_{x_0} \neq 0$ l'espace

$$\mathcal{H} = \alpha^{\perp} \cap T^h_{x_0} \tag{31}$$

et l'espace $\mathrm{Vect}(hS)_{x_0}$ engendré par hS_{x_0} sont des espaces propres supplémentaires dans $T^h_{x_0}$ (correspondant aux valeurs propres $\lambda(x_0)$ et $\lambda(x_0) + \alpha(S)_{x_0}$), on a donc

$$T^h_{x_0} = \mathcal{H} \oplus \mathrm{Vect}(hS)_{x_0}, \tag{32}$$

et on en déduit la décomposition de $T_{x_0}TM$ en sous-espaces propres correspondant aux valeurs propres $\lambda(x_0)$ et $\lambda(x_0) + \alpha(S)_{x_0}$:

$$T_{x_0} = \Big(\mathcal{H} \oplus J\mathcal{H}\Big) \oplus \Big(\mathrm{Vect}(hS)_{x_0} \oplus \mathrm{Vect}\, C_{x_0}\Big). \tag{33}$$

Par conséquent $\widetilde{A}_{x_0}$ est diagonalisable.

2. Si $\widetilde{A}$ est de type algébrique constant sur U, alors : $\widetilde{A}$ est diagonalisable en tout point de U, ou bien il ne l'est en aucun point de U. En d'autres termes : soit $\alpha(S)_x = 0$ pour tout $x \in U$, soit $\alpha(S)_x \neq 0$ en tout point de U. Supposons que S est variationnel, et E est un lagrangien non dégénéré associé. La condition d'intégrabilité $i_A\Omega_E = 0$ (cf. Proposition 3.2.2) donne $i_{\lambda J + \alpha\otimes C}\Omega_E = 0$, c'est-à-dire $\alpha \wedge i_C\Omega_E = 0$. Puisque $\alpha \neq 0$, il existe $\rho_E \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ tel que $i_C\Omega_E = \rho_E\alpha$ sur U, et donc $\Omega(C, S) = \rho_E\alpha(S)$. Si $\alpha(S) = 0$ sur U, tout $x \in U$ serait de longueur nulle, ce qui est exclu d'après le lemme 4.2.3. On a donc $\alpha(S)(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$. Enfin, comme on le voit immédiatement en coordonnées locales, $\alpha(S)_0 = 0$, donc $0 \notin U$. □

4.2.2. Le théorème principal dans le cas non plat.

Dans ce paragraphe nous allons montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit S un spray isotrope analytique non plat. On suppose que le tenseur de Douglas $A = \lambda J + \alpha \otimes C$ est de type algébrique constant au voisinage de x et que la distribution engendrée par le spray S et le champ canonique C est intégrable. Alors S est variationnel sur un voisinage de x si, et seulement si,*

1. $\alpha \wedge \alpha' = 0 \quad$ (*où* $\alpha' = i_h \mathcal{L}_S \alpha$)
2. $\alpha \wedge d_J \alpha = 0$
3. $\alpha \wedge D_{hX} \alpha = 0$ *pour tout* $X \in \operatorname{Ker} \alpha$

où D est la connexion de Berwald sur TM associée à S.

Rappelons que D est caractérisée par les propriétés suivantes (cf. [9], II) :

$$DJ = 0, \quad DF = 0, \quad D_{hX} JY = [h, JY]X, \quad D_{JX} JY = [J, JY]X.$$

Remarques.

1. Puisque le champ canonique C s'annule en 0, si S est de type algébrique constant et non plat sur U alors nécessairement $x \neq 0$ sur U. Ceci va assurer la régularité de l'opérateur différentiel. Par ailleurs, comme nous l'avons vu, (cf. Lemme 4.2.4), si S est variationnel au voisinage de x, alors nécessairement $x \neq 0$. Il est donc naturel d'étudier l'intégrabilité formelle au voisinage de $x \neq 0$.

2. La 2-distribution $\mathcal{D}$ définie par le spray S et le champ canonique C est intégrable si, et seulement si, il existe une fonction μ telle que $vS = \mu C$.

