ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YOUSSEF RAMI

Dimension globale et classe fondamentale d'un espace

Annales de l'institut Fourier, tome 49, nº 1 (1999), p. 333-350
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_1_333_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
49, 1 (1999), 333–350

DIMENSION GLOBALE ET CLASSE FONDAMENTALE D'UN ESPACE

par Youssef RAMI

Introduction.

Soit S un espace 1-connexe pointé et ΩS son espace de lacets. Si K désigne un corps, l'homologie $H_*(\Omega S; K)$ est une algèbre (de Hopf). Il est naturel d'associer à cette algèbre les deux invariants numériques suivants :

$$\operatorname{prof}(H_*(\Omega S; K)) = \inf\{k / \operatorname{Ext}^{k,*}_{H_*(\Omega S;K)}(K; H_*(\Omega S; K)) \neq 0\},$$

$$\operatorname{gldim}(H_*(\Omega S; K)) = \sup\{k / \operatorname{Ext}^{k,*}_{H_*(\Omega S;K)}(K; K) \neq 0\}$$

qui sont reliés à la catégorie de Lusternik-Schnirelman de l'espace S (dont la définition est rappelée au §1) par les relations suivantes ([5], Th. A et Th. A′) :

$$\operatorname{prof}(H_*(\Omega S; K)) \leq \operatorname{cat}(S),$$

$$\operatorname{prof}(H_*(\Omega S; K)) = \operatorname{cat}(S) \Rightarrow \operatorname{prof}(H_*(\Omega S; K)) = \operatorname{gldim}(H_*(\Omega S; K)).$$

Lorsque S est K-elliptique et $\operatorname{gldim}(H_*(\Omega S; K)) < \infty$, l'algèbre de Pontryagin $H_*(\Omega S; K)$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à une algèbre de polynômes. Ce résultat est une conséquence du théorème B de [12], qui étend au cas des algèbres de Hopf graduées le théorème de Auslander-Buchsbaum-Serre :

Mots-clés : Espace K-elliptique – Dimension globale – Profondeur – Application d'évaluation.
Classification math. : 55P35 – 57T25.

THÉORÈME ([21], Th. 9, §IV). — *Soit A un anneau local, alors,* $\mathrm{gldim}(A) < \infty$ *si et seulement si A est régulier.*

Dans cet article nous donnons plusieurs caractérisations des espaces K-elliptiques tels que $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; K)) < \infty$. Rappelons qu'un espace r-connexe ($r \geq 1$) est K-elliptique si

1) $\dim H^i(S; K) < \infty$ pour tout $i \geq 0$,

2) $\mathrm{cat}(S) < \infty$,

3) il existe un entier k et une constante C tels que $\dim H_r(\Omega S; K) \leq Cr^k$, $r \geq 1$.

Notons $\varrho(K)$ le plus petit entier non inversible dans K (si $\varrho(K) < \infty$, $\varrho(K) =$ caractéristique du corps K; sinon K est de caractéristique zéro).

Lorsque S est un CW-complexe r-connexe de type fini tel que

$$(\xi): \quad \dim(S) \leq r\varrho(K); \quad \varrho(K) \geq 3,$$

nous dirons que (S, K) est dans le domaine d'Anick. Dans ce cas il existe une algèbre de Lie E ([16], Th. 10.1), telle que $UE \cong H_*(\Omega S; K)$. Lorsque $\varrho(K) = \infty$ ($\dim S$ peut être infini), $E \cong \pi_*(\Omega S) \otimes K$ et nous retrouvons alors le théorème de Cartan-Serre. Lorsque la caractéristique est non nulle, l'algèbre de Lie E (qui dépend fonctoriellement de S) n'a pas d'interprétation en termes de $\pi_*(\Omega S) \otimes K$. Par contre, comme dans le cas rationnel, et sous l'hypothèse (ξ), l'algèbre de Lie E est calculable à partir du modèle minimal $(\Lambda V, d)$ de l'espace S ([16], §10), qui sera défini au §1.

Précisons simplement ici que

a) ΛV désigne l'algèbre commutative graduée libre engendrée par l'espace vectoriel gradué $V = \bigoplus_{i=2}^{i=\infty} V^i$ avec $\dim(V^i) < \infty$,

b) $\Lambda V = \bigoplus_{i=0}^{i=\infty} \Lambda^i V$, où $\Lambda^i V$ désigne l'espace vectoriel des mots de longueur i,

c) $dV \subseteq \Lambda^{\geq 2} V = \bigoplus_{i=2}^{i=\infty} \Lambda^i V$.

Rappelons d'autre part que $H^*(S; K)$ est une algèbre à dualité de Poincaré de dimension formelle n, s'il existe un élément ω tel que $H^n(S; K) = \omega K$ (ω est appelée classe fondamentale de S), $H^i(S; K) = 0$ $\forall i > n$ et la multiplication dans $H^*(S; K)$ induit une forme biliniaire non dégénérée

$$< -, - > : \; H^i(S; K) \otimes H^{n-i}(S; K) \to K \text{ avec } x \cup y = < x, y > \omega.$$

Notons que ([10], Th. A, cf. aussi Lemme 3.1) si S est K-elliptique alors $H^*(S;K)$ est à dualité de Poincaré et nous complétons ce résultat par

PROPOSITION A. — *Soit K un corps de caractéristique non nulle et S un espace r-connexe, dans le domaine d'Anick, alors, S est K-elliptique si et seulement si* $\dim(E) < \infty$.

Plus récemment L. Bisiaux ([2], Th. A) a démontré que pour tout CW-complexe 1-connexe de type fini de la forme $S = Y \bigcup_{\varphi} e^n$ et pour tout corps K, on a

$$\mathrm{prof}(H_*(\Omega S;K)) \leq e_K(S),$$

où $e_K(S)$ désigne le plus grand entier n tel qu'il existe un quasi-isomorphisme $(T(V),d) \xrightarrow{\simeq} C^*(S;K)$ et une classe de cohomologie non nulle dans $H^*(T(V),d)$ représentée par un cocycle dans $T^{\geq n}(V)$. L'entier $e_K(S)$ est en fait l'invariant introduit par G. H. Toomer (cf. §I) en 1974.

Nous établissons :

PROPOSITION B. — *Si $H^*(S;K)$ est une algèbre à dualité de Poincaré, alors,* $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S;K))$ *est finie si et seulement si* $e_K(S) = \mathrm{prof}(H_*(\Omega S;K))$.

THÉORÈME C. — *Soit S un CW-complexe r-connexe de type fini, K-elliptique, dans le domaine d'Anick, alors,* $\mathrm{prof}(H_*(\Omega S;K)) = e_K(S)$ *si et seulement si* $\mathrm{prof}(H_*(\Omega S;K))$ *est égal au plus grand entier p tel qu'il existe un modèle minimal $(\Lambda V,d)$ de S dans lequel la classe fondamentale est représentée par un cocycle homogène de longueur p.*

La classe fondamentale d'un espace K-elliptique S dont l'algèbre de Pontryagin $H_*(\Omega S;K)$ est de dimension globale finie est représentée par un cocycle particulier qui est facilement calculable, car il s'obtient à l'aide d'un modèle minimal pur associé à S.

