Annales de l'institut Fourier

Jean-Pierre Vigué

Sur les domaines hyperboliques pour la distance intégrée de Carathéodory

Annales de l'institut Fourier, tome 46, nº 3 (1996), p. 743-753

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_3_743_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 3 (1996), 743-753

SUR LES DOMAINES HYPERBOLIQUES POUR LA DISTANCE INTÉGRÉE DE CARATHÉODORY

par Jean-Pierre VIGUÉ

1. Introduction.

Dans cet article, nous considérerons une variété analytique complexe X de dimension finie n, et nous étudierons la pseudodistance de Carathéodory c_X, la pseudodistance intégrée de Carathéodory c^i_X et la pseudométrique infinitésimale associée γ_X sur X.

Conformément aux définitions du livre de M. Jarnicki et P. Pflug [9], nous dirons que X est c_X-hyperbolique (resp. c^i_X-hyperbolique) lorsque c_X (resp. c^i_X) est une distance sur X. Rappelons que, lorsque X est c_X-hyperbolique, la topologie définie par c_X peut être strictement moins fine que la topologie de variété de X, comme le montrent un exemple de M. Hayashi [7] pour les variétés et un exemple de M. Jarnicki, P. Pflug et J.-P. Vigué [10] pour les domaines de $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 3$). En revanche, si X est c^i_X-hyperbolique, on déduit facilement du fait que X est localement compact et que c^i_X est une distance intégrée que c^i_X définit la topologie de X (voir M. Jarnicki et P. Pflug [9]).

D'autre part, on dit que X est γ_X-hyperbolique si, en chaque point x de X, $\gamma_X(x,.)$ est une norme sur le fibré tangent $T_x(X)$ au point x. Nous montrerons (et c'est un résultat facile) que, si X est γ_X-hyperbolique, X est c_X-hyperbolique localement et c^i_X-hyperbolique. Cependant, nous construirons au paragraphe 5 un exemple de variété X c^i_X-hyperbolique et

Mots-clés : Pseudodistance de Carathéodory – Pseudodistance intégrée de Carathéodory – Domaine hyperbolique.
Classification math. : 32H15 – 32H20.

non γ_X-hyperbolique. Le même exemple nous montrera que X peut être c_X^i-hyperbolique, mais pas c_X-hyperbolique, même localement. L'exemple que nous construirons est une variété complexe de dimension 1, et sa construction s'inspire des idées de M. Hayashi [7] et M. Hayashi, M. Nakai et S. Segawa [8]. Une fois cette construction faite, nous montrerons au paragraphe 6 comment on peut, comme M. Jarnicki, P. Pflug et J.-P. Vigué [10], plonger la variété obtenue dans $\mathbb{C}^3$, ce qui permet de construire un exemple ayant les mêmes propriétés et qui est un domaine de Stein (et même de Runge) dans $\mathbb{C}^3$. Enfin, nous rappellerons rapidement ce qui se passe pour un domaine du plan complexe $\mathbb{C}$.

Dans la première partie de notre travail, nous montrerons la caractérisation suivante des variétés c_X^i-hyperboliques.

THÉORÈME 1.1. — *Soit X une variété complexe de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est c_X^i-hyperbolique;*

(ii) *la distance de Carathéodory c_X sur X vérifie la propriété de séparation faible suivante : pour tout point a de X, il existe un voisinage U de a tel que, pour tout point $x \in U$ distinct de a, $c_X(a,x) \neq 0$.*

Il est intéressant de remarquer, et ce sera le cas dans notre exemple, que le fait que c_X^i soit une distance n'entraîne pas que c_X sépare les points de X, même localement.

2. Rappels sur la distance de Carathéodory.

Soit X une variété analytique complexe de dimension finie. La pseudodistance de Carathéodory c_X sur X est définie (voir par exemple S. Dineen [3], T. Franzoni et E. Vesentini [4], L. Harris [6], M. Jarnicki et P. Pflug [9] ou S. Kobayashi [11]) par la formule

$$c_X(x,y) = \sup_{f \in H(X,\Delta)} \rho(f(x),\, f(y)),$$

où $H(X,\Delta)$ désigne l'ensemble des applications holomorphes de X dans le disque-unité Δ, et ρ est la distance de Poincaré sur Δ. De même, la pseudométrique infinitésimale de Carathéodory γ_X est définie sur le fibré tangent $T(X)$ à X (voir [3], [4], [6], [9] et [11]) par

$$\gamma_X(x,v) = \sup_{f \in H(X,\Delta)} |Df(x) \cdot v| \quad (x \in X,\ v \in T_x(X)).$$