En effet, (cf. (27)), $vS = \frac{1}{2}(S - [C, S])$. Par conséquent si $vS = \mu C$, alors $[C, S] = S - 2\mu C$, donc $\mathcal{D}$ est intégrable. Réciproquement, si $\mathcal{D}$ est intégrable, alors il existe des fonctions a et b telles que $[C, S] = aS + bC$. D'autre part $J[C, S] = J\Gamma S = JS = C$, donc $a = 1$. Puisque $S - 2vS = aS + bC$, on a $vS = -\frac{b}{2}C$.

En particulier, si S est homogène, alors $\mathcal{D}$ est intégrable. Ainsi le théorème contient comme cas particuliers les systèmes d'équations homogènes et, plus particulièrement, quadratiques.

Démonstration du théorème. — Comme nous l'avons vu (cf. Proposition 3.2.2), la condition $(i_A\Omega_E)_x = 0$, c'est-à-dire $(\alpha)_x \wedge (i_C\Omega_E)_x = 0$, est une condition nécessaire pour qu'une solution formelle $p = j_2(E)(x)$ d'ordre 2 de l'opérateur différentiel P_2 se relève en une solution d'ordre 3. On est ainsi amené à étudier l'opérateur

$$P_3 = (P_1,\, P_\Gamma,\, P_A): \quad C^\infty(TM,\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(T_v^* \oplus \Lambda^2 T_v^* \oplus \Lambda^2_\alpha)$$

avec

$$P_A = i_A dd_J : C^\infty(TM,\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^2_\alpha),$$

où $\Lambda^2_\alpha = \{\Theta \in \Lambda^2 T_v^* \mid \exists \theta \in T_v^* : \Theta = \alpha \wedge \theta\}$.

Le symbole $\sigma_2(P_A) : S^2T^* \longrightarrow \Lambda^2_\alpha$ de P_A est donné par

$$(\sigma_2(P_A)G)(X,Y) = G(AX, JY) - G(AX, JY),$$

avec $X, Y \in T$, $G \in S^2T^*$ et donc

$$(\sigma_3(P_A)B)(X,Y,Z) = B(X, AY, JZ) - B(X, AZ, JY).$$

Aussi P_3 est régulier, car on a supposé $x \neq 0$.

D'autre part, il est facile de voir que P_3 admet des solutions régulières d'ordre 2 en tout point $x \neq 0$. Notons en effet que si $p = j_2(E)_x$ est une solution d'ordre 2 en x, la condition $P_A(E)_x = 0$ s'écrit

$$p_{\bar{i}\bar{j}} A^j_k = p_{\bar{k}\bar{j}} A^j_i$$

où $p_{\bar{i}\bar{j}} = \dfrac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j}$. Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base qui diagonalise $A(x)$ et g_x le produit scalaire sur T_x^v qui rend orthonormée cette base. On a $g_x(A(x)X, Y) = g_x(X, A(x)Y)$. Si $(p_{\bar{i}\bar{j}})$ est la matrice qui exprime g_x dans la base $\left\{\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right\}_{(i=1,\ldots,n)}$, on aura donc $p_{\bar{i}\bar{j}} A^j_k = p_{\bar{k}\bar{j}} A^j_i$. On construit ensuite les autres composantes de p en résolvant le système (17).

LEMME 4.2.5. — *Soit S un spray isotrope non plat. On suppose que le tenseur de Douglas A est de type algébrique constant sur un voisinage U et que la 2-distribution engendrée par S et C est intégrable sur U. Alors toute solution formelle d'ordre 2 de P_3 en $x \in U$ se relève en une solution d'ordre 3 si, et seulement si, au point x :*

1. $\alpha \wedge d_J\alpha = 0$
2. $\alpha \wedge \alpha' = 0$ (où $\alpha' = i_h\mathcal{L}_S\alpha$)
3. $\alpha \wedge D_{hX}\alpha = 0$ *pour tout* $X \in \operatorname{Ker}\alpha$

où D est la connexion de Berwald *sur TM associée à S.*

Démonstration. — Calculons la dimension de $g_3(P_3)$. Puisque $g_3(P_3) = g_3(P_2) \cap g_3(P_A) = g_3(P_1) \cap g_3(P_\Gamma) \cap g_3(P_A)$, un tenseur $B \in S^3T^*$ est un élément de $g_3(P_3)$ si, et seulement si, pour tous $X, Y, Z \in T$, les équations (14), (20) et l'équation