Soit $(\Lambda V,d)$ un modèle minimal de S, le modèle pur associé est obtenu de la manière suivante : si $Q = V^{\mathrm{pair}}$ et $P = V^{\mathrm{impair}}$,

$$(\Lambda V, d_\sigma) = (\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_\sigma)\,;\ d_\sigma(Q) = 0 \text{ et } (d - d_\sigma)(P) \subseteq \Lambda Q \otimes \Lambda^+ P.$$

Dans le cas rationnel, S. Halperin a montré ([15]) que si $\dim(V) < \infty$, alors

$$\dim(H(\Lambda V,d)) < \infty \Longleftrightarrow \dim(H(\Lambda V,d_\sigma)) < \infty.$$

Ce résultat ne se généralise pas au cas où $\dim(V) = \infty$ (cf. Exemple VI. (6)).

Néanmoins nous montrons :

THÉORÈME D. — *Soit* $(\Lambda V, d)$ *une algèbre différentielle graduée commutative 1-connexe, de différentielle décomposable et telle que* $\dim(V) < \infty$, *alors,* $\dim H(\Lambda V, d_2) < \infty$ *si et seulement si* $\dim H(\Lambda V, d_{\sigma,2}) < \infty$, *où* $d_{\sigma,2}$ *désigne la partie quadratique de* d_σ.

Remarquons que si $(\Lambda V, d)$ désigne un modèle minimal de l'espace S, alors (cf. Proposition 2.2)

$$\operatorname{gldim}(H_*(\Omega S; K)) < \infty \Longleftrightarrow \dim(H(\Lambda V, d_2)) < \infty.$$

À l'aide de cette équivalence et de la suite spectrale définie au §IV, nous déduisons du Théorème D :

THÉORÈME E. — *Soit* S *un* CW*-complexe* r*-connexe,* K*-elliptique, dans le domaine d'Anick et tel que* $\operatorname{gldim}(H_*(\Omega S; K)) < \infty$, *alors, la classe fondamentale de* S *admet le même représentant que celle d'un modèle pur associé.*

Le reste de l'article est divisé comme suit :

1. Préliminaires.
2. Preuve des propositions A et B.
3. Preuve du théorème C.
4. Suite spectrale impaire, $\mathcal{E}$xt-version.
5. Preuve des théorèmes D et E.
6. Exemples.

1. Préliminaires.

Rappelons brièvement les principales notations utilisées dans le texte.

Le corps de base considéré, K, est supposé de caractéristique $\neq 2$. Le degré d'un élément x homogène dans un objet gradué sera noté $|x|$.

1.1. Modèle minimal [11], [16], [22].

Une *algèbre de Sullivan* est une algèbre différentielle graduée commutative (ADGC en abrégé) $(\Lambda V, d)$, où ΛV désigne l'algèbre graduée commutative libre engendrée par l'espace vectoriel gradué $V = \bigoplus_{i=2}^{i=\infty} V^i$. Une telle algèbre est dite *minimale* si $dV \subseteq \Lambda^{\geq 2}V = \bigoplus_{i=2}^{i=\infty} \Lambda^i V$; i.e. il existe un quasi-isomorphisme (morphisme induisant un isomorphisme en cohomologie) $m : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (A, d)$ de source une algèbre de Sullivan minimale. Si $H^0(A) = K$, $H^1(A) = 0$ et $\dim H^i(A, d) < \infty$ pour tout $i \geq 0$, alors ([16], Th. 7.1), l'ADGC (A, d) possède toujours un modèle minimal.

Modèle minimal d'un espace topologique. Soit S un espace topologique r-connexe ($r \geq 1$) vérifiant la condition (ξ). Le complexe de chaîne $C_*(\Omega S; K)$ est une algèbre différentielle graduée. Dans [1] Anick a montré l'existence d'une algèbre de Lie (L, δ) telle que $L = (L_i)_{i \geq 1}$ et dont l'algèbre enveloppante $U(L, \delta)$ est une algèbre de chaînes équivalente à l'algèbre $C_*(\Omega S, K)$. Notons $C^*(L) = (\Lambda(sL)^{\vee}, d = d_1 + d_2)$ le *complexe de Cartan-Chevalley-Eilenberg* de l'algèbre de Lie L, où $s : L_{i-1} \xrightarrow{\simeq} (sL)_i$ désigne la suspension de L, $(sL)^{\vee} = \mathrm{Hom}(sL, K)$ et

$$< d_1 v, sa >= (-1)^{|v|} < v, s\delta a >; \; a \in L, \; v \in (sL)^{\vee},$$

$$< d_2 v, sa.sb >= (-1)^{|b|+1} < v, s[a, b] >; \; a, b \in L, \; v \in (sL)^{\vee}.$$

En dualisant la bar construction nous obtenons la suite de quasi-isomorphismes d'algèbres de cochaînes ([16], §10) :

$$(\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} C^*(L) \xleftarrow{\simeq} B^{\vee}(C_*(\Omega S; K)) \xrightarrow{\simeq} C^*(S; K),$$

où $(\Lambda V, d)$ désigne un modèle minimal de $C^*(L)$. Par définition $(\Lambda V, d)$ est appelé un modèle minimal de S.

D'autre part tout morphisme $\phi : (\Lambda V', d') \to (\Lambda V, d)$ entre deux modèles minimaux de l'espace S induit un morphisme $\phi_1 : (\Lambda V', d_2') \to (\Lambda V, d_2)$ défini par $\phi_1 : V' \to V$ avec $\phi - \phi_1 : V' \to \Lambda^{\geq 2}V$. Le morphisme $(s\phi_1)^{\vee} : E' = (sV')^{\vee} \to E = (sV)^{\vee}$ est un morphisme d'algèbres de Lie. En particulier si ϕ est un isomorphisme, $(s\phi_1)^{\vee}$ l'est aussi et permet alors d'identifier E et E'. Comme d'après ([16], Th. 10.1) $UE \cong H_*(\Omega S; K)$, E est une sous-algèbre de Lie des éléments primitifs de $H_*(\Omega S; K)$. L'unique algèbre de Lie E telle que $C^*(E) = (\Lambda V, d_2)$ est appelée l'*algèbre de Lie d'homotopie* de $(\Lambda V, d)$.

Lorsque $\varrho(K) = \infty$, nous retrouvons le modèle de Sullivan rationnel qui est unique à isomorphisme près. En général il n'y a pas a priori unicité du modèle minimal.

1.2. L'application d'évaluation [8], [19].

Soit (A, d) une algèbre différentielle graduée (ADG) et (M, d) un (A, d)-module. Notons $A^{\#}$ l'algèbre graduée sous-jacente de A.

