ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HOWARD OSBORN

Les lois de conservation

Annales de l'institut Fourier, tome 14, nº 1 (1964), p. 71-81

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_1_71_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 1 (1964), 71-82.

LES LOIS DE CONSERVATION

par Howard OSBORN.
(University of Illinois.)

Soient K un anneau de germes des fonctions holomorphes réelles, $\mathcal{E}$ le K-module des formes différentielles à coefficients dans K, et h un endomorphisme de $\mathcal{E}$; peut-on trouver des formes exactes θ dont les images $h\theta$ soient également exactes ? Ce problème provient d'une question classique: exprimer certains systèmes d'équations aux dérivées partielles dans des formes des systèmes des lois de conservation au sens des physiciens (voir [1]); on dit donc qu'une telle forme $\theta \in \mathcal{E}$ est une *loi de conservation par rapport à* h. Nous considérons d'abord une classe étroite d'endomorphismes h dont les résultats nous amèneront plus tard à des conclusions semblables pour la classe plus large des endomorphismes h tels que la torsion $[h, h]$ de Nijenhuis s'annule.

§ 1. Le cas constant.

Supposons d'abord l'existence d'un système de coordonnées tr.$(x^0, \ldots, x^n)$ tel que h puisse se représenter par une matrice (h^i_j) de fonctions constantes par rapport à la base $(dx^0, \ldots, dx^n)$ de $\mathcal{E}$, l'image de $\lambda_i dx^i$ étant $\lambda_i h^i_j dx^j$. On considère $(x^0, \ldots, x^n)$ comme base des formes linéaires sur un espace vectoriel réel V à $n+1$ dimensions, $(dx^0, \ldots, dx^n)$ étant la base isomorphe des formes linéaires sur un espace vectoriel W, et $W^* \xleftarrow{d} V^*$ étant l'application transposée de l'isomorphisme $W \xrightarrow{d} V$.

Évidemment toute forme $\lambda_i dx^i$ dont les λ_i sont eux-mêmes des fonctions constantes est une loi de conservation par rapport à un tel h, mais il en existe d'autres dont les λ_i appartiennent à K. Le résultat le plus général à cet égard dépend de la décomposition de h en ses parties cycliques (voir [1] et [2]), mais nous ne considérons ici que le cas où h lui-même est cyclique; autrement dit, si $\mathbf{H}$ représente l'algèbre commutative engendrée par h et l'identité nous supposons l'existence d'une *génératrice* $X_* \in W$ telle que $X_*\mathbf{H} = W$. Ceci est le cas le plus simple et d'ailleurs le cas le plus important; on obtient les résultats les plus généraux par les mêmes méthodes.

LEMME 1.1. — *Pour tout endomorphisme cyclique* h *il existe un isomorphisme* $W \xrightarrow{\eta} \mathbf{H}$ *tel que* $X_*(X\eta) = X$ *pour tout* $X \in W$, W *et* $\mathbf{H}$ *étant considérés comme* $\mathbf{H}$*-modules.*

Démonstration. — Puisque h est cyclique il existe au moins un $q \in \mathbf{H}$ tel que $X_*q = X$, et puisque $X_*q = 0$ entraîne $Wq = X_*\mathbf{H}q = X_*q\mathbf{H} = 0$, d'où $q = 0$, il s'ensuit qu'on obtient un monomorphisme $W \xrightarrow{\eta} \mathbf{H}$ sur le corps réel tel que $X_*(X\eta) = X$; d'ailleurs, pour tout $q \in \mathbf{H}$ et $X \in W$ on a

$$\begin{aligned} Xq = X_*(X\eta)q = X_*q(X\eta) &= X_*((X_*q)\eta)(X\eta) \\ &= X_*(X\eta)((X_*q)\eta) = X(X_*q)\eta, \end{aligned}$$

d'où $q = (X_*q)\eta$, et donc il s'ensuit que η est un isomorphisme sur le corps réel à l'inverse $q\eta^{-1} = X_*q$. Afin de prouver que η est un homomorphisme sur $\mathbf{H}$ notons pour tout $X' \in W$ que

$$\begin{aligned} X'(Xq)\eta = X_*(X'\eta)(Xq)\eta = X_*(Xq)\eta X'\eta &= Xq(X'\eta) \\ = X(X'\eta)q = X_*(X\eta)(X'\eta)q &= X_*(X'\eta)(X\eta)q \\ &= X'(X\eta)q, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $(Xq)\eta = (X\eta)q$ pour tout $X \in W$ et $q \in \mathbf{H}$.