$$B(X, AY, JZ) - B(X, AZ, JY) = 0 \tag{34}$$

sont satisfaites. Soit $\mathcal{B} = \{h_1, \ldots, h_n, v_1, \ldots, v_n\}$ une base qui diagonalise $\widetilde{A}$, avec $h_1, \ldots, h_{n-1}$ vecteurs propres horizontaux correspondant à la valeur propre λ, $h_n = hS$ et $v_i = Jh_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. En utilisant cette base, $B \in g_3(P_3)$ si, et seulement si, les équations (15), (21) et

$$\begin{aligned} &\text{a) } B(h_i, C, v_j) = 0 \\ &\text{b) } B(v_i, C, v_j) = 0 \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n-1 \tag{35}$$

sont vérifiées. Notons tout d'abord que, puisque $\mathcal{D}$ est intégrable, on a $vS = \mu C$. Par ailleurs, les équations (35) s'expriment en fonction des autres équations. En effet :

$$\begin{aligned} B(h_i, C, v_j) &= B(h_i, v_n, v_j) = B(v_j, h_i, v_n) = B(v_j, hS, v_i) \\ &= B(v_j, S, v_i) - B(v_j, \mu C, v_i) = 0 \quad \text{pour} \quad i < n, j = 1, \ldots, n, \\ B(h_n, C, v_j) &= B(hS, C, v_j) = B(C, hS, v_j) \\ &= B(C, S, v_j) - B(C, \mu C, v_j) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, une application simple de la méthode du pivot permet de voir que les $\dfrac{(n-1)n}{2} + (n-1)$ équations de (35.b) sont indépendantes des équations de (15) et (21), car elles sont calculées sur trois vecteurs verticaux et leurs variables n'apparaissent pas dans les autres équations. On en déduit que

$$\begin{aligned} \dim g_3(P_3) &= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{3} - \Big(\frac{(n-1)n}{2} + (n-1)\Big) \\ &= \frac{4n^3 + 3n^2 - n + 6}{6} \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\operatorname{rang} g_3(P_3) = \dim S^3T^* - \dim g_1(P_3) = \frac{4n^3 + 9n^2 + 5n - 6}{6}. \tag{36}$$

Pour construire le conoyau du premier prolongement de P_3 on considère les applications :

$$\begin{aligned} \tau_{[J,A]} &: (T^* \otimes T_v^*) \oplus (T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) \oplus (T^* \otimes \Lambda_\alpha^2) \longrightarrow \Lambda^2 T_v^* \\ \tau_{A'} &: (T^* \otimes T_v^*) \oplus (T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) \oplus (T^* \otimes \Lambda_\alpha^2) \longrightarrow \Lambda^3 T_v^* \\ \tau_{\mathcal{H}} &: (T^* \otimes T_v^*) \oplus (T^* \otimes \Lambda^2 T_v^*) \oplus (T^* \otimes \Lambda_\alpha^2) \longrightarrow T_v^* \otimes T_v^* \end{aligned}$$

définies par

$$\tau_{[J,A]}(B_S,B_\Gamma,B_A)(X,Y,Z) = B_A(JX,Y,Z) + B_A(JY,Z,X) + B_A(JZ,X,Y),$$

$$\tau_{A'}(B_S,B_\Gamma,B_A)(X,Y) = B_A(S,X,Y) - (B_S(AX,Y) - B_S(AY,X)),$$

où $X,Y,Z \in T$, et

$$\tau_{\mathcal{H}}(B_S,B_\Gamma,B_A)(X,Y) = \frac{1}{2}B_\Gamma(JY,X,S) + B_S(JY,X) - \frac{\mu}{\alpha(S)}B_A(JY,S,X) - \frac{1}{\alpha(S)}B_A(hX,S,Y),$$

pour tous $X,Y \in \mathcal{H}$, où $\mathcal{H} = \alpha^\perp \cap T^h$.

