ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE PANSU

Sur la régularité du profil isopérimétrique des surfaces riemanniennes compactes

Annales de l'institut Fourier, tome 48, nº 1 (1998), p. 247-264

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_1_247_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 1 (1998), 247–264

SUR LA RÉGULARITÉ DU PROFIL ISOPÉRIMÉTRIQUE DES SURFACES RIEMANNIENNES COMPACTES

par Pierre PANSU

À Marcel Berger, pour son 70ème anniversaire

1. INTRODUCTION

DÉFINITION 1. — *Soit M une variété riemannienne de volume A (éventuellement $A = +\infty$). Pour $0 < a < A$, on note $I(a)$ la borne inférieure des volumes des bords des sous-variétés compactes de codimension* 0 *de M de volume a. On l'appelle* profil isopérimétrique *de M.*

Dans cet article, on se limite aux variétés compactes de dimension 2. On parle de longueur et d'aire plutôt que de volumes.

Le profil isopérimétrique n'est connu exactement que pour certains espaces à courbure constante, voir [RR], et quelques surfaces de révolution, voir [BC], [BP], [HHM]. Il n'est pas donné par une formule fermée. Toutefois, on peut aller assez loin dans l'étude de sa différentiabilité.

On montre que le profil isopérimétrique admet toujours un développement limité à l'ordre 3 en 0, Théorème 1.

Mots-clés : Inégalité isopérimétrique - Ensemble sous-analytique.
Classification math. : 53C20 - 53C42 - 49Q20.

On montre que, lorsque la métrique est analytique réelle, le profil isopérimétrique est semi-analytique, Théorème 3. Cela signifie qu'il est analytique sauf en un nombre fini de points a_i où il admet un développement de Puiseux de la forme $h(|a-a_i|^{1/p_i})$. En particulier, il est analytique sur un intervalle de la forme $]0,\epsilon[$.

Enfin, on construit une métrique de classe C^∞ sur la 2-sphère dont le profil isopérimétrique n'est de classe C^1 sur aucun intervalle de la forme $]0,\epsilon[$, Théorème 2.

2. RÉSULTATS

2.1. Développement limité en 0.

Lorsque a est petit, les domaines extrémaux sont des disques. D'après G. Bol [B], et F. Fiala [F], plus la courbure est basse, plus l'inégalité isopérimétrique est bonne. Par conséquent, les disques extrémaux sont situés dans des régions où la courbure est proche de son maximum. Cela donne un développement limité à l'ordre 2. C'est une amélioration de l'inégalité de Bol et Fiala qui nous permet d'encadrer le quatrième terme du développement limité; on remplace l'hypothèse uniforme sur la courbure par une hypothèse intégrale, voir Lemme 6. On retrouve ainsi une idée de I. Benjamini et J. Cao, [BC].

THÉORÈME 1. — *Soit M une variété riemannienne compacte, de classe C^∞, de dimension 2. Notons K la borne supérieure de la courbure. On suppose qu'elle n'est atteinte qu'en des maxima non dégénérés. Alors il existe des constantes $C \geq c > 0$ telles que*

$$ca^3 + o(a^3) \leq I(a)^2 - 4\pi a + Ka^2 \leq Ca^3 + o(a^3).$$

Remarque 2. — La preuve donne la valeur des constantes c et C en fonction de la Hessienne de la fonction courbure en ses maxima $x_1, \cdots, x_k$,

$$c = \frac{1}{6\pi} \min \sqrt{\det \mathrm{Hess}_{x_i} R} \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{12\pi} \min \mathrm{tr}\, \mathrm{Hess}_{x_i}.$$

Lorsque la courbure atteint son maximum en un seul point, où son Hessien est proportionnel à la métrique, les constantes C et c sont égales et on obtient un véritable développement limité à l'ordre 3.

Remarque 3. — Ce développement limité est la seule restriction sur le profil isopérimétrique au voisinage de 0 (voir Théorème 2).

2.2. Métriques dont le profil isopérimétrique n'est pas de classe C^1.

On s'attend à ce que génériquement (il faudrait le démontrer), le profil isopérimétrique soit de classe C^∞ par morceaux. En effet, l'espace $\mathcal{V}$ des sous-variétés à bord de codimension 0 de M est une variété sur laquelle la fonction aire n'a pas de point critique, donc l'ensemble de niveau $\mathcal{V}_a$ est lisse et dépend différentiablement de a. Génériquement, sauf pour un nombre fini de valeurs de a, la fonction longueur du bord restreinte à $\mathcal{V}_a$ n'a que des points critiques non dégénérés, qui varient différentiablement avec a. Si c'est le cas, le profil isopérimétrique est le minimum d'une famille finie de fonctions de classe C^∞.

Le théorème suivant permet de construire des métriques sur la sphère pour lesquelles la fonction longueur du bord a exactement deux minima locaux sur $\mathcal{V}_a$, pour a petit.

THÉORÈME 2. — *Soient S_1 et S_2 deux fonctions définies sur un voisinage de* 0, *de classe C^∞ et telles que*

$$S_i(0) = 0, \quad S_i'(0) = 4\pi, \quad S_i'''(0) > 0.$$

Il existe une métrique lisse de révolution sur la 2-sphère dont le profil isopérimétrique I satisfait

$$I(a)^2 = \min\{S_1(a), S_2(a)\}$$

pour $a > 0$ assez petit.