On peut alors définir la longueur $L(\alpha)$ d'un chemin $\alpha : [0,1] \to X$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de la façon suivante :

$$L(\alpha) = \int_0^1 \gamma_X(\alpha(t),\ D\alpha(t))\, \mathrm{d}t.$$

On peut d'ailleurs montrer (voir [3] ou [9]) que $L(\alpha)$ est aussi la borne supérieure, pour toutes les subdivisions finies $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ de [0,1], de la somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_X(\alpha(t_i),\ \alpha(t_{i+1})).$$

On définit alors la pseudodistance intégrée de Carathéodory c_X^i de la façon suivante : si x et y sont deux points de X, $c_X^i(x,y)$ est la borne inférieure des longueurs $L(\alpha)$ des chemins α de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'origine x et d'extrémité y.

D'autre part, les distances invariantes et en particulier, la distance de Carathéodory ont été l'objet de recherches actives. Citons, à titre d'exemples, les résultats de T. Barth [1] sur la comparaison de la distance de Carathéodory et la distance intégrée de Carathéodory, un résultat de L. Belkhchicha et J.-P Vigué [2] sur les espaces complets pour ces distances, des résultats de L. Lempert [12] et H. Royden et P. Wong [13] sur l'égalité des distances de Carathéodory et Kobayashi sur un domaine convexe borné. Signalons enfin que ces distances servent à des généralisations du lemme de Schwarz (voir par exemple [15] et [16]). Pour des références plus complètes, on peut consulter le livre de M. Jarnicki et P. Pflug [9].

3. Premières propriétés de c_X et c_X^i.

Soit X une variété complexe de dimension n. En ce qui concerne c_X, on démontre facilement le résultat suivant.

Proposition 3.1. — *L'ensemble*

$$A = \{(x,y) \in X \times X | c_X(x,y) = 0\}$$

est un sous-ensemble analytique de $X \times X$.

Démontration. — En effet, A est l'ensemble des zéros communs à toutes les fonctions holomorphes

$$g(x,y) = f(x) - f(y),$$

où $f : X \to \Delta$ est une application holomorphe de X dans Δ. C'est donc un sous-ensemble analytique de $X \times X$ contenant la diagonale de $X \times X$.

On en déduit en particulier la

PROPOSITION 3.2. — *Pour tout $a \in X$,*

$$A_a = \{x \in X | c_X(a,x) = 0\}$$

est un sous-ensemble analytique de X.

Pour la métrique infinitésimale de Carathéodory, on définit $V \subset T(X)$ par la formule

$$V = \{(x,v) \in T(x) | \gamma_X(x,v) = 0\}.$$

Il est clair que V est aussi défini comme

$$\{(x,v) \in T(X) | Df(x) \cdot v = 0, \quad \forall f \in H(X,\Delta)\}.$$

On en déduit la

PROPOSITION 3.3. — *V est un sous-ensemble analytique de $T(X)$ contenant la section nulle. De plus, pour tout $x \in X$, $V_x = V \cap T_x(X)$ est un sous-espace vectoriel complexe de $T_x(X)$.*

Bien sûr, dire que X est γ_X-hyperbolique signifie simplement que V est égal à la section nulle $\{0\}$ de $T(X)$. Les propriétés de V sont précisées dans le théorème suivant.

THÉORÈME 3.4. — *Pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$,*

$$\{x \in X | \dim V_x \geqslant p\}$$

est un sous-ensemble analytique fermé de X. On en déduit en particulier que

$$\{x \in X | \dim V_x < p\}$$

est un ouvert de X.

Démontration. — Considérons un ouvert U de X sur lequel il existe des coordonnées locales. Quitte à identifier U et son image, on peut considérer que U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et on identifie alors $T(U)$ à $U \times \mathbb{C}^n$.