On voit facilement que si $\tau_3 = (\tau_2, \tau_{[J,A]}, \tau_{A'}, \tau_{\mathcal{H}})$ et $K_3 = \operatorname{Im}\tau_3$ alors la suite

$$(37) \qquad S^3T^* \xrightarrow{\sigma_3(P_3)} (T^*\otimes T_v^*) \oplus (T^*\otimes \Lambda_v^2) \oplus (T^*\otimes\Lambda_\alpha^2) \xrightarrow{\tau_3} K_3 \longrightarrow 0$$

est exacte. En effet, on vérifie tout d'abord que $\tau_3 \circ \sigma_3(P_3) = 0$. D'autre part $\operatorname{Ker}\tau_{[J,A]}$ est défini par $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations, $\operatorname{Ker}\tau_{A'}$ par $(n-1)$ équations et $\operatorname{Ker}\tau_{\mathcal{H}}$ par $(n-1)^2$ équations. Or toutes ces équations sont indépendantes entre elles et indépendantes des équations définissant $\operatorname{Ker}\tau_2(P_2)$, comme on le voit facilement. On en déduit que

$$\begin{aligned}\dim\operatorname{Ker}\tau_3(P_3) &= \dim\operatorname{Ker}\tau_2(P_2) \\ &\quad + \left[\dim(T^*\otimes\Lambda_\alpha^2) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-1) - (n-1)^2\right] \\ &= \frac{4n^3+9n^2+5n-6}{6} = \operatorname{rang}\sigma_3(P_3)\ ;\end{aligned}$$

ce qui montre que la suite est exacte.

Terminons maintenant la preuve du lemme. Soit ∇ une connexion linéaire sur TM. Une solution formelle $p = j_2(E)(x)$ d'ordre 2 de l'opérateur P_3 se relève en une solution d'ordre 3 en x, si, et seulement si, $[\tau_3\nabla(P_3E)]_x = 0$. On a au point x :

$$\omega_E = i_S dd_J E + d\mathcal{L}_C E - dE = 0, i_\Gamma\Omega_E = 0 \;\text{ et }\; i_A\Omega_E = 0.$$

Ainsi

$$\tau_2[\nabla(\mathcal{P}_3E)]_x = \tau_2[\nabla(\mathcal{P}_2E)]_x = 0,$$

et

$$\tau_{A'}[\nabla(\mathcal{P}_3E)]_x = \Big(\mathcal{L}_S i_A\Omega_E - d_A(P_1E)\Big)_x = (i_{A'}\Omega_E)_x$$

où

(38) $$A' = v\,[A, S]\,h$$

est la *dérivée semi-basique le long de S* du tenseur A. Or

$$\begin{aligned} A' = v[S,A]h &= v\big(\mathcal{L}_S\lambda)J + \lambda[S,J] - \mathcal{L}_S\alpha\otimes C + \alpha\otimes[S,C]\big)h \\ &= \lambda' J + \alpha'\otimes C + \alpha\otimes vS = \lambda' J + (\alpha' + \mu\alpha)\otimes C \end{aligned}$$

où $\lambda' = \mathcal{L}_S\lambda$, et $\alpha' = h^*(\mathcal{L}_S\alpha)$. On a donc

$$i_{A'}\Omega_E = (\alpha' + \mu\alpha)\wedge i_C\Omega_E.$$

Puisque $(i_A\Omega_E)_x = 0$ et $\alpha_x \neq 0$, il existe $\rho_E \in \mathbb{R}$ tel que

(39) $$(i_C\Omega_E)_x = \rho_E\alpha_x.$$

On en déduit que

(40) $$\tau_{A'}[\nabla(\mathcal{P}_3E)]_x = (i_{A'}\Omega_E)_x = (\rho_E\alpha'\wedge\alpha)_x.$$

d'où, en utilisant (8),

$$\tau_{[J,A]}[\nabla(\mathcal{P}_3E)]_x = (d_Ji_A\Omega_E)_x = (i_{[J,A]}\Omega_E)_x - (d_Ad_J^2E)_x = 3(i_R\Omega_E)_x.$$

D'autre part,

$$R = \frac{1}{3}[J,A] = d_J\lambda\wedge J + d_J\alpha\otimes C - \alpha\wedge J,$$

et donc

(41) $$\tau_{[J,A]}[\nabla(\mathcal{P}_3E)]_x = (d_J\alpha\wedge i_C\Omega_E)_x = (\rho_E d_J\alpha\wedge\alpha)_x.$$

