ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-YVES CHARBONNEL

Sur la méthode des orbites pour une algèbre de Lie résoluble

Annales de l'institut Fourier, tome 48, nº 5 (1998), p. 1309-1344

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_5_1309_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 5 (1998), 1309–1344

SUR LA MÉTHODE DES ORBITES POUR UNE ALGÈBRE DE LIE RÉSOLUBLE

par Jean-Yves CHARBONNEL

1. Introduction.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, complètement résoluble sur un corps k de caractéristique nulle. On note $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante et Prem[U($\mathfrak{g}$)] l'ensemble des idéaux premiers de U($\mathfrak{g}$). Il existe une bijection de l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{g}$-invariants de l'algèbre symétrique S($\mathfrak{g}$) sur Prem[U($\mathfrak{g}$)]. En outre, elle est bicontinue pour les topologies naturelles sur ces deux ensembles [2] et [6]. Dans [3], J. Dixmier construit pour chaque orbite de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie nilpotente un idéal primitif de U($\mathfrak{g}$), sans utiliser de polarisation. L'idéal construit est celui qui correspond à l'orbite par la méthode des orbites. Dans le cas d'une algèbre de Lie non nilpotente la méthode de [3] se heurte à plusieurs difficultés. Néanmoins pour une algèbre de Lie résoluble, il propose un moyen de construction sans polarisation. Le but principal de ce mémoire est de montrer que la méthode suggérée par J. Dixmier, associe à chaque idéal premier $\mathfrak{g}$-invariant de l'algèbre symétrique S($\mathfrak{g}$), son image par l'application de Dixmier. Néanmoins, la formulation donnée dans ce mémoire diffère de celle proposée par J. Dixmier. Le travail de Dixmier sur la question avait été grandement influencé par un mémoire de M. Duflo [4] sur les opérateurs différentiels biinvariants sur un groupe de Lie.

Mots-clés : Algèbre de Lie – Algèbre enveloppante – Algèbre de Weyl – Algèbre symétrique – Opérateurs différentiels – Champs de vecteurs adjoints – Représentation coadjointe.
Classification math. : 13 – 16 –22.

Soient $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{g}$, à coefficients polynomiaux sur $\mathfrak{g}$ et $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{g}$, à coefficients séries formelles. Soit $E_\mathfrak{g}$ le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathfrak{g}^*$ engendré par les poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. Soit $\hat{\mathrm{S}}(E_\mathfrak{g})$ l'adhérence dans $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$ de la sous-$\mathbb{Q}$-algèbre engendrée par $E_\mathfrak{g}$. On désigne par $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ la sous-algèbre de $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$ engendrée par $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ et $\hat{\mathrm{S}}(E_\mathfrak{g})$. J. Dixmier construit un homomorphisme $L_\mathfrak{g}$ et un antihomomorphisme $R_\mathfrak{g}$ de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ dans $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$. Leurs images sont contenues dans $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$. Soit $W_\mathfrak{g}$ la différence $L_\mathfrak{g} - R_\mathfrak{g}$. Si Q est un idéal premier $\mathfrak{g}$-invariant de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, on construit un idéal à gauche $\Lambda'_\mathfrak{g}(Q)$ de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ qui contient Q et $W_\mathfrak{g}(\mathfrak{g})$. Dans le cas où Q est maximal, $\Lambda'_\mathfrak{g}(Q)$ coïncide avec cet idéal à gauche. On désigne par $\Lambda_\mathfrak{g}(Q)$ l'idéal à gauche de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ engendré par $\Lambda'_\mathfrak{g}(Q)$. Soit $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. Pour toute forme linéaire ℓ sur $\mathfrak{g}$, on désigne par f la restriction de ℓ à $\mathfrak{n}$. Soient $\mathfrak{g}(\ell)$ et $\mathfrak{g}(f)$ les stabilisateurs de ℓ et de f dans $\mathfrak{g}$. On dira que l'élément p de $\hat{\mathrm{S}}(E_\mathfrak{g})$ satisfait la condition (**C**) relativement à ℓ si le terme constant de p est égal à 1 et si p^2 est un produit:

$$\frac{\mathrm{sh}(\frac{\lambda_1}{2})}{\frac{\lambda_1}{2}} \cdots \frac{\mathrm{sh}(\frac{\lambda_s}{2})}{\frac{\lambda_s}{2}},$$

où les images de $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ par le morphisme canonique de $\mathfrak{g}^*$ dans $\mathfrak{g}(f)^*$ sont les poids du $\mathfrak{g}(f)$-module $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell)$, comptés avec leurs multiplicités. Dans le cas où k est égal à $\mathbb{R}$, les éléments p qui satisfont la condition (**C**) relativement à ℓ interviennent dans la formule des caractères de toute représentation factorielle normale associée à l'orbite coadjointe de ℓ. Le théorème suivant est le résultat principal de ce mémoire.

THÉORÈME. — *Soit Q un idéal premier $\mathfrak{g}$-invariant de* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. *Soit P son image par l'application de Dixmier pour $\mathfrak{g}$. Il existe un élément p de* $\hat{\mathrm{S}}(E_\mathfrak{g})$ *qui satisfait la condition* (**C**) *pour tout point ℓ d'un ouvert de Zariski de la variété des zéros de Q dans $\overline{k} \otimes_k \mathfrak{g}^*$. Pour un tel élément, P est égal à $L_\mathfrak{g}^{-1}[p^{-1}\Lambda_\mathfrak{g}(Q)p]$.*

D'après les propriétés des idéaux à gauche $\Lambda_\mathfrak{g}(Q)$ et d'après la méthode d'extensions de corps initiée par R. Rentschler, on se ramène au cas où Q est l'annulateur de l'orbite coadjointe d'un point f de $\mathfrak{g}^*$. On peut alors supposer $\mathfrak{g}$ algébrique et égal à la somme de $\mathfrak{n}$ et de $\mathfrak{g}(f)$. Dans ce cas, l'idéal à gauche $\Lambda_\mathfrak{g}(Q)$ est maximal et engendré par Q et $W_\mathfrak{g}(\mathfrak{n})$. En outre, Q est engendré par son intersection avec $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$ et des éléments $t+q$ où t est un élément semi-simple de $\mathfrak{g}(f)$ et où q est un élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$. Désignant par $\sigma_\mathfrak{g}$ l'application canonique de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, pour un bon choix de q, $t + \sigma_\mathfrak{g}(q)$ appartient à P. D'après les résultats de Dixmier dans le cas nilpotent et d'après la maximalité de $\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)$, $\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)$ contient l'image de l'intersection de P et de $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$ par $L_{\mathfrak{g}}$. Puisque tout élément de $L_{\mathfrak{g}}[\mathrm{U}(\mathfrak{n})]$ commute à tout élément de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$, il reste à prouver que $\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)p$ contient les éléments $L_{\mathfrak{g}}[t+\sigma_{\mathfrak{g}}(q)]$. Un raisonnement par récurrence et un calcul de dérivée montre qu'il en est bien ainsi.

2. Notations générales.

Dans ce mémoire, k désigne un corps de caractéristique nulle et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur k, complètement résoluble. On notera $\mathbf{G}$ le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$ et $\tilde{\mathfrak{g}}$ son algèbre de Lie. On désignera par $\mathbf{G}_u$ le radical unipotent de $\mathbf{G}$ et par $\mathfrak{u}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}_u$. Lorsque $\mathfrak{g}$ n'est pas l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique, on l'identifie au moyen du théorème d'Ado à une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie sur k et on désigne par $\mathfrak{e}$ son enveloppe algébrique. On note $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ et $\overline{k}$ une extension algébrique, algébriquement close de k. Dans ce qui suit on rappelle quelques notations qui seront utilisées tout au long de cet article sans y faire référence. Les résultats énoncés dans cette section sont contenus dans [3].

2.1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur k. On note V^* son dual, $\mathrm{S}(V)$ l'algèbre symétrique sur V et $\mathrm{S}(V^*)$ l'algèbre symétrique sur V^*. On désigne par $\mathrm{A}(V)$ l'algèbre de Weyl sur V et $\hat{\mathrm{S}}(V^*)$ le complété de $\mathrm{S}(V^*)$ pour la topologie $V^*\mathrm{S}(V^*)$-adique. Soit $A_0(V), A_1(V), \ldots$ la filtration de $A(V)$ par l'ordre des opérateurs différentiels. On utilise sur $A(V)$ la topologie limite inductive des topologies $V^*A_\nu(V)$-adiques sur $A_\nu(V)$ et on désigne par $\hat{A}(V)$ son complété. La structure d'algèbre sur $A(V)$ se prolonge par continuité en une structure d'algèbre sur $A(V)$. En outre le $\hat{S}(V^*)$-module sous-jacent à $\hat{A}(V)$ est canoniquement isomorphe au produit tensoriel

$$\hat{S}(V^*) \otimes_{S(V^*)} A(V).$$

Conformément à l'usage, si W est un sous-espace de V, $W^\perp$ désigne l'orthogonal de W dans V^*. On désigne par $B_{V,W}$ la sous-algèbre de $A(V)$ engendrée par V et $W^\perp$, et par $\hat{B}_{V,W}$ sa clôture dans $\hat{A}(V)$. L'idéal à gauche de $\mathrm{B}_{V,W}$ engendré par W est un idéal bilatère et le quotient de $\mathrm{B}_{V,W}$ par cet idéal est canoniquement isomorphe à $\mathrm{A}(V/W)$. On note $\mathrm{b}_{V,W}$ le morphisme canonique de $\mathrm{B}_{V,W}$ sur $\mathrm{A}(V/W)$. Ce morphisme s'étend de manière unique en un morphisme $\hat{\mathrm{b}}_{V,W}$ de $\hat{\mathrm{B}}_{V,W}$ sur $\hat{\mathrm{A}}(V/W)$. Soit $\mathrm{C}_{V,W}$ la sous-algèbre de $\mathrm{A}(V)$ engendrée par W et V^*. L'idéal à gauche de $\mathrm{C}_{V,W}$ engendré par $W^\perp$ est un idéal bilatère et le quotient de $\mathrm{C}_{V,W}$ par cet idéal est canoniquement isomorphe à $\mathrm{A}(W)$. On désigne par $\mathrm{c}_{V,W}$ le morphisme canonique de $\mathrm{C}_{V,W}$ sur $\mathrm{A}(W)$. Ce morphisme s'étend de manière unique en un morphisme $\hat{\mathrm{c}}_{V,W}$ de $\hat{\mathrm{C}}_{V,W}$ sur $\hat{\mathrm{A}}(W)$.

2.2. Pour tout entier i, on désigne par $\mathrm{S}^i(\mathfrak{g}^*)$ le sous-espace des éléments homogènes de degré i de $\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*)$. Soit $\mathrm{Sym}^i(\mathfrak{g}, \mathrm{S}(\mathfrak{g}))$ l'espace des applications i-linéaires symétriques de $\mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}$ dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Puisque $\mathfrak{g}$ est un k-espace vectoriel de dimension finie, $\mathrm{Sym}^i(\mathfrak{g}, \mathrm{S}(\mathfrak{g}))$ est canoniquement isomorphe au produit tensoriel $\mathrm{S}^i(\mathfrak{g}^*) \otimes_k \mathrm{S}(\mathfrak{g})$. En outre, cet espace s'identifie à un sous-espace de $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$. Pour tout x dans $\mathfrak{g}$ et pour tout entier positif r, on note $E_r(x)$ l'élément de $\mathrm{Sym}^r(\mathfrak{g}, \mathrm{S}(\mathfrak{g}))$ défini par

$$E_r(x)(y, \ldots, y) = (\mathrm{ad}\ y)^r(x).$$

On désigne par $L_\mathfrak{g}(x)$ et $R_\mathfrak{g}(x)$ les éléments de $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$

$$x + \frac{1}{2}E_1(x) + \cdots + b_r E_r(x) + \cdots, x - \frac{1}{2}E_1(x) + \cdots + c_r E_r(x) + \cdots,$$

où $b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots$ sont les coefficients des séries entières

$$\frac{T}{1 - \exp(-T)}, \frac{T}{\exp(T) - 1}.$$

L'application $L_\mathfrak{g}$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie sous-jacente à $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$. L'application $R_\mathfrak{g}$ est un anti-homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie sous-jacente à $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$. Soit $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. On désigne encore par $L_\mathfrak{g}$ et $R_\mathfrak{g}$ les prolongements canoniques de $L_\mathfrak{g}$ et de $R_\mathfrak{g}$ à $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Pour les filtrations usuelles sur $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ et $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$, $L_\mathfrak{g}$ est un morphisme d'algèbres filtrées. Pour tout x dans $\mathfrak{g}$, on pose

$$W_\mathfrak{g}(x) = L_\mathfrak{g}(x) - R_\mathfrak{g}(x).$$

Alors $W_\mathfrak{g}(x)$ est un champ de vecteurs à coefficients polynomiaux dont la valeur en y est $[y, x]$. En outre, pour tout a dans $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$, le crochet $[W_\mathfrak{g}(x), a]$, pour la structure d'algèbre de Lie sous-jacente à la structure d'algèbre sur $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$, est l'image de a par l'action adjointe de x dans $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$. Pour toute dérivation x de $\mathfrak{g}$, on note aussi $W_\mathfrak{g}(x)$ l'élément de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ défini par l'endomorphisme $-x$ de $\mathfrak{g}$. La dérivation de $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$, définie par $W_\mathfrak{g}(x)$, est l'extension à $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$ de la dérivation x de $\mathfrak{g}$.

2.3. Soit $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{n}$. Lorsqu'il est de dimension 1, on appelle quadruplet réduisant dans $\mathfrak{n}$ tout quadruplet $(x, y, z, \mathfrak{a})$ qui satisfait les conditions suivantes :

1) $[x, y]$ est égal à z et engendre $\mathfrak{z}$,

2) $[y, \mathfrak{n}]$ est contenu dans $\mathfrak{z}$,

3) $\mathfrak{a}$ est le centralisateur de y dans $\mathfrak{n}$.

Le sous-espace engendré par x et $\mathfrak{a}$ est alors égal à $\mathfrak{n}$.

2.4. Si X est une variéte algébrique définie sur le corps k, pour toute extension K de k, $X(K)$ désigne l'ensemble des K-points de X.

Si G est un groupe qui opère sur l'ensemble E, pour tout x dans E, $G(x)$ désigne le stabilisateur de x dans G et $G.x$ désigne l'orbite de x sous l'action de G. Lorsque G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}(x)$ désigne l'algèbre de Lie de $G(x)$.

Si A est un anneau, on dira que I est un idéal de A s'il en est un idéal bilatère.

3. Les fonctions p.

Soient ℓ une forme linéaire sur $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}$ et f sa restriction à $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{n}$. La somme $\mathfrak{g}_\ell$ de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}(f)$ et de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{n}$ est un idéal de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}$ qui ne dépend que de l'orbite coadjointe de ℓ. Si x est dans $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}(f)$, $\operatorname{ad} x$ normalise $\mathfrak{g}(\ell)$. La représentation adjointe de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}(f)$ dans $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}$ définit par passage au quotient une représentation de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}(f)$ dans $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les poids de cette représentation, comptés avec leurs multiplicités. Puisque $\mathfrak{n}$ est un idéal nilpotent, chacun de ces poids se prolonge de manière unique en un poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}_\ell$. On désigne ces prolongements par les mêmes symboles et on note p'_ℓ la série formelle

$$p'_\ell = \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_1}{2}}{\frac{\lambda_1}{2}} \cdots \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_s}{2}}{\frac{\lambda_s}{2}}.$$

Cet élément ne dépend que de l'orbite coadjointe de ℓ. C'est une série formelle de terme constant 1, appartenant à la sous-algèbre fermée $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}_\ell})$ de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g}_\ell)$, définie en 4.1. On note p_ℓ la racine carrée de p'_ℓ, de terme constant 1.

Soit $E_{\mathfrak{g}}$ le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. On désigne par $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ la sous-$\mathbb{Q}$-algèbre fermée de $\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{g}^*)$ engendrée par $E_{\mathfrak{g}}$. Pour tout λ dans $E_{\mathfrak{g}}$, l'extension $\overline{k}$-linéaire $\overline{\lambda}$ de λ à $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de poids de la représentation adjointe de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}$. Puisque $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble, l'application $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ est une bijection de $E_{\mathfrak{g}}$ sur $E_{\overline{k}\otimes_k \mathfrak{g}}$ qui envoie l'ensemble des poids de $\mathfrak{g}$ sur celui de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}$. Le prolongement continu de cette bijection à $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ est un isomorphisme de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ sur $\hat{\mathrm{S}}(E_{\overline{k}\otimes_k}\mathfrak{g})$. On identifie ces deux algèbres au moyen de cet isomorphisme. Puisque tout poids de $\mathfrak{g}_\ell$ est la restriction à $\mathfrak{g}_\ell$ d'un poids de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}$, le morphisme continu de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ dans $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}_\ell})$ qui à λ dans $E_{\mathfrak{g}}$ associe la restriction de $\overline{\lambda}$ à $\mathfrak{g}_\ell$, est un morphisme surjectif. On l'appelle le morphisme canonique.