(i) Un (A, d)-module différentiel (M, d) est *semi-libre* s'il existe une filtration par des A-modules : $0 = F_{-1} \subseteq F_0 \subseteq \ldots$ telle que $M = \cup_i F_i$ et F_i/F_{i-1} *est* $A^{\#}$-libre sur une base formée de cocycles de M.

(ii) une *résolution semi-libre* d'un A-module M est un quasi-isomorphisme $(P, d) \xrightarrow{\simeq} (M, d)$ de (A, d)-modules avec P semi-libre. Pour tout A-module différentiel (M, d), il existe une telle résolution et $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ préserve les quasi-isomorphismes. Si en plus la différentielle de $K \otimes_A P$ est nulle, on dit que P est *minimale*.

Exemple 1.2.1. — Posons $A = (\Lambda V, d)$ et $M = [(\Lambda V, d)]^{\vee}$. Si $\dim H(\Lambda V, d) < \infty$ et $V = V^{\geq 1}$, il existe un idéal différentiel I et un quasi-isomorphisme de K-modules semi-libres $\phi : \Lambda V \xrightarrow{\simeq} \Lambda V/I$. Il s'ensuit ([11], Prop. 6.7) que $\mathrm{Hom}(\phi, K)$ est aussi un quasi-isomorphisme et par suite $([\Lambda V/I]^{\vee})^{<-n} = 0$ (où n est tel que $H^{>n}(\Lambda V, d) = (\Lambda V/I)^{>n} = 0$). Il résulte alors de ([8], Lemme A.3) une A-résolution semi-libre de $M = [(\Lambda V, d)]^{\vee}$ qui peut être choisie minimale.

Exemple 1.2.2. — Soit $(\Lambda V, d)$ une ADGC 1-connexe. Il existe [13], [16] une ADG acyclique $(\Lambda V \otimes \Gamma sV, D)$ où $\Gamma(sV)$ désigne l'algèbre des puissances divisées de sV ($s : V^{i+1} \xrightarrow{\simeq} (sV)^i$ étant la suspension de V), D est une Γ-dérivation telle que $D(sx_i) = x_i + s(dx_i)$; $s(dx_i) \in \Lambda V_{<i} \otimes \Gamma sV_{<i}$. L'ADGC $(\Lambda V \otimes \Gamma sV, D)$ est donc un $(\Lambda V, d)$-module semi-libre et par suite $(\Lambda V \otimes \Gamma sV, D) \xrightarrow{\simeq} K$ est une résolution semi-libre de K en tant que $(\Lambda V, d)$-module. On l'appelle *clôture acyclique* de $(\Lambda V, d)$.

(iii) Soit (N, d) un autre (A, d)-module. Le foncteur $\mathcal{E}\mathrm{xt}$ (*différentiel*) est défini par

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}_A(M, N) = H(\mathrm{Hom}_A\ (P, N)).$$

(iv) Une ADG augmentée par $A \xrightarrow{\epsilon} K$ est de *Gorenstein* si $\dim \mathcal{E}\mathrm{xt}_A(K, A) = 1$. Un espace est de Gorenstein si un modèle minimal de cet espace est de Gorenstein.

(v) Soit (A, d) une ADG augmentée par $A \xrightarrow{\epsilon} K$, l'application *d'évaluation* de A est l'application K-linéaire naturelle : $ev_A : \mathcal{E}\mathrm{xt}_A(K, A) \longrightarrow H^*(A)$, définie par : si $\alpha = [f] \in \mathcal{E}\mathrm{xt}_A(K, A)$ est représentée par le cocycle $f : P \longrightarrow A$ ($P \xrightarrow{\simeq} K$ résolution semi-libre de K), alors, $ev_A(\alpha) = [f(p)]$, p étant un cocycle représentant 1 dans K.

THÉORÈME 1.2.3 ([8], Prop. 3.4 et [19], Th. A). — *Soit A une ADG de la forme $(\Lambda V, d)$ avec d décomposable et V de dimension finie, alors,*

(i) *A est de Gorenstein.*

(ii) *$ev_A \neq 0$ si et seulement si $H^*(A, d)$ est de dimension finie.*

1.3. *L–S* catégorie et invariant de Toomer [3], [17], [23].

Soit S un espace topologique.

(i) La catégorie de Lusternik-Schnirelmann de S, notée $\mathrm{cat}(S)$, est par définition le plus petit entier n tel que S peut être recouvert par $n+1$ ouverts contractiles dans S.

(ii) L'invariant de Toomer de S est défini comme suit ([3], §1.4) :

$$e_K(S) = \sup\{e(\alpha), \alpha \in H^*(S; K)\},$$

où chaque entier $e(\alpha)$ est défini de la manière suivante. Notons $(\Omega S)^{*n}$ le joint itéré n-fois, G_nS l'espace des orbites de $(\Omega S)^{*n}$ sous l'action naturelle de ΩS et $\varphi_n : G_nS \longrightarrow G_\infty S = B\Omega S$ l'application canonique intervenant dans la définition du classifiant du monoïde ΩS. Nous posons

$$e(\alpha) \leq n \quad \text{si} \quad H^*(\varphi_n)(\alpha) \neq 0.$$

Ces deux invariants numériques vérifient (pour tout corps K) l'inégalité ([23], Th. I B2 et [3], Prop. 1.4) :

$$e_K(S) \leq \mathrm{cat}(S).$$

Soit maintenant $(\Lambda V, d)$ une algèbre de Sullivan minimale. Notons $\Lambda V \bigotimes \Lambda W \longrightarrow \Lambda V/\Lambda^{>m}V$ le modèle relatif ([11], § 14) de la projection $(\Lambda V, d) \longrightarrow (\Lambda V/\Lambda^{>m}V, \bar{d})$ et j l'inclusion : $\Lambda V \hookrightarrow \Lambda V \otimes \Lambda W$. Par définition ([13] et [17]) $\mathrm{cat}(\Lambda V, d)$ est le plus petit entier m tel que j admette une rétraction r d'ADGC (i.e. : $r \circ j = id$). Si r est seulement un morphisme de K-modules, l'entier m est noté $e_c(\Lambda V, d)$.

2. Preuve des propositions A et B.

Dans ce paragraphe, $(\Lambda V, d)$ désigne une ADGC 1-connexe avec d décomposable. On note par L son algèbre de Lie d'homotopie. Dans le cas topologique, si S désigne un espace r-connexe ($r \geq 1$) vérifiant la condition (ξ), son algèbre de Lie d'homotopie est notée par E.

PROPOSITION A. — *Soit K un corps de caractéristique non nulle et S un espace r-connexe, dans le domaine d'Anick, alors, S est K-elliptique si et seulement si* $\dim(E) < \infty$.

Preuve. — Signalons tout d'abord que, puisque $\varrho(K) < \infty$, la condition (ξ) entraîne que $H^*(S; K)$ est de type fini et que $\mathrm{cat}(S) < \infty$ ([18], Prop. 5.1) et par suite ([5], Th. A) $\mathrm{prof}(H_*(\Omega S; K)) < \infty$. D'autre part ([9], Ex. 1.3) $UE \cong H_*(\Omega S; K)$ est elliptique si et seulement si $\dim(E) < \infty$. On conclut alors en utilisant [9], Th. C. □

Avant d'aborder la démonstration du la proposition B, nous établissons dans ce qui suit une condition de finitude de la dimension globale de $H_*(\Omega S; K)$.