Notons que l'isomorphisme $V \xrightarrow{\xi} \mathbf{H}$ composé de $V \xrightarrow{d^{-1}} W$ et de $W \xrightarrow{\eta} \mathbf{H}$ munit V de la structure d'une algèbre commutative sur le corps réel. Donc en utilisant le rayon spectral de $\mathbf{H}$ on obtient une pseudo-norme sur V, c'est-à-dire, une application σ de V dans les nombres non-négatifs telle que $\sigma(Q + Q') \leq \sigma(Q) + \sigma(Q')$ et $\sigma(tQ) = |t|\sigma(Q)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $\{Q|\sigma(Q) < \varepsilon\}$ est donc un ouvert de V au sens usuel, ce qui nous permet d'énoncer le résultat suivant, où $Q_* = X_*d$

et où le *domaine de convergence* d'une série est l'ensemble ouvert le plus grand où la série converge :

THÉORÈME 1.2. — *Soient* h *un endomorphisme cyclique de* W *sur le corps réel et* $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ *une suite d'éléments de* W^* *dont* $\varepsilon > 0$ *est le rayon de convergence de la série* $\Sigma t^p\theta_p$. *Alors il existe une seule loi de conservation* θ *par rapport à* h *telle que* $\theta(tQ_*) = \Sigma t^p\theta_p$, *et ses valeurs* $\theta(Q)$ *se donnent par la série* $\Sigma(Q\xi)^p\theta_p$ *à domaine de convergence* $\{Q|\sigma(Q) < \varepsilon\}$; *d'ailleurs,* θ *est une loi de conservation par rapport à tout élément de* **H**.

La démonstration du 1.2 dépend des lemmes qui suivent. Soient $\mathcal{S}V$ l'algèbre symétrique engendrée par V sur le corps réel, $\mathcal{S}^pV$ son sous-espace des éléments de degré p, $(\mathcal{S}^pV)^*$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{S}^pV$, et $(\mathfrak{T}^pV)^*$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur V de degré p. Alors la méthode la plus efficace pour prouver le théorème consiste en l'utilisation de l'isomorphisme $(\mathfrak{T}^pV)^* \xleftarrow{\zeta} (\mathcal{S}^pV)^*$ donné par les formules

$$\begin{cases} \zeta f(Q) = \dfrac{1}{p}\langle Q \ldots Q, f\rangle \\ \left\langle Q_1 \ldots Q_p\,!, \left(\dfrac{1}{p\,!}\right)\zeta^{-1}F\right\rangle \\ \qquad = \displaystyle\sum_{\delta_1, \ldots, \delta_p = 0,1} (-1)^{p+\delta_1+\cdots+\delta_p} F(\delta_1 Q_1 + \cdots + \delta_p Q_p), \end{cases}$$

où $f \in (\mathcal{S}^pV)^*$ et $F \in (\mathfrak{T}^pV)^*$. Si ΛW est l'algèbre extérieure engendrée par W, à sous-espace Λ^pW des éléments de degré q, on pose $\mathfrak{A}^{p,q} = (\mathcal{S}^pV \otimes \Lambda^qW)^*$ et $\mathfrak{A} = \sum_{p,q\geqslant 0} \mathfrak{A}^{p,q}$; en munissant $\mathfrak{A}$ du produit évident on obtient donc une algèbre isomorphe à l'algèbre des formes différentielles à coefficients polynômes. Afin de définir la dérivation extérieure dans $\mathfrak{A}$ on définit d'abord une dérivation $\bigotimes^pV \otimes \bigotimes^{q+1}W \xrightarrow{d} \bigotimes^{p+1}V \otimes \bigotimes^qW$ dont $d^2 = 0$ par la formule habituelle

$$(A \otimes (X_0 \otimes \cdots \otimes X_q))d = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (A \otimes X_i d) \otimes (X_0 \otimes \cdots \otimes \hat{X}_i \otimes \cdots X_q),$$

et l'on vérifie facilement que l'application transposée

$$(\bigotimes^pV \otimes \bigotimes^{q+1}W)^* \xleftarrow{d} (\bigotimes^{p+1}V \otimes \bigotimes^qW)^*$$

induit une application $\mathfrak{A}^{p,q+1} \xleftarrow{d} \mathfrak{A}^{p+1,q}$ telle que $\mathfrak{A} \xleftarrow{d} \mathfrak{A}$ est isomorphe à la dérivation extérieure usuelle.