Choisissons des fonctions S_1 et S_2 dont les graphes se croisent transversalement une infinité de fois au voisinage de 0. Aux points de croisement, le profil isopérimétrique n'est pas dérivable.

2.3. Métriques analytiques réelles.

Si M est compacte et si la métrique riemannienne est analytique, l'application

$$(A, L) : \mathcal{V} \to \mathbf{R}^2, \quad \Omega \mapsto (\mathrm{Vol}\,\Omega, \mathrm{Vol}\,\partial\Omega)$$

est analytique et propre (pour une topologie faible sur $\mathcal{V}$, voir [Fl]). On a envie de penser que cela suffit pour montrer que son image est sous-analytique.

Pour rendre l'argument rigoureux, on parvient, mais en dimension 2 seulement, à remplacer $\mathcal{V}$ par une approximation $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ de dimension finie, dont l'image par (A, L) est la même. $\mathcal{W}$ est l'ensemble des sous-variétés dont le bord est à courbure géodésique constante. Pour prouver la sous-analyticité au voisinage de 0, il faut compactifier $\mathcal{W}$ en ajoutant les points de M, i.e., les objets d'aire et de longueur nuls. On obtient

THÉORÈME 3. — *Soit M une variété riemannienne compacte, de dimension 2, analytique réelle. Le profil isopérimétrique I de M est une fonction semi-analytique.*

3. DÉVELOPPEMENT LIMITÉ EN 0

3.1. Majoration du profil isopérimétrique.

Pour majorer le profil isopérimétrique au voisinage de 0, il suffit d'estimer le volume des petites sphères géodésiques $B(r)$ centrées en un point x où la courbure atteint son maximum. Le développement limité en 0 de la longueur des cercles géodésiques est classique. On le trouve en écrivant la métrique en coordonnées polaires d'origine x

$$ds^2 = dr^2 + \Theta(r,\theta)^2\, d\theta^2$$

où la fonction Θ satisfait l'équation de Jacobi

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + R(r,\theta)\Theta = 0$$

avec conditions initiales $\Theta(0,\theta) = 0$ et $\dfrac{\partial \Theta}{\partial r}(0,\theta) = 1$. Comme les dérivées premières de R s'annulent en x, il vient

$$\operatorname{Long} \partial B(r) = 2\pi\Big(r - \frac{1}{6}R(x)r^3 + \frac{1}{120}\Big(R(x)^2 + \frac{3}{2}\Delta R(x)\Big)r^5 + o(r^5)\Big)$$

où $\Delta = -\operatorname{tr} Dd$, de sorte que $\Delta r^2(x) = -4$. Pour r petit, l'équation

$$\operatorname{Long} \partial B(r)^2 = s(\operatorname{Aire} B(r))$$

détermine uniquement la fonction s et on obtient le développement limité

$$(*) \qquad s(a) = 4\pi a - R(x)a^2 + \frac{1}{12\pi}\Delta R(x)a^3 + o(a^3).$$

Par définition, le profil isopérimétrique satisfait $I^2 = S \leq s$.

3.2. Continuité en 0 de la dérivée S'.

Le profil isopérimétrique peut être dérivé une et presque deux fois.

LEMME 4 ([BP], §7). — *Soit M une variété riemannienne compacte de dimension 2. Soit k la borne inférieure de la courbure. Alors la fonction $a \mapsto I(a)^2 + 2ka^2$ est concave. Par conséquent, le profil isopérimétrique I est une fonction continue qui admet en tout point a des dérivées à droite et à gauche $I'_d(a)$ et $I'_g(a)$, qui coïncident sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de a. Si Ω est une sous-variété d'aire a et dont le bord est de longueur minimum (il en existe toujours), alors $\partial\Omega$ a une courbure géodésique constante h, et $I'_d(a) \leq h \leq I'_g(a)$.*

Notons toujours k la borne inférieure de la courbure. D'après 4, la fonction $a \mapsto S(a) - 4\pi a + ka^2$ est concave. Sa dérivée à gauche S'_g et sa dérivée à droite S'_d sont décroissantes donc possèdent une limite commune ℓ en 0. En particulier, S est dérivable à droite en 0 de dérivée ℓ. Comme $S(a) \leq 4\pi a + o(a)$, $\ell \leq 4\pi$. D'autre part $\ell > 0$. En effet, si $\ell \leq 0$, alors $S'_d \leq \ell \leq 0$ entraîne $S \leq S(0) = 0$, contradiction. On verra au paragraphe 3.3 que $\ell = 4\pi$.

3.3. Les domaines extrémaux sont des disques.

Pour minorer le profil isopérimétrique, on va utiliser le théorème de G. Bol et F. Fiala, [B], [F].

Si (D, ds^2) est un disque riemannien de courbure $R \leq K$ et d'aire a, alors

$$\operatorname{Long} \partial D^2 \geq 4\pi a - Ka^2.$$

Pour s'y ramener, il faut démontrer que les domaines extrémaux d'aire petite sont des disques. On reprend un argument de [BP], preuve du lemme 14.