PROPOSITION 2.1. — *Si L est de dimension finie, alors*

$$\mathrm{gldim}(UL) < \infty \Longleftrightarrow ev_{(\Lambda V, d_2)} \neq 0.$$

Preuve. — Par définition de L, $(\Lambda V, d_2) = C^*(L)$ et $\mathrm{Ext}^{*,*}_{UL}(K, K) \simeq H^{*,*}(C^*(L))$. La condition $\mathrm{gldim}(UL) < \infty$ est équivalente à la condition $\dim H(\Lambda V, d_2) < \infty$. Or $\dim(V) = \dim(sL) < \infty$. La proposition résulte donc du théorème 1.2.3. □

En appliquant 2.1 au modèle minimal de l'espace S nous obtenons

$$\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; K)) < \infty \Longleftrightarrow ev_{(\Lambda V, d_2)} \neq 0.$$

PROPOSITION B. — *Si $H^*(S; K)$ est une algèbre à dualité de Poincaré, alors*

$$\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; K)) < \infty \Longleftrightarrow e_K(S) = \mathrm{prof}(H_*(\Omega S; K)).$$

Preuve. — Puisque $H^*(S; K)$ est à dualité de Poincaré, S est de Gorenstein ([8], Th. 3.1) et par suite $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; K)) < \infty$ entraîne

([12], Section 3 et [5], Th. A′)) $\mathrm{prof}(H_*(\Omega S;K)) = M\,\mathrm{cat}(S;K) = \mathrm{gldim}(H_*(\Omega S;K))$. Or d'après ([6], Th. 3) $e_K(S) = M\,\mathrm{cat}(S;K)$ et donc $\mathrm{prof}(H_*(\Omega S;K)) = e_K(S)$. Pour la réciproque on utilise de nouveau l'égalité $e_K(S) = M\,\mathrm{cat}(S;K)$ qui entraîne que $\mathrm{prof}(H_*(\Omega S;K)) = \mathrm{gldim}(H_*(\Omega S;K))$. □

Remarque 2.2. — La première implication de la proposition précédente reste valable si l'on suppose seulement que S est de Gorenstein. En effet dans ce cas, $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S;K)) < \infty$ entraîne que $M\,\mathrm{cat}(S;K) < \infty$ et par suite $H^*(S;K)$ est une algèbre à dualité de Poincaré.

3. Preuve du théorème C.

Nous adoptons les mêmes notations qu'au §2. Démontrons tout d'abord :

LEMME 3.1. — *Si* $\dim(V) < \infty$ *et* $\dim H(\Lambda V,d) < \infty$, *alors,* $H(\Lambda V,d)$ *est à dualité de Poincaré.*

Preuve. — D'après le théorème 1.2.3, $(\Lambda V,d)$ est de Gorenstein. D'autre part (*cf.* Exemple 1.2.1) $[(\Lambda V,d)]^\vee$ admet une $(\Lambda V,d)$-résolution semi-libre minimale. On termine alors comme dans [8], Th. 3.6. □

Remarque 3.2. — Si K est de caractéristique non nulle et S est K-elliptique, en utilisant la proposition A, on déduit du lemme précédent que $H^*(S;K)$ est à dualité de Poincaré.

La démonstration du lemme suivant repose sur les deux suites spectrales de Milnor-Moore suivantes : ((∗∗) a été introduite par A. Murillo [19]) :

$$(*)\qquad E_2^{p,-q} = H^{p,-q}(\Lambda V,d_2) \Longrightarrow H^{p-q}(\Lambda V,d),$$

$$(**)\qquad \mathcal{E}_2^{p,-q} = \mathcal{E}\mathrm{xt}^{p,-q}_{(\Lambda V,d_2)}(K,(\Lambda V,d_2)) \Longrightarrow \mathcal{E}\mathrm{xt}^{p-q}_{(\Lambda V,d)}(K,(\Lambda V,d))$$

qui sont définies respectivement à l'aide des filtrations : $F^p = (\Lambda^{\geq p}V)$ et $\mathcal{F}^p = \{f \in \mathrm{Hom}_{\Lambda V}(\Lambda V\otimes\Gamma(sV),\Lambda V)/f(\Gamma sV)\subseteq \Lambda^{\geq p}V\}$. On vérifie alors que l'application

$$ev : (\mathrm{Hom}_{(\Lambda V,d)}[(\Lambda V\otimes\Gamma(sV),D),(\Lambda V,d)],\mathcal{D}) \longrightarrow (\Lambda V,d)$$

définie par $ev(f) = f(1)$ préserve les filtrations. D'où le morphisme de suites spectrales, noté $(E_r(ev))_{2\leq r\leq\infty}$ tel que $E_2(ev) = ev_{(\Lambda V,d_2)}$.

LEMME 3.3.. — *Soit $(\Lambda V, d)$ une ADGC 1-connexe telle que d soit décomposable,* $\dim(V) < \infty$ *et* $\dim H(\Lambda V, d) < \infty$, *alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $ev_{(\Lambda V,d_2)} \neq 0$,

(ii) $E_\infty(ev) \neq 0$,

(iii) $E_\infty(ev) = ev_{(\Lambda V,d)}$.

Preuve. — (iii) implique (ii) d'après le théorème 1.2.3 . (ii) implique (i) provient de la convergence des suites spectrales. Supposons maintenant que $ev_{(\Lambda V,d_2)} \neq 0$; ce qui équivaut à $\dim H(\Lambda V, d_2) < \infty$. Le lemme précédent entraîne donc que $H(\Lambda V, d_2)$ et $H(\Lambda V, d)$ sont à dualité de Poincaré de dimensions formelles respectives m et n. D'autre part nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{E}_2^{p,-q} = \mathcal{E}\mathrm{xt}^{p-q}_{(\Lambda V,d_2)}(K;(\Lambda V,d_2)) & \xrightarrow{E_2(ev)} & E_2^{p,-q} = H^{p-q}(\Lambda V, d_2) \\
\| & & \\
\mathcal{E}_\infty^{p,-q} = \mathcal{E}\mathrm{xt}^{p-q}_{(\Lambda V,d)}(K;(\Lambda V,d)) & \xrightarrow{E_\infty(ev)} & E_\infty^{p,-q}
\end{array}$$

puisque $\dim \mathcal{E}_2^{p,-q} = 1 = \dim \mathcal{E}_\infty^{p,-q}$, du fait que $(\Lambda V, d_2)$ et $(\Lambda V, d)$ sont de Gorenstein (Théorème 1.2.3). Ceci entraîne que $m = p - q = n$ et donc que $E_\infty^{p,-q} = H^n(\Lambda V, d)$. Il en résulte que $E_\infty(ev) = ev_{(\Lambda V,d)}$. D'où : (i) implique (iii). □