PROPOSITION. — *Soit Q un idéal premier $\mathfrak{g}$-invariant de* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. *Alors il existe un idéal semi-premier, $\mathfrak{g}$-invariant, Q' contenant strictement Q et un élément p de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ qui satisfont la condition suivante: si ℓ est un zéro de Q dans $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}^*$ qui n'est pas zéro de Q', l'image de p par le morphisme canonique de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ sur $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}_\ell})$ est égal à p_ℓ.*

On démontrera cette proposition en plusieurs étapes. Si p est un élément de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ et si Q' est un idéal semi-premier, $\mathfrak{g}$-invariant de $S(\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g})$ qui satisfont les conditions de la proposition relativement à un idéal de la décomposition primaire de $\overline{k}Q$, p et l'intersection des conjugués de Q' sous l'action du groupe de Galois de $\overline{k}$ sur k, satisfont les conditions de la proposition relativement à $\overline{k}Q$; donc il suffit de considérer le cas où k est algébriquement clos. On suppose qu'il en est ainsi dans la suite de cette section.

3.1. On désigne par W_1 la variété des zéros dans $\mathfrak{n}^*$ de l'intersection de Q et de $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$.

LEMME. — *Il existe un ouvert de Zariski, non vide, $\mathbf{G}(k)$-invariant, W_1' de W_1 qui satisfait la condition suivante: si f et f' sont dans W_1', alors les tores maximaux de $\mathbf{G}(f)$ et de $\mathbf{G}(f')$ sont conjugués sous l'action du groupe $\mathbf{G}(k)$. En outre, les sous-groupes algébriques $\mathbf{G}(f)\mathbf{G}_u$ et $\mathbf{G}(f')\mathbf{G}_u$ ont même algèbre de Lie. Si $\mathbf{T}$ est un tore maximal de $\mathbf{G}(f)$, alors $\mathbf{T}$ stabilise toute forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ dont la restriction à $\mathfrak{n}$ est égale à f.*

D'après [8] Théorème 9.3.1, il existe un ouvert de Zariski non vide, $\mathbf{G}(k)$-invariant, W_1' de W_1 tel que pour tout (x, x') dans $W_1' \times W_1'$, les tores maximaux de $\mathbf{G}(x)$ et de $\mathbf{G}(x')$ soient conjugués entre eux sous l'action de $\mathbf{G}(k)$. Soient f et f' deux points de W_1'. Soient $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ des tores maximaux de $\mathbf{G}(f)$ et de $\mathbf{G}(f')$. Les sous-groupes algébriques $\mathbf{T}\mathbf{G}_u$ et $\mathbf{T}'\mathbf{G}_u$ sont alors les composantes neutres des groupes algébriques $\mathbf{G}(f)\mathbf{G}_u$ et $\mathbf{G}(f')\mathbf{G}_u$. D'après [5] Théorème 34.4, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont conjugués sous l'action de $\mathbf{G}(k)$; donc $\mathbf{G}(f)\mathbf{G}_u$ et $\mathbf{G}(f')\mathbf{G}_u$ ont même composante neutre et même algèbre de Lie. Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ dont la restriction à $\mathfrak{n}$ est égale à f. Le morphisme

$$t \longmapsto t.\ell - \ell,$$

est un morphisme de $\mathbf{T}$ dans le groupe additif $\mathfrak{g}^*$; donc il est trivial.

3.2. On note W la variété des zéros de Q dans $\mathfrak{g}^*$. Soit $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie d'un tore maximal du stabilisateur dans $\mathbf{G}$ d'un point de W_1'. On désigne par $W_{\mathfrak{t}}$ l'ensemble des points de W_1 qui sont invariants par $\mathfrak{t}$. Soit W_2' l'ensemble des points f de W_1' pour lesquels $\mathfrak{g}(f)$ et $\mathfrak{n}(f)$ sont de dimension minimale. D'après 3.1, toute $\mathbf{G}(k)$-orbite contenue dans W_1' rencontre $W_{\mathfrak{t}}$; or W_1' est irréductible; donc $W_{\mathfrak{t}}$ contient un ouvert de Zariski non vide, W_3' pour lequel la réunion des $\mathbf{G}(k)$-orbites qui le rencontrent est un ouvert de Zariski de W_2'. Soient f_0 un élément de W_3' et $\mathfrak{m}$ un supplémentaire $\mathfrak{t}$-invariant de $\mathfrak{n}(f_0)$ dans $\mathfrak{n}$. L'ensemble des éléments f de W_3' pour lesquels $\mathfrak{m}$ est un supplémentaire de $\mathfrak{n}(f)$ dans $\mathfrak{n}$, est un ouvert de Zariski W_4' de W_3'. On désigne par W'' l'ensemble des points de W dont la restriction à $\mathfrak{n}$ appartient à W_4'. Soient ℓ dans W'' et f la restriction de ℓ à $\mathfrak{n}$. Pour tout x dans $\mathfrak{t}$, l'endomorphisme x laisse invariant les sous-espaces $\mathfrak{g}(f)+\mathfrak{n}$, $\mathfrak{g}(f)$ et $\mathfrak{g}(\ell)$. En outre, l'image de $\mathfrak{g}(f)$ par x est contenue dans $\mathfrak{g}(\ell)$ d'après le lemme 3.1; or le $\mathfrak{t}$-module $\mathfrak{g}(f)+\mathfrak{n}/\mathfrak{n}$ est isomorphe au $\mathfrak{t}$-module $\mathfrak{m}$; donc les poids du $\mathfrak{t}$-module $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell)$ sont les poids des $\mathfrak{t}$-modules $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)+\mathfrak{n}$. Puisque 0 est le seul poids du $\mathfrak{t}$-module $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)+\mathfrak{n}$ et que sa dimension ne dépend pas du point f de W_2', les poids du $\mathfrak{t}$-module $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell)$ et leurs multiplicités ne changent pas quand ℓ varie dans W''.

Soit Q' le plus grand idéal $\mathfrak{g}$-invariant contenu dans l'annulateur du complémentaire de W'' dans W. D'après le choix de W'', Q' contient strictement Q. On choisit un élément p de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ dont l'image par le morphisme canonique de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ sur $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}_\ell})$ est p_ℓ. Soient ℓ' un point de W qui n'est pas zéro de Q', et f' sa restriction à $\mathfrak{n}$. Il existe alors un point g de $\mathbf{G}(k)$ pour lequel W'' contient $g.\ell'$. Soit λ un poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. Il existe un poids $\tilde{\lambda}$ de la représentation standard de l'enveloppe algébrique $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, qui est défini par la condition suivante : pour tout x dans $\mathfrak{g}$, $\langle\lambda, x\rangle$ est égal à $\langle\tilde{\lambda}, \mathrm{ad}\, x\rangle$.

La restriction de λ à $\mathfrak{g}(f)$ est poids de multiplicité m_λ du $\mathfrak{g}(f)$-module $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell)$ si et seulement si la restriction de $\tilde{\lambda}$ à $\mathfrak{t}$ est poids de multiplicité m_λ du $\mathfrak{t}$-module $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell)$. D'après ce qui précède, λ satisfait la même condition si et seulement si la restriction de $\tilde{\lambda}$ à $\mathfrak{t}$ est poids de multiplicité m_λ du $\mathfrak{t}$-module $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g.\ell')$. Par suite, λ satisfait cette condition si et seulement si la restriction de $\tilde{\lambda} \circ g$ à $g(\mathfrak{t})$ est poids de multiplicité m_λ du $g(\mathfrak{t})$-module $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell')$. La sous-algèbre $g(\mathfrak{t})$ est l'algèbre de Lie d'un tore maximal de $\mathbf{G}(f')$; or $\tilde{\lambda} \circ g$ est égal à $\tilde{\lambda}$; donc la restriction de λ à $\mathfrak{g}(f)$ est poids de multiplicité m_λ du $\mathfrak{g}(f)$-module $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell)$ si et seulement si la restriction de λ à $\mathfrak{g}(f')$ est poids de multiplicité m_λ du $\mathfrak{g}(f)$-module $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell')$. Par suite, $p_{\ell'}$ est égal à p_ℓ. L'idéal Q' et l'élément p de $\hat{\mathrm{S}}(E_\mathfrak{g})$ satisfont les conditions de la proposition.

4. Sur les algèbres de Lie résolubles.

Avec les notations de 3 et de 2.1, on désigne par $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ la sous-algèbre de $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$ engendrée par $\hat{\mathrm{S}}(E_\mathfrak{g})$ et $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$. Puisque $\hat{\mathrm{S}}(E_\mathfrak{g})$ est stable par les dérivations $\theta \mapsto [v,\theta]$ pour tout v dans $\mathfrak{g}$, le sous-$\mathrm{S}(\mathfrak{g})$-module sous-jacent à $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ est isomorphe au produit tensoriel

$$\hat{S}(E_\mathfrak{g})S(\mathfrak{g}^*) \underset{k}{\otimes} S(\mathfrak{g}).$$

Si $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on note $B_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ la sous-algèbre de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ engendrée par $\mathrm{B}_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ et par $\hat{\mathrm{S}}(E_\mathfrak{g})$. De même, on désigne par $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ la sous-algèbre de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ engendrée par $\mathrm{C}_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ et par $\hat{\mathrm{S}}(E_\mathfrak{g})$. On note $b_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ la restriction de $\hat{\mathrm{b}}_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ à $B_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ et $c_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ la restriction de $\hat{\mathrm{c}}_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ à $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$. Si tout poids de $\mathfrak{a}$ est la restriction d'un poids de $\mathfrak{g}$, l'image de $c_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ est la sous-algèbre $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{a})$ de $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{a})$. Cette dernière condition est satisfaite lorsque $\mathfrak{a}$ est un idéal. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal contenu dans $\mathfrak{n}$, l'image de $b_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ est la sous-algèbre $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$.

4.1. On utilise l'homomorphisme $L_\mathfrak{g}$ et l'antihomomorphisme $R_\mathfrak{g}$ définis en 2.2.

LEMME. — *Les images de $L_\mathfrak{g}$ et de $R_\mathfrak{g}$ sont contenues dans $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$.*

Puisque $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ contient $L_\mathfrak{g}(x) - R_\mathfrak{g}(x)$ pour tout x dans $\mathfrak{g}$, il suffit de montrer que $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ contient $L_\mathfrak{g}(x)$ pour tout x dans $\mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ étant complètement résoluble, il existe une base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de $\mathfrak{g}$ dans laquelle $\operatorname{ad} y$ se trigonalise, pour tout y dans $\mathfrak{g}$. En outre, les éléments diagonaux sont les scalaires $\mu_1(y),\dots,\mu_n(y)$, où $\mu_1,\dots,\mu_n$ sont les poids de la représentation adjointe. Les coefficients du polynôme caractéristique de $\mathrm{ad}\, y$ sont alors les valeurs en y de fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$, appartenant à $\mathrm{S}(E_{\mathfrak{g}})$; donc d'après Cayley-Hamilton, pour tout entier positif r, on a

$$(\mathrm{ad}\, y)^r(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i(y)e_i,$$

où pour $i = 1,\dots,n$, q_i est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathrm{S}(E_{\mathfrak{g}})$ de monômes de degré au plus n. Par suite, $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ contient $L_{\mathfrak{g}}(x)$ pour tout x dans $\mathfrak{g}$.

4.2. Soit Q un idéal premier $\mathfrak{g}$-invariant de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. On désigne par $\mathrm{V}(Q)$ la variété des zéros de Q dans $(\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g})^*$. Soit $\tilde{Q}$ l'annulateur dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ de l'ensemble des points f de $\mathrm{V}(Q)$ pour lesquels $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}(f)$ est de dimension minimale. Alors $\tilde{Q}$ est un idéal semi-premier, $\mathfrak{g}$-invariant de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Soit q un point de $\tilde{Q}$ qui n'est pas dans Q. On montrera en 7.2 que l'ensemble des points a de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ pour lesquels $\mathrm{A}(\mathfrak{g})Q + \mathrm{A}(\mathfrak{g})W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ contient $q^l a$ dès que l est assez grand, est un idéal à gauche qui ne dépend pas du choix de q. On le note $\Lambda'_{\mathfrak{g}}(Q)$ et on désigne par $\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)$ l'idéal à gauche de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ engendré par $\Lambda'_{\mathfrak{g}}(Q)$. Dans le cas où k est algébriquement clos, $\Lambda'_{\mathfrak{g}}(Q)$ ne dépend pas de q d'après [1] (Théorème 4.5).

THÉORÈME. — *Soit Q un idéal premier $\mathfrak{g}$-invariant de* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. *Soit P son image par l'application de Dixmier pour $\mathfrak{g}$. Alors pour tout élément p de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ qui satisfait la condition de la proposition 3 relativement à Q, P est égal à $L_{\mathfrak{g}}^{-1}[p^{-1}\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)p]$.*

Ce théorème sera démontré en 7.5.

5. Sur les idéaux à gauche de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$.

Dans cette section l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est algébrique. On désigne par $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{g}$ qui est un supplémentaire de $\mathfrak{n}$ et dont l'image par la représentation adjointe ne contient que des éléments semi-simples.

5.1. On suppose qu'il existe un quadruplet $(x, y, z, \mathfrak{a})$ réduisant dans $\mathfrak{n}$ au sens de 2.3. Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ sur k, on désigne par $\sigma_{\mathfrak{h}}$ l'application canonique de $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{h})$.

LEMME. — *Soit q un élément de* $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$. *Alors on peut trouver un élément $\overline{q}$ de* $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$ *qui satisfait les relations*

$$\begin{aligned} &\exp(s\,\mathrm{ad}\,x)(\overline{q}) - q \in \mathrm{S}(\mathfrak{a})y + \mathrm{S}(\mathfrak{a})(z-1) \\ \text{et}\quad &\exp(s\,\mathrm{ad}\,x)[\sigma_{\mathfrak{a}}(\overline{q})] - \sigma_{\mathfrak{a}}(q) \in \mathrm{U}(\mathfrak{a})y + \mathrm{U}(\mathfrak{a})(z-1), \end{aligned}$$

pour tout s dans k.

On note I et J les idéaux $\mathrm{S}(\mathfrak{a})(z-1)$ et $\mathrm{S}(\mathfrak{a})y + \mathrm{S}(\mathfrak{a})(z-1)$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$. Soit α l'homomorphisme de $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$ dans $k[X] \underset{k}{\otimes} S(\mathfrak{a})$ défini par la relation : $\alpha(a)(X) = \exp(X\,\mathrm{ad}\,x)(a)$, pour tout a dans $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$. Un tel morphisme existe car $\mathrm{ad}\,x$ est une dérivation localement nilpotente de $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$. Puisque z appartient au centre de $\mathfrak{n}$, l'image de I par α est contenue dans $k[X] \underset{k}{\otimes} I$; donc α définit par passage au quotient un homomorphisme $\tilde{\alpha}$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{a})/I$ dans $k[X] \underset{k}{\otimes} S(\mathfrak{a})/k[X] \underset{k}{\otimes} J$. Soit α' le morphisme de l'algèbre $k[X] \underset{k}{\otimes} S(\mathfrak{a})$ dans l'algèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$, défini par les conditions suivantes :

1) $\alpha'(X \otimes 1) = y$.