LEMME 5. — *Soit (M, ds^2) une surface riemannienne compacte. Pour a assez petit, les domaines Ω d'aire a et dont le bord a une longueur minimale sont des disques qui se concentrent au voisinage des points où la courbure atteint son maximum, et dont le bord a une courbure géodésique très grande.*

Preuve. — Soit Ω un tel domaine extrémal. Son bord est une collection de courbes à courbure constante h. De plus, il est stable sous contrainte : la dérivée seconde de la longueur du bord, pour les variations à aire constante, est nulle. D'après [BP] §6, pour toute fonction ϕ sur $\partial\Omega$ d'intégrale nulle,

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla\phi|^2 - (h^2 + k)\phi^2 \geq 0.$$

Si $\partial\Omega$ n'est pas connexe, on peut choisir ϕ localement constante, non nulle et d'integrale nulle. Cela donne $h^2 + k \leq 0$.

Si la dérivée $S'(a)$ existe, alors $S'(a) = 2I(a)I'(a) = 2I(a)h$ donc

$$h = \frac{1}{2}S'(a)S(a)^{-\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\ell}a^{-\frac{1}{2}}$$

tend vers $+\infty$ lorsque a tend vers 0. En général, $h \geq I'_d(a)$ et la conclusion est la même. On conclut que, si a est assez petit, $\partial\Omega$ est connexe.

Comme la longueur $\mathrm{Long}\,(\partial\Omega) = I(a)$ tend vers 0 avec a, $\partial\Omega$ est contenu dans une petite boule. Une petite courbe plongée partage une surface en deux parties, une seule est d'aire petite, c'est un disque. On conclut que Ω est un disque contenu dans une boule de rayon $\sim \sqrt{a}$.

Notons $K(\Omega)$ la borne supérieure sur Ω de la courbure. D'après l'inégalité de G. Bol et F. Fiala,

$$S(a) = \mathrm{Long}\,\partial\Omega^2 \geq 4\pi a - K(\Omega)a^2.$$

La majoration $(*)$ donne alors

$$K(\Omega) \geq K - \mathrm{const.}\, a.$$

Cela signifie que près de Ω il y a un point où la courbure atteint son maximum. En particulier, si la fonction courbure n'a que des maxima non dégénérés, ils sont en nombre fini $x_1, \cdots, x_k$ et il existe j tel que

$$\Omega \subset B(x_j, \mathrm{const.}\, \sqrt{a}).$$

□

3.4. Raffinement de l'inégalité de G. Bol et F. Fiala.

L'idée que le profil isopérimétrique est contrôlé par la meilleure intégrale de courbure à aire constante est essentiellement due à I. Benjamini et J. Cao, [BC].

LEMME 6. — *Soit (M, ds^2) une surface riemannienne de courbure R comprise entre k et K et d'aire A. On suppose que pour tout r, l'ensemble de niveau $\{R = r\}$ est de mesure nulle. Posons*

$$b(s) = \text{Aire}\,\{R \geq K - s\} \quad \text{et} \quad \gamma(s) = \int_{\{R \geq K-s\}} K - R.$$

Soit Γ la fonction sur $[0, A]$ telle que $\Gamma(0) = 0$ et

$$\Gamma'(b(s)) = \gamma(s),$$

(Γ est bien définie car b est un homéomorphisme de $[0, K - k]$ sur $[0, A]$). Alors pour tout disque $D \subset M$ d'aire a, on a

$$\text{Long}\,\partial D^2 \geq 4\pi a - Ka^2 + 2\Gamma(a).$$

Reprenons la preuve de F. Fiala. On note r la distance maximum d'un point de D au bord, puis

$$D_t = \{y \in D \mid d(y, \partial D) \geq r - t\}, \quad L(t) = \text{Long}\,\partial D_t, \quad A(t) = \text{Aire}\,D_t.$$

Après des préparatifs techniques (remplacement de ds^2 par une métrique analytique réelle, analyse des singularités de ∂D_t, différentiabilité de L), on arrive à l'inégalité ([Fi], Théorème 3, page 330)

$$(**) \qquad L'(t) \geq 2\pi - \int_{D_t} R.$$

Comme $R \leq K$, on obtient $L' \geq 2\pi - KA$, d'où $LL' \geq 2\pi A' - KAA'$ et enfin $L(t)^2 \geq 4\pi A(t) - KA(t)^2$. En faisant $t = r$, on trouve $\text{Long}\,\partial D^2 \geq 4\pi a - Ka^2$.

De $(**)$, on peut aussi tirer

$$L'(t) \geq 2\pi - KA(t) + \int_{D_t} K - R.$$

On utilise un argument de réarrangement. En déplaçant une partie infinitésimale de D_t vers une région où $K - R$ est plus petit, on ne peut que diminuer l'intégrale. Autrement dit (on donne les détails de l'argument au lemme 7), si s est choisi de sorte que $\text{Aire}\,\{K - R \leq s\} = \text{Aire}\,D_t$ (un tel s existe puisque b est un homéomorphisme), alors

$$\int_{D_t} K - R \geq \int_{\{K-R \leq s\}} K - R = \gamma(s).$$

De l'inégalité

$$L'(t) \geq 2\pi - KA(t) + \gamma(b^{-1}(A(t))) = 2\pi - KA(t) + \Gamma'(A(t))$$

on tire $LL' \geq 2\pi A' - KAA' + \Gamma'(A)A'$ puis $L(t)^2 \geq 4\pi A(t) - KA(t)^2 + \Gamma(A(t))$ car $L(0) \geq 0$, $A(0) = 0$. En faisant $t = r$, on trouve