Soit $x \in U$. Dire que $\dim V_x \geqslant p$ est équivalent à dire que, pour toute famille $(f_1, \ldots, f_q)$ de fonctions holomorphes bornées sur X,

$$\operatorname{Ker}(f_1', \ldots, f_q')$$

est de dimension supérieure ou égale à p. C'est équivalent au fait que le rang de l'application linéaire $(f_1', \ldots, f_q')$ est inférieur ou égal à $(n-p)$, est ceci est caractérisé par la nullité des mineurs de taille $(n-p+1)$ de la matrice de l'application $(f_1', \ldots, f_q')$. Ceci montre le résultat.

Comme l'on montré M. Hayashi, M. Nakai et S. Segawa [8], une variété X peut être γ_X-hyperbolique sans être c_X-hyperbolique. Cependant, on a le résultat de nature locale suivant.

PROPOSITION 3.5. — *Soit X une variété analytique complexe et soit $x \in X$. Supposons que X soit γ_X-hyperbolique au point $x \in X$ (i.e., $\gamma_X(x, \cdot)$ est une norme sur le fibré tangent $T_x(X)$). Alors X est localement c_X-hyperbolique au point x, ce qui signifie qu'il existe un voisinage U de x dans X tel que $c_X|_U$ soit une distance sur U.*

Démontration. — En effet, l'hypothèse que X est γ_X-hyperbolique au point $x \in X$ entraîne que, pour tout $v \in T_x(X)$ $(v \neq 0)$, il existe $f \in H(X, \Delta)$ telle que $Df(x) \cdot v \neq 0$. Un vecteur $v_1 \in T_x(X)$ $(v_1 \neq 0)$ étant donné, on choisit $f_1 \in H(X, \Delta)$ telle que $Df_1(x) \cdot v_1 \neq 0$. On choisit alors $v_2 (\neq 0)$ dans le noyau de $Df_1(x)$ et ensuite une fonction f_2 telle que $Df_2(x) \cdot v_2 \neq 0$. On construit ainsi par récurrence une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et des fonctions holomorphes $(f_1, \ldots f_n)$ à valeurs dans Δ telles que $(Df_1(x), \ldots, Df_n(x))$ soit un isomorphisme linéaire. Le théorème d'inversion locale montre que $f = (f_1, \ldots, f_n)$ est un isomorphe analytique d'un voisinage U de x dans X sur son image. Ceci entraîne que c_X sépare les points de U.

Bien sûr, si on suppose que X est γ_X-hyperbolique, alors X est c_X-hyperbolique localement (en ce sens que chaque point x de X possède un voisinage U tel que $c_X|_U$ soit une distance sur U). Comme nous le verrons, ceci entraîne que X est c_X^i-hyperbolique, mais la réciproque est fausse : la variété X peut être c_X^i-hyperbolique sans être γ_X-hyperbolique.

L'étude de la pseudodistance intégrée de Carathéodory présente sans doute plus de difficultés. On peut cependant montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 3.6. — *Pour tout $a \in X$,*

$$A_a^i = \{x \in X | c_x^i(a, x) = 0\}$$

est un sous-ensemble analytique de X.

Démonstration. — Comme $c_X \leqslant c_X^i$, il est clair que $A_a^i \subset A_a$ qui, comme nous l'avons déjà vu, est un sous-ensemble analytique de X. L'inégalité triangulaire montre que, pour tout $x \in A_a$, pour tout $y \in A_a$, $c_X(x, y) = 0$.

Si Y est une composante irréductible de A_a, l'ensemble des points réguliers de Y est une sous-variété connexe de X ; on peut donc joindre deux points réguliers de Y par un chemin $\alpha : [0, 1] \to \operatorname{Reg} Y$ de classe C^1, ce qui, en utilisant la seconde définition de $L(\alpha)$, montre que $c_X^i(x, y) = 0$. Par passage à la limite, on en déduit, pour tout $x \in Y$, pour tout $y \in Y$, $c_X^i(x, y) = 0$.

Ainsi donc, A_a^i est la réunion de certaines composantes irréductibles de A_a, et est donc un sous-ensemble analytique de X. Il est clair que A_a^i est en fait une réunion de composantes connexes de A_a et il est peut-être possible que A_a^i ne soit pas réduit à la composante connexe de A_a contenant a.