2) pour tout u dans $\mathfrak{a}$

$$\alpha'(1 \otimes u) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}\, y^n (\mathrm{ad}\,x)^n(u).$$

Le morphisme α' est bien défini car $\mathrm{ad}\,x$ est un endomorphisme nilpotent. L'image de l'idéal $k[X] \underset{k}{\otimes} J$ par α' est contenue dans I car $\alpha'(1 \otimes z)$ et $\alpha'(1 \otimes y)$ sont respectivement égaux à z et à $y(1-z)$; donc α' définit par passage au quotient un morphisme $\tilde{\alpha}'$ de l'algèbre $k[X] \underset{k}{\otimes} S(\mathfrak{a})/k[X] \underset{k}{\otimes} J$ dans l'algèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{a})/I$. Pour tout u dans $\mathfrak{a}$, $\alpha' \circ \alpha(u)$ est égal à u et $\alpha \circ \alpha'(1 \otimes u) - u$ appartient à $k[X] \underset{k}{\otimes} J$; donc les morphismes $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\alpha}'$ sont des isomorphismes, inverses l'un de l'autre. On note $\tilde{q}$ l'élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{a})/I$ dont l'image par $\tilde{\alpha}$ est la classe de $1 \otimes q$. Soit $\overline{q}$ un élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$ dont l'image dans $\mathrm{S}(\mathfrak{a})/I$ est $\tilde{q}$. Alors pour tout s dans k, J contient

$$\exp(s\,\mathrm{ad}\,x)(\overline{q}) - q.$$

Puisque $\sigma_{\mathfrak{a}}$ est un morphisme $\mathfrak{n}$-équivariant pour les actions adjointes de $\mathfrak{n}$ dans $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$ et $\mathrm{U}(\mathfrak{a})$, pour tout a dans $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$ et pour tout s dans k, on a

$$\sigma_{\mathfrak{a}}[\exp(s\,\mathrm{ad}\,x)(a)] = \exp(s\,\mathrm{ad}\,x)[\sigma_{\mathfrak{a}}(a)].$$

Puisque y et z sont dans le centre de $\mathfrak{a}$, $\sigma_{\mathfrak{a}}(J)$ est l'idéal de $\mathrm{U}(\mathfrak{a})$ engendré par y et $z-1$; donc $\overline{q}$ satisfait la deuxième relation du lemme.

5.2. On suppose que $\mathfrak{n}$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$. Soit t un élément non nul de $\mathfrak{g}$ pour lequel ad t est semi-simple.

LEMME. — *Soit f une linéaire sur $\mathfrak{g}$ dont le stabilisateur contient t. Soit Q l'annulateur dans* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ *de l'orbite coadjointe de f. On note Q_0 l'intersection de Q et de* $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$, *P l'image de Q par l'application de Dixmier pour $\mathfrak{g}$ et P_0 l'intersection de P et de* $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$. *Alors il existe un élément q de* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ *qui satisfait les conditions suivantes :*

1) *Q est l'idéal de* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ *engendré par Q_0 et $t+q$.*

2) *P est l'idéal engendré par P_0 et $t+\sigma_{\mathfrak{g}}(q)$.*

Pour tout q dans $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$, tout élément u de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ s'écrit de manière unique

$$u = u_0 + (t+q)u_1 + \cdots + (t+q)^l u_l,$$

où $u_0, \ldots, u_l$ sont des éléments de $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$. De même, tout élément u de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ s'écrit de manière unique

$$u = u_0 + [t+\sigma_{\mathfrak{g}}(q)]u_1 + \cdots + [t+\sigma_{\mathfrak{g}}(q)]^l u_l,$$

où $u_0, \ldots, u_l$ sont des éléments de $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$; donc il suffit de montrer l'existence d'un élément q de $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$ pour lequel $P \times Q$ contient $(t+\sigma_{\mathfrak{g}}(q), t+q)$. On prouve l'assertion en raisonnant par récurrence sur la dimension n de $\mathfrak{g}$. On suppose l'assertion vraie pour $n-1$. Si f est nul sur un idéal $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$, alors l'assertion du lemme résulte de l'hypothèse de récurrence appliquée à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ et à la forme linéaire sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ que définit f par passage au quotient. Dans ce qui suit, on suppose que f n'est nul sur aucun idéal non nul de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$. Alors $\mathfrak{z}$ est de dimension 1 et la forme linéaire f n'y est pas identiquement nulle. Soit y un vecteur propre de ad$\,t$ qui appartient au noyau de la restriction de f au deuxième terme de la suite centrale ascendante de $\mathfrak{n}$. Un tel y existe car t stabilise f. On peut alors trouver un quadruplet réduisant $(x, y, z, \mathfrak{a})$ dans $\mathfrak{n}$ pour lequel x est vecteur propre de ad$\,t$. Quitte à remplacer t par un élément colinéaire, on peut supposer $[t, y]$ égal à $-\varepsilon y$ où ε est soit 0 soit 1. On désigne par Ω l'orbite coadjointe de f et Ω_0 la variété des zéros de y dans Ω. Les applications

$$\Omega_0 \times k \to \Omega\,,\ (\ell, s) \to \exp(sx).\ell$$
$$\text{et}\quad \Omega \to \Omega_0 \times k\,,\ \ell \mapsto (\exp(-\langle \ell, y\rangle x).\ell, \langle \ell, y\rangle),$$

sont polynomiales et inverses l'une de l'autre; donc Ω_0 est une sous-variété irréductible de Ω. Soit Q' l'annulateur de Ω_0 dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. D'après ce qui précède, Ω est la réunion des $\exp(sx).\Omega_0$ où s est dans k ; donc Q est le plus grand idéal $\mathfrak{g}$-invariant contenu dans Q'. Puisque t stabilise f, Ω est l'orbite de f sous l'action du groupe adjoint de $\mathfrak{n}$; or $\mathfrak{a}$ contient le stabilisateur de f dans $\mathfrak{n}$; donc Ω_0 est l'orbite de f sous l'action du groupe adjoint de $\mathfrak{a}$.

Soit $\mathfrak{h}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par $\mathfrak{a}$ et t. Puisque, y est vecteur propre pour $\operatorname{ad} t$, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. On désigne par Q_1 l'intersection de Q' et de $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$. Alors Q_1 est l'annulateur dans $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ de l'orbite coadjointe de la restriction de f à $\mathfrak{h}$; donc d'après l'hypothèse de récurrence il existe un élément q de $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$ qui satisfait les conditions (1), (2) du lemme relativement à Q_1. En particulier, Q' contient $t + q$. Soit $\overline{q}$ un élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$ qui satisfait la relation

$$\exp(s \operatorname{ad} x)(\overline{q}) - q \in \mathrm{S}(\mathfrak{a})y + \mathrm{S}(\mathfrak{a})(z-1),$$

pour tout s dans k. L'existence de $\overline{q}$ est assurée par le lemme 5.1. Pour tout s dans k, on a

$$\exp(s \operatorname{ad} x)(t + \varepsilon xy) - t = \varepsilon xy + s\varepsilon x(z-1)\,;$$

or Q' contient $t+q$, y et $z-1$; donc Q' contient $\exp(s \operatorname{ad} x)(t + \varepsilon xy + \overline{q})$, pour tout s dans k. Par suite, Q contient $t + \varepsilon xy + \overline{q}$. Soit P_1 l'image de Q_1 par l'application de Dixmier pour $\mathfrak{h}$. D'après l'hypothèse de récurrence, P_1 contient $t + \sigma_{\mathfrak{h}}(q)$. On désigne par τ l'automorphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ défini par la relation

$$\tau(\xi) = \xi - \frac{\varepsilon}{2}\langle t^*, \xi\rangle,$$

où ξ est dans $\mathfrak{g}$ et où t^* est la forme linéaire de noyau $\mathfrak{n}$ dont la valeur en t est 1. D'après [2] Proposition 5.2.6, P est le plus grand idéal bilatère de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ contenu dans l'idéal à gauche L, engendré par $\tau(P_1)$. Cet idéal à gauche est stable par $\mathfrak{h}$; donc P est l'intersection des idéaux à gauche $\exp(s \operatorname{ad} x)(L)$ où s est dans k. Puisque $\tau(P_1)$ contient y et $z-1$, d'après les relations

$$\begin{aligned}&\exp(s \operatorname{ad} x)[t + \sigma_{\mathfrak{g}}(\varepsilon xy + \overline{q})] \\ &\quad = t - \frac{\varepsilon}{2} + \sigma_{\mathfrak{g}}(q) + \exp(s \operatorname{ad} x)[\sigma_{\mathfrak{g}}(\overline{q})] - \sigma_{\mathfrak{g}}(q) + \varepsilon xy + \frac{\varepsilon}{2}(2sx - 1)(z-1),\end{aligned}$$

L contient $\exp(s \operatorname{ad} x)[t + \sigma_{\mathfrak{g}}(\varepsilon xy + \overline{q})]$ pour tout s dans k. Par suite, P contient $t + \sigma_{\mathfrak{g}}(\varepsilon xy + \overline{q})$. L'élément $\overline{q} + \varepsilon xy$ satisfait donc les conditions (1) et (2) du lemme relativement à Q.

5.3. On suppose $\mathfrak{g}$ égal à $\mathfrak{n}$. Dans ce cas, $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ est égal à $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$. Si Q est un idéal $\mathfrak{g}$-invariant de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, on note $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ l'idéal à gauche de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ engendré par Q et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. Soit f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. On suppose que

f n'est nul sur aucun idéal non trivial de $\mathfrak{g}$. Dans ce cas $\mathfrak{z}$ est de dimension 1. On peut alors trouver un quadruplet réduisant $(x, y, z, \mathfrak{a})$. Soit K le corps des fractions rationnelles à une indéterminée X sur k. Soit $\mathfrak{B}$ la sous-k-algèbre de $A(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{a})$ engendrée par X, $\mathfrak{a}$ et l'orthogonal de y dans $\mathfrak{a}^*$. Elle est quotient de la k-algèbre tensorielle $\mathrm{T}(k[X] \oplus \mathfrak{a} \oplus \{y\}^\perp)$ par l'idéal engendré par les éléments

$$X \otimes v - v \otimes X \,,\ v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1 \,,\ X \otimes v' - v' \otimes X \,,\ v'_1 \otimes v'_2 - v'_2 \otimes v'_1 \,,\ v \otimes v' - v' \otimes v - \langle v', v \rangle,$$

où v, v_1, v_2 sont dans $\mathfrak{a}$ et où v', v'_1, v'_2 sont dans $\{y\}^\perp$. Il existe donc un unique morphisme ε de $\mathfrak{B}$ dans $\mathrm{A}(\mathfrak{a})$ qui satisfait les relations

$$\varepsilon(a \otimes v) = a(y)v \,,\ \varepsilon(a \otimes v') = a(y)v',$$

pour tout a dans $k[X]$, pour tout v dans $\mathfrak{a}$ et pour tout v' dans $\mathfrak{a}^*$ orthogonal à y. L'image de ε est la sous-algèbre $\mathrm{B}_{\mathfrak{a},ky}$ de $\mathrm{A}(\mathfrak{a})$ et le noyau de ε est l'idéal engendré par $X - y$. On désigne par Q l'annulateur dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ de l'orbite coadjointe de f, par Q_0 l'intersection de Q et de $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$, par $\overline{Q}_0$ l'idéal de $S(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{a})$ engendré par $\varepsilon^{-1}(Q_0)$. Puisque Q_0 est premier, $\overline{Q}_0$ est premier et égal à $K\varepsilon^{-1}(Q_0)$. En outre, Q_0 est l'image par ε de l'intersection de $\overline{Q}_0$ et de $\mathfrak{B}$.

5.4. Comme en 5.3, on suppose $\mathfrak{g}$ égal à $\mathfrak{n}$. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$ qui satisfait la condition suivante: pour tout i, $[\mathfrak{g}, e_i]$ est contenu dans le sous-espace engendré par $e_{i+1}, \ldots, e_n$. On note $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la base duale. Pour $i = 1, \ldots, n$, on désigne par $\mathfrak{B}_i$ la sous-algèbre de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ engendrée par $\mathfrak{g}$ et $e_1^*, \ldots, e_i^*$. Pour $i = 0$, on pose: $\mathfrak{B}_i = \mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Si Q est un idéal $\mathfrak{g}$-invariant de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, on définit par récurrence une suite croissante d'entiers $1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq n$. On l'appelle *la suite relative à Q et à la base* $\{e_1, \ldots, e_n\}$. L'entier j_1 est le plus petit entier pour lequel $e_{j_1}^*$ n'appartient pas à la somme de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ et de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. On suppose connus $j_1, \ldots, j_i$. On note j_{i+1} le plus petit entier pour lequel $e_{j_{i+1}}^*$ n'appartient pas à la somme de $\mathfrak{B}_{j_i}$ et de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$.

LEMME. — *Soit f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. Soit Q l'annulateur dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ de l'orbite coadjointe de f. Soient $j_1, \ldots, j_s$ la suite relative à Q et à la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Pour $i = 1, \ldots, s$, on désigne par $\mathfrak{A}_i$ la sous-algèbre de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ engendrée par $\mathfrak{g}$ et $e_{j_1}^*, \ldots, e_{j_i}^*$.*

i) *Pour $i = 1, \ldots, s$ et pour tout élément q du complémentaire de Q dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, la somme de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ et de $\mathfrak{B}_{j_i - 1}$ ne contient pas $qe_{j_i}^*$.*

ii) *Soit j dans $\{1,\ldots,n\}$. Soit i le plus grand entier pour lequel j_i n'est pas supérieur à j. Alors $\mathfrak{B}_j$ est contenu dans la somme de $\mathfrak{A}_i$ et de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$.*

i) On suppose qu'il existe un point q du complémentaire de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ pour lequel la somme de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ et de $\mathfrak{B}_{j_i-1}$ contient $qe_{j_i}^*$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. D'après le théorème de Lie, le sous-espace de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, engendré par les $g.q$ où g est dans G, contient un élément q' du complémentaire de Q dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, G-invariant modulo Q. Pour tout g dans G, $g.e_{j_i}^*$ est la somme de $e_{j_i}^*$ et d'un élément de $\mathfrak{B}_{j_i-1}$; donc $\mathfrak{B}_{j_i-1}$ contient $q'e_{j_i}^*$. Puisque q' est G-invariant modulo Q, il est la somme d'un élément de Q et d'un scalaire non nul; or $\mathfrak{B}_{j_i-1}$ contient $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$; donc la somme de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ et de $\mathfrak{B}_{j_i-1}$ contient $e_{j_i}^*$. Ceci est absurde par définition.

ii) Pour tout i, on désigne par $\mathfrak{A}_i^{\#}$ la somme de $\mathfrak{A}_i$ et de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$. On montre en raisonnant par récurrence sur j que $\mathfrak{B}_j$ est contenu $\mathfrak{A}_i^{\#}$ si i est le plus grand entier pour lequel j_i n'est pas supérieur à j. Si j_1 est supérieur à 1, $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ contient e_1^*. Dans ce cas, $\mathfrak{B}_1$ est contenu dans la somme de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ et de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Si j_1 est égal à 1, $\mathfrak{B}_1$ est égal à $\mathfrak{A}_1$. On suppose l'assertion vraie pour $j-1$ et fausse pour j. Il sagit d'aboutir à une contradiction. Tout élément a de $\mathfrak{B}_j$ a une décomposition unique

$$a = a_0 + a_1 e_j^* + \cdots + a_l (e_j^*)^l,$$

où $a_0,\ldots,a_l$ sont dans $\mathfrak{B}_{j-1}$. On note $\nu_j(a)$ le plus grand entier pour lequel a_l est non nul. Soit a un point de $\mathfrak{B}_j$ qui n'est pas dans $\mathfrak{A}_i^{\#}$ et pour lequel $\nu_j(a)$ est minimal. Alors a est la somme de deux éléments $a'e_i^*$ et a'', où a' et a'' sont des éléments de $\mathfrak{B}_i$ pour lesquels $\nu_j(a')$ et $\nu_j(a'')$ sont inférieurs à $\nu_j(a)$. D'après le choix de a, a' et a'' appartiennent à $\mathfrak{A}_i^{\#}$; donc a' est la somme d'un élément a_1' de $\mathfrak{A}_i$ et d'un élément a_1'' de l'intersection de $\mathfrak{B}_j$ et de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$. De même, a'' appartient à l'intersection de $\mathfrak{B}_j$ et de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$. En particulier, $[a_1'', e_j^*]$ et $[a'', e_j^*]$ sont des éléments de $\mathfrak{B}_j$ pour lesquels $\nu_j(a)$ est supérieur à $\nu_j([a_1'', e_j^*])$ et à $\nu_j([a'', e_j^*])$; donc $\mathfrak{A}_i^{\#}$ contient $[a_1'', e_j^*]$, $[a'', e_j^*]$, $a_1''e_j^*$ et $a''e_j^*$. D'après l'hypothèse de récurrence, e_j^* appartient à $\mathfrak{A}_i^{\#}$; donc $a_1'e_i^*$ et a appartiennent à $\mathfrak{A}_i^{\#}$. Ceci étant absurde, $\mathfrak{B}_j$ est contenu dans $\mathfrak{A}_i^{\#}$.