$$\operatorname{Long} \partial D^2 \geq 4\pi a - Ka^2 + 2\Gamma(a).$$

□

LEMME 7. — *Soit u une fonction positive ou nulle sur M telle que les ensembles de niveau $\{u = t\}$ soient de mesure nulle. On note $b(r) = \operatorname{Aire}\{u \leq r\}$. Soit $s > 0$, soit D un ouvert de M d'aire $b(s)$. Alors*

$$\int_{\{u \leq s\}} u \leq \int_D u.$$

Posons $\delta(r) = \operatorname{Aire}(D \cap \{u \leq r\})$. Définissons la fonction σ par la relation $b(\sigma(r)) = \delta(r)$. Comme $\delta(r) \leq b(r)$, on a $\sigma(r) \leq r$. D'autre part,

$$\int_D u = \int_0^{+\infty} r \frac{d\delta}{dr}\, dr \geq \int_0^{+\infty} \sigma(r) \frac{db}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dr}\, dr = \int_0^s \sigma \frac{db}{d\sigma}\, d\sigma = \int_{\{u \leq s\}} u.$$

□

3.5. Preuve du théorème 1.

Il reste à estimer la fonction Γ dans le cas où les maxima de la courbure sont non dégénérés. Grâce au lemme 5, on peut supposer qu'il n'y qu'un seul maximum x. D'après le lemme de Morse, il existe un difféomorphisme $\phi : T_xM \to M$ défini au voisinage de 0 dont la différentielle en 0 est l'identité et tel que $R \circ \phi = K + \frac{1}{2}\operatorname{Hess}_x R$. Par conséquent, pour s assez petit,

$$b(s) = \operatorname{Aire}\{R \geq K - s\} \sim \operatorname{Aire}\{\operatorname{Hess}_x R \geq -2s\} \sim \frac{2\pi s}{\sqrt{\delta}}$$

où $\delta = \det \operatorname{Hess}_x R$. Aussi

$$\gamma(s) = \int_{\{R \geq K - s\}} K - R \sim \int_{\{\operatorname{Hess}_x R \geq -2s\}} -\frac{1}{2}\operatorname{Hess}_x R \sim \frac{\pi s^2}{\sqrt{\delta}}$$

d'où

$$\gamma \circ b^{-1}(a) \sim \frac{\sqrt{\delta}}{4\pi}\, a^2$$

et

$$\Gamma(a) \sim \frac{\sqrt{\delta}}{12\pi}\, a^3.$$

□

4. CONSTRUCTION DE MÉTRIQUES DE PROFIL PRESCRIT

4.1. Profil isopérimétrique de surfaces de révolution.

Dans la preuve du lemme 6, toutes les inégalités rencontrées sont des égalités dans le cas suivant :

- Pour chaque $t \in [0, r]$, le bord ∂D_t est lisse.
- Le domaine D_t est exactement un ensemble de niveau de la forme $R \geq K - s$.

Par conséquent, le profil isopérimétrique est connu exactement pour certaines surfaces de révolution.

Soit Θ une fonction lisse impaire sur $\mathbf{R}$ telle que $\Theta'(0) = 1$ et $\Theta(r) > 0$ si $r \neq 0$. On note M_Θ la variété $\mathbf{R}^2$ munie de la métrique de révolution $ds^2 = dr^2 + \Theta(r)^2 d\theta^2$. Elle est lisse et complète. En effet, on peut écrire $\Theta(r)^2 = r^2 + r^4 g(r^2))$ où g est lisse, donc $ds^2 = dx^2 + dy^2 + g(x^2 + y^2)(y^2 dx^2 - 2xydxdy + x^2 dy^2)$ est lisse à l'origine.

PROPOSITION 8. — *Soit Θ une fonction lisse impaire sur $\mathbf{R}$ telle que $\Theta'(0) = 1$ et $\Theta(r) > 0$ si $r \neq 0$. On suppose que la courbure*

$$R = -\frac{\Theta''}{\Theta}$$

est une fonction décroissante de r. Alors pour tout disque $D \subset M_\Theta$ d'aire égale à celle de $D_s = \{r \leq s\}$,

$$\operatorname{Long} \partial D \geq \operatorname{Long} \partial D_s.$$

Remarque 9. — Notons i la fonction sur $[0, +\infty[$ telle que $\operatorname{Long} \partial D_s = i(\operatorname{Aire} \partial D_s)$. Si de plus Θ est croissante, alors i est une fonction croissante, donc i est le profil isopérimétrique de M_Θ.

En effet, observons que le lemme 6 reste vrai pour un domaine Δ qui est une réunion disjointe de disques. Par conséquent, $\operatorname{Long}(\partial\Delta) \geq i(\operatorname{Aire} \Delta)$.

Soit $\Omega \in M_\Theta$ une sous-variété connexe compacte de codimension 0. Alors l'une des composantes du bord de Ω englobe toutes les autres. Autrement dit, il existe un disque D contenant Ω tel que $\partial D \subset \partial\Omega$. Plus généralement, si $\Omega \in M_\Theta$ est une sous-variété compacte de codimension 0 quelconque, il existe un domaine Δ, réunion disjointe de disques, tel que $\partial\Delta \subset \partial\Omega$. On a alors

$$\mathrm{Long}\,(\partial\Omega) \geq \mathrm{Long}\,(\partial\Delta) \geq i(\mathrm{Aire}\,\Delta) \geq i(\mathrm{Aire}\,\Omega).$$

$\square$

Voici une caractérisation de la classe de profils isopérimétriques obtenus par la construction de la proposition 8.