THÉORÈME C. — *Soit S un CW-complexe r-connexe de type fini K-elliptique, dans le domaine d'Anick, alors,* $\mathrm{prof}(H_*(\Omega S; K)) = e_K(S)$ *si et seulement si* $\mathrm{prof}(H_*(\Omega S; K))$ *est égal au plus grand entier p tel qu'il existe un modèle minimal $(\Lambda V, d)$ de S dans lequel la classe fondamentale est représentée par un cocycle homogène de longueur p.*

Preuve. — Supposons que $\mathrm{prof}(H_*(\Omega S; K)) = e_K(S) = p$; ce qui équivaut d'après les propositions 2.1 et B à $ev_{(\Lambda V,d_2)} \neq 0$. On déduit alors du lemme précédent que $E_\infty(ev) = ev_{(\Lambda V,d)}$ et par suite la classe fondamentale ω de S vérifie : $\omega = \lambda[h_\infty(1)] \in E_\infty^{p,-q}$, où $\lambda \in K - \{0\}$ et $[h_\infty]$ désigne le générateur de $\mathcal{E}_\infty^{p,-q}$. De plus p est le plus grand entier vérifiant cette condition. Réciproquement, si p désigne le plus grand entier tel que $\omega \in E_\infty^{p,*}$, alors, $H^n(\Lambda V, d) = E_\infty^{p,-q}$ ($n = p - q$ désigne la dimension formelle de S) et par conséquent $\omega = \lambda[h(1)] = \lambda[h_\infty(1)]$. On en déduit que $E_\infty(ev) : \mathcal{E}_\infty^{p,-q} \xrightarrow{\cong} E_\infty^{p,-q}$ est non nulle. On utilise une fois de plus le lemme précédent et la proposition B pour conclure. □

COROLLAIRE 3.4. — *Si S vérifie les hypothèses du théorème, alors, $e_K(S) = \mathrm{prof}(H_*(\Omega S; K))$ entraîne $e_K(S) = e_c(\Lambda V, d)$.*

4. Suite spectrale impaire, $\mathcal{E}$xt-version.

Dans l'introduction nous avons rappelé la définition de l'ADGC pure $(\Lambda V, d_\sigma)$ associée à une ADGC 1-connexe $(\Lambda V, d)$. Rappelons d'autre part ([15]) que la filtration

$$F^{p,-q} = (\Lambda V)^{\geq p,-q} \quad \text{avec} \quad (\Lambda V)^{s,-q} = (\Lambda Q \otimes \Lambda^q P)^{s-q},$$

où $Q = V^{\text{pair}}$ et $P = V^{\text{impair}}$, définit la suite spectrale impaire

$$(*)_\sigma \quad E_2^{p,-q}(\Lambda Q \otimes \Lambda P) = H^{p,-q}(\Lambda Q \otimes \Lambda P), d_\sigma) \Longrightarrow H^{p-q}(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_\sigma).$$

4.1. Clôture acyclique de $(\Lambda V, d_\sigma)$.

Soit maintenant $(\Lambda V, d)$ une ADGC 1-connexe et $(\Lambda V \otimes \Gamma sV, D)$ la clôture acyclique de $(\Lambda V, d)$ (Exemple 1.2.2). Nous déterminons dans le lemme suivant celle de $(\Lambda V, d_\sigma)$:

LEMME 4.1.1. — *L'ADGC $(\Lambda V \otimes \Gamma sV, D_\sigma)$ est une clôture acyclique de $(\Lambda V, d_\sigma)$ lorsque D_σ est définie par*

$$D_\sigma = d_\sigma \text{ sur } V \quad \text{et} \quad D_\sigma(sx) = x - s(d_\sigma x).$$

Preuve. — On procède par récurrence sur $k = \dim(V)$. Pour $k = 1$; on a $d_\sigma x_1 = 0$. Ainsi pour $D_\sigma(sx_1) = x_1$, l'ADGC $(\Lambda x_1 \otimes \Gamma sx_1, D_\sigma)$ est une résolution acyclique de $(\Lambda x_1, 0)$. Supposons que la résolution $(\Lambda V_{\leq k} \otimes \Gamma sV_{\leq k}, D_\sigma) \xrightarrow{\simeq} K$ est construite pour un $k \geq 2$ et considérons $(\Lambda V_{\leq k+1} \otimes \Gamma sV_{\leq k+1})$. Clairement $d_\sigma(x_{k+1})$ est un cocycle dans $\Lambda V_{\leq k} \otimes \Gamma sV_{\leq k}$. Par hypothèse, $D_\sigma s + sd_\sigma = \mathrm{id} - \epsilon$ sur $(\Lambda V_{\leq k})$, d'où $D_\sigma(sd_\sigma x_{k+1}) = d_\sigma(x_{k+1})$. Posons alors : $D_\sigma(sx_{k+1}) = x_{k+1} - sd_\sigma x_{k+1}$. Ceci implique que $D_\sigma s + sd_\sigma = \mathrm{id} - \epsilon$ sur $\Lambda V_{\leq k+1}$. Par suite $(\Lambda V_{\leq k+1} \otimes \Gamma sV_{\leq k+1}, D_\sigma)$ est donc une clôture acyclique de $(\Lambda V_{\leq k+1}, d_\sigma)$. □

4.2. Filtration.

Avec les notations précédentes, posons

$$(\Lambda V\otimes\Gamma sV)^s_r=\bigoplus_{\substack{a_1,a_2,a_3\\ r=a_1+a_2+2a_3}}(\Lambda Q\otimes\Gamma^{a_1}sQ\otimes\Lambda^{a_2}P\otimes\Gamma^{a_3}sP)^s,$$

où s désigne le degré total et r le degré filtrant. Une filtration du complexe

$$(A,\mathcal{D})=(\mathrm{Hom}_{(\Lambda V,d)}[(\Lambda V\otimes\Gamma sV,D),(\Lambda V,d)],\mathcal{D}),$$

où $\mathcal{D}(f)=d\circ f+(-1)^{|f|+1}f\circ D$ est donnée par

$$\mathcal{F}^p(A^n)=\oplus_{r,s}\mathrm{Hom}_{(\Lambda V,d)}((\Lambda V\otimes\Gamma sV)^s_r,(F^{p+n+s+r}(\Lambda V))^{n+s})$$

pour chaque n.

Cette filtration vérifie les propriétés suivantes :

LEMME 4.2.1. — (i) $(\mathcal{F}^p)$ *est décroissante.*

(ii) $\mathcal{F}^0(A^n)=\mathcal{F}^p(A^n)$.

(iii) $\mathcal{D}(\mathcal{F}^p(A^n))\subseteq\mathcal{F}^p(A^n)$.