Enfin, si $X, Y \in \mathcal{H}$, on a :

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{H}}[\nabla(\mathcal{P}_3E)]_x(X,Y) =& \frac{1}{2}\nabla(i_\Gamma\Omega)(JY,X,S) + \nabla\omega(JY,X) \\ &- \frac{\mu}{\alpha(S)}\nabla(i_A\Omega)(JY,S,X) \\ &- \frac{1}{\alpha(S)}\nabla(i_A\Omega)(hX,S,Y) \\ =& \frac{1}{2}JY(i_{2h-I}\Omega_E(X,S) + JY\omega(X) \\ &- \frac{\mu}{\alpha(S)}JY(i_A\Omega)(S,X) - \frac{1}{\alpha(S)}hX(i_A\Omega)(S,Y) \\ =& JY(i_h\Omega_E - \Omega)(X,S) + d\omega(JY,X) \\ &- \mu JY(\Omega(C,X)) - hX(\Omega(C,Y)). \end{aligned}$$

Soit $X \in \operatorname{Ker}\alpha$. On a

$$\Omega_E(C,X)_x = i_C\Omega_E(X)_x = \rho_E\alpha(X)_x = 0$$

et

$$\mu\, JY\Omega(C,X) = JY\Omega_E(\mu C, X) = JY\Omega_E(vS, X),$$

d'où

$$(42)\quad \tau_{\mathcal{H}}[\nabla(\mathcal{P}_3 E)]_x(X,Y) = JY\Omega_E(X,S) + d\omega_E(JY,X) + hX\Omega_E(S,JY).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} d\omega_E(JY,X) &= \mathcal{L}_S\Omega_E(JY,X) \\ &= JY\Omega_E(S,X) - X\Omega(S,JY) - \Omega_E(S,[JY,X]) \end{aligned}$$

ce qui donne enfin

$$\tau_{\mathcal{H}}[\nabla(\mathcal{P}_3 E)]_x(X,Y) = i_S\Omega([X,JY])_x. \tag{43}$$

Cette condition de compatibilité peut être exprimée d'une façon plus claire à l'aide de la connexion de Berwald. Considérons une base adaptée à la décomposition (33), donnée par $\{h_i, Jh_i\}_{i=1,\ldots,n}$ où $h_j \in \mathcal{H}$, pour $i = 1,\ldots,n-1$, et $h_n = hS$. En $x \in TM$ on a, pour $i = 1,\ldots,n-1$:

$$\begin{aligned} \Omega_E(S,h_i) = \Omega_E(vS,h_i) &= \mu\Omega_E(C,h_i) \\ &= \frac{\mu}{\alpha(S)} i_A\Omega_E(S,h_i) - \frac{\mu\lambda}{\alpha(S)} i_J\Omega_E(S,h_i) = 0, \\ \Omega_E(S,v_i) = \Omega_E(hS,v_i) &= \Omega_E(C,h_i) \\ &= \frac{1}{\alpha(S)} i_A\Omega_E(S,h_i) - \frac{\lambda}{\alpha(S)} i_J\Omega_E(S,h_i) = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\Omega(S,[X,JY]) = \Omega(S,[X,JY]_C)$, où $[X,JY]_C$ est la composante du vecteur $[X,JY]$ sur C dans la décomposition (33). Par conséquent, compte tenu de (43) et du lemme 4.2.4, on a

$$\tau_{\mathcal{H}}[\nabla(\mathcal{P}_3 E)]_x = 0, \quad \text{si, et seulement si,} \quad [X,JY]_C = 0 \quad \text{au point } x.$$

En utilisant la décomposition spectrale de $\widetilde{A}$, on voit immédiatement que le projecteur sur l'espace propre correspondant à la valeur propre $\lambda + \alpha(S)$, c'est-à-dire sur l'espace engendré par hS et C, est

$$p = \frac{1}{\lambda + \alpha(S) - \lambda}(\widetilde{A} - \lambda I) = \frac{1}{\alpha(S)}(i_F\alpha \otimes C + \alpha \otimes hS).$$