LEMME 10. — *Soit S une fonction définie sur un voisinage de 0, de classe C^∞ (resp. analytique) telle que*

$$S(0) = 0, \quad S'(0) = 4\pi, \quad S'''(0) > 0.$$

Il existe une unique fonction Θ impaire, lisse (resp. analytique) sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, qui satisfait $\Theta'(0) = 1$ et

$$S\Big(2\pi \int_0^s \Theta(r)\,dr\Big) = 4\pi^2\Theta(r)^2.$$

De plus,

$$R = -\frac{\Theta''}{\Theta}$$

est une fonction décroissante de r.

Preuve. — Cherchons plutôt la fonction lisse et paire $A(r) = 2\pi \int_0^r \Theta(s)\,ds$. On veut que $S(A(r)) = A'(r)^2$. La fonction réciproque $r(a)$ doit satisfaire

$$\frac{dr}{da} = \frac{1}{\sqrt{S(a)}} \quad \text{et} \quad r \sim \sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

Cela détermine la fonction r uniquement. On en tire A puis $\Theta = \dfrac{1}{2\pi}A'$.

Il reste à voir que A est lisse et paire. Écrivons

$$S(a) = 4\pi a(1 + 2aT(a))^{-2}$$

où T est lisse. Alors la fonction

$$\phi(x) = x + \int_0^x 2u^2T(u^2)\,du$$

est lisse et impaire. Elle satisfait, pour $a > 0$,

$$\frac{d}{da}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\phi(\sqrt{a}) = \frac{1}{\sqrt{S(a)}}.$$

Notons ψ la fonction réciproque. Elle est lisse et impaire, et la fonction

$$A(r) = \psi(r\sqrt{\pi})^2,$$

lisse et paire, satisfait $A'^2 = S \circ A$. De plus $A(r) \sim \pi r^2$ donc $\Theta = \dfrac{1}{2\pi} A'$ est la fonction cherchée.

Si S est analytique réelle, il en est de même de Θ.

Enfin, en dérivant deux fois l'identité $A'^2 = S \circ A$, on trouve que

$$R = -\frac{A'''}{A'} = -\frac{1}{2} S'' \circ A$$

est une fonction décroissante de r, si $S'''(0) > 0$. $\square$

4.2. Preuve du théorème 2.

Soient Θ_1, Θ_2 deux fonctions lisses impaires sur $\mathbf{R}$ qui satisfont aux hypothèses de la proposition 8. Soit $L > 0$. On suppose que $\Theta_2(2L - r) = \Theta_1(r)$ au voisinage de L. Alors on peut recoller les disques $\{r \le L\}$ de M_{Θ_1} et de M_{Θ_2} le long de leur bord pour obtenir une surface de révolution S_{Θ_1,Θ_2} difféomorphe à la 2-sphère.

En vertu du lemme 5, le profil isopérimétrique de S_{Θ_1,Θ_2} au voisinage de 0 est atteint pour des disques contenus dans M_{Θ_1} ou dans M_{Θ_2}. D'après la proposition 8, au voisinage de 0, le profil isopérimétrique de M_{Θ_1} est la fonction I_1 telle que

$$I_1\Big(2\pi \int_0^s \Theta_1(r)\, dr\Big) = 2\pi\Theta_1(r).$$

On conclut que, au voisinage de 0, le profil isopérimétrique de S_{Θ_1,Θ_2} est $\min\{I_1, I_2\}$. $\square$

Clairement, on peut choisir les fonctions S_1 et S_2 de sorte que la fonction $\min\{S_1(a), S_2(a)\}$ ne soit de classe C^1 dans aucun intervalle de la forme $]0, \epsilon[$. Le théorème 2 fournit donc des exemples de métriques lisses dont le profil isopérimétrique n'est de classe C^1 dans aucun intervalle de la forme $]0, \epsilon[$.

5. PROFIL D'UNE SURFACE ANALYTIQUE AU VOISINAGE DE 0

On va substituer à l'espace $\mathcal{V}$ de toutes les sous-variétés de codimension 0 de M une sous-famille qui possèdera une structure d'ensemble *sous-analytique* de dimension finie. Par définition, un sous-ensemble d'une variété analytique est semi-analytique si localement, c'est une union finie d'ensembles définis par des équations ou inéquations analytiques. Un ensemble sous-analytique est l'image d'un semi-analytique par une application analytique propre. L'adhérence d'un sous-analytique, une réunion de composantes connexes d'un sous-analytique sont des ensembles sous-analytiques, voir [H].

5.1. L'espace des courbes à courbure constante.

Soit M une variété riemannienne de dimension 2. Dans un premier temps, supposons M orientée, et notons J la rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le plan tangent. Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$(**) \qquad \frac{D}{dt}x'(t) = Jx'(t).$$

Si $t \mapsto x(t) \in M$ est une solution, alors la vitesse $|x'(t)|$ est constante. Si $|x'(0)| \neq 0$, alors x décrit une courbe à courbure géodésique constante $\frac{1}{|x'(0)|}$. Si $|x'(0)| = 0$, alors x est constante. Les solutions de l'équation $(**)$ sont les projections dans M des trajectoires d'un champ de vecteurs défini sur le fibré tangent TM (localement, il est hamiltonien, voir [A], chapitre 3). Lorsque M n'est pas orientable, on considère le fibré des repères orthogonaux RM. Un point r de RM est la donnée d'un point x de M et de vecteurs orthogonaux et de même norme v et $w \in T_xM$, et on note $\pi(r) = x$. L'équation $(**)$ est équivalente au système

$$x'(t) = v(t), \quad \frac{D}{dt}v(t) = w(t)$$

qui correspond de nouveau aux trajectoires d'un champ de vecteurs X défini sur RM.