Muni de cette description du calcul extérieur à coefficients polynômes, on peut définir une application $\mathcal{S}^p\mathrm{V} \otimes \mathrm{W} \xrightarrow{h} \mathcal{S}^p\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$ en posant $(\mathrm{A} \otimes \mathrm{X})h = \mathrm{A} \otimes \mathrm{X}h$, dont l'application transposée $\mathfrak{A}^{p,1} \xleftarrow{h} \mathfrak{A}^{p,1}$ représente l'endomorphisme h de $\mathcal{E}$. Notons par $\mathrm{V} \xrightarrow{h} \mathrm{V}$ l'application $d^{-1}hd$ induite par h, et pour tout $f \in (\otimes^{p+1}\mathrm{V})^*$ définissons $hf \in (\otimes^{p+1}\mathrm{V})^*$ par la formule

$$\langle \mathrm{Q}_0 \otimes \cdots \otimes \mathrm{Q}_p, hf\rangle = \langle \mathrm{Q}_0 \otimes \cdots \otimes \mathrm{Q}_p h, f\rangle.$$

Si f et hf sont tous les deux symétriques on peut les regarder par abus de langage comme éléments de $\mathcal{S}^{p+1}\mathrm{V}$; dans ce cas f s'appelle une *h-fonction* de degré $p+1$. Grâce au lemme de Poincaré on peut toujours identifier les formes fermées à coefficients polynômes aux formes exactes à coefficients polynômes; donc, on peut poser le problème des lois de conservation par rapport à h dans la manière suivante : *étant donné l'endomorphisme* $\mathfrak{A}^{p,1} \xleftarrow{h} \mathfrak{A}^{p,1}$, *trouver les* $f \in \mathfrak{A}^{p+1,0}$ *telles que* $dhdf = 0$. La loi de conservation associée à f sera $d\zeta f$, mais par abus de langage df s'appelera une loi de conservation (à coefficients dans $\mathfrak{A}^{p,0}$).

LEMME 1.3. — *Pour que* $df \in \mathfrak{A}^{p,1}$ *soit une loi de conservation par rapport à* h *il faut et il suffit que* $f \in \mathfrak{A}^{p+1,0}$ *soit une h-fonction.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{A}\otimes \mathrm{Q}_0 d^{-1} \wedge \mathrm{Q}_1 d^{-1},\ dhdf\rangle
&= \langle \mathrm{A}\mathrm{Q}_0 \otimes \mathrm{Q}_1 d^{-1}, hdf\rangle - \langle \mathrm{A}\mathrm{Q}_1 \otimes \mathrm{Q}_0 d^{-1}, hdf\rangle\\
&= \langle \mathrm{A}\mathrm{Q}_0 \otimes \mathrm{Q}_1 d^{-1}h, df\rangle - \langle \mathrm{A}\mathrm{Q}_1 \otimes \mathrm{Q}_0 d^{-1}h, df\rangle\\
&= \langle \mathrm{A}\mathrm{Q}_0 \otimes \mathrm{Q}_1 hd^{-1}, df\rangle - \langle \mathrm{A}\mathrm{Q}_1 \otimes \mathrm{Q}_0 hd^{-1}, df\rangle\\
&= \langle \mathrm{A}\mathrm{Q}_0(\mathrm{Q}_1 h), f\rangle - \langle \mathrm{A}\mathrm{Q}_1(\mathrm{Q}_0 h), f\rangle.
\end{aligned}$$