Pour l'instant, je n'ai pas de résultat concernant

$$A^i = \{(x, y) \in X \times X | c_X^i(x, y) = 0\}.$$

4. Sur les espaces hyperboliques pour la pseudodistance intégrée de Carathéodory.

Jusqu'à présent, les rapports entre les variétés c_X-hyperbolique et les variétés c_X^i-hyperboliques n'étaient pas clairs. Le théorème suivant donne un caractérisation des variétés c_X^i-hyperboliques et montre bien la différence entre les deux.

THÉORÈME 4.1. — *Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est c^i_X-hyperbolique;*

(ii) *il n'existe pas de chemin $\alpha : [0,1] \to X$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que, pour tout t, $D\alpha(t) \in V_{\alpha(t)}$ et tel que, pour au moins un t, $D\alpha(t)$ soit différent de 0;*

(iii) *pour tout $a \in X$, il existe un voisinage U de a tel que, pour tout point $x \in U$ distinct de a, $c_X(a,x) \neq 0$.*

Démonstration. — Montrons que (i) entraîne (ii). En effet, s'il existait un chemin $\alpha : [0,1] \to X$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que, pour tout t, $D\alpha(t) \in V_{\alpha(t)}$ et tel que, pour au moins un t, $D\alpha(t)$ soit différent de 0, la longueur $L(\alpha)$ de α serait nulle, et, pour tout $t, t' \in [0,1]$, $c^i_X(\alpha(t)), \alpha(t')) = 0$. Comme l'image d'un tel chemin α n'est pas réduit à un point, X ne serait pas c^i_X-hyperbolique. Le résultat est démontré.

Montrons que (ii) entraîne (iii). Pour cela, nous allons montrer que, s'il existe $a \in X$ tel que, pour tout voisinage U de a, il existe $x \in U$, $c_X(a,x) = 0$, alors on peut trouver un chemin $\alpha : [0,1] \to X$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que, pour tout t, $D\alpha(t)$ soit différent de 0 et appartienne à $V_{\alpha(t)}$. En effet, soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de voisinages de a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in U_n$ tel que $c_X(a,x_n) = 0$. La suite x_n converge vers a. Comme $A_a = \{x \in X | c_X(a,x) = 0\}$ est un sous-ensemble analytique de X et qu'il contient une suite convergeant vers a, A_a est, au voisinage de a, de dimension au moins égale à 1. Il suffit de considérer l'ensemble $\operatorname{Reg} A_a$ des points réguliers de A_a pour construire un chemin $\alpha : [0,1] \to \operatorname{Reg} A_a$ de classe $\mathcal{C}^1$, tel que $D\alpha(t) \neq 0$, pour tout t. Il est clair que la longueur de ce chemin est nulle. Comme l'ensemble des points où $D\alpha(t)$ n'appartient pas à $V_{\alpha(t)}$ est ouvert et que l'intégrale

$$\int_0^1 \gamma_X(\alpha(t),\ D\alpha(t))\,\mathrm{d}t$$

est nulle, on en déduit que $\gamma_X(\alpha(t), D\alpha(t)) = 0$, pour tout t, ce qui démontre le résulat.

Montrons enfin que (iii) entraîne (i). Comme $c_X \leqslant c^i_X$, il est clair que, pour tout $x \in U$,

$$c^i_X(a,x) > 0.$$

Si maintenant $x \notin U$, choisissons un voisinage compact V de a contenu dans U.

Comme c^i_X est une distance intégrée et que tout chemin α joignant a à x coupe la frontière ∂V de V, on a :

$$c^i_X(a,x) \geqslant c^i_X(a,\partial V) + c^i_X(\partial V, x).$$

Mais $c^i_X(a,\partial V) \geqslant c_X(a,\partial V)$, et d'après les propriétés des fonctions continues sur les compacts, $c_X(a,\partial V)$ est strictement positif. Le résultat est démontré.