Si M est compacte, X engendre un groupe à un paramètre ϕ_t de difféomorphismes de RM. Si la métrique riemannienne est analytique, il en est de même de X et de ϕ_t.

Notons $RM^- = \{r = (x, v, w) \in RM \mid |v| \leq 1\}$. L'ensemble des courbes fermées de courbure géodésique constante $h \geq 1$ est paramétré par l'ensemble analytique

$$\mathcal{C} = \{(r, t) \in RM^- \times \mathbf{R} \mid \phi_t(r) = r\}.$$

La longueur de la courbe (r, t) est $t|v|$. C'est une fonction sous-analytique sur $\mathcal{C}$. Le sous-ensemble $\mathcal{P}$ des courbes *simples* est un sous-analytique de

$\mathcal{C}$. En effet, c'est le complémentaire de la projection sur le premier facteur de

$$\{(r,t,s,u) \in \mathcal{C} \times \mathbf{R}^2 \mid (r,t) \in \mathcal{C},\ 0 \le s < u < t,\ \pi(\phi_s(r)) = \pi(\phi_u(r))\}.$$

Notons $\overline{\mathcal{P}}$ l'adhérence de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{C}$. Autrement dit, il s'agit de courbes fermées à courbure géodésique constante $h \geq 1$ qui sont limites de courbes simples.

LEMME 11. — *Si une courbe fermée simple à courbure géodésique constante a une courbure h très grande ou une longueur ℓ très petite, alors $\ell|h| \sim 2\pi$.*

Preuve. — Soit γ_j une suite de courbes fermées simples à courbure géodésique constante h_j et de longueur ℓ_j telle que $\ell_j|h_j|$ ne tende pas vers 2π.

Supposons que $|h_j|$ tende vers l'infini. Soit x_j un point de γ_j. Notons M_j la boule de centre x_j et de rayon $3|h_j|^{-1}$, munie de la métrique dilatée $h_j^2 ds^2$. Pour cette métrique, la courbure géodésique de la courbe γ_j vaut 1. Lorsque j tend vers l'infini, M_j converge C^∞ vers une boule de rayon 3 du plan euclidien et γ_j converge vers un arc de cercle de rayon 1 passant par l'origine, centré en un point p. On peut même supposer que le relèvement de $\gamma_j \cap M_j$ dans TM_j par son vecteur tangent unitaire converge au sens de Haudorff vers le relèvement de l'arc de cercle C dans $T\mathbf{R}^2$. Alors, lorsque j est grand, la courbe γ_j, tant qu'elle reste dans M_j, est transverse aux droites passant par p. Une telle courbe ne peut être fermée et simple que si elle converge vers le cercle parcouru exactement une fois (dans un sens ou dans l'autre). En particulier la longueur au sens de la métrique dilatée de γ_j converge vers 2π, i.e., $\ell_j|h_j|$ tend vers 2π, contradiction.

Supposons plutôt que ℓ_j tende vers 0 mais h_j reste borné. On dilate cette fois d'un facteur $1/\ell_j$ et on trouve des courbes fermées de longueur 1 qui convergent vers une droite du plan euclidien, contradiction. □

COROLLAIRE 12. — *La fonction longueur est propre sur $\overline{\mathcal{P}}$.*

Preuve. — Il faut montrer que la période t ne tend pas vers l'infini. Supposons au contraire que $(r_j, t_j) \in \overline{\mathcal{P}}$ avec t_j tendant vers $+\infty$ et $r_j = (x_j, v_j, w_j)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $(r_j, t_j) \in \mathcal{P}$. Comme la longueur $t_j|v_j|$ est bornée, $|v_j|$ tend vers 0, i.e., la courbure géodésique $h_j = 1/|v_j|$ de la courbe $\gamma_j = \pi(\phi_s(r_j))$ tend vers $+\infty$. D'après le lemme 11, Long $(\gamma_j)|h_j| = |v_j|$ tend vers 2π, contradiction. □

Soit $(r,t) \in \mathcal{P}$ une courbe fermée simple à courbure constante $h \geq 1$. Disons que (r,t) borde un disque D si la courbe $\gamma = \{\pi(\phi_s(r)) \mid 0 \leq s \leq t\}$ sépare M, et si la composante de $M \setminus \gamma$ vers laquelle pointe w est un disque.

Clairement, les courbes fermées simples qui bordent un disque forment une union de composantes connexes de $\mathcal{P}$, donc un ensemble sous-analytique $\mathcal{D}$. La fonction aire est bien définie sur $\mathcal{D}$. Notons $\overline{\mathcal{D}}$ l'adhérence de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{C}$. Les courbes de $\overline{\mathcal{D}}$ peuvent avoir des points doubles (tangences), mais comme elles sont limites de courbes simples, le disque (singulier) qu'elles bordent est bien défini.