LEMME 1.4. — *Pour que* $df \in \mathfrak{A}^{p,1}$ *soit une loi de conservation par rapport à* h *il faut et il suffit que* df *soit une loi de conservation par rapport à tout élément de* $\mathbf{H}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $h^{k-1}f \in \mathfrak{A}^{p+1,0}$ et $h^k f \in \mathfrak{A}^{p+1,0}$ entraînent $h^{k+1}f \in \mathfrak{A}^{p+1,0}$, et à ce propos il suffit de montrer que $h^{k+1}f$ est symétrique comme élément de

$(\bigotimes^{p+1}V)^*$ dans ses deux dernières variables, ce qui est évident parce que $h^k f \in \mathcal{A}^{p+1,0}$ implique

$$\begin{aligned}
&\langle Q_0 \otimes \cdots \otimes Q_{p-1} \otimes Q_p, h^{k+1}f\rangle \\
&= \langle Q_0 \otimes \cdots \otimes Q_{p-1} \otimes Q_p h, h^k f\rangle \\
&= \langle Q_0 \otimes \cdots \otimes Q_p h \otimes Q_{p-1}, h^k f\rangle \\
&= \langle Q_0 \otimes \cdots \otimes Q_p h \otimes Q_{p-1} h_1 h^{k-1} f\rangle,
\end{aligned}$$

d'où le résultat, $h^{k-1}f$ étant aussi dans $\mathcal{A}^{p+1,0}$ par hypothèse.

Rappelons la définition $Q_* = X_* d$ et remarquons que si H est l'algèbre commutative $d^{-1}\mathrm{H}d$ engendrée par h et l'identité sur V il s'ensuit que Q_* est une génératrice de V isomorphe à $X_* \in W$; d'ailleurs, il y a un isomorphisme $V \xrightarrow{\eta} H$ pareil à celui du 1.1 tel que $Q_*(Q\eta) = Q$ pour tout $Q \in V$. Puisque H est commutative on obtient donc une application linéaire $\mathcal{A}^{p+1,0} \xleftarrow{\tau} V^*$ donnée par la formule

$$\langle Q_0 \ldots Q_p, \tau x\rangle = \langle Q_*(Q_0\eta) \ldots (Q_p\eta), x\rangle.$$

Lemme 1.5. — *τ est un isomorphisme de V^* dans le sous-espace des h-fonctions de $\mathcal{A}^{p+1,0}$.*

Démonstration. — Evidemment τ est monic, et l'image τx est une h-fonction parce que

$$\begin{aligned}
&\langle Q_0 \otimes \ldots \otimes Q_p, h\tau x\rangle \\
&= \langle Q_0 \otimes \ldots \otimes Q_{p-1} \otimes Q_p h, \tau x\rangle \\
&= \langle Q_*(Q_0\eta) \ldots (Q_{p-1}\eta)(Q_p h)\eta, x\rangle \\
&= \langle Q_*(Q_0\eta) \ldots (Q_p\eta)h, x\rangle \\
&= \langle Q_*(Q_0\eta) \ldots (Q_p\eta), hx\rangle \\
&= \langle Q_0 \ldots Q_p, \tau h x\rangle.
\end{aligned}$$

Pour prouver que τ est épic notons pour une h-fonction quelconque f qu'on peut définir un élément $\tau^{-1}f \in V^*$ par la formule $\langle Q, \tau^{-1}f\rangle = \langle Q_* \ldots Q_*, (Q\eta)f\rangle$; en effet $\tau(\tau^{-1}f) = f$ puisque pour tout $Q_0 \ldots Q_p \in \mathcal{G}^{p+1}V$ on a

$$\begin{aligned}
&\langle Q_0 \ldots Q_p, f\rangle \\
&= \langle Q_*(Q_0\eta) \ldots Q_*(Q_p\eta), f\rangle \\
&= \langle Q_* \ldots Q_*, (Q_0\eta) \ldots (Q_p\eta)f\rangle \\
&= \langle ((Q_0\eta) \ldots (Q_p\eta))\eta^{-1}, \tau^{-1}f\rangle \\
&= \langle Q_*(Q_0\eta) \ldots (Q_p\eta), \tau^{-1}f\rangle \\
&= \langle Q_0 \ldots Q_p, \tau(\tau^{-1}f)\rangle.
\end{aligned}$$

Lemme 1.6. — *Soit* θ_0, θ_1, θ_2, ... *une suite d'éléments de* W^* *dont* $\varepsilon > 0$ *est le rayon de convergence de la série* $\Sigma t^p\theta_p$; *alors* $\{Q|\sigma(Q) < \varepsilon\}$ *est le domaine de convergence de* $\Sigma(Q\xi)^p\theta_p$.