Preuve. — La propriété (i) est évidente. Pour (ii) on remarque que

$$\begin{aligned}(F^{n+s+r,*}(\Lambda V))^{n+s}&=\{(\Lambda Q\otimes\Lambda P)^{\geq n+s+r,*}\}^{n+s}\\&=\oplus_k(\Lambda Q\otimes\Lambda P)^{n+s+r+k,-r-k}\\&=\oplus_q(\Lambda Q\otimes\Lambda P)^{n+s+q,-q}\\&=\{(\Lambda Q\otimes\Lambda P)^{\geq n+s,*}\}^{n+s}\\&=(\Lambda V)^{n+s}.\end{aligned}$$

Enfin pour (iii), soit $f\in\mathcal{F}^p(A^n)$; on a $\mathcal{D}(f)=f\circ D+(-1)^{|f|+1}d\circ f$. Or $dF^p\subseteq F^p$; donc $d\circ f\in\mathcal{F}^p(A^n)$. D'autre part $f\circ D=f\circ(D_{|\Lambda V}\otimes 1)+f\circ(1\otimes D_{|\Gamma sV})$. Mais $d(\Lambda Q\otimes\Lambda^{a_2}P)\subseteq(\Lambda Q\otimes\Lambda^{a_2-1}P)\oplus(\Lambda Q\otimes\Lambda^{\geq a_2}P))$; donc $(D_{|\Lambda V}\otimes 1)$ envoie $(\Lambda V\otimes\Gamma sV)^s_r$ sur $(\Lambda V\otimes\Gamma sV)^{s+1}_{r-1}\oplus(\Lambda V\otimes\Gamma sV)^{s+1}_{\geq r}$ et par conséquent $f\circ(D_{|\Lambda V}\otimes 1)\in\mathcal{F}^p(A^n)$. Pour $f\circ(1\otimes D_{|\Gamma sV})$, notons d'abord que $D(sP)\subseteq P\oplus(\Lambda V\otimes sP)\oplus(\Lambda V\otimes sQ)$ et $D(sQ)\subseteq Q\oplus(\Lambda V\otimes sQ)\oplus(\Lambda V\otimes sP)$. Ceci implique que $1\otimes D_{|\Gamma sV}$ envoie aussi $(\Lambda V\otimes\Gamma sV)^s_r$ dans $(\Lambda V\otimes\Gamma sV)^{s+1}_{r-1}\oplus(\Lambda V\otimes\Gamma sV)^{s+1}_{\geq r}$, et par suite $f\circ(1\otimes D_{|\Gamma sV})\in\mathcal{F}^p(A^n)$. D'où $f\circ D$ appartient à $\mathcal{F}^p(A^n)$. □

Posons maintenant $\mathcal{D}_\sigma=d_\sigma\otimes 1+1\otimes D_\sigma$ et notons $(\mathcal{E}^p_0,\mathcal{D}_0)$ le complexe défini par la filtration précédente. Puisque $D_\sigma(sQ)\subseteq Q$ et

$D_\sigma(sP) \subseteq P \oplus (\Lambda Q \otimes sQ)$, il résulte de la démonstration du lemme précédent que $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_\sigma$ et par suite

$$\mathcal{E}_1 = H(\mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0) = \mathcal{E}\mathrm{xt}_{(\Lambda V, d_\sigma)}((\Lambda V \otimes \Gamma sV, \mathcal{D}_\sigma), (\Lambda V, d_\sigma))).$$

Puisque la filtration est bornée, la suite spectrale ainsi construite est convergente; $(**)_\sigma$:

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}_{(\Lambda V, d_\sigma)}((\Lambda V \otimes \Gamma sV, \mathcal{D}_\sigma), (\Lambda V, d_\sigma)) \Rightarrow \mathcal{E}\mathrm{xt}_{(\Lambda V, d)}((\Lambda V \otimes \Gamma sV, D); (\Lambda V, d)).$$

Les conséquences immédiates de la convergence de cette suite spectrale sont :

PROPOSITION 4.2.2. — *Si L_σ (resp. L) désigne l'algèbre de Lie d'homotopie de $(\Lambda V, d_\sigma)$ (resp. $(\Lambda V, d)$), alors,* $\mathrm{prof}(UL_\sigma) \leq \mathrm{prof}(UL)$.

PROPOSITION 4.2.3. — *Soit $(\Lambda V, d)$ une ADGC 1-connexe. Avec les notations précédentes, si la partie linéaire d_1 de d est nulle sur P et V est de dimension finie, alors, $(\Lambda V, d)$ est de Gorenstein.*

Preuve. — On a $(d_\sigma)_1(Q) = 0$. D'autre part $d_1(P) \subseteq Q$ entraîne que $(d_\sigma)_1(P) = d_1(P) = 0$ et par suite d_σ est décomposable. Le théorème 1.2.3 permet alors de conclure. □

5. Preuve des théorèmes D et E.

Nous rappelons l'énoncé du théorème E :

THÉORÈME E. — *Soit S un CW-complexe r-connexe K-elliptique, dans le domaine d'Anick et tel que* $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; K)) < \infty$, *alors, la classe fondamentale de S admet le même représentant que celle d'un modèle pur associé.*

La démonstration de ce théorème repose sur les suites spectrales précédentes et le théorème suivant. Il généralise le résultat de A. Murillo, concernant la classe fondamentale des espaces purs [20].

THÉORÈME D. — *Soit $(\Lambda V, d)$ une algèbre différentielle graduée commutative 1-connexe, de différentielle décomposable et telle que* $\dim(V) < \infty$, *alors,* $\dim H(\Lambda V, d_2) < \infty$ *si et seulement si* $\dim H(\Lambda V, d_{\sigma,2}) < \infty$, *où $d_{\sigma,2}$ désigne la partie quadratique de d_σ.*

Preuve. — Par définition de l'ADGC pure, on a $d_{2,\sigma} = d_{\sigma,2}$. Par suite l'implication réciproque résulte de la considération de la suite spectrale impaire $(*)_\sigma$. Supposons maintenant que $\dim H(\Lambda V, d_2) < \infty$. Puisque $\dim V < \infty$, si $(x_1, ..., x_n)$ désigne une base de V, le théorème 1.2.3 et le lemme 3.3 (iii) de [19] entraînent que $\dim H(\Lambda(x_2, ..., x_n), \bar{d}_2) < \infty$. On conclut comme dans [3], Prop. 5.2 à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n utilisant le modèle relatif :

$$(\Lambda x_1, 0) \to (\Lambda(x_1, ...x_n), d_2) \to (\Lambda(x_2, ..., x_n), \bar{d}_2)).$$

□

Il en résulte facilement :

COROLLAIRE 5.1. — *Avec les hypothèses du théorème D, on a*

$$ev_{(\Lambda V, d_2)} \neq 0 \Longleftrightarrow ev_{(\Lambda V, d_{\sigma,2})} \neq 0.$$