5.5. Comme en 5.3, on suppose $\mathfrak{g}$ nilpotente. On utilise une base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de $\mathfrak{g}$ comme en 5.4. L'espace $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \otimes_k \mathrm{S}(\mathfrak{g})$. La filtration naturelle sur $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ induit une filtration sur $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$. Pour tout a dans $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$, on note $\mu(a)$ la filtration de a pour cette filtration.

LEMME. — *Soit f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. Soit Q l'annulateur dans* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ *de l'orbite coadjointe de f. Soit $j_1, \ldots, j_s$ la suite relative à Q et à la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ au sens de 5.4. On désigne par $\mathfrak{A}$ la sous-algèbre de* $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ *engendrée par $\mathfrak{g}$ et $e_{j_1}^*, \ldots, e_{j_s}^*$.*

i) *La codimension de l'orbite coadjointe de f dans $\mathfrak{g}^*$ est égale à s.*

ii) *Il existe des éléments $p_1, \ldots, p_s$ de Q pour lesquels le déterminant de la matrice*

$$\begin{bmatrix} [p_1, e_{j_1}^*] & \cdots & [p_1, e_{j_s}^*] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [p_s, e_{j_1}^*] & \cdots & [p_s, e_{j_s}^*] \end{bmatrix},$$

n'appartient pas à Q.

iii) *Soit L un idéal à gauche de $\mathfrak{A}$ qui contient strictement $\mathfrak{A}Q$. Alors l'intersection de L et de* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ *contient strictement Q.*

iv) *L'intersection de $\mathfrak{A}$ et de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ est égale à $\mathfrak{A}Q$.*

L'idéal $\overline{k} \underset{k}{\otimes} Q$ est l'annulateur dans $S(\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g})$ de l'orbite coadjointe de f. L'idéal à gauche $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ est l'intersection de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ et de $\Phi_{\overline{k}\otimes_k \mathfrak{g}}(\overline{k} \underset{k}{\otimes} Q)$. En outre la suite relative à $\overline{k} \underset{k}{\otimes} Q$ et à la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ coïncide avec la suite relative à Q et à la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$; donc on peut supposer k égal à $\overline{k}$ pour montrer les assertions (i) et (ii).

i) Soit $\hat{\mathcal{O}}_f$ le complété formel de l'anneau local en f des fonctions régulières sur $\mathfrak{n}^*$. On désigne par $\mathcal{D}_f$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients séries formelles

$$\hat{\mathcal{O}}_f \underset{\mathrm{S}(\mathfrak{g})}{\otimes} \mathrm{A}(\mathfrak{g}).$$

D'après [1] (Lemme 4.1), il existe un système de coordonnées $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sur $\hat{\mathcal{O}}_f$ qui satisfait les conditions suivantes

1) l'idéal de $\hat{\mathcal{O}}_f$ engendré par $x_{d+1}, \ldots, x_n$ coïncide avec l'idéal engendré par Q,

2) la forme volume sur $G.f$

$$\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \mathrm{d}x_d,$$

est G-invariante.

Soient $\partial_1, \ldots, \partial_n$ les dérivations de $\hat{\mathcal{O}}_f$ définies par les relations

$$\partial_i x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{I}$ l'idéal à gauche de $\mathcal{D}_f$ engendré par les opérateurs

$$\partial_1, \ldots, \partial_d\,,\; x_{d+1}, \ldots, x_n.$$

Alors d'après [1] (Lemme 4.1), l'idéal $\mathcal{I}$ est égal à l'idéal à gauche de $\mathcal{D}_f$ engendré par $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$. Pour $i = 1, \ldots, n$, on désigne encore par e_i^* la dérivation de $\hat{\mathcal{O}}_f$ qui prolonge la dérivation de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ définie par e_i^*. D'après l'assertion (ii) du lemme 5.4, $\mathcal{D}_f$ est la somme de $\mathcal{I}$ et de $\hat{\mathcal{O}}_f\mathfrak{A}_s$. Soient π le morphisme canonique de $\mathcal{D}_f$ sur $\mathcal{D}_f/\mathcal{I}$ et $\hat{\mathcal{O}}'_f$ le sous-anneau des éléments de $\hat{\mathcal{O}}_f$ qui sont annulés par les dérivations $\partial_{d+1}, \ldots, \partial_n$. Alors la restriction de π à $\hat{\mathcal{O}}'_f[e_{j_1}^*, \ldots, e_{j_s}^*]$ est surjective. Pour $i = 1, \ldots, n$, on a

$$e_i^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\partial_j,$$

où $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n}$ sont dans $\hat{\mathcal{O}}_f$. Pour tout (i,j), on désigne par $\alpha'_{i,j}$ et $\alpha'_{i,j,d+1}, \ldots, \alpha'_{i,j,n}$ les éléments de $\hat{\mathcal{O}}'_f$ qui satisfont la relation

$$\alpha_{i,j} - \alpha'_{i,j} - \sum_{l=d+1}^{n} \alpha'_{i,j,l}x_l \in \sum_{d+1 \leq l,l' \leq n} \hat{\mathcal{O}}_f x_l x_{l'}.$$

On note δ_i l'opérateur différentiel d'ordre 1 sur $\hat{\mathcal{O}}_f$

$$\sum_{j=d+1}^{n} \alpha'_{i,j}\partial_j - \sum_{j=d+1}^{n} \alpha'_{i,j,j}.$$

Pour tout i, $\mathcal{I}$ contient $e_i^* - \delta_i$; or la restriction de π au sous-anneau de $\mathcal{D}_f$, engendré par $\hat{\mathcal{O}}'_f$ et $\delta_{j_1}, \ldots, \delta_{j_s}$, est injective; donc la restriction de π à $\hat{\mathcal{O}}'_f[e_{j_1}^*, \ldots, e_{j_s}^*]$ est un isomorphisme de $\hat{\mathcal{O}}'_f[e_{j_1}^*, \ldots, e_{j_s}^*]$ sur $\mathcal{D}_f/\mathcal{I}$. Le gradué associé à la fitration sur $\hat{\mathcal{O}}'_f[e_{j_1}^*, \ldots, e_{j_s}^*]$ induite par la filtration usuelle sur $\mathcal{D}_f$ est l'anneau des polynômes à s indéterminées sur $\hat{\mathcal{O}}'_f$. De l'isomorphisme ci-dessus, on tire un isomorphisme des gradués associés aux filtrations canoniques

$$\mathrm{Gr}\,\hat{\mathcal{O}}'_f[e_{j_1}^*, \ldots, e_{j_s}^*] \to \mathrm{Gr}\,\mathcal{D}_f/\mathcal{I}\,;$$

or la dimension de Krull de l'anneau local $\mathrm{Gr}\,\mathcal{D}_f/\mathcal{I}$ est égale à n ; donc n est égal à $s + d$.

ii) On rappelle que selon les notations de 5.4, $\mathfrak{A}_0^{\#}$ désigne la somme de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ et de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$. Soit $\mathcal{Q}$ l'idéal de $\hat{\mathcal{O}}_f$, engendré par Q. On démontre en raisonnant par récurrence sur i que $\mathcal{Q}$ ne contient pas le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} [e_{j_1}^*, x_{d+1}] & \cdots & [e_{j_1}^*, x_{d+i}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [e_{j_i}^*, x_{d+1}] & \cdots & [e_{j_i}^*, x_{d+i}] \end{bmatrix}.$$

Si $[e^*_{j_1}, x_{d+1}]$ appartient à $\mathcal{Q}$ alors $\alpha'_{j_1,d+1}$ est nul; donc δ_{j_1} et $e^*_{j_1}$ appartiennent à la somme de $\mathcal{I}$ et de $\hat{\mathcal{O}}_f$. Puisque $\hat{\mathcal{O}}_f$ est un $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$-module plat, cela revient à dire que $\mathfrak{A}^\#_0$ contient le produit d'un élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, non nul en f et de $e^*_{j_1}$. Ceci est absurde d'après l'assertion (i) du lemme 5.4; donc $\mathcal{Q}$ ne contient pas $[e^*_{j_1}, x_{d+1}]$. On suppose l'assertion vraie pour $i-1$ et fausse pour i. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Il existe des éléments non tous nuls, $q_1, \ldots, q_i$, de $\hat{\mathcal{O}}'_f$ qui satisfont les relations

$$q_1\alpha'_{j_1,d+1} + \cdots + q_i\alpha'_{j_i,d+1} = \cdots = q_1\alpha'_{j_1,d+i} + \cdots + q_i\alpha'_{j_i,d+i} = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, q_i n'est pas nul. La somme de $\mathcal{I}$ et de $\hat{\mathcal{O}}_f$ contient l'élément

$$q_1 e^*_{j_1} + \cdots + q_i e^*_{j_i}.$$

Soit M l'image réciproque de $\mathfrak{A}^\#_0$ par le morphisme de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^i$ dans $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$

$$(r_1, \ldots, r_i) \mapsto r_1 e^*_{j_1} + \cdots + r_i e^*_{j_i}.$$

Puisque $\hat{\mathcal{O}}_f$ est un $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$-module plat, le sous-$\hat{\mathcal{O}}_f$-module de $\hat{\mathcal{O}}^i_f$, engendré par M, est le noyau du morphisme

$$(r_1, \ldots, r_i) \mapsto \pi(r_1 e^*_{j_1} + \cdots + r_i e^*_{j_i}).$$

D'après ce qui précède, ce noyau contient un élément $(q_1, \ldots, q_i)$ pour lequel q_i n'est pas dans $\mathcal{Q}$; donc M est non nul et contient un élément $(r_1, \ldots, r_i)$ pour lequel r_i n'est pas dans Q. Considérant un point de $G.f$ en lequel r_i est non nul au lieu de f, on voit que $e^*_{j_i}$ appartient à la somme de $\mathcal{I}$ et de la sous-algèbre de $\mathcal{D}_f$ engendrée par $\hat{\mathcal{O}}_f$ et les éléments $e^*_{j_1}, \ldots, e^*_{j_i}$. D'après la platitude de $\hat{\mathcal{O}}_f$ sur $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, cela revient à dire que $\mathfrak{A}^\#_{i-1}$ contient le produit d'un élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, non nul en f et de $e^*_{j_i}$. Ceci est aburde d'après le lemme 5.4.

Soit $\{p_1, \ldots, p_e\}$ une famille génératrice de l'idéal Q. D'après la condition (1) ci-dessus, $\mathcal{Q}$ contient $x_{d+1}, \ldots, x_n$. On a donc des relations

$$x_i = \sum_{j=1}^{e} \psi_{i,j} p_j,$$

où $\psi_{i,1}, \ldots, \psi_{i,e}$ sont dans $\hat{\mathcal{O}}_f$. Puisque $\mathcal{Q}$ ne contient pas le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} [e^*_{j_1}, x_{d+1}] & \cdots & [e^*_{j_1}, x_n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [e^*_{j_s}, x_{d+1}] & \cdots & [e^*_{j_s}, x_n] \end{bmatrix},$$

il existe une suite $k_1,\dots,k_s$ de $\{1,\dots,e\}$ pour laquelle Q ne contient pas le déterminant de la matrice

$$\begin{bmatrix} [e_{j_1}^*, p_{k_1}] & \cdots & [e_{j_1}^*, p_{k_s}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [e_{j_s}^*, p_{k_1}] & \cdots & [e_{j_s}^*, p_{k_s}] \end{bmatrix}.$$

iii) Soit a un élément de L qui n'est pas dans $\mathfrak{A}Q$ et pour lequel $\mu(a)$ est minimal. On suppose $\mu(a)$ positif. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Soit $E_{s,\mu(a)}$ l'ensemble des applications $l \mapsto i_l$ de $\{1,\dots,\mu(a)\}$ dans $\{1,\dots,s\}$. Pour toute famille $\underline{a} = \{a_i\ ; i \in E_{s,\mu(a)}\}$ dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, on note $\tilde{\underline{a}}$ la différence

$$a - \sum_{i \in E_{s,\mu(a)}} e_{j_{i_1}}^* \cdots e_{j_{i_{\mu(a)}}}^* a_i.$$

Il existe une unique famille $\underline{a}$ pour laquelle $\mu(\tilde{\underline{a}})$ est inférieur à $\mu(a)$. Dans ce qui suit, on utilise cette famille et on note a' la différence de $(a - \tilde{\underline{a}})$. D'après la minimalité de $\mu(a)$, a' n'appartient pas à $\mathfrak{A}Q$. Soient $p_1,\dots,p_s$ des éléments de Q qui satisfont la condition de l'assertion (ii). D'après le choix de $\underline{a}$, pour tout j dans $E_{s,\mu(a)}$, on a

$$[p_{j_{\mu(a)}}, [\cdots [p_{j_1}, a] \cdots]] = \sum_{i \in E_{s,\mu(a)}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mu(a)}} [p_{j_{\sigma(1)}}, e_{j_{i_1}}^*] \cdots [p_{j_{\sigma[\mu(a)]}}, e_{j_{i_{\mu(a)}}}^*] a_i,$$

où $\mathfrak{S}_{\mu(a)}$ désigne le groupe des permutations à $\mu(a)$ éléments. Soit $b_{i,j}$ le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice des cofacteurs de A. Puisque L contient $a, p_1, \dots, p_s$, pour tout (l,j) dans $E_{s,\mu(a)}^2$, l'intersection de L et de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ contient

$$\sum_{i \in E_{s,\mu(a)}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mu(a)}} b_{j_1,l_1} [p_{j_{\sigma(1)}}, e_{j_{i_1}}^*] \cdots b_{j_{\mu(a)},l_{\mu(a)}} [p_{j_{\sigma[\mu(a)]}}, e_{j_{i_{\mu(a)}}}^*] a_i.$$

Conformément à l'usage, on note $\delta_{i,l}$ le symbole de Kronecker. En sommant sur j, il vient

$$(\det A)^{\mu(a)} \sum_{i \in E_{s,\mu(a)}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mu(a)}} \delta_{l_1, i_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots \delta_{l_{\mu(a)}, i_{\sigma^{-1}[\mu(a)]}} a_i \in L \cap \mathrm{S}(\mathfrak{g}),$$

pour tout l dans $E_{s,\mu(a)}$. Les termes non nuls de la somme sont ceux pour lesquels $i \circ \sigma^{-1}$ est égal à l. En outre, le nombre de ces termes est égal au nombre de permutations qui stabilisent chacune des fibres de l'application l. Par suite, pour tout l dans $E_{s,\mu(a)}$, l'intersection de L et de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ contient $(\det A)^{\mu(a)} a_l$; or Q est un idéal premier qui ne contient pas $\det A$ et a' n'appartient pas à $\mathfrak{A}Q$; donc pour au moins un l, $(\det A)^{\mu(a)} a_l$ n'appartient pas à Q. La contradiction est ainsi trouvée car l'intersection de L et de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ était supposée égale à Q.

iv) Puisque Q est un idéal $\mathfrak{g}$-invariant maximal de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, Q est l'intersection de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ et de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$; or l'intersection de $\mathfrak{A}$ et de $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ est un idéal à gauche qui contient Q ; donc d'après l'assertion (iii), cette intersection est égale à $\mathfrak{A}Q$.

5.6. Puisque $\mathfrak{n}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, les poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ séparent les points de $\mathfrak{t}$. Il existe donc une base $\{t_1^*,\dots,t_d^*\}$ de $\mathfrak{n}^\perp$ contenue dans $E_{\mathfrak{g}}$. On désigne par $\{t_1,\dots,t_d\}$ la base de $\mathfrak{t}$ duale de la base $\{t_1^*,\dots,t_d^*\}$.