La projection sur l'espace engendré par C dans la décomposition (33) est donc $p_C = \dfrac{1}{\alpha(S)} i_F\alpha \otimes C$, d'où

$$[X,JY]_C = \frac{1}{\alpha(S)}\alpha(F[X,JY]) \otimes C.$$

D'autre part, si D est la connexion de Berwald, compte tenu du fait que $X, Y \in \mathcal{H} = \alpha^{\perp} \cap T^h$ et que $\alpha(F[X, JY])_x$ ne dépend que des valeurs de X et Y en x, on a

$$\begin{aligned}\alpha(F[X, JY])_x &= \alpha(F[h, JY]X)_x = \alpha(FD_{hX}JY)_x \\ &= \alpha(FJD_{hX}Y)_x = D_{hX}\alpha(Y)_x,\end{aligned}$$

pour tout $Y \in \mathcal{H}$, ce qui montre que $\tau_{\mathcal{H}}[\nabla(\mathcal{P}_3E)]_x = 0$ si, et seulement si,

$$(D_{hX}\alpha \wedge \alpha)_x = 0, \quad \forall X \in \operatorname{Ker}\alpha_x. \tag{44}$$

Les équations (40), (41) et (44) nous disent donc que $\tau_3[\nabla(\mathcal{P}_3E)]_x = 0$ si, et seulement si, les conditions de la proposition (4.2.5) sont satisfaites. Ces équations sont donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que toute solution d'ordre 2 de P_3 se relève en une solution d'ordre 3. □

LEMME 4.2.6. — *L'opérateur P_3 est involutif.*

Démonstration. — Comme la distribution $\mathcal{D}$ engendrée par C et S est intégrable, il existe $\mu \in C^\infty(TM)$ telle que $vS = \mu C$. D'autre part on a $g_2(P_3) = g_2(P_1) \cap g_2(P_\Gamma) \cap g_2(P_A)$; un élément $B \in S^2T^*$ est donc dans $g_2(P_3)$ si, et seulement si, il vérifie (25) et l'équation

$$B(AX, JY) - B(AY, JX) = 0 \;\text{ pour tous }\; X, Y \in T. \tag{45}$$

Considérons la base $\mathcal{B} = \{h_i, v_i\}_{i=1\cdots n}$, où : $h_i \in \mathcal{H} = \operatorname{Ker}\alpha \cap T^h$, pour $i = 1, \dots, n-1$, $h_n = S$ et $Jh_i = v_i$, pour $i = 1, \dots, n$.

En utilisant la notation (28) on trouve

$$\begin{aligned}
&\text{a) } c_{ni} = B(v_n, v_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1,\\
&\text{b) } b_{ni} = B(h_n, v_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1,\\
&\text{c) } b_{nn} = B(h_n, v_n) = \mu \cdot c_{nn},\\
&\text{d) } b_{ij} - b_{ji} = B(h_i, v_j) - B(h_j, v_i) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{46}$$

En effet

— de l'équation (45) calculée en $X = S$ et $Y = h_i$, on obtient :

$$0 = B(AS, v_i) - B(Ah_i, C) = \alpha(S) \cdot B(v_n, v_i),$$

pour $i = 1, \dots, n-1$, d'où (46.a), compte tenu du fait que $i_S\alpha \neq 0$;

— si $i < n$, en utilisant (25.a), on a

$$\begin{aligned}b_{ni} = B(h_n, v_i) &= B(S, v_i) - B(vS, v_i)\\ &= B(S, v_i) - \mu B(v_n, v_i) = B(S, v_i) = 0\ ;\end{aligned}$$

— enfin pour b_{nn} on a

$$b_{nn} = B(h_n, v_n) = B(S, C) - B(vS, C) = B(S, v_n) - \mu B(v_n, v_n) = \mu c_{nn}.$$

On en déduit

$$\dim g_2(P_3) = \dim S^2T^* - n - (n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n^2 - n + 2}{2}.$$