LEMME 13. — *La fonction aire est analytique sur un voisinage de $\overline{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{C}^m$.*

Preuve. — C'est une propriété locale. Soit $(r,t) \in \overline{\mathcal{D}}$ une courbe à courbure géodésique constante qui borde un disque D éventuellement singulier. Choisissons, au voisinage de ∂D, une primitive analytique α de la forme d'aire riemannienne (la construction garde un sens même si le bord est seulement immergé, ce qui est le cas à la frontière de $\mathcal{D}$). Si D' est un disque proche de D, alors

$$\mathrm{Aire}\,(D') - \mathrm{Aire}\,(D) = \int_{\partial D'} \alpha - \int_{\partial D} \alpha$$

et l'intégrale de droite est une fonction analytique sur un voisinage de (r,t) dans $\mathcal{C}$. □

5.2. Preuve du théorème 3, au voisinage de 0.

Appelons *contour* d'un sous-ensemble $G \subset \mathbf{R}^2$ la fonction

$$c(x) = \inf\{y \mid (x,y) \in G\}.$$

Ainsi, le profil isopérimétrique de M est le contour de l'ensemble des couples $(\mathrm{Aire}\,(\Omega), \mathrm{Long}\,(\partial\Omega))$ où Ω décrit les sous-variétés à bord de codimension 0 de M.

PROPOSITION 14. — *Pour $\epsilon > 0$ assez petit, le profil isopérimétrique de M coïncide sur $[0,\epsilon]$ avec le contour de l'image de l'application*

$$(\mathrm{Aire}\,, \mathrm{Long}\,) : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^2.$$

Par conséquent, il est semi-analytique sur $[0,\epsilon]$.

Preuve. — D'après le lemme 5, pour $a > 0$ petit, tout domaine d'aire a dont le bord a une longueur minimale $I(a)$ est un disque D dont le bord ∂D a une courbure géodésique constante $h \geq 1$. Choisissons un point $x \in \partial D$, un vecteur tangent $v \in T_x\partial D$ de longueur $1/h$ et soit $w \in T_xM$ le vecteur normal de longueur $1/h$ rentrant de D. Notons $t = h\mathrm{Long}\,(\partial D)$. Alors le point $(x, v, w, t) \in \mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{D}$, son aire est a, sa longueur $I(a)$. Cela montre l'égalité des contours au voisinage de 0.

L'application $(\mathrm{Aire}\,, \mathrm{Long}\,) : \overline{\mathcal{D}} \to \mathbf{R}^2$ est sous-analytique et propre. Par conséquent, l'image G du sous-analytique $\mathcal{D}$ est un ensemble sous-analytique. Il en est de même de la projection sur les deux premiers facteurs de

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq \epsilon,\ (x, z) \in G,\ 0 \leq z < y\}$$
$$= \{(x, y) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq \epsilon,\ y \geq I(x)\}$$

et donc du graphe de la fonction I. On conclut avec un théorème de S. Łojasiewicz, voir par exemple [KJZ], qui affirme que toute fonction sous-analytique d'une variable est semi-analytique. □

5.3. L'espace des domaines à bord de courbure géodésique constante.

Pour couvrir tout l'intervalle $[0, A]$, $A = \mathrm{Aire}\,(M)$, il suffit d'apporter deux modifications à la discussion précédente :

- Inclure les courbes de courbure géodésique nulle.
- Tenir compte du fait que les domaines extrémaux peuvent ne pas être des disques.

LEMME 15. — *Soit $\epsilon > 0$. Il existe des constantes $H = H(M, \epsilon)$ et $N = N(M, \epsilon)$ telles que, si Ω est une sous-variété à bord de codimension 0 de M, d'aire $a \in [\epsilon, A - \epsilon]$, dont le bord est de longueur minimale, alors la courbure géodésique h du bord et le nombre n de composantes connexes du bord satisfont $|h| \leq H$ et $n \leq N$.*

Preuve. — Supposons d'abord que $n = 1$, i.e. que le bord $\partial\Omega$ est connexe. Montrons par l'absurde que $|h|$ est borné a priori. Sinon, d'après le lemme 11 $\mathrm{Long}\,(\partial\Omega)$ est de l'ordre de $2\pi/|h|$ donc tend vers 0. Une petite courbe plongée sépare M en deux composantes, dont l'une est un petit disque. Par conséquent, $\mathrm{Aire}\,(\Omega)$ ou $\mathrm{Aire}\,(M \setminus \Omega)$ est très petit, contradiction.

Supposons que $n > 1$, i.e., que $\partial\Omega$ a au moins deux composantes. D'après la stabilité sous contrainte (voir Lemme 5), $h^2 \leq -k$ où k est la borne inférieure de la courbure. D'après le lemme 11, il en résulte une borne inférieure de la longueur de chaque composante de $\partial\Omega$. Enfin, comme le profil isopérimétrique I est continu sur $[0, A]$, il est borné, donc le nombre de composantes est borné a priori. □

Remarque 16. — Pour borner a priori la courbure géodésique, on aurait pu utiliser la décroissance de la dérivée du profil isopérimétrique, voir Lemme 4.