PROPOSITION. — *Soit f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ dont le stabilisateur contient $\mathfrak{t}$. Soit Q l'annulateur dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ de l'orbite coadjointe de f. Alors l'idéal à gauche de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$, engendré par Q et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})$, est maximal.*

On note $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ l'idéal à gauche de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ engendré par Q et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})$. Soit L un idéal à gauche de $\mathrm{A}/\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ qui contient strictement $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$. Il s'agit de montrer que L est égal à $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$. Soit L_0 l'intersection de L et de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{n}}$. D'après le lemme 5.2, il existe des éléments $q_1,\dots,q_d$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$ pour lesquels Q contient $t_1+q_1,\dots,t_d+q_d$; donc L_0 n'est pas contenu dans $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$. Soit A la sous-algèbre de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ engendrée par $\mathfrak{n}$ et l'orthogonal de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors A est contenu dans $\mathrm{C}_{\mathfrak{g},\mathfrak{n}}$ et la restriction de $\mathrm{c}_{\mathfrak{g},\mathfrak{n}}$ à A est un isomorphisme de A sur $\mathrm{A}(\mathfrak{n})$. Soit Q_0 l'intersection de Q et de $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$. Puisque $\mathfrak{t}$ stabilise f, Q_0 est l'annulateur dans $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$ de l'orbite coadjointe de la restriction de f à $\mathfrak{n}$; donc d'après l'assertion (iii) du lemme 5.5 et d'après l'assertion (ii) du lemme 5.4, il existe une sous-algèbre $\mathfrak{A}$ de A qui satisfait les deux conditions suivantes : l'intersection de $\mathrm{A}(\mathfrak{n})$ avec $\mathrm{c}_{\mathfrak{g},\mathfrak{n}}(\mathfrak{A})$ est égale à $\mathrm{c}_{\mathfrak{g},\mathfrak{n}}(\mathfrak{A})Q_0$ et $\mathrm{A}(\mathfrak{n})$ est la somme $\mathrm{c}_{\mathfrak{g},\mathfrak{n}}(\mathfrak{A})$ et de $\Phi_{\mathfrak{n}}(Q_0)$. Par suite, L_0 contient un élément de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})\mathfrak{A}$ qui n'est pas dans $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$. La démonstration de l'assertion (iii) du lemme 5.5 prouve alors que L_0 contient un élément de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})\mathrm{S}(\mathfrak{n})$ qui n'est pas dans $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})Q_0$. Soit l le plus petit entier pour lequel il existe des éléments $\psi_1,\dots,\psi_l$ de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ et des éléments $a_1,\dots,a_l$ du complémentaire de Q_0 dans $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$ pour lesquels L_0 contient la somme

$$\psi_1 a_1 + \cdots + \psi_l a_l.$$

On suppose l supérieur à 1. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Soient $\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_{m+1}$ une suite décroissante d'idéaux de $\mathfrak{n}$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}_{m+1} = 0, \quad \dim(\mathfrak{n}_i) - \dim(\mathfrak{n}_{i+1}) = 1,$$

pour $i = 1, \ldots, m$. On choisit un point e_i du complémentaire de $\mathfrak{n}_{i+1}$ dans $\mathfrak{n}_i$. Si e_i n'est pas dans $\mathfrak{z}$ et si p est un point de $\mathrm{S}(\mathfrak{n}_i)$ qui n'est pas dans $\mathrm{S}(\mathfrak{n}_{i+1})$, on peut trouver un indice j pour lequel $[W_{\mathfrak{g}}(e_j), p]$ est un élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{n}_i)$ dont le degré en e_i est inférieur à celui de p. Si e_i est dans $\mathfrak{z}$, alors $\mathrm{S}(\mathfrak{n}_i)$ est contenu dans la somme de Q_0 et de $\mathrm{S}(\mathfrak{n}_i)$. Si p est dans $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$ et si Q_0 contient $[W_{\mathfrak{g}}(e_i), p]$ pour tout i, alors p appartient à $Q_0 + k$; donc pour p dans $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$, on peut trouver un entier e, au plus égal au produit de m et du degré total de p, des entiers $j_1, \ldots, j_e$ de $\{1, \ldots, m\}$ pour lesquels $Q_0 + k$ contient

$$[W_{\mathfrak{g}}(e_{j_e}), [\cdots [W_{\mathfrak{g}}(e_{j_1}), p] \cdots]].$$

Pour tout i et pour tout j, $W_{\mathfrak{g}}(e_i)$ et t_j^* commutent; donc L contient la somme

$$\sum_{i=1}^{l} \psi_i [W_{\mathfrak{g}}(e_{j_e}), [\cdots [W_{\mathfrak{g}}(e_{j_1}), a_i] \cdots]].$$

Pour un bon choix des entiers $j_1, \ldots, j_e$, il existe un scalaire non nul α_1 pour lequel Q contient

$$[W_{\mathfrak{g}}(e_{j_e}), [\cdots [W_{\mathfrak{g}}(e_{j_1}), a_1] \cdots]] - \alpha_1 ;$$

donc L contient un élément b ayant une décomposition

$$b = \phi + \phi_1 b_1 + \cdots + \phi_{l'} c_{l'},$$

où l' est inférieur à l, où $\phi, \phi_1, \ldots, \phi_{l'}$ sont des éléments non nuls de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ et où $b_1, \ldots, b_{l'}$ sont des éléments du complémentaire de $Q_0 + k$ dans $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$. Pour au moins un i, les éléments $[W_{\mathfrak{g}}(e_i), b_1], \ldots, [W_{\mathfrak{g}}(e_i), b_{l'}]$ ne sont pas tous dans Q_0 et L_0 contient

$$\phi_1 [W_{\mathfrak{g}}(e_i), b_1] + \cdots + \phi_{l'} [W_{\mathfrak{g}}(e_i), c_{l'}].$$

Ceci est absurde d'après la minimalité de l ; donc l est égal à 1 et L_0 contient un élément non nul ψ de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$. Alors L_0 contient $[t_1 + q_1, \psi], \ldots, [t_d + q_d, \psi]$ qui sont respectivement égaux à $[t_1, \psi], \ldots, [t_d, \psi]$; donc l'intersection de L et de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ contient un élément dont le terme constant est non nul. Tout élément de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ de terme constant non nul est inversible. Par suite, L est égal à $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$.

Remarque. — Soit $\hat{\mathrm{A}}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{g})$ la sous-algèbre de $\hat{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})$ engendrée par $\hat{\mathrm{S}}(\mathfrak{n}^{\perp})$ et $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$. La démonstration ci-dessus prouve que l'idéal à gauche de $\hat{\mathrm{A}}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{g})$ engendré par Q et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})$ est un idéal à gauche maximal. En outre, $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ coïncide avec l'idéal à gauche de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ engendré par Q et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. De même, cette démonstration prouve que l'idéal à gauche de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ engendré par Q et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ est maximal. Ce dernier point résulte aussi de [1] (Corollaire 5.3).

5.7. On suppose l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ algébrique et $\mathfrak{z}$ de dimension 1. On utilise un quadruplet $(x, y, z, \mathfrak{a})$ réduisant dans $\mathfrak{n}$.

COROLLAIRE. — *Soit f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ non identiquement nulle sur $\mathfrak{z}$ et dont le stabilisateur contient $\mathfrak{t}$. Soit Q l'annulateur dans* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ *de l'orbite coadjointe de f. Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{t}$. On note Q' l'annulateur dans* $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ *de l'orbite coadjointe de la restriction de f à $\mathfrak{h}$. Alors $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ est égal à la somme de* $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ *et du plus grand idéal à gauche $\mathfrak{g}$-invariant contenu dans l'idéal à gauche de* $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ *engendré par Q' et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$.*

Soit L l'idéal à gauche engendré par Q' et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$. On note L' le plus grand idéal à gauche $\mathfrak{g}$-invariant de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ contenu dans L. On suppose que $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ est distinct de la somme de L' et de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. D'après la proposition 5.6, $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ est un idéal à gauche maximal; donc cela revient à dire que L' n'est pas contenu dans $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$. On utilise les notations de 5.6 et on pose

$$L_1 = L \cap \hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})\mathfrak{A}, \quad L_1' = L' \cap \hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})\mathfrak{A}, \quad L_2 = \Phi_{\mathfrak{g}}(Q) \cap L_1.$$

Puisque l'intersection de L et de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{n}}$ est contenue dans $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})\mathfrak{A} + C_{\mathfrak{g},\mathfrak{n}}Q_0 + C_{\mathfrak{g},\mathfrak{n}}W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$, L_1' n'est pas contenu dans L_2. Alors d'après 5.6, L_1' contient un élément a de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ qui n'est pas dans $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$. Puisque L' est $\mathfrak{n}$-invariant, on en déduit, comme en 5.6 que L' contient un élément non nul de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$. Par suite, Q étant contenu dans L', L' contient un élément inversible de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$. Ceci est absurde car L' est un idéal à gauche strict de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$.

6. Un cas particulier.

Dans cette section on suppose $\mathfrak{g}$ algébrique, $\mathfrak{z}$ de dimension 1 et égal au centre de $\mathfrak{g}$. On choisit une sous-algèbre commutative $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$ qui satisfait la condition de 5.6. Il existe alors un quadruplet réduisant $(x, y, z, \mathfrak{a})$ dans $\mathfrak{n}$ pour lequel x et y sont vecteurs propres de la représentation adjointe de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{n}$. On utilise dans $\mathfrak{n}$ une base $\{e_1, \dots, e_m\}$ qui satisfait la condition de 5.4 et les égalités

$$e_1 = x, \quad e_{m-1} = y, \quad e_m = z.$$

Il existe une base $\{t_1,\dots,t_d\}$ de $\mathfrak{t}$ qui satisfait les conditions de 5.6 et les relations

$$[t_i,x] = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 < i \\ \varepsilon x & \text{si } 1 = i \end{cases}, \quad [t_i,y] = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 < i \\ -\varepsilon y & \text{si } 1 = i \end{cases},$$

où ε est soit 0 soit 1. On note $\{t_1^*,\dots,t_d^*,e_1^*,\dots,e_m^*\}$ la base duale de la base $\{t_1,\dots,t_d,e_1,\dots,e_m\}$ de $\mathfrak{g}$. On désigne aussi par x^* et y^* les formes linéaires e_1^* et e_{m-1}^*. On utilise les algèbres $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ et $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ définies en 4 et en 3. D'après les relations ci-dessus, $E_{\mathfrak{g}}$ contient t_1^*.

6.1. On désigne par ϕ_0 et ψ_0 les séries formelles à une indéterminée T définie par les relations

$$\phi_0 = \frac{1}{T}\Big(\frac{T}{\exp(T)-1} - 1\Big), \quad \psi_0 = \frac{1}{T}\Big(\phi_0 + \frac{1}{2}\Big).$$

En particulier, on a le développement

$$\psi_0 = b_2 - Tb_3 + \cdots + (-1)^r T^r b_{r+2} + \cdots,$$

avec les notations de 2.2. Il existe un unique morphisme continu de $\mathbb{Q}[[T]]$ dans $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ dont l'image de T est εt_1^*. On désigne par ϕ_0' et ψ_0' les images de ϕ_0 et de ψ_0 par ce morphisme. On note S^* la sous-algèbre de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ engendrée par $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ et $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$.

LEMME. — *Il existe des éléments $\phi_2,\dots,\phi_{m-1}$ de S^* qui commutent à y et à z et qui satisfont l'égalité*

$$L_{\mathfrak{g}}(t_1) = t_1 + \frac{1}{2}W_{\mathfrak{g}}(t_1) - x^*\psi_0' W_{\mathfrak{g}}(x) + \phi_2 W_{\mathfrak{g}}(e_2) + \cdots + \phi_{n-2}W_{\mathfrak{g}}(e_{m-2}) \\ + \phi_{m-1}W_{\mathfrak{g}}(y).$$

En outre, on a

$$L_{\mathfrak{g}}(y) = y - \phi_0' W_{\mathfrak{g}}(y), \quad L_{\mathfrak{g}}(\varepsilon x) = \varepsilon x + (1+\phi_0')W_{\mathfrak{g}}(x) + \sum_{i=2}^{m-1} \psi_i W_{\mathfrak{g}}(e_i),$$

où $\psi_2,\dots,\psi_{m-1}$ sont des éléments de S^* qui commutent à y et à z.

Dans ce qui suit, pour harmonisation, on pose

$$f_1 = t_1,\dots,f_d = t_d, \quad f_{d+1} = e_1,\dots,f_{m+d} = e_m.$$

On note $\{f_1^*,\dots,f_{m+d}^*\}$ la base duale. Pour tout couple (i,j) d'entiers naturels non supérieurs à $m+d$, on pose

$$[f_i,f_j] = \sum_{l=1}^{m+d} \alpha_{i,j}^l f_l.$$

Pour tout χ dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ et pour tout ξ dans $\mathfrak{g}$, $\langle\chi,\xi\rangle$ désigne la valeur en ξ de la fonction polynomiale sur $\mathfrak{g}$ définie par χ. Pour tout entier r, on note $\chi_1^{(r)},\dots,\chi_{m+d}^{(r)}$ les éléments de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ qui sont définis par la relation

$$(\operatorname{ad}\xi)^r(t_1)=\sum_{i=1}^{m+d}\langle\chi_i^{(r)},\xi\rangle f_i,$$

pour tout ξ dans $\mathfrak{g}$. On trouve alors les relations de récurrence

$$\chi_l^{(r+1)}=\sum_{i,j}\chi_j^{(r)}f_i^*\alpha_{i,j}^l.$$

Pour $r=0$, $\chi_1^{(r)}$ est égal à 1 et $\chi_i^{(r)}$ est nul si i est positif. Puisque $\alpha_{i,j}^1$ est nul pour tout (i,j), $\chi_1^{(r)}$ est nul si r est positif. D'après le choix de la base, on a

$$\alpha_{i,j}^1=\begin{cases}\varepsilon \text{ si } (i,j)=(1,1+d)\\ -\varepsilon \text{ si } (i,j)=(1+d,1)\\ 0 \text{ si } (i,j)\notin\{(1,1+d),(1+d,1)\}\end{cases};$$

donc $\chi_{1+d}^{(r)}$ est égal à $(-1)^r x^*(\varepsilon t_1^*)^{r-1}$ si r est positif. De même, on a les relations

$$\alpha_{m+d-1,j}^l=\begin{cases}0 \text{ si } (j,l)\notin\{(1,m+d-1),(1+d,m+d)\}\\ \varepsilon \text{ si } (j,l)=(1,m+d-1)\\ -\varepsilon \text{ si } (j,l)=(1+d,m+d)\end{cases} \quad \text{et } \alpha_{m+d,j}^l=0,$$

pour tout (j,l). On montre alors par récurrence sur r que $\chi_l^{(r)}$ commute à y et à z pour tout l et pour tout r. D'après [3] (Lemme 7.1), on a

$$L_{\mathfrak{g}}(t_1)=t_1+\frac{1}{2}W_{\mathfrak{g}}(t_1)+\sum_{i=1}^m\phi_iW_{\mathfrak{g}}(e_i),$$

où les coefficients $\phi_1,\dots,\phi_m$ sont donnés par les égalités

$$\phi_1=\sum_{r>0}b_r\chi_{1+d}^{(r-1)}=-x^*\psi_0',\quad \phi_2=\sum_{r>0}b_r\chi_{2+d}^{(r-1)},\dots,\phi_m=\sum_{r>0}b_r\chi_{m+d}^{(r-1)}.$$

D'après 4.1 et d'après ce qui précède, $\phi_1,\dots,\phi_m$ sont des éléments de S^* qui commutent à y et à z. En outre, $W_{\mathfrak{g}}(e_m)$ est nul car e_m appartient au centre de $\mathfrak{g}$. De l'égalité de εx et de $[t_1,x]$, on tire

$$\begin{aligned}L_{\mathfrak{g}}(\varepsilon x)=[L_{\mathfrak{g}}(t_1),W_{\mathfrak{g}}(x)]&=\varepsilon x+(1+\phi_0')W_{\mathfrak{g}}(x)+\sum_{i=2}^{m-1}[\phi_iW_{\mathfrak{g}}(e_i),W_{\mathfrak{g}}(x)]\\ &=\varepsilon x+(1+\phi_0')W_{\mathfrak{g}}(x)+\sum_{i=2}^{m-1}\Big([\phi_i,W_{\mathfrak{g}}(x)]+\sum_{l=2}^{i-1}\phi_l\alpha_{l,1}^i\Big)W_{\mathfrak{g}}(e_i).\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, les coefficients de $W_{\mathfrak{g}}(e_2), \ldots, W_{\mathfrak{g}}(e_{m-1})$ commutent à y et à z car $[W_{\mathfrak{g}}(x), y]$ et $[W_{\mathfrak{g}}(x), z]$ sont respectivement égaux à z et à 0. On montre par récurrence sur r l'égalité

$$(\operatorname{ad}\xi)^r(y) = \langle(-\varepsilon t_1^*)^r, \xi\rangle y + x^*(-\varepsilon t_1^*)^{r-1} z.$$

Par suite, il vient

$$L_{\mathfrak{g}}(y) = y + \sum_{r \geq 1} b_r (-\varepsilon t_1^*)^{r-1} W_{\mathfrak{g}}(y),$$

d'où la deuxième égalité du lemme.

6.2. Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ égale à 1 en z et dont le stabilisateur contient $\mathfrak{t}$. La sous-algèbre $\mathfrak{g}_\ell$ de $\mathfrak{g}$, définie en 3, est égale à $\mathfrak{g}$. Soit Q l'annulateur dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ de l'orbite coadjointe de ℓ. On utilise l'élément p_ℓ de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ défini en 3, et l'idéal à gauche $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ engendré par Q et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$.