Démonstration. — On peut employer la forme canonique de Jordan pour noter qu'il suffit de considérer le cas

$$(Q\xi) = \begin{pmatrix} \lambda 1 \dots 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ 00 \dots 1 \\ 00 \dots \lambda \end{pmatrix};$$

si l'on pose

$$(\theta_p) = \begin{pmatrix} \theta_p^o \\ \vdots \\ \theta_p^n \end{pmatrix}$$

l'hypothèse entraîne la convergence des séries

$$\Sigma t^p\theta_p^o, \dots, \Sigma t^p\theta_p^n,$$

et puisque $\Sigma(Q\xi)^p(\theta_p)$

$$= \begin{pmatrix} \Sigma\binom{p}{o}\theta_p^o\lambda^p + \cdots & \cdots + \Sigma\binom{p}{n}\theta_p^n\lambda^p \\ & \Sigma\binom{p}{o}\theta_p^1\lambda^p + \cdots + \Sigma\binom{p}{n-1}\theta_p^n\lambda^p \\ & \vdots \\ & \Sigma\binom{p}{o}\theta_p^n\lambda^p \end{pmatrix}$$

on obtient donc la convergence de $\Sigma(Q\xi)^p\theta_p$ pour $|\lambda| < \varepsilon$.

Démonstration du théorème 1.2. — Les Lemmes 1.3 et 1.5 impliquent que $d\tau d^{-1}$ est un monomorphisme $\mathfrak{A}^{p,1} \xleftarrow{\tau} W^*$ dans le sous-espace des lois de conservation par rapport à h, à coefficients dans $\mathfrak{A}^{p,0}$, et il s'ensuit pour tout $\theta_p \in W^*$ que les valeurs de la loi de conservation $\tau\theta_p$ se donnent par la formule

$$\begin{aligned}\langle Q_1 \dots Q_p \otimes X, \tau\theta_p\rangle &= \langle (Xd)Q_1 \dots Q_p, \tau d^{-1}\theta_p\rangle \\ &= \langle (Xd)(Q_1\eta) \dots (Q_p\eta), d^{-1}\theta_p\rangle.\end{aligned}$$

En particulier

$$\langle (Xd)(Q\eta)^p, d^{-1}\theta_p\rangle = \langle X(Q\xi)^p, \theta_p\rangle = \langle X, (Q\xi)^p\theta_p\rangle$$

pour tout $X \in W$, ce qui donne la seule loi de conservation à coefficients dans $(\mathfrak{T}^pV)^*$ telle que $\theta(Q_*) = \theta_p$, ses valeurs étant données par $\theta(Q) = (Q\xi)^p\theta_p$. On obtient donc une seule loi de conservation $\Sigma(Q\xi)^p\theta_p$ par rapport à h dont les valeurs à tQ_* sont données par une somme finie $\Sigma t^p \theta_p$. Pour la donnée d'une fonction holomorphe $\Sigma t^p \theta_p$, à valeurs dans W^*, remarquons que la convergence de $\Sigma(Q\xi)^p \theta_p$ entraîne la convergence de $dh\, \Sigma(Q\xi)^p \theta_p$ dans le même domaine, et puisque toutes les sommes partielles s'annulent il s'ensuit que $dh\ \Sigma(Q\xi)^p \theta_p = 0$. La dernière partie du théorème découle du Lemme 1.4 dans la même façon.