Preuve du théorème E. — Soit $(\Lambda V, d)$ un modèle minial de S. Puisque les différentielles sont décomposables et V est de dimension finie, alors (Théorème 1.2.3) les complexes $(\Lambda V, d), (\Lambda V, d_\sigma), (\Lambda V, d_2)$ et $(\Lambda V, d_{\sigma,2})$ sont de Gorenstein. On déduit donc des suites spectrales $(**)$ et $(**)_\sigma$ les isomorphismes suivants :

$$\psi_1 : \mathcal{E}\mathrm{xt}^{p,-q}_{(\Lambda W, d_{\sigma,2})}(K, (\Lambda V, d_{\sigma,2})) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^{p,-q}_{(\Lambda V, d_\sigma)}(K, (\Lambda V, d_\sigma)),$$
$$\psi_2 : \mathcal{E}\mathrm{xt}^{p,-q}_{(\Lambda V, d_2)}(K, (\Lambda V, d_2)) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^{p,-q}_{(\Lambda V, d)}(K, (\Lambda V, d)),$$
$$\psi_3 : \mathcal{E}\mathrm{xt}^{p,-q}_{(\Lambda V, d_{\sigma,2})}(K, (\Lambda V, d_{\sigma,2})) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^{p,-q}_{(\Lambda V, d_2)}(K, (\Lambda V, d_2)),$$
$$\psi_4 : \mathcal{E}\mathrm{xt}^{p,-q}_{(\Lambda V, d_\sigma)}(K, (\Lambda V, d_\sigma) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^{p,-q}_{(\Lambda V, d)}(K, (\Lambda V, d)).$$

D'autre part, puisque $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; K))$ est finie, on a $ev_{(\Lambda V, d_2)} \neq 0$ (Proposition 2.1) et $ev_{(\Lambda V, d_{\sigma,2})} \neq 0$ (Corollaire 5.1). En reprenant alors le même argument que celui utilisé pour démontrer le lemme 3.3, on déduit à l'aide des suites spectrales $(*)$ et $(*)_\sigma$ que si $[h], [h_2], [h_\sigma]$ et $[h_{\sigma,2}]$ sont les générateurs des différents $\mathcal{E}\mathrm{xt}$, alors la classe fondamentale [h(1)] de $(\Lambda V, d)$ vérifie

$$[h(1)] = [\psi_2(h_2)(1)] = [\psi_2 o \psi_3(h_{\sigma,2})(1)] \quad \text{et que} \quad [h_\sigma(1)] = [\psi_1(h_{\sigma,2})(1)].$$

D'autre part, on a $\psi_4 o \psi_1(h_{\sigma,2}) = \psi_2 o \psi_3(h_{\sigma,2})$. Donc $[h(1)] = [\psi_4(h_\sigma)(1)]$. Mais $[h_\sigma(1)]$ est en fait la classe fondamentale de $(\Lambda V, d_\sigma)$ puisque $H(\Lambda V, d_\sigma)$ est à dualité de Poincaré et $[h_\sigma]$ est l'unique générateur de $\mathcal{E}\mathrm{xt}^{p,-q}_{(\Lambda V, d_\sigma)}(K, (\Lambda V, d_\sigma))$ (*cf.* [8], section 1). □

Exemples.

Dans cette section, nous allons donner des exemples d'espaces K-elliptiques pour lesquels $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; K))$ est finie et d'autres pour lesquels celle-ci est infinie. On suppose que (S, K) est dans le domaine d'Anick; i.e. vérifie la condition (ξ).

(1) Si S est un espace 1-connexe K-elliptique tel que $E_{\text{impair}} = 0$, alors la différentielle du modèle minimal $(\Lambda V, d)$ est nulle et la classe fondamentale de S est représentée par $y_1.y_2...y_m$, où $y_1, y_2, ...$ et y_m forment une base de V^{impair} et $m = \mathrm{prof}(H_*(\Omega S; K))$. Il résulte du théorème B que $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; K))$ est finie.

(2) D'après la proposition 2.1, tout espace S, 1-connexe, K-elliptique, de différentielle quadratique ($d = d_2$) vérifie $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; K)) < \infty$.

Exemple 2.1. — $K = \mathbf{Q}$ et $S = \mathrm{Sp}(5)/SU(5)$. Son modèle minimal est de la forme

$$(\Lambda(x_6, x_{10}, y_{11}, y_{15}, y_{19}), d); dx_6 = dx_{10} = 0, dy_{11} = x_6^2,\ dy_{15} = x_6x_{10} \text{ et } dy_{19} = x_{10}^2$$

et sa classe fondamentale est $\omega = [y_{11}x_{10}^2 - y_{15}x_6x_{10}]$.

Exemple 2.2. — $K = \mathbf{Q}$ et $S = SU(6)/SU(3) \times SU(3)$ de modèle minimal

$$(\Lambda(x_4, x_6, y_7, y_9, y_{11}), d); dx_4 = dx_6 = 0,\ dy_7 = -x_4^2,\ dy_9 = -2x_4x_6 \text{ et } dy_{11} = -x_6^2$$

Sa classe fondamentale est $\omega = [y_9x_4x_6 - 2y_7x_6^2]$.

(3) La somme connexe $S = \mathbf{C}P(2)\#\mathbf{C}P(2)$ admet un modèle de Sullivan de la forme

$$((\Lambda x_1, y_1) \oplus (\Lambda x_2, y_2) \oplus Ku, d)$$

avec $| x_1 |=| x_2 |= 2$, $dx_1 = dx_2 = 0$, $dy_1 = x_1^3$, $dy_2 = x_2^3$, et $du = x_1^2 - x_2^2$. Son modèle minimal est par suite

$$(\Lambda(x_1, x_2, u, v), d) \text{ avec } du = x_1^2 - x_2^2 \text{ et } dv = x_1x_2$$

et sa classe fondamentale est $\omega = [x_1^2 - x_2^2]$. Donc $e_{\mathbf{Q}}(S) = \mathrm{prof}(H_*(\Omega S; \mathbf{Q}))$. $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; \mathbf{Q}))$ est donc finie et est égale à 2.

(4) L'espace homogène $S = U(4)/U(2) \times U(2)$ admet un modèle minimal de la forme

$$(\Lambda(x_2, x_4, y_5, y_7), d)\,;\ dx_2 = dx_4 = 0\,;\ dy_5 = x_2^3 - 2x_2x_4\,;\ dy_7 = x_4^2 - x_2^2x_4.$$

Sa classe fondamentale est $[-x_2^2x_4] \in H^8(U(4)/U(2) \times U(2))$; i.e. $e_{\mathbf{Q}}(S) = 3$. Comme $\mathrm{prof}(H_*(\Omega S; \mathbf{Q})) = \dim(\pi_{\mathrm{impair}}(S)) = 2$, le théorème B entraîne alors que $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; \mathbf{Q}))$ est infinie.

(5) L'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^n$ admet pour modèle minimal sur tout corps K

$$(\Lambda(x,y),d) \text{ avec } \mid x \mid = 2,\ \mid y \mid = n+1,\ dx = 0 \text{ et } dy = x^{n+1}.$$

Nous obtenons alors

$$e_K(S) = n \text{ et } \mathrm{prof}(H_*(\Omega S; K)) = 1 \text{ et } \mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; K))$$

est donc infinie. En remarquant que l'algèbre de Lie d'homotopie E est abélienne, nous retrouvons ce résultat.