LEMME. — *Soit P l'image de Q par l'application de Dixmier pour $\mathfrak{g}$. Il existe des éléments $q_1, \ldots, q_d$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ qui satisfont les deux conditions suivantes, pour $i = 1, \ldots, d$:*

1) *$P \times Q$ contient $(t_i + \sigma_{\mathfrak{g}}(q_i), t_i + q_i)$,*

2) *$\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ contient $L_{\mathfrak{g}}[t_i + \sigma_{\mathfrak{g}}(q_i)]p_\ell^{-1}$.*

D'après le lemme 6.1 et d'après la remarque 5.6, la condition (2) du lemme est équivalente à la suivante : $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ contient $[t_i + L_{\mathfrak{g}} \circ \sigma_{\mathfrak{g}}(q_i)]p_\ell^{-1}$. D'après 5.2, on peut choisir le quadruplet $(x, y, z, \mathfrak{a})$ de manière que ℓ soit nul en y. On raisonne par récurrence sur la dimension n de $\mathfrak{g}$. On suppose le lemme vrai pour $n-1$. Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{a}$. On désigne par ℓ' la restriction de ℓ à $\mathfrak{h}$. Soit Q' l'annulateur dans $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ de l'orbite coadjointe de ℓ'. Alors Q' contient y et l'intersection Q_0 de Q avec $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$. Puisque $\mathfrak{t}$ stabilise ℓ et ℓ', les dimensions des orbites coadjointes de ℓ et de ℓ' sont égales aux dimensions des orbites de ℓ et de ℓ' sous l'action des groupes adjoints de $\mathfrak{n}$ et de $\mathfrak{a}$; or l'intersection de Q avec $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$ est l'idéal engendré par l'intersection de Q avec $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$; donc la différence des dimensions des orbites coadjointes de ℓ et de ℓ' est égale à 2. Par suite, la différence des dimensions de $\mathfrak{h}(\ell')$ et de $\mathfrak{g}(\ell)$ est égale à 1. Puisque y est un point de $\mathfrak{h}(\ell')$ qui n'est pas dans $\mathfrak{g}(\ell)$, $\mathfrak{h}(\ell')$ est la somme de $\mathfrak{g}(\ell)$ et de ky. Tout poids de $\mathfrak{h}$ se prolonge de manière unique en un poids de $\mathfrak{g}$. Il en résulte une bijection de $E_{\mathfrak{h}}$ sur $E_{\mathfrak{g}}$, d'où un isomorphisme de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{h}})$ sur $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$. On identifie ces deux algèbres au moyen de cet isomorphisme. On a alors

$$p_\ell = p_{\ell'}\left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\varepsilon t_1^*}{2}\right)}{\frac{\varepsilon t_1^*}{2}}\,\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{-\varepsilon t_1^*}{2}\right)}{\frac{-\varepsilon t_1^*}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = p_{\ell'}\exp\left(\frac{-\varepsilon t_1^*}{2}\right)\frac{\exp(\varepsilon t_1^*)-1}{\varepsilon t_1^*}.$$

Soit P' l'image de Q' par l'application de Dixmier pour $\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{b}$ le plus grand idéal de $\mathfrak{a}$ contenu dans le noyau de ℓ'. Puisque $\mathfrak{t}$ stabilise ℓ', $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{h}$. On désigne par $\mathfrak{k}$ le quotient de $\mathfrak{h}$ par $\mathfrak{b}$. Soit $\mathfrak{c}$ l'intersection du centre de $\mathfrak{k}$ et de l'image de $\mathfrak{t}$ par le morphisme canonique de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{k}$. Alors $\mathfrak{k}$ est le produit direct de $\mathfrak{c}$ et d'une algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{k}'$ dont le centre est de dimension 1 et égal au centre de son plus grand idéal nilpotent. On désigne par ℓ'' la forme linéaire sur $\mathfrak{k}$ que définit ℓ' par passage au quotient. Pour tout ξ dans $\mathfrak{c}$, $b_{\mathfrak{h},\mathfrak{b}}(Q')$ contient $\xi - \langle \ell', \xi\rangle$; donc d'après l'hypothèse de récurrence, appliquée à l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}'$ et à la restriction de ℓ'' à $\mathfrak{k}'$, il existe des éléments $q_1', \dots, q_d'$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{k})$ qui satisfont les conditions du lemme relativement à ℓ'. Soient $q_1, \dots, q_d$ des éléments de $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ dont les images par $b_{\mathfrak{h},\mathfrak{b}}$ sont respectivement $q_1', \dots, q_d'$. Pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$, $W_{\mathfrak{h}}(\xi)$ est la somme d'un élément de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{h})\mathfrak{b}$ et d'un élément dont l'image par $b_{\mathfrak{h},\mathfrak{b}}$ est $W_{\mathfrak{k}}[b_{\mathfrak{h},\mathfrak{b}}(\xi)]$. De même, $L_{\mathfrak{h}}(\xi)$ est la somme d'un élément de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{h})\mathfrak{b}$ et d'un élément dont l'image par $b_{\mathfrak{h},\mathfrak{b}}$ est $L_{\mathfrak{k}}[b_{\mathfrak{h},\mathfrak{b}}(\xi)]$; or l'idéal à gauche $\Phi_{\mathfrak{h}}(Q')$ est engendré par $b_{\mathfrak{h},\mathfrak{b}}^{-1}(\Phi_{\mathfrak{k}}[b_{\mathfrak{h},\mathfrak{b}}(Q')])$; donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\Phi_{\mathfrak{h}}(Q')$ contient les éléments

$$[t_1 + L_{\mathfrak{h}}\circ\sigma_{\mathfrak{h}}(q_1)]p_{\ell'}^{-1}, \dots, [t_d + L_{\mathfrak{h}}\circ\sigma_{\mathfrak{h}}(q_d)]p_{\ell'}^{-1}.$$

Puisque $W_{\mathfrak{g}}(y)$ est égal à $-\varepsilon t_1^* y + x^* z$ et que Q' contient y et $z-1$, l'idéal à gauche de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ engendré par Q' et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ contient x^* ; donc il est égal à $c_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}^{-1}[\Phi_{\mathfrak{h}}(Q')]$. Pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$, $L_{\mathfrak{g}}(\xi)$ est la somme d'un élément du noyau de $c_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ et d'un élément de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ dont l'image par $c_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ est $L_{\mathfrak{h}}(\xi)$. Par suite, pour $i = 1, \dots, d$, $[t_i + L_{\mathfrak{g}}\circ\sigma_{\mathfrak{g}}(q_i)]p_{\ell'}^{-1}$ appartient à l'idéal à gauche L de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ engendré par Q et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$. Soient $\overline{q_1}, \dots, \overline{q_d}$ des éléments de $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$ qui satisfont la condition du lemme 5.1 respectivement relativement à $q_1, \dots, q_d$. Alors d'après le lemme 5.2, $P \times Q$ contient les éléments

$$(t_1+\sigma_{\mathfrak{g}}(\overline{q_1}+\varepsilon xy), t_1+\overline{q_1}+\varepsilon xy),\;\; (t_2+\sigma_{\mathfrak{g}}(\overline{q_2}), t_2+\overline{q_2}), \dots, (t_d+\sigma_{\mathfrak{g}}(\overline{q_d}), t_d+\overline{q_d}).$$

On pose

$$\begin{aligned} a_1 &= (t_1 + L_{\mathfrak{g}}\circ\sigma_{\mathfrak{g}}(\overline{q_1}) + \varepsilon xy)p_{\ell'}^{-1},\\ a_2 &= [t_2 + L_{\mathfrak{g}}\circ\sigma_{\mathfrak{g}}(\overline{q_2})]p_{\ell'}^{-1}, \dots, a_d = [t_d + L_{\mathfrak{g}}\circ\sigma_{\mathfrak{g}}(\overline{q_d})]p_{\ell'}^{-1}.\end{aligned}$$

Pour $i = 1, \dots, d$ et pour tout s dans k, $\exp(s \operatorname{ad} x)(\overline{q_i}) - q_i$ appartient à l'idéal engendré par y et $z-1$; or d'après le lemme 6.1, L contient $L_{\mathfrak{g}}(y)$ et $L_{\mathfrak{g}}(z-1)$; donc x, y, z commutant à $p_{\ell'}^{-1}$, L contient $\exp(s \operatorname{ad} x)(a_i)$

pour tout s dans k. Par suite, a_i appartient au plus grand idéal $\mathfrak{g}$-invariant contenu dans L. D'après le corollaire 5.7, a_i appartient à $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$. Puisque $t_i p_{\ell'}^{-1}$ est la somme de $p_{\ell'}^{-1}t_i$ et d'un élément de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$, a_i est la somme de $p_{\ell'}^{-1}t_i$ et d'un élément b_i qui commute à t_1^*. On a alors les égalités

$$\begin{aligned}
&[t_1 + L_{\mathfrak{g}} \circ \sigma_{\mathfrak{g}}(\overline{q_1} + \varepsilon xy)]p_\ell^{-1} \\
&= (p_{\ell'}^{-1}t_1 + b_1)\exp\left(\frac{\varepsilon t_1^*}{2}\right)\frac{\varepsilon t_1^*}{\exp(\varepsilon t_1^*) - 1} + p_\ell^{-1}(L_{\mathfrak{g}} \circ \sigma_{\mathfrak{g}}(\varepsilon xy) - \varepsilon xy) \\
&= \exp\left(\frac{\varepsilon t_1^*}{2}\right)\frac{\varepsilon t_1^*}{\exp(\varepsilon t_1^*)-1}(p_{\ell'}^{-1}t_1 + b_1) + p_{\ell'}^{-1}\bigg(\left[t_1, \exp\left(\frac{\varepsilon t_1^*}{2}\right)\frac{\varepsilon t_1^*}{\exp(\varepsilon t_1^*)-1}\right] \\
&\quad + \exp\left(\frac{\varepsilon t_1^*}{2}\right)\frac{\varepsilon t_1^*}{\exp(\varepsilon t_1^*) - 1}\,[L_{\mathfrak{g}} \circ \sigma_{\mathfrak{g}}(\varepsilon xy) - \varepsilon xy]\bigg).
\end{aligned}$$

En outre, on a pour $i = 2, \ldots, d$

$$\begin{aligned}
[t_i + L_{\mathfrak{g}} \circ \sigma_{\mathfrak{g}}(\overline{q_i})]p_\ell^{-1} &= (p_{\ell'}^{-1}t_i + b_i)\exp\left(\frac{\varepsilon t_1^*}{2}\right)\frac{\varepsilon t_1^*}{\exp(\varepsilon t_1^*) - 1} \\
&= \exp\left(\frac{\varepsilon t_1^*}{2}\right)\frac{\varepsilon t_1^*}{\exp(\varepsilon t_1^*) - 1}a_i.
\end{aligned}$$

Des deux dernières égalités du lemme 6.1, on tire

$$\begin{aligned}
L_{\mathfrak{g}}\Big(\frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}yx\Big) - xy &= \frac{1}{2}L_{\mathfrak{g}}(x)y + \frac{1}{2}L_{\mathfrak{g}}(y)x - xy \text{ modulo } \hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n}) \\
&= \Big(\frac{1}{2} + \phi_0'\Big)z \text{ modulo } \hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})\,;
\end{aligned}$$

or on a

$$\left[t_1, \exp\left(\frac{\varepsilon t_1^*}{2}\right)\frac{\varepsilon t_1^*}{\exp(\varepsilon t_1^*) - 1}\right] + \exp\left(\frac{\varepsilon t_1^*}{2}\right)\frac{\varepsilon t_1^*}{\exp(\varepsilon t_1^*) - 1}\Big(\frac{1}{2} + \phi_0'\Big) = 0\,;$$

donc $\Phi_{\mathfrak{g}}(P)$ contient $[t_1 + L_{\mathfrak{g}} \circ \sigma_{\mathfrak{g}}(\overline{q_1} + \varepsilon xy)]p_\ell^{-1}$. Par suite, $(\overline{q_1} + \varepsilon xy)$, $\overline{q_2}, \ldots, \overline{q_d}$ satisfont les deux conditions du lemme.

7. Sur les idéaux premiers de l'algèbre enveloppante.

Soit Q un idéal premier $\mathfrak{g}$-invariant de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. On désigne par P son image par l'application de Dixmier pour $\mathfrak{g}$. On choisit un élément p de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ qui satisfait la condition de la proposition 3 relativement à Q.

7.1. On désigne par Γ le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur k. Alors Γ agit naturellement dans $\overline{k}\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g}$ et dans $(\overline{k}\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g})^*$. On utilise la variété $\mathrm{V}(Q)$ des zéros de Q dans $(\overline{k}\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g})^*$. Cette sous-variété de $(\overline{k}\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g})^*$ est stable par l'action de Γ.

LEMME. — *Il existe un idéal $\mathfrak{g}_Q$ de $\mathfrak{g}$ qui est défini par la condition suivante : pour tout point f d'un ouvert de Zariski de* $\mathrm{V}(Q)$, *partout dense dans* $\mathrm{V}(Q)$, $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q$ *est l'image réciproque par la représentation adjointe de la somme de* $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \tilde{\mathfrak{g}}(f)$ *et de* $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{u}$. *En outre, cet idéal satisfait les deux conditions suivantes :*

1) *Q est engendré par son intersection avec* $\mathrm{S}(\mathfrak{g}_Q)$,

2) *il existe une extension K de k et une forme linéaire f sur* $K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q$ *pour laquelle l'intersection de Q et de* $\mathrm{S}(\mathfrak{g}_Q)$ *est l'annulateur dans* $\mathrm{S}(\mathfrak{g}_Q)$ *de l'orbite* $\mathbf{G}.f$.

Si f est une forme linéaire sur $K \otimes_k \mathfrak{g}_Q$ qui satisfait la condition (2), *alors* $K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q$ *est l'image réciproque par la représentation adjointe de la somme de* $K \underset{k}{\otimes} \tilde{\mathfrak{g}}(f)$ *et de* $K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{u}$. *En outre, l'idéal primitif de* $U(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q)$ *associé à f par l'application de Dixmier, est un idéal maximal de* $U(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q)$.

Soit Q_1 un idéal de la décomposition primaire de $\overline{k}Q$ dans $S(\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g})$. Soit $\mathrm{V}(Q_1)$ la variété des zéros de Q_1 dans $(\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g})^*$. Alors $\mathrm{V}(Q)$ est la réunion des $\gamma.\mathrm{V}(Q_1)$ où γ est dans Γ. D'après [8] (Théorème 9.3.1), l'idéal $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \tilde{\mathfrak{g}}(f) + \overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{u}$ de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \tilde{\mathfrak{g}}$ ne dépend pas du point f d'un ouvert de Zariski non vide Ω de $\mathrm{V}(Q_1)$. Soit Λ l'ensemble des poids de la représentation standard de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \tilde{\mathfrak{g}}$ dans $\mathfrak{g}$ qui sont nuls sur $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \tilde{\mathfrak{g}}(f)$ pour tout f dans Ω. Puisque $\mathfrak{g}$ est comlètement résoluble, les poids de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}$ sont ceux de $\mathfrak{g}$; donc pour tout λ dans Λ, $\lambda \circ \mathrm{ad}$ est un poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. On désigne par $\mathfrak{g}_Q$ l'intersection des noyaux des poids $\lambda \circ \mathrm{ad}$ où λ est dans Λ. Pour tout f dans Ω, la somme de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \tilde{\mathfrak{g}}(f)$ et de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{u}$ est l'intersection des noyaux des formes linéaires λ où λ est dans Λ ; donc $\mathfrak{g}_Q$ coïncide avec l'ensemble des points x de $\mathfrak{g}$ pour lesquels $\mathrm{ad}\, x$ appartient à la somme de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \tilde{\mathfrak{g}}(f)$ et de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{u}$, pour tout f dans Ω. La réunion Ω' des $\gamma.\Omega$ où γ est dans Γ, est un ouvert de Zariski partout dense de $\mathrm{V}(Q)$ et pour tout f dans Ω', $\mathfrak{g}_Q$ est l'ensemble des points x de $\mathfrak{g}$ pour lesquels la somme de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \tilde{\mathfrak{g}}(f)$ et de $\overline{k} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{u}$ contient $\mathrm{ad}\, x$. Puisque l'intersection de deux ouverts de Zariski partout denses de $\mathrm{V}(Q)$ est non vide, $\mathfrak{g}_Q$ est l'unique idéal de $\mathfrak{g}$ qui satisfait la condition du lemme.