Considérons maintenant la base $\widetilde{\mathcal{B}} = \{e_i, v_j\}_{i,j=1\cdots n}$, où

$$\begin{aligned} e_1 &= h_1 + v_n, \\ e_i &= h_i + (i-1)v_i \qquad \text{pour } i = 2, \dots, n-1, \\ e_n &= h_n + \sum_{i=1}^{n} v_i, \end{aligned}$$

et montrons qu'elle est quasi-régulière. Soit $\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{ij} & \widetilde{b}_{ij} \\ \widetilde{b}_{ji} & \widetilde{c}_{ij} \end{pmatrix}$ la matrice de $B \in g_2(P_3)$ dans cette base. On a

$$(\widetilde{b}_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} & c_{nn} \\ b_{12} + c_{12} & b_{22} + c_{22} & \cdots & b_{2,n-1} + c_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{1,n-1}+(n-1)c_{1,n-1} & b_{2,n-1}+(n-1)c_{2,n-1} & \cdots & b_{n-1,n-1}+(n-1)c_{n-1,n-1} & 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} c_{i1} & \sum_{i=1}^{n-1} c_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n-1} c_{i,n-1} & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Les $\widetilde{c}_{ij} = c_{ij}$ s'expriment à l'aide des $\widetilde{b}_{ij}$ par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \widetilde{c}_{in} = 0, & 1 \le i < n; \\ \widetilde{c}_{nn} = \widetilde{b}_{1n} ; & \\ \widetilde{c}_{ij} = \dfrac{1}{i-j}(\widetilde{b}_{ij} - \widetilde{b}_{ji}), & 1 < i < j < n; \\ \widetilde{c}_{1i} = \dfrac{1}{i-1}(\widetilde{b}_{i1} - \widetilde{b}_{1i}), & i = 2, \dots, (n-1); \\ \widetilde{c}_{ii} = -\displaystyle\sum_{k=1, k\neq i}^{n-1} \dfrac{1}{k-i}(\widetilde{b}_{ki} - \widetilde{b}_{ik}), & i = j < n. \end{cases}$$

Les éléments de $g_2(P_3)$ sont donc déterminés par les paramètres $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_{ij}$. Par conséquent, pour la base $\widetilde{\mathcal{B}}$, on a :

$$\begin{aligned} \dim(g_2)_{e_1} &= \frac{(n-1)n}{2} + (n-1)^2, \\ \dim(g_2)_{e_1 \dots e_k} &= \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + (n-1)(n-k) \quad \text{pour } k = 2, \dots, n, \\ \dim(g_2)_{e_1 \dots e_n, v_1 \dots v_k} &= 0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\dim g_2(P_3) &+ \sum_{k=1}^{n} \dim\big(g_2(P_3)\big)_{e_1\ldots e_k} + \sum_{k=1}^{n} \dim\big(g_2(P_3)\big)_{e_1\ldots e_n, v_1\ldots v_k} \\
&= \frac{3n^2 - n + 2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (n-1)(n-k) \\
&= \frac{3n^2 - n + 2}{2} + \frac{n(n-1)(n+1)}{6} + \frac{n(n-1)^2}{2} \\
&= \frac{4n^3 + 3n^2 - n + 6}{6} = \dim g_3(P_3),
\end{aligned}$$

ce qui montre le lemme et donc le théorème. □

Remarque. — Le calcul des caractères de Cartan montre que la solution générale dépend de n fonctions arbitraires de n variables.

Enfin, compte tenu d'un résultat de Szenthe (cf. [14]) et du fait que les sprays homogènes sont caractérisés par $vS = 0$, on a en particulier :

COROLLAIRE 4.2.7. — *Soit Γ une connexion homogène [resp. linéaire] analytique sur un voisinage U de M. Alors Γ est localement la connexion canonique d'une structure finslérienne à courbure isotrope [resp. la connexion de Levi-Civita d'une structure riemannienne à courbure constante] si, et seulement si, le spray de Γ est isotrope et le tenseur de Douglas vérifie les conditions du théorème 2.*