Si l'on se donne une suite $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ d'éléments de W^* dont $\varepsilon > 0$ est le rayon de convergence de $\Sigma t^p \varphi_p$, on peut définir une fonction holomorphe F sur le domaine

$$\{Q | \sigma(Q) < \varepsilon\}$$

par la formule $F(Q) = \Sigma\langle X_*, (Q\xi)^p \varphi_p\rangle$. Puisque

$$\langle X, dF(Q)\rangle = \Sigma\langle X, p(Q\xi)^{p-1}\varphi_p\rangle$$

pour tout $X \in W$ il s'ensuit que $dF(Q) = \Sigma p(Q\xi)^{p-1}\varphi_p$ et donc que dF est une loi de conservation; en effet, si $G(Q) = \Sigma\langle X_*, (Q\xi)^p h\varphi_p\rangle$ on trouve $h\ dF = dG$.

En outre, il existe une génératrice x^* de V^* par rapport à H et une suite $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ d'éléments de V telle que

$$\langle Q_p d^{-1} q d,\ x^*\rangle = \langle X_*,\ q\varphi_p\rangle$$

pour tout $q \in \mathbf{H}$, ce qui nous permet d'écrire

$$F(Q) = \Sigma\langle Q_p(Q\eta)^p,\ x^*\rangle;$$

donc on peut regarder la fonction F comme la composée de la fonction $V \to V$ donnée par $Q \to \Sigma Q_p(Q\eta)^p$ et la fonctionnelle x^*. Par exemple, si $n + 1 = 2$ et $h^2 + 1 = 0$, les fonctions $V \to V$ définies par une telle formule ne sont que les fonctions holomorphes complexes, dont x^* produit la partie réelle; autrement dit, dans ce cas les lois de conservation sont les différentielles des fonctions harmoniques. Les fonctions $Q \to \Sigma Q_p(Q\eta)^p$ feront le sujet d'une autre publication [5].

§ 2. Le cas $[h, h] = 0$.

Dans le cas précédent on a vu qu'une loi de conservation θ par rapport à h est une loi de conservation par rapport à tout élément de H. Dans des cas plus généraux une telle conclusion sera liée à la torsion $[h, h]$ de Nijenhuis, que nous définissons ici.

Soient $\mathcal{F}$ le K-module $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{E}, K)$ des champs de vecteurs, L un champ de vecteurs quelconque, et L_* la dérivée de Lie définie par les formules habituelles

$$\begin{cases} L_*F = LF, & F \in K \\ L_*M = [L, M], & M \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

On définit $L_*\theta$ et L_*h pour $\theta \in \mathcal{E}$ et $h \in \mathrm{Hom}_K(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ par la formule de Leibniz :

$$L_*\langle M, \theta\rangle = \langle L_*M, \theta\rangle + \langle M, L_*\theta\rangle$$

et

$$L_*h\theta = (L_*h)\theta + hL_*\theta.$$

Remarquons que $dL_* = L_*d$ et que la formule

$$L[h, h] = (Lh)_*h - (L_*h)h$$

définit une application $\mathcal{F} \xrightarrow{[h,h]} \mathrm{Hom}_K(\mathcal{F}, \mathcal{F})$, appelée la *torsion de Nijenhuis*. Évidemment $[h, h] = 0$ entraîne

$$(Lh^i)_*h^j = (L_*h^j)h^i$$

pour tout $i, j \geqq 0$, et puisque $L(M[h, h]) + M(L[h, h]) = 0$ on peut aussi considérer $[h, h]$ comme une application $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \xrightarrow{[h,h]} \mathcal{F}$ dont

$$L \wedge M[h, h] = [Lh, Mh] - [Lh, M]h - [L, Mh]h + [L, M]h^2.$$

En revanche, si l'on définit $h^{(1)}, h^{(2)} \in \mathrm{Hom}_K(\mathcal{E} \wedge \mathcal{E}, \mathcal{E} \wedge \mathcal{E})$ par les formules

$$h^{(1)}\theta \wedge \varphi = h\theta \wedge \varphi + \theta \wedge h\varphi \qquad \text{et} \qquad h^{(2)}\theta \wedge \varphi = h\theta \wedge h\varphi,$$

on peut employer la relation

$$\langle L \wedge M, d\theta\rangle + \langle [L, M], \theta\rangle = L\langle M, \theta\rangle - M\langle L, \theta\rangle$$

pour obtenir l'application $\mathcal{E} \wedge \mathcal{E} \xleftarrow{[h,h]} \mathcal{E}$ transposée de $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \xrightarrow{[h,h]} \mathcal{F}$, $[h, h]\theta = -h^{(2)}d\theta + h^{(1)}dh\theta - dh^2\theta$, ce qui entraîne le