La condition (1) résulte de [9] (III, Proposition 3.5 et II, Proposition

3.7). D'après [7] (§ 6), il existe une extension K de k et une forme linéaire f sur $K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q$ qui satisfait la condition (2). Soit $\overline{K}$ une extension algébriquement close de K. Alors $\overline{K}$ est une extension de $\overline{k}$. Puisque Q est engendré par l'annulateur dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g}_Q)$ de l'orbite $\mathbf{G}.f$, f est un $\overline{K}$-point de Ω' ; donc $K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q$ est l'image réciproque par la représentation adjointe de la somme de $K \underset{k}{\otimes} \tilde{\mathfrak{g}}(f)$ et de $K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{u}$. Soient Q_K l'annulateur dans $S(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q)$ de l'orbite coadjointe de f et P_K l'image de Q_K par l'application de Dixmier pour $K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q$. On note $\overline{f}$ l'extension $\overline{K}$-linéaire de f à $\overline{K} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q$ et $P_{\overline{K}}$ l'idéal primitif de $U(\overline{K} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q)$ associé à $\overline{f}$ par l'application de Dixmier. Cet idéal coïncide avec l'idéal engendré par P_K. D'après [9] (III, Proposition 3.5), les semi-invariants du $\overline{K} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q$-module quotient $U(\overline{K} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q)/P_{\overline{K}}$ sont des invariants; donc $P_{\overline{K}}$ est un idéal maximal de $U(\overline{K} \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q)$. Si P est un idéal strict de $U(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q)$ qui contient P_K, $\overline{K}P$ contient $P_{\overline{K}}$; or P et P_K sont les intersections de $U(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q)$ avec $\overline{K}P$ et $P_{\overline{K}}$; donc P est égal à P_K. Par suite, P_K est un idéal maximal de $U(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}_Q)$.

7.2. On utilise les notations de 4.2.

LEMME. — *Soit K une extension de k. On suppose que $S(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g})$ contient un idéal premier $K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}$-invariant Q_K pour lequel Q est l'intersection de* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ *et de Q_K. Alors $\Lambda'_{\mathfrak{g}}(Q)$ est l'intersection de* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ *et de* $\Lambda'_{K\otimes_k \mathfrak{g}}(Q_K)$.

On utilise sur $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ la filtration induite par la filtration naturelle sur $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$. Il existe un isomorphisme canonique du gradué associé à cette filtration sur $S(\mathfrak{g}^*) \underset{k}{\otimes} S(\mathfrak{g})$. Soit σ la composition de cet isomorphisme et de l'application canonique de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ dans le gradué associé à cette filtration. On désigne par I_Q l'idéal de $S(\mathfrak{g}^*) \underset{k}{\otimes} S(\mathfrak{g})$ engendré par Q et l'image de $\sigma \circ W_{\mathfrak{g}}$. On note I_{Q_K} l'idéal de $S(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}^*) \underset{K}{\otimes} S(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g})$ engendré par Q_K et l'image de $\sigma \circ W_{\mathfrak{g}}$. On commence par montrer l'assertion dans le cas où K est égal à $\overline{k}$. Par hypothèse, l'idéal de $S(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g})$ engendré par Q est l'intersection des idéaux $\gamma.Q_K$ où γ est dans Γ. Cette intersection étant l'intersection d'un nombre fini d'entre eux, Q_K est un idéal de la décomposition primaire de KQ. Soient $q_1, \ldots, q_s$ des éléments du complémentaire de Q dans $\tilde{Q}$ pour lesquels $\tilde{Q}$ est le radical de l'idéal engendré par

Q et $q_1,\ldots,q_s$. On note I_{Q,q_i} l'idéal de $S(\mathfrak{g}^*)\underset{k}{\otimes}S(\mathfrak{g})[q_i^{-1}]$ engendré par I_Q et I_{Q_K,q_i} l'idéal de $S(K\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g}^*)\underset{K}{\otimes}S(K\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g})[q_i^{-1}]$ engendré par Q_K. L'algèbre $S(\mathfrak{g}^*)\underset{k}{\otimes}(S(\mathfrak{g})/Q)[q_i^{-1}]$ s'identifie de manière canonique à une sous-k-algèbre de la K-algèbre $S(K\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g}^*)\underset{K}{\otimes}(S(K\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g})/Q_K)[q_i^{-1}]$. Pour un bon choix des éléments $q_1,\ldots,q_s$, la condition suivante est satisfaite : pour $i=1,\ldots,s$, il existe une sous-algèbre A_i de $S(\mathfrak{g}^*)\underset{k}{\otimes}(S(\mathfrak{g})/Q)[q_i^{-1}]$ qui a les propriétés suivantes :

1) $S(K\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g}^*)\underset{K}{\otimes}(S(K\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g})/Q_K)[q_i^{-1}]$ est somme directe du sous-espace engendré par A_i et de l'image de I_{Q_K,q_i} par l'application canonique de $S(K\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g}^*)\underset{K}{\otimes}S(K\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g})[q_i^{-1}]$ sur $S(K\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g}^*)\underset{K}{\otimes}(S(K\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g})/Q_K)[q_i^{-1}]$,

2) $S(\mathfrak{g}^*)\underset{k}{\otimes}(S(\mathfrak{g})/Q)[q_i^{-1}]$ est somme directe de A_i et de l'image de I_{Q,q_i} par l'application canonique de $S(\mathfrak{g}^*)\underset{k}{\otimes}(S(\mathfrak{g})/Q)[q_i^{-1}]$ sur $S(\mathfrak{g}^*)\underset{k}{\otimes}(S(\mathfrak{g})/Q)[q_i^{-1}]$.

La condition (1) est démontrée en [1] (3.2). La condition (2) résulte de cette démonstration. D'après la condition (1), I_{Q_K} contenant Q_K, I_{Q_K,q_i} est un idéal premier. D'après la condition (2), I_Q contenant Q, I_{Q,q_i} est un idéal premier. Soit I un idéal de la décomposition primaire de l'idéal KI_{Q,q_i}. Alors l'intersection de I et de $S(K\underset{k}{\otimes}\mathfrak{g})$ est un idéal premier qui contient Q ; or Q_K est un idéal de la décomposition primaire de KQ ; donc I contient un conjugué de I_{Q_K,q_i} sous l'action de Γ. Par suite, I_{Q,q_i} est l'intersection de I_{Q_K,q_i} et de $S(\mathfrak{g}^*)\underset{k}{\otimes}S(\mathfrak{g})[q_i^{-1}]$. Pour $i=1,\ldots,s$, on note L_i l'ensemble des éléments a de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ pour lesquels $\mathrm{A}(\mathfrak{g})Q+\mathrm{A}(\mathfrak{g})W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ contient $q_i^l a$ dès que l est assez grand. Pour tout i, L_i est contenu dans l'intersection de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ et de $\Lambda'_{K\otimes_k\mathfrak{g}}(Q_K)$. On suppose qu'il existe un i pour lequel l'intersection de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ et de $\Lambda'_{K\otimes_k\mathfrak{g}}(Q_K)$ contient strictement L_i. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Soit a un élément de cette intersection qui n'est pas dans L_i et qui est de filtration minimale. Alors d'après ce qui précède, pour l assez grand I_Q contient $q_i^l\sigma(a)$; donc il existe un élément b de l'idéal à gauche engendré par Q et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ pour lequel $(q_i^l a-b)$ est de filtration inférieure à celle de a. Puisque a n'est pas dans $\Lambda'_{\mathfrak{g}}(Q)$, $(q_i^l a-b)$ n'est pas dans $\Lambda'_{\mathfrak{g}}(Q)$. Ceci est absurde d'après la minimalité de la filtration de a. Par suite, L_i est égal à l'intersection de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ et de $\Lambda'_{K\otimes_k\mathfrak{g}}(Q_K)$. En particulier, L_i ne dépend pas de i. Soit q un point du complémentaire de Q dans $\tilde{Q}$. Si $q^l a$ appartient à $\mathrm{A}(\mathfrak{g})Q+\mathrm{A}(\mathfrak{g})W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ pour l assez grand, alors a appartient à $\Lambda'_{K\otimes_k\mathfrak{g}}(Q_K)$ d'après [1] (4.5); donc L_i contient a. Puisqu'une puissance assez grande de q appartient à la somme de Q et de l'idéal engendré par $q_1,\dots,q_s$, pour tout a dans L_i, $\mathrm{A}(\mathfrak{g})Q + \mathrm{A}(\mathfrak{g})W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ contient $q^l a$ dès que l est assez grand. L'idéal à gauche L_i est donc égal à $\Lambda'_{\mathfrak{g}}(Q)$.

On suppose que K est une extension transcendante de k. D'après ce qui précède, il suffit de traiter le cas où K est une extension transcendante pure de K, de degré de transcendance fini. Un raisonnement par récurrence sur ce degré montre que la preuve de l'assertion se ramène au cas où K est le corps des fonctions rationnelles à une indéterminée X sur K. D'après ce qui précède, il s'agit de prouver que I_Q est l'intersection de I_{Q_K} et de $S(\mathfrak{g}^*) \underset{k}{\otimes} S(\mathfrak{g})$. Soit $\overline{Q}$ l'idéal de $k[X] \underset{k}{\otimes} S(\mathfrak{g})$ engendré par Q. On désigne par Q'_K l'intersection de Q_K et de $k[X] \underset{k}{\otimes} S(\mathfrak{g})$. Alors Q_K est égal à KQ'_K. Soit q un élément du complémentaire de $\overline{Q}$ dans Q'_K de plus bas degré en X. On note

$$q_m X^m + \cdots + q_0,$$

son développement suivant les puissances de X. Alors q_m n'appartient pas à Q. En utilisant la division euclidienne, on voit que pour tout a dans Q'_K, $q_m^l a$ appartient à l'idéal engendré par $\overline{Q}$ et q, dès que l est assez grand. Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} q_m & 0 & \cdots & 0 \\ q_{m-1} & q_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ q_0 & q_1 & \cdots & q_m \end{bmatrix}.$$

On désigne par $b_{i,j}$ le cofacteur du coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice A. On suppose que l'intersection de I_{Q_K} et de $S(\mathfrak{g}^*) \underset{k}{\otimes} S(\mathfrak{g})$ contient strictement I_Q. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Soit $I_{\overline{Q}}$ l'idéal de $k[X] \underset{k}{\otimes} [S(\mathfrak{g}^*) \underset{k}{\otimes} S(\mathfrak{g})]$ engendré par $\overline{Q}$ et $\sigma \circ W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. Puisque I_Q est premier, on peut alors trouver un élément a du complémentaire de I_Q dans $S(\mathfrak{g}^*) \underset{k}{\otimes} S(\mathfrak{g})$, des éléments $\alpha_0,\dots,\alpha_l$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, des éléments, non tous nuls, $\rho_0,\dots,\rho_{l+m}$ de k qui satisfont la relation

$$(\rho_0 + \cdots \rho_{l+m} X^{l+m})a - (\alpha_0 + \cdots + \alpha_l X^l)q \in I_{\overline{Q}}.$$

On peut supposer l au moins égal à m. La relation ci-dessus est équivalente au système

$$A \begin{bmatrix} \alpha_{i+m} \\ \vdots \\ \alpha_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_{i+m} a \\ \vdots \\ \rho_i a \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} I_Q \\ \vdots \\ I_Q \end{bmatrix} \quad \text{pour } i = 0, \dots, l-m$$

$$q_0\alpha_j + \cdots + q_j\alpha_0 - \rho_j a \in I_Q \quad \text{pour} \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Pour $j = 0, \ldots, l$, on note u_j et v_j le quotient et le reste de la division euclidienne de $l-j$ par $(m+1)$. Puisque le produit de A et de la transposée de la matrice de ses cofacteurs est égal au produit de q_m^{m+1} par la matrice identité, on en déduit les relations

$$q_m^{m+1}\alpha_j - \sum_{i=1}^{m+1} b_{i,m+1-v_j}\rho_{l-u_j(m+1)-i+1} a \in I_Q.$$

Pour tout j, on pose

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{m+1} b_{i,m+1-v_j}\rho_{l-u_j(m+1)-i+1}.$$

Alors $q_m^{m+1}\alpha_j - \beta_j a$ appartient à I_Q pour tout j. D'après ce qui précède I_Q est premier et son intersection avec $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ est égale à Q ; or il ne contient pas $q_m^{m+1}a$; donc $\beta_0, \ldots, \beta_l$ statisfont les relations

$$A\begin{bmatrix}\beta_{i+m}\\ \vdots \\ \beta_i\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_m^{m+1}\rho_{i+m} \\ \vdots \\ q_m^{m+1}\rho_i\end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} Q\\ \vdots \\ Q\end{bmatrix} \quad \textit{pour } i = 0, \ldots, l-m.$$

En outre, on a pour $j = 0, \ldots, m-1$

$$q_j\beta_0 + \cdots + q_0\beta_j - q_m^{m+1}\rho_j \in Q.$$

Ces relations se traduisent par l'égalité

$$(\rho_0 + \cdots + \rho_{l+m}X^{l+m})q_m^{m+1} - (\beta_0 + \cdots + \beta_l X^l)q \in Q\,;$$

donc Q_K contient q_m. Ceci est absurde car l'intersection de Q_K et de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ est égale à Q.

7.3. Soit V un k espace vectoriel de dimension finie. On note K une extension de k. Soit W un sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie de V^*. On désigne par S la sous-algèbre de $\hat{\mathrm{S}}(V^*)$ engendrée par V^* et la clôture de $\mathrm{S}(W)$ dans $\hat{\mathrm{S}}(V^*)$. On note A la sous-algèbre de $\hat{\mathrm{A}}(V)$ engendrée par $\mathrm{A}(V)$ et S, S_K et A_K les sous-K-espace vectoriels de $\hat{A}(K \underset{k}{\otimes} V)$ engendrés respectivement par S et A.

LEMME. — *Soit L_K un idéal à gauche de A_K. On suppose que L_K est engendré par son intersection $L_K^{(0)}$ avec $\mathrm{A}(V_K)$. Soit L l'intersection de L_K et de A. Alors L est l'idéal à gauche engendré par l'intersection $L^{(0)}$ de $L_K^{(0)}$ et de $\mathrm{A}(V)$.*

Soit E un $\mathrm{S}(V^*)$-module de type fini. On pose :

$$\widehat{E} = S \otimes_{\mathrm{S}(V^*)} E, \quad E_K = S(K \otimes_k V^*) \otimes_{\mathrm{S}(V^*)} E \text{ et } \widehat{E_K} = S_K \otimes_{\mathrm{S}(V^*)} E.$$

Puisque L_K est le sous-S_K-module engendré par $L_K^{(0)}$, le lemme résultera de l'assertion suivante : *soit $\widehat{F_K}$ un sous-S_K-module de $\widehat{E_K}$, engendré par son intersection F_K avec E_K ; alors l'intersection de $\widehat{F_K}$ et de $\widehat{E}$ est le sous-S-module de $\widehat{E}$, engendré par l'intersection de F_K et de E.*

On raisonne par récurrence sur la dimension n de W. Pour n égal à 0, A est égal à $\mathrm{A}(V)$. On la suppose vraie pour $n-1$. Soit m un entier positif pour lequel on a une suite exacte courte

$$0 \to \operatorname{Ker}\tau \to \mathrm{S}(V^*)^m \xrightarrow{\tau} E \to 0.$$

On désigne aussi par τ l'extension K-linéaire de τ à $S(K \underset{k}{\otimes} V^*)^m$. Soient J_K l'image réciproque de F_K par τ et $\widehat{J}_K$ le sous-$\hat{S}(K \underset{k}{\otimes} V^*$-module de $\hat{S}(K \underset{k}{\otimes} V^*)^m$, engendré par J_K. Vu l'hypothèse sur F_K, J_K est l'intersection de $\mathrm{S}(V_K^*)^m$ et de $\widehat{J}_K$. Il suffit donc de montrer que l'intersection J de J_K et de $\mathrm{S}(V^*)^m$ engendre l'intersection de S^m et de $\widehat{J}_K$. Soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une base de W. On note W' le sous-$\mathbb{Q}$-espace de V^*, engendré par $X_2, \ldots, X_n$ et V' un supplémentaire de X_1 dans V^* qui contient W'. On désigne par S' la sous-algèbre de $\hat{\mathrm{S}}(V')$ engendrée par $\mathrm{S}(V')$ et la clôture de $\mathrm{S}(W')$ dans $\hat{\mathrm{S}}(V')$. Pour tout entier l, on pose

$$G^l = \mathrm{S}(V')^m + \cdots + X_1^l \mathrm{S}(V')^m, \quad \widehat{G}^l = (S')^m + \cdots + X_1^l (S')^m.$$