Nous terminons cette série d'exemples par deux espaces dont le modèle minimal admet une algèbre d'homotopie de Lie de dimension infinie. On se restreint au cas rationnel.

(6) Soit S la variété $M_{2n}^g = S^n \times S^n \# ... \# S^n \times S^n$, somme connexe de g copies de $S^n \times S^n$, avec n impair. Dans [4], Prop. 7.7, Y. Félix et S. Halperin ont calculé son modèle minimal. Pour ($n \geq 3$ et $g \geq 2$) ce modèle est de la forme : $(\Lambda V, d)$ avec V concentré en degrés impairs et $d = d_2$. En particulier $\dim H(\Lambda V, d_\sigma) = \infty$. Or $\mathrm{cat}_{\mathbf{Q}}(\Lambda V, d_2) = \mathrm{gldim}(UE)$ ([7], § 3) et $\mathrm{cat}_{\mathbf{Q}}(\Lambda V, d_2) \leq \sup\{n \mid H^n(S; \mathbf{Q}) \neq 0\}$ ([4], Th. 4.7), S est donc un espace à dualité de Poincaré tel que $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; K)) < \infty$. De plus, $\mathrm{prof}(H_*(\Omega S; K)) = e_K(S) = \mathrm{cat}_{\mathbf{Q}}(S) = 2$.

(7) Considérons la somme connexe $S = M \# M$, où $M = U(4)/U(2) \times U(2)$. D'après ([14]) M est un espace formel et par conséquent ([4], Prop. 7.4) S l'est aussi. Son modèle minimal est donc celui de

$$\left(\Lambda(x_2, x_4, y_5, y_7)\right) \oplus \left(\Lambda(x_2', x_4', y_5', y_7') \oplus \mathbf{Q}u, D\right)$$

avec $Du = x_4'^2 - x_4^2$ (pour les autres générateurs, D coïncide avec la différentielle d de l'exemple (4)). Le calcul des premiers générateurs du modèle minimal $(\Lambda V, d)$ de cet espace, montre que $\dim(V^{\mathrm{impair}}) \geq 9$. Par conséquent $\dim(V) = \infty$, sinon S serait elliptique et par suite $\mathrm{prof}(H_*(\Omega S; \mathbf{Q})) = \dim(V^{\mathrm{impair}}) \leq \mathrm{cat}_{\mathbf{Q}}(S) \leq 8$. D'autre part le cocycle x_2^4 représente une classe non nulle dans $(\Lambda V, d_2)$. Ceci entraîne que $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; \mathbf{Q}))$ est infinie, puisque dans le cas contraire on aurait $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; \mathbf{Q})) = \mathrm{prof}(H_*(\Omega S; \mathbf{Q})) = \mathrm{cat}_{\mathbf{Q}}(S)$. Or, ([6], Th. 2), $\mathrm{cat}_{\mathbf{Q}}(S) = e_{\mathbf{Q}}(S) = 3$ et (Proposition 2.1) $\mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; \mathbf{Q})) = \sup\{k / H^{k,*}(\Lambda V, d_2) \neq 0\}$. On en déduit aussi que $\mathrm{prof}(H_*(\Omega S; \mathbf{Q}) < 3$ sinon, $\mathrm{cat}_{\mathbf{Q}}(S) = \mathrm{gldim}(H_*(\Omega S; \mathbf{Q}))$ serait infinie.

Remerciements. Cet article constitue une partie de ma thèse. Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au Professeur J.-C. Thomas qui m'a beaucoup aidé durant mon stage effectué à l'Université d'Angers. Ses suggestions, ses questions et ses encouragements sont à la base de la plupart des résultats obtenus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. ANICK, Hopf algebras up to homotopy, J. Amer. Math. Soc., 2 (1989), 417–453.

[2] L. BISIAUX, Depth and Toomer's invariant, à paraître dans, Topology and its Applications.

[3] Y. FÉLIX, La dichotomie elliptique-hyperbolique en homotopie rationnelle, Astérisque, 176 (1989).

[4] Y. FÉLIX and S. HALPERIN, Rational L-S category and its applications, Trans. Amer. Math. Soc., 273 (1982),1–73.

[5] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-M. LEMAIRE and J.-C. THOMAS, Mod p loop space homology, Invent. Math., 95 (1989), 247–262.

[6] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-M. LEMAIRE, The Ganea conjecture and the L–S category of Poincaré duality complexes, Preprint Univ. Nice (1997).

[7] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, The Homotopy Lie algebra for finite complexes, Publ. I.H.E.S., 56 (1983), 89–96.

[8] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Gorenstein spaces, Adv. in Maths, 71 (1988), 92–112.

[9] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Elliptic Hopf algebras, J. London. Math. Soc., (2) 43 (1991), 545–555.

[10] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Hopf algebres of polynomial growth, J. Algebra, 125 (1989), 408–417.

[11] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Rational Homotopy Theory, Preprint Université d'Angers (1997).

[12] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Hopf algebras and a counterexample to a conjecture of Anick, J. of Algebra, 169 (1994), 176–193.

[13] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, C. JACOBSON, C. LÖFWALL and J.-C. THOMAS, The radical of the homotopy Lie algebra, Amer. J. Math., 110 (1988), 301–322.

[14] W.H. GREUB, S. HALPERIN and J.R. VANSTONE, Connexions, Curvatures and Cohomology, Vol. III, Academic Press, New York, 1975.

[15] S. HALPERIN, Finiteness in the minimal models of Sullivan, Trans. Amer. Math. Soc., 230 (1977), 173–199.

[16] S. HALPERIN, Universal enveloping algebras and loop space homology, J. Pure Appl. Algebra, 83 (1992), 237–282.

[17] S. HALPERIN and J.-M. LEMAIRE, Notion of category in differential algebra, in Algebraic Topology – Rationnal Homotopy, Lecture Notes in Mathematics, 1318 (1988), 138–154.

[18] I. JAMES, On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann, Topology, 17 (1978), 331–348.

[19] A. MURILLO, The evaluation map of some Gorenstien algebras, J. Pure. Appl. Algebra, 91 (1994), 209–218.

[20] A. MURILLO, The Top cohomology class of certain spaces, J. Pure. App. Algebra, 84 (1993), 209–214.

[21] J.-P. SERRE, Algèbre locale, Multiplicités, Lecture Notes in Mathematics, 11 (1975).

[22] D. SULLIVAN, Infinitesimal computations in topology, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 47 (1978), 269–331.

[23] G.H. TOOMER, Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence, Math. Z., 138 (1974), 123–143.

Manuscrit reçu le 21 avril 1997,
accepté le 14 septembre 1998.

Youssef RAMI,
Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
BP 4010
Meknès (Maroc).
&
Université d'Angers
Département de Mathématiques
2, boulevard Lavoisier
49045 Angers Cedex 01 (France).