5. Un exemple.

L'exemple que nous allons maintenant construire est une variété analytique complexe de dimension 1. Commençons par définir

$$X = \{(z,w) \in \Delta \times \mathbb{C} | w^2 = h(z)\},$$

où h est une fonction holomorphe sur le disque-unité Δ ayant tous ses zéros simples $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un intervalle réel $[a_0, 1[$, avec $a_0 > 0$ et tels que la condition de Blaschke ne soit pas satisfaite, i.e., tels que $\sum(1-|a_n|) = +\infty$. Alors X est une variété analytique complexe de dimension 1, et la projection $(z,w) \to z$ fait de X un revêtement ramifié à deux feuillets du disque-unité Δ. Soit $\sigma : X \to X$ l'involution du revêtement défini par $\sigma(z,w) = (z,-w)$. On considère les deux feuilles (disjointes) U' et U'' du revêtement au-dessus de l'ouvert simplement connexe $U = \Delta \backslash [a, 1[$ (avec $0 < a < a_0$). À partir de là, on construit une nouvelle surface de Riemann $\widehat{X}$ de la façon suivante : la feuille U' est laissée inchangée alors que, sur la feuille U'', on coupe la partie $\mathrm{Re}\, z < 0$, et on recolle les segments $[0, i[$ et $[0, -i[$ par l'identification $z \sim -z$. [Ceci revient à prendre le quotient de U'' par $z \sim -z$, c'est-à-dire, à remplacer U'' par $\Delta\backslash[a^2, 1[$, avec l'application de passage au quotient $z \to z^2$]. Soit $\widehat{X}$ la surface de Riemann (ou variété analytique complexe de dimension 1) ainsi obtenue et soit $s : X \to \widehat{X}$ l'application holomorphe naturelle de X dans $\widehat{X}$. Remarquons enfin que l'application $z \to z^2$ qui est définie et holomorphe sur X, passe au quotient et définit une application holomorphe $p : \widehat{X} \to \Delta$.(1)

(1) Je remercie vivement le rapporteur qui m'a indiqué la construction élégante de cet exemple. La construction donnée dans la première version de ce travail était inspirée des méthodes de [7] et [8] et utilisait des techniques de découpages et collages sur deux copies du disque-unité Δ.

Soit

$$X_+ = \{x = (z, w) \in X | \mathrm{Re}\ z > 0\}.$$

L'ensemble X_+ est un ouvert de X, stable par l'involution σ. La projection

$$X_+ \to \Delta_+ = \Delta \cap \{\mathrm{Re}\ z > 0\}$$

est un revêtement à deux feuillets ramifié aux points (a_n). Soit f une fonction holomorphe bornée sur $\widehat{X}$. Alors $g = f \circ s$ est une fonction holomorphe bornée sur X. La fonction

$$H(x) = (g(x) - g(\sigma(x)))^2$$

est définie sur X_+ et est stable par σ ; elle provient donc d'une application holomorphe bornée sur Δ_+ s'annulant aux points (a_n) ; comme cette suite ne satisfait pas à la condition de Blaschke, sur le disque $\Delta(1/2,\ 1/2)$, la condition $(g - g \circ \sigma)$ est identiquement nulle. Ainsi , $g = g \circ \sigma$. D'autre part, sur la feuille $\widehat{U}''$ obtenue par modification de U'', il est clair que f s'écrit comme une fonction holomorphe $\varphi(z^2)$. On en déduit qu'il existe une fonction holomorphe bornée k sur Δ telle que $f = k \circ p$. Nous avons donc montré le résultat suivant.

PROPOSITION 5.1. — *Sur $\widehat{X}$, toutes les fonctions holomorphes bornées sont de la forme $g \circ p$, où g est une fonction holomorphe sur le disque-unité Δ.*

Si on regarde maintenant U' (la feuille de X qui a été laissée inchangée dans la construction de $\widehat{X}$), et en identifiant U' à $\Delta \backslash [a, 1[$, on vérifie que, pour toute fonction holomorphe bornée sur $\widehat{X}$, pour tout $z \in U'$ tel que $-z \in U'$,

$$f(-z) = f(z)$$

et par suite, $Df(0) = 0$.

On en déduit que $c_{\widehat{X}}(z, -z) = 0$ et que $\gamma_{\widehat{X}}(0, v) = 0$, pour tout $v \in T_0(\widehat{X})$. Cependant, on vérifie facilement que $\widehat{X}$ satisfait à la propriété de séparation faible du théorème 4.1, et $\widehat{X}$ est $c^i_{\widehat{X}}$-hyperbolique.