Lemme 2.1. — *Si θ est une loi de conservation par rapport à un h tel que $[h, h] = 0$ il s'ensuit que les formes $\theta, h\theta, h^2\theta, h^3\theta, \ldots$ sont toutes exactes ; réciproquement si h est un endomorphisme cyclique à génératrice θ telle que $\theta, h\theta, \ldots, h^{n+2}\theta$ soient exactes, il s'ensuit que $[h, h] = 0$.*

LEMME 2.2. — *Si* $[h, h] = 0$ *on a* $(\mathrm{L}h^i)_*\theta = \mathrm{L}_*(h^i\theta)$ *pour tout* $\mathrm{L} \in \mathcal{F}$ *et toute loi de conservation* θ *par rapport à* h.

Démonstration. — Puisqu'il existe $\mathrm{F}^0, \mathrm{F}^1, \mathrm{F}^2, \ldots \in \mathrm{K}$ telles que $d\mathrm{F}^i = h^i\theta$, on peut calculer

$$(\mathrm{L}h^i)_*\mathrm{F}^0 = \langle \mathrm{L}h^i,\ d\mathrm{F}^0\rangle = \langle \mathrm{L},\ h^i d\mathrm{F}^0\rangle = \langle \mathrm{L},\ d\mathrm{F}^i\rangle = \mathrm{L}_*\mathrm{F}^i,$$

d'où

$$(\mathrm{L}h^i)_* d\mathrm{F}^0 = d(\mathrm{L}h^i)_*\mathrm{F}^0 = d\mathrm{L}_*\mathrm{F}^i = \mathrm{L}_* d\mathrm{F}^i = \mathrm{L}_*(h^i\theta).$$

Afin d'obtenir la généralisation du Théorème 1.2 nous considérons la représentation d'une forme différentielle quelconque par une série de Taylor. Soit $(x^0, \ldots, x^n)$ un système des coordonnées tel que $x^0(\mathrm{P}) = \cdots = x^n(\mathrm{P}) = 0$, et pour tout $\mathrm{Q} \in \mathrm{V}$ soit $\mathrm{Q}d^{-1}$ le champ de vecteurs

$$x^0(\mathrm{Q})\frac{\partial}{\partial x^0} + \cdots + x^n(\mathrm{Q})\frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Alors la formule classique de Taylor donne la représentation $\mathrm{F}(\mathrm{Q}) = \Sigma \dfrac{1}{p\,!}(\mathrm{Q}d^{-1})^p\mathrm{F}(\mathrm{P})$ d'une F quelconque de K, valable pour Q suffisamment voisin de P. Remplaçant $\mathrm{Q}d^{-1}$ par sa généralisation $(\mathrm{Q}d^{-1})_*$, on obtient donc la formule

$$\theta(\mathrm{Q}) = \tau_{\mathrm{Q}}^{p}\, \Sigma \frac{1}{p\,!}(\mathrm{Q}d^{-1})_*^p\theta(p)$$

pour toute $\theta \in \mathcal{E}$, où τ est le transport parallèle associé aux

$$\frac{\partial}{\partial x^0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Arrivé à ce point, il faut imposer une condition désagréable sur h, à savoir, l'existence d'une génératrice L de $\mathcal{F}$ telle que $\mathrm{L}, \mathrm{L}h, \ldots, \mathrm{L}h^n$ se commutent. Dans ce cas il existe un système de coordonnées $(x^0, \ldots, x^n)$ tel que

$$x^0(\mathrm{P}) = \cdots = x^n(\mathrm{P}) = 0 \text{ et que } \mathrm{L} = \frac{\partial}{\partial x^0}, \ldots, \mathrm{L}h^n = \frac{\partial}{\partial x^n},$$

et on peut définir une application ξ de V dans l'algèbre **H** engendrée sur les nombres réels par h et l'identité 1 en posant $\mathrm{Q}\xi = \mathrm{X}^0(\mathrm{Q})1 + \mathrm{X}^1(\mathrm{Q})h + \cdots + \mathrm{X}^n(\mathrm{Q})h^n$; on doit signaler que l'algèbre H n'est pas nécessairement de dimension finie sur le corps réel. Observons que $LQ\xi = Qd^{-1}$, ce qui nous amène au résultat suivant :