Soient G_K^l et $\widehat{G}_K^l$ les sous-K-espaces de S_K^m engendrés par G^l et $\widehat{G}^l$. Soit J_K^l l'intersection de J_K et de G_K^l. On note $\widehat{J}_K^l$ le sous-KS'-module engendré par J_K^l. On choisit l assez grand pour que J_K^l contienne une famille génératrice, $\{a_1, \ldots, a_s\}$, du sous-$S(K \underset{k}{\otimes} V^*$-module J_K. Soit M le sous-$S(K \underset{k}{\otimes} V')$-module de $S(K \underset{k}{\otimes} V^*)^m$, engendré par la famille

$$\{X_1^i a_j \ ; \ 0 \leq i \leq l, \ 1 \leq j \leq s\}.$$

On a la somme directe de sous-KS'-modules

$$(\star) \qquad S_K^m = \widehat{G}_K^l \oplus X_1^{l+1} S_K^m.$$

On utilise la projection pr_2 sur le deuxième facteur. C'est un morphisme de KS'-modules et on a la suite exacte courte de $S(K \underset{k}{\otimes} V')$-modules

$$0 \to J_K^l \to M \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} X_1^{l+1} S(K \underset{k}{\otimes} V^*)^m \ ;$$

or, $\hat{\mathrm{S}}(W)$ est un $\mathrm{S}(W)$-module plat ; donc $\widehat{J}^l_K$ est le noyau de la restriction de pr_2 au sous-module de S^m_K engendré par M. Par suite, $\widehat{J}^l_K$ est l'intersection de $\widehat{G}^l_K$ et de $\widehat{J}_K$. En outre, J^l_K est l'intersection de $\widehat{J}^l_K$ et de G^l_K. Soit J^l l'intersection de J^l_K et de G^l. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée au $\mathrm{S}(V')$-module G^l et au sous-KS'-module $\widehat{J}^l_K$, l'intersection de $\widehat{J}^l_K$ et de $\widehat{G}^l$ est le sous-$\hat{\mathrm{S}}(W)$-module engendré par J^l. De la somme directe de sous-S'-modules

$$S^m = \widehat{G}^l \oplus X_1^{l+1} S^m,$$

et de $(\star)$, on tire l'inclusion

$$\widehat{J}_K \cap S^m \subset \widehat{J}^l + X_1^{l+1} S^m.$$

Pour l assez grand, J^l contient une famille génératrice de J ; donc l'intersection de $\widehat{J}_K$ et de S^m est le sous-S-module engendré par J.

7.4. On suppose $\mathfrak{g}_Q$ distinct de $\mathfrak{g}$.

LEMME. — *L'idéal à gauche $\Lambda'_{\mathfrak{g}}(Q)$ de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ contient l'orthogonal de $\mathfrak{g}_Q$ dans $\mathfrak{g}$.*

Dans le cas où k est le corps des nombres complexes, le lemme résulte de [1] (Théorème 4.3) car la somme de $\mathrm{V}(Q)$ et de $\mathfrak{g}_Q^\perp$ est égale à $\mathrm{V}(Q)$. Dans le cas général, k est limite inductive de corps isomorphes à des sous-corps de $\mathbb{C}$; donc d'après le lemme 7.2, $\Lambda'_{\mathfrak{g}}(Q)$ contient $\mathfrak{g}_Q^\perp$.

7.5. On démontre dans cette sous-section le théorème 4.2. On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie commutative, $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ est l'espace nul, p est égal à 1 et P est égal à Q. On suppose l'assertion vraie pour toute algèbre de Lie complètement résoluble de dimension inférieure à celle de $\mathfrak{g}$. On considère les deux cas suivants :

1) $\mathfrak{g}$ est distinct de $\mathfrak{g}_Q$,

2) $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{g}_Q$.

1) Soit p un élément de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$ qui satisfait la condition de la proposition 3 relativement à Q. Si λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ nulle sur $\mathfrak{g}_Q$, on note τ_λ et θ_λ les automorphismes de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ et de $\mathrm{A}(\mathfrak{g})$ qui sont définis par les conditions suivantes:

$$\tau_\lambda(v) = v + \langle \lambda, v \rangle, \quad \theta_\lambda(v) = v + \langle \lambda, v \rangle, \quad \theta(v') = v',$$

pour tout (v, v') dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$. On désignera encore par θ_λ le prolongement continu de θ_λ à $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$. Pour tout u dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, on a la relation

$$L_{\mathfrak{g}}[\tau_\lambda(u)] = \theta_\lambda L_{\mathfrak{g}}(u)].$$

D'après le lemme 7.1, pour tout λ dans $\mathfrak{g}_Q^{\perp}$, Q est stable par θ_λ. Par suite, $\Lambda'_{\mathfrak{g}}(Q)$ et $\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)$ sont stables par θ_λ ; donc $L_{\mathfrak{g}}^{-1}[\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)p]$ est stable par τ_λ. En particulier cet idéal est engendré par son intersection avec $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_Q)$. Soit Q_0 l'intersection de Q et de $\mathfrak{g}_Q$. On désigne par P_0 l'image de Q_0 par l'application de Dixmier pour $\mathfrak{g}_Q$. Alors P_0 est l'intersection de P et de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_Q)$. L'image de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_Q)$ par $L_{\mathfrak{g}}$ est contenue dans $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}_Q}$. D'après 3, $c_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}_Q}(p)$ satisfait la condition de la proposition 3 relativement à Q_0 ; donc d'après l'hypothèse de récurrence, $L_{\mathfrak{g}_Q}^{-1}[\Lambda_{\mathfrak{g}_Q}(Q_0)c_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}_Q}(p)]$ est égal à P_0. D'après le lemme 7.4, $c_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}_Q}^{-1}[\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q_0)]$ est contenu dans l'intersection de $\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)$ et de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}_Q}$; or cette intersection engendre l'idéal à gauche $\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)$; donc P_0 est l'image réciproque par $L_{\mathfrak{g}}$ de l'intersection de $\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)p$ et de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}_Q}$. Par suite, P est égal à $L_{\mathfrak{g}}^{-1}[\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)p]$.

2) On suppose $\mathfrak{g}$ égal à $\mathfrak{g}_Q$. On considère les quatre cas suivants:

1) $\mathfrak{g}$ est algébrique et Q est l'annulateur d'une orbite de la représentation coadjointe,

2) $\mathfrak{g}$ est algébrique et Q est quelconque,

3) Q est l'annulateur d'une orbite de la représentation coadjointe,

4) Q est quelconque.

2-1) Soit f un point de la variété des zéros de Q dans $\mathfrak{g}^*$. Puisque $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{g}_Q$, l'orbite coadjointe de f est fermée et coïncide avec la variété des zéros de Q dans $\mathfrak{g}^*$. En outre, d'après la remarque 5.6, l'idéal à gauche $\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)$ est égal à l'idéal à gauche $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$, engendré par Q et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})$. On suppose que f est nul sur un idéal non nul, $\mathfrak{a}$, de $\mathfrak{n}$ contenu dans $\mathfrak{z}$. On utilise la sous-algèbre $B_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ et on désigne par $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Soient Q' et P' les images de Q et de P par les morphismes canoniques

$$\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{S}(\mathfrak{h}), \quad \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{h}).$$

Alors P' est l'image de Q' par l'application de Dixmier pour $\mathfrak{h}$. L'image de p par $b_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ satisfait les conditions de la proposition 3 relativement à Q' ; donc d'après l'hypothèse de récurrence, P' est l'image réciproque de $\Lambda_{\mathfrak{h}}(Q')b_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}(p)$ par $L_{\mathfrak{h}}$. L'idéal à gauche $\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)$ est engendré par $b_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}^{-1}[\Lambda_{\mathfrak{h}}(Q')]$; or $B_{\mathfrak{g},\mathfrak{a}}$ contient $L_{\mathfrak{g}}[\mathrm{U}(\mathfrak{g})]$; donc P est égal à $L_{\mathfrak{g}}^{-1}[\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)p]$.

On suppose que le noyau f ne contient aucun idéal non nul, contenu dans $\mathfrak{z}$. Dans ce cas, $\mathfrak{z}$ est de dimension 1. On désigne par Q_0 l'intersection de Q avec $\mathrm{S}(\mathfrak{n})$ et on utilise les notations de 6.2. Soient P_0 l'intersection de P et de $\mathrm{U}(\mathfrak{n})$. Alors P_0 est l'image de Q_0 par l'application de Dixmier pour $\mathfrak{n}$. Soit u dans P_0. Soit L l'idéal à gauche de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$ engendré par $L_{\mathfrak{g}}(u)$

et $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$. Puisque L contient $t_1 + q_1, \ldots, t_d + q_d$, l'intersection de $C_{\mathfrak{g},\mathfrak{n}}$ et de L est engendrée par $L_{\mathfrak{g}}(u)$, Q_0 et $W_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})$. Son image par $c_{\mathfrak{g},\mathfrak{n}}$ est alors l'idéal à gauche de $\mathrm{A}(\mathfrak{n})$ engendré par $L_{\mathfrak{n}}(u)$ et $\Phi_{\mathfrak{n}}(Q_0)$. D'après [3] (Théorème), $\Phi_{\mathfrak{n}}(Q_0)$ contient $L_{\mathfrak{n}}(u)$; donc L est un idéal à gauche strict de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$. D'après la proposition 5.6, $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ est un idéal à gauche maximal; donc $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)$ contient $L_{\mathfrak{g}}(u)$. Puisque $L_{\mathfrak{g}}[\mathrm{U}(\mathfrak{n})]$ commute à p, $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)p$ contient $L_{\mathfrak{g}}(P_0)$. Par suite, d'après 6.2, $\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)p$ contient $L_{\mathfrak{g}}(P)$. D'après le lemme 7.1, P est un idéal maximal de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$; donc P est égal à $L_{\mathfrak{g}}^{-1}[\Phi_{\mathfrak{g}}(Q)p]$.

2-2) Soit K une extension de k qui satisfait la condition (2) du lemme 7.1. On désigne par f une forme linéaire sur $K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g}$ pour laquelle Q est l'annulateur dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ de l'orbite coadjointe de f. Soit Q_K l'annulateur de cette orbite dans $S(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g})$. Soit P_K l'image de Q_K par l'application de Dixmier pour $K(\underset{k}{\otimes} \mathfrak{g})$. Alors d'après [2] (6), P est l'intersection de P_K et de P. Pour tout point ℓ d'un ouvert de Zariski partout dense de $\mathrm{V}(Q)$, p est égal à p_ℓ. Soit $\overline{K}$ une extension algébriquement close de K. Alors f est un $\overline{K}$-point de cet ouvert de Zariski. Par suite, p est égal à p_f. D'après la remarque de 5.6, $\Lambda'_{K \otimes_k \mathfrak{g}}(Q_K)$ est un idéal à gauche maximal de $A(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g})$; donc $\Lambda'_{K \otimes_k \mathfrak{g}}(Q_K)$ est l'intersection de $\Lambda_{K \otimes_k \mathfrak{g}}(Q_K)$ et de $A(K \underset{k}{\otimes} \mathfrak{g})$. Par suite d'après les lemmes 7.2 et 7.3, $\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)$ est l'intersection de $\Lambda_{K \otimes_k \mathfrak{g}}(Q_K)$ et de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$; donc P est égal à $L_{\mathfrak{g}}^{-1}[\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)p]$.

2-3) Soit f un point de la variété des zéros de $\mathfrak{g}^*$. Puisque $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{g}_Q$, la variété des zéros de Q est égale à $\mathbf{G}.f$. On utilise l'enveloppe algébrique $\mathfrak{e}$ de $\mathfrak{g}$ définie en 2. L'application de $E_{\mathfrak{e}}$ dans $E_{\mathfrak{g}}$ qui à λ associe sa restriction à $\mathfrak{g}$ est un isomorphisme de $E_{\mathfrak{e}}$ sur $E_{\mathfrak{g}}$. Cet isomorphisme se prolonge de manière unique en un isomorphisme continu de $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{e}})$ sur $\hat{\mathrm{S}}(E_{\mathfrak{g}})$. On identifie ces deux algèbres au moyen de cet isomorphisme. Soit Q' l'idéal de $\mathrm{S}(\mathfrak{e})$ engendré par Q. Puisque $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{g}_Q$, $\mathfrak{e}$ est la somme de $\mathfrak{e}(f)$ et de son plus grand idéal nilpotent; donc d'après 3.2 et 3.1, p satisfait la condition de la proposition relativement à Q'. Par suite, d'après (2-2), $L_{\mathfrak{e}}^{-1}[\Lambda_{\mathfrak{e}}(Q')p]$ est l'image P' de Q' par l'application de Dixmier pour $\mathfrak{e}$. Puisque $\mathfrak{e}$ est la somme de $\mathfrak{e}(f)$ et de son plus grand idéal nilpotent, $\mathfrak{e}$ est la somme de $\mathfrak{e}(f)$ et de $\mathfrak{g}$; donc $\mathfrak{g}(f)$ est le stabilisateur dans $\mathfrak{g}$ de toute forme linéaire sur $\mathfrak{e}$ qui prolonge f. Vu l'arbitraire de f, avec les notations de 7.2, cela revient à dire que $I_{Q,q}$ contient $\sigma \circ W_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad} \xi)$ pour tout ξ dans $\mathfrak{e}$ et pour tout q dans le complémentaire de Q dans $\tilde{Q}$; donc d'après 7.2, $\Lambda'_{\mathfrak{g}}(Q)$ contient $W_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad} \xi)$ pour tout ξ dans $\mathfrak{e}$. Puisque Q engendre Q', l'intersection de $C_{\mathfrak{e},\mathfrak{g}}$ et de l'idéal à gauche de $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{g})$, engendré par Q et $W_{\mathfrak{e}}(\mathfrak{e})$, est l'idéal à gauche de $C_{\mathfrak{e},\mathfrak{g}}$ engendré par Q et $W_{\mathfrak{e}}(\mathfrak{e})$; donc l'image de l'intersection de $C_{\mathfrak{e},\mathfrak{g}}$ et de $\Lambda_{\mathfrak{e}}(Q')$ par $c_{\mathfrak{e},\mathfrak{g}}$ est contenue dans $\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)$. L'image de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ par $L_{\mathfrak{e}}$ est contenue dans $C_{\mathfrak{e},\mathfrak{g}}$; or P est l'intersection de P' et de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$; donc P est contenu dans $L_{\mathfrak{g}}^{-1}[\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)p]$. D'après le lemme 7.1, $\mathfrak{g}$ étant égal à $\mathfrak{g}_Q$, P est un idéal maximal de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$; donc P est égal à $L_{\mathfrak{g}}^{-1}[p^{-1}\Lambda_{\mathfrak{g}}(Q)p]$. On traite le cas (2-4) comme le cas (2-2) en utilisant (2-3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J-Y. CHARBONNEL, Opérateurs différentiels et mesures invariantes, Compositio Mathematica, 87 (1987), 287–309.

[2] J. DIXMIER, Algèbres enveloppantes, Cahiers scientifiques, 37 (1974), Gauthier-Villars, Paris.

[3] J. DIXMIER, Sur la méthode des orbites. Proceedings de la conférence : " Non commutative Harmonic Analysis", Marseille-Luminy, Lecture Notes in Mathematics, 728 (1978).

[4] M. DUFLO, Opérateurs différentiels biinvariants sur un groupe de Lie, Annales Scientifiques de L'École Normale Supérieure, 5 (1977), 265–288.

[5] J. E. HUMPHREYS, Linear algebraic groups, Graduate texts in Mathematics, 21 (1975), Springer-Verlag, New-York.

[6] O. MATHIEU, Bicontinuity of the Dixmier map., Journal of the American Mathematical Society 4, 4 (1191), 837–863.

[7] R. RENTSCHLER, L'injectivité de l'application de Dixmier pour les algèbres de Lie résolubles, Inventiones Mathematicae, 23 (1974), 49–71.

[8] R. W. RICHARDSON, Deformations of Lie subgroups and the variations of isotropy subgroup, Acta Mathematica, 129 (1972), 35–73.

[9] P. TAUVEL, Sur les quotients premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble, Bulletin de la Société Mathématique de France, 106 (1978), 177–205.

Manuscrit reçu le 2 février 1998,
accepté le 21 avril 1998.

Jean-Yves CHARBONNEL,
Université Paris 7 – CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des groupes
Case 7012
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05 (France).
jyc@math.jussieu.fr