Remarque. — Comme on vient de le voir, les obstructions au caractère variationnel du spray dépendent de la distribution $\mathcal{D}$ engendrée par C et S. Dans cet article nous avons étudié le cas où $\mathcal{D}$ est intégrable, ce qui revient au fait que la distribution Δ engendrée par C et vS est de dimension 1 (cas qui comprend, entre autres, les sprays homogènes et quadratiques). Nous nous limitons à donner ici quelques indications sur le cas où $\dim \Delta \geq 2$, qui fera l'objet d'un autre article. Essentiellement, les obstructions dépendent du degré de non holonomie de Δ, c'est-à-dire de la dimension de l'algèbre de Lie engendrée par C et vS. Ceci s'explique de la manière suivante. Il est facile de voir que si S est variationnel et de lagrangien associé E, alors on a : $i_A\Omega_E = 0$, $i_{A'}\Omega_E = 0, \ldots, i_{A^r}\Omega_E = 0 \ldots$, où $A', A'', \ldots, A^r, \ldots$ sont les dérivées semi-basiques successives du tenseur de Douglas (cf. (38)). Ceci implique des restrictions sur l'existence des solutions d'ordre 2, ce qui est essentiellement le théorème VIII de Douglas. Il est facile de voir d'autre part que pour toutes formes à valeurs vectorielles semi-basiques L et M telles que $i_L\Omega_E = 0$ et $i_M\Omega_E = 0$, on a $i_{[L,M]}\Omega_E = 0$. Ainsi, lorsque la dimension de la variété est plus grande que 2, les obstructions au caractère variationnel du spray ne proviennent pas uniquement des tenseurs $A, A', A'', \ldots$, comme dans le Théorème VIII de Douglas, mais aussi de l'algèbre de Lie graduée qu'ils engendrent par le crochet de Frölicher-Nijenhuis. Dans le cas d'un spray isotrope, on voit facilement que cette algèbre de Lie est déterminée par l'algèbre de Lie engendrée par C et vS, ce qui explique pourquoi le degré de non-holonomie de Δ intervient. Dans le cas général des sprays non isotropes cette algèbre de Lie graduée est beaucoup plus large et c'est elle qui donne des informations sur la solution du problème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I.M. ANDERSON, Aspects of the inverse problem to the calculus of variations, Arch. Math. Brno, 24-4 (1988), 181–202.

[2] I.M. ANDERSON, G. THOMPSON, The Inverse problem of the Calculus of Variations for Ordinary Differential Equations, Mem. AMS, 98 (1992), 473.

[3] R.L. BRYANT, S.S. CHERN, R.B. GARDNER, H.L. GOLDSCHMIDT, P.A. GRIFFITHS, Exterior Differential Systems, Springer, Berlin (1991), 475.

[4] J. DOUGLAS, Solution to the inverse problem of the calculus of variations, Trans. Amer. Math. Soc., 50 (1941), 71–128.

[5] A. FRÖLICHER, A. NIJENHUIS, Theory of vector-valued differential forms, Proc. Kon. Ned. Akad. A., 59, (1956), 338–359.

[6] J. GASQUI, Formal integrability of systems of partial differential equations, Springer, Lect. Notes in Phys., 226, 21–36.

[7] C. GODBILLON, Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, Paris, 1969.

[8] H. GOLDSCHMIDT, Existence theorems for analytic linear partial differential equations, Ann. of Math., 86 (1967), 246–270.

[9] J. GRIFONE, Structure presque-tangente et connexions I, II, Ann. Inst. Fourier, XXII (1) (1972), 287–334; XXII (3), 291–338.

[10] J. KLEIN, On variational second order differential equations: polynomial case, Diff. geom. and Its Apll. Proc. Conf. Aug. 24–28, Silezian Univ. Opava (1993), 449–459.

[11] Z. MUZSNAY, Sur le problème inverse du calcul des variations, Thèse, Toulouse, 1997.

[12] H. RUND, The Differential Geometry of Finsler Spaces, Springer Verlag, 1959.

[13] W. SARLET, M. CRAMPIN, E. MARTINEZ , The integrability conditions in the inverse problem of the calculus of variations for second-order ordinary differential equations, Acta Appl. Math., 54 (1998), 233–273.

[14] J. SZENTHE, Lagrangians and sprays, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos., Sect. Math., 35 (1992), 103–107.

Manuscrit reçu le 1er décembre 1997,
révisé le 16 novembre 1998,
accepté le 18 décembre 1998.

J. GRIFONE,
Université Paul Sabatier
Laboratoire Émile Picard, U.M.R. C.N.R.S. 5580
Département de Mathématiques
118, Route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex (France).
grifone@picard.ups-tlse.fr
&
Z. MUZSNAY,
Université Lajos Kossuth
Département de Mathématiques
Pf 19
H-4010 Debrecen (Hongrie).
muzsnay@math.klte.hu