Pour inclure les domaines dont le bord est de courbure nulle, on modifie la construction de 5.1. Pour $h \in [-H, H]$, on paramètre les courbes à courbure constante h par leur abscisse curviligne. L'équation $(**)$ devient

$$x'(t) = v(t), \quad \frac{D}{dt}v(t) = hw(t)$$

où la courbe $r(t) = (x(t), v(t), w(t)) \in R^1M$, le fibré des repères orthonormés. On obtient un flot ϕ_t^h sur R^1M dépendant analytiquement du paramètre h. Soit $\mathcal{C}'$ l'ensemble des trajectoires périodiques, i.e.

$$\mathcal{C}' = \{(r, t, h) \in R^1M \times \mathbf{R} \times [-H, H] \mid \phi_t^h(r) = r\},$$

et $\mathcal{P}' \subset \mathcal{C}'$ le sous-ensemble des trajectoires dont la projection dans M est une courbe simple. Il est clair que la fonction longueur t est propre sur $\overline{\mathcal{P}'}$.

Notons $\mathcal{B}_m$ le sous-ensemble du produit de m copies de $\mathcal{P}'$ formé des collections de m courbes simples deux à deux disjointes. Il est sous-analytique dans $\overline{\mathcal{P}'}$. Soit Ω une sous-variété à bord de codimension 0 de M, dont le bord est à courbure moyenne constante $h \in [-H, H]$ et a m composantes. Choisissons sur chaque composante du bord de Ω un point x, un vecteur unitaire v tangent au bord et notons w le vecteur unitaire orthogonal à v qui pointe vers l'intérieur de Ω. On appelle une telle donnée un *domaine marqué* et on note $\mathcal{O}_m$ l'ensemble des domaines marqués de M. Le bord d'un domaine marqué Ω est un point $b(\Omega)$ de $\mathcal{B}_m$. L'image $\mathcal{D}_m$ de l'application $b : \mathcal{O}_m \to \mathcal{B}_m$ est une réunion de composantes connexes de $\mathcal{B}_m$, donc c'est un ensemble sous-analytique de $\overline{\mathcal{P}'}^m$, [H].

L'application b est injective. En effet, si on connaît $b(\Omega)$, pour savoir si un point x de M est dans Ω, il suffit de tracer un arc d'origine x, transverse à $\partial\Omega$, et de comparer l'orientation de cet arc à la normale choisie w. Par conséquent, la fonction aire est bien définie sur $\mathcal{D}_m$. Notons $\overline{\mathcal{D}}_m$ l'adhérence de $\mathcal{D}_m$ dans $\mathcal{C}'^m$. $\overline{\mathcal{D}}_m$ paramètre des domaines légèrement singuliers : certaines composantes du bord peuvent se toucher. La fonction aire est encore bien définie sur $\overline{\mathcal{D}}_m$, et pour la même raison qu'en 13, elle est analytique sur un voisinage de $\overline{\mathcal{D}}_m$ dans $\overline{\mathcal{P}'}^m$.

PROPOSITION 17. — *Pour tout $\epsilon > 0$, le profil isopérimétrique de M coïncide sur $[\epsilon, A - \epsilon]$ avec le contour de l'image de l'application*

$$(\mathrm{Aire}\,,\mathrm{Long}\,) : \bigcup_{m=1}^{N} \mathcal{D}_m \to \mathbf{R}^2.$$

Par conséquent, il est semi-analytique sur $[\epsilon, A - \epsilon]$.

En effet, d'après le lemme 15, le bord d'un domaine extrémal, une fois marqué, est dans l'ensemble sous-analytique $\bigcup_{m=1}^{N} \mathcal{D}_m$, où $N = N(M, \epsilon)$, $H = H(M, \epsilon)$. Ceci prouve l'égalité des contours. □

Remarque 18. — En se plaçant dans le contexte Fredholm (*cf.* [T]), il est probable qu'on peut étendre le théorème 3 aux dimensions supérieures.

BIBLIOGRAPHIE

[A] V. ARNOLD, Méthodes mathématiques de la mécanique classique, MIR, 1976.

[BP] C. BAVARD et P. PANSU, Sur le volume minimal de $\mathbf{R}^2$, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris, 19 (1986), 479-490.

[BC] I. BENJAMINI and J. CAO, A new isoperimetric comparison theorem for surfaces of variable curvature, Preprint, Cornell University, 1995.

[B] G. BOL, Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen, Jber. Deutsch. Math. Verein, 51 (1941), 219-257.

[F] F. FIALA, Sur le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive, Comment. Math. Helv., 13 (1941), 293-346.

[F] W. FLEMING, Flat chains over a finite coefficient group, Trans. Amer. Math. Soc., 121 (1966), 160-186.

[H] H. HIRONAKA, Subanalytic sets. In "Number theory, algebraic geometry and commutative algebra", Conference in honour of Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973, 453-494.

[HHM] H. HOWARDS, M. HUTCHINGS and F. MORGAN, The isoperimetric problem on surfaces, Preprint Princeton Univ., 1997.

[KJZ] K. KURDYKA, S. ŁOJASIEWICZ and M.A. ZURRO, Stratifications distinguées comme outils en géométrie semi-analytique, Manus. Math., 86 (1995), 81-102.

[RR] M. RITORE and A. ROS, Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric problem in three space forms, Comment. Math. Helv., 67 (1992), 293-305.

[T] M. TAMM, Subanalytic sets in the calculus of variations, Acta Math., 146 (1981), 167-199.

Manuscrit reçu le 21 avril 1997,
accepté le 23 septembre 1997.

Pierre PANSU,
Université Paris-Sud
U.R.A. D1169 du C.N.R.S.
Mathématiques, Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France).
Pierre.Pansu@math.u-psud.fr