6. Le cas des domaines.

Remarquons pour conclure, que l'on peut aussi construire des exemples qui soient des domaines de $\mathbb{C}^n$. En effet, X qui est une variété analytique complexe non compacte de dimension 1, est un espace de Stein. On peut donc comme dans M. Jarnicki, P. Pflug et J.-P Vigné [10] la plonger comme une sous-variété fermée Y de $\mathbb{C}^3$. D'après R. Gunning and H. Rossi [5], chapitre 8, théorème $C8$ et Y.-T Siu [14], il existe un voisinage U de Y que l'on peut choisir de Stein et même de Runge dans $\mathbb{C}^3$ et une rétraction holomorphe $\rho : U \to Y$.

Soit alors

$$V = \{z \in U | z - \rho(z) \in \Delta^3\},$$

et soit W la composante connexe de V contenant Y. On vérifie facilement que W est un domaine de Stein et de Runge dans $\mathbb{C}^3$, c_W^i-hyperbolique, mais ni c_W-hyperbolique, ni γ_W-hyperbolique.

En ce qui concerne les domaines de $\mathbb{C}$, on a le résultat suivant (comparer avec [9]).

THÉORÈME 6.1. — *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *D est c_D-hyperbolique;*

(ii) *D est γ_D-hyperbolique;*

(iii) *il existe des fonctions holomorphes bornées non constantes sur D;*

(iv) *D est c_D-hyperbolique localement;*

(v) *D est c_D^i-hyperbolique.*

Démonstration. — L'équivalence de (i), (ii) et (iii) est démontrée dans [9], p. 28. Il est clair d'autre part que (i) entraîne (iv) , (iv) entraîne (v) et que (v) entraîne (iii). Le résultat est démontré.

Remarquons enfin que le cas des domaines de $\mathbb{C}^2$ n'est pas réglé pour l'instant. D'autre part, il serait agréable d'avoir des exemples plus explicites dans $\mathbb{C}^3$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. BARTH, Some counterexamples concerning intrinsic distances, Proc. Amer. Math. Soc., 66 (1977), 49-59.

[2] L. BELKHCHICHA et J.-P. VIGUÉ, Sur les espaces complets pour la distance de Carathéodory, Atti Accad. Naz. Lincei (9), 5 (1994), 189-192.

[3] S. DINEEN, The Schwarz Lemma, Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1989.

[4] T. FRANZONI and E. VESENTINI, Holomorphic maps and invariant distances, Math. Studies 40, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[5] R. GUNNING and H. ROSSI, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.

[6] L. HARRIS, Schwarz-Pick systems of pseudo metrics for domains in normed linear spaces, In advances in Holomorphy, Mathematical Studies 34, North-Holland, Amsterdam, 1979, p. 345-406.

[7] M. HAYASHI, The maximal ideal space of the bounded analytic function on the Riemann surface, J. Math. Soc. Japan, 39 (1987), 337-344.

[8] M. HAYASHI, M. NAKAI and S. SEGAWA, Bounded analytic functions on two sheeted discs, Trans. Amer. Math. Soc., 333 (1992), 799-819.

[9] M. JARNICKI and P. PFLUG, Invariant distances and metrics in complex analysis, De Gruyter Exposition in Mathematics 9, De Gruyter, Berlin, 1993.

[10] M. JARNICKI, P. PFLUG and J.-P. VIGUÉ, The Carathéodory distance does not define the topology - the case of domains, C R. Acad. Sci. Paris, série I, 312 (1991), 77-79.

[11] S. KOBAYASHI, Intrinsic distances, measures and geometric function theory. Bull. Amer. Math. Soc., 82 (1976), 357-416.

[12] L. LEMPERT, Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains, Anal. Math., 8 (1982), 257-261.

[13] H. ROYDEN and P. WONG, Carathéodory and Kobayashi metrics on convex domains, preprint (1983).

[14] Y.-T. SIU, Every stein subvariety admits a Stein neighborhood, Inventiones Math., 38 (1976) 89-100.

[15] E. VESENTINI, Complex geodesics, Compositio Math., 44 (1981), 375-394.

[16] J.-P. VIGUÉ, Un lemme de Schwarz pour les domaines bornés symétriques irréductibles et certains domaines bornés strictement convexes, Indiana Univ. J., 40 (1991), 293-304.

Manuscrit reçu le 20 décembre 1995,
accepté le 15 février 1996.

Jean-Pierre VIGUÉ,
URA CNRS D132 «Groupes de Lie et Géométrie»
Mathématiques
Université de Poitiers
40, avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers Cedex (France).
vigue@mathrs.univ-poitiers.fr