Théorème 2.3. — *Soit h un endomorphisme cyclique tel que $[h, h] = 0$. Alors, s'il existe une génératrice* L *de* $\mathfrak{F}$ *par rapport à* H *telle que* L, $Lh, \ldots, Lh^n$ *se commutent, on peut représenter n'importe quelle loi de conservation* θ *par rapport à h par la formule* $\theta(Q) = \tau_Q^P \Sigma \frac{1}{p!} L_*^p(Q\xi)^p\theta(p)$, *valable dans un voisinage de* P.

Démonstration. — On doit montrer $(Qd^{-1})_*^p\theta = L_*^p(Q\xi)^p$, qui suit immédiatement du Lemme 2.2; en effet, puisque $L, Lh, \ldots, Lh^n$ se commutent on a

$$(Lh^{i_1})_* \ldots (Lh^{i_p})_*\theta = L_*^p(h^{i_1+\cdots+i_p}\theta),$$

donc

$$(\lambda_0 L + \cdots + \lambda_n Lh^n)_*^p\theta = L_*^p(\lambda_0 1 + \cdots + \lambda_n h^n)^p\theta$$

pour n'importe quels nombres réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$.

Selon la représentation précédente on peut calculer θ en termes de ses dérivées $L_*^p\theta(P)$ dans une seule direction. En fait, si l'on se donne une suite $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ d'éléments de l'espace W^* co-tangent à P telle que $\Sigma t^p\theta_p$ converge pour t suffisamment petit, il existe une seule loi de conservation θ par rapport à h telle que $L_*^p\theta(P) = p!\,\theta_p$; nous laissons les détails de côté. Remarquons que dans le cas constant on a $L_*h = 0$, donc $L_*^p(Q\xi)^p\theta = (Q\xi)^p L_*^p\theta$; c'est-à-dire, on retrouve la formule du Théorème 1.2 (où le transport parallèle était implicite dans la définition de l'espace W).

On voudrait bien supprimer la condition de commutativité dans le théorème précédent. On a fait une première étape à ce propos, à savoir, la représentation d'un champ de tenseurs holomorphe par une série de Taylor par rapport à une connexion quelconque ∇. Notons d'abord pour tout champ de vecteurs L que le champ de vecteurs ∇_L définit une seule dérivation de l'algèbre tensorielle engendrée par ξ et y.

Lemme 2.4. — *Soient* ∇ *une connexion affine dans un voisinage de* P, exp *l'application exponentielle associée à* ∇, τ_X *le transport parallèle le long de la courbe géodésique qui lie* P *au point* exp X, *et* X^{∇} *le champ de vecteurs à valeurs* τ_Y X *aux points* exp Y; *alors, pour n'importe quel champ de tenseurs holomorphe* Θ *on a*

$$\Theta(\exp X) = \tau_X \Sigma \frac{1}{p!} (\nabla^{p}_{X^\nabla}\Theta)(P)$$

pour X *suffisamment voisin de l'origine de l'espace tangent* W *à* P.

Démonstration. — Voir [3] et [4].

En particulier, si Θ est une forme différentielle $\theta \in \mathcal{E}$ on obtient une généralisation de la série de Taylor qui précède le Théorème 2.3, et pour prouver ce théorème sans la condition de commutativité il ne reste qu'à trouver la bonne connexion ∇ associée à *h* telle que le Lemme 2.2 soit vérifié en remplaçant la dérivée L_* de Lie par la dérivation ∇_L.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Osborn, The existence of conversation laws, *Ann. of Math.* 69 (1959), 105-118.

[2] H. Osborn, A class of bilinear forms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90 (1959), 485-498.

[3] H. Osborn, On Taylor's theorem in several variables, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, (U.S.A.) 46 (1960), 1097-1100.

[4] H. Osborn, *Taylor expansions on affinely connected manifolds* (à paraître).

[5] P. Cartier et H. Osborn, *Monogenic functions* (à paraître).