

LAURENCE FOURRIER

Topologie d'un polynôme de deux variables complexes au voisinage de l'infini

Annales de l'institut Fourier, tome 46, n° 3 (1996), p. 645-687

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_3_645_0

© Annales de l'institut Fourier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TOPOLOGIE D'UN POLYNÔME DE DEUX VARIABLES COMPLEXES AU VOISINAGE DE L'INFINI

par Laurence FOURRIER (*)

0. Introduction.

Ce travail s'inscrit dans la recherche de systèmes complets d'invariants topologiques, algébriquement calculables, associés à un polynôme f de deux variables complexes. Les invariants que nous obtenons permettent de décrire complètement la topologie de f au voisinage de l'infini, c'est-à-dire en dehors d'un compact arbitrairement grand de \mathbb{C}^2 .

Nous distinguons deux types de relation d'équivalence :

1) La conjugaison usuelle : deux polynômes f et g de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} sont dits *topologiquement conjugués à l'infini* s'il existe deux compacts K, K' de \mathbb{C}^2 et deux homéomorphismes $H : \mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}'$ et $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tels que $h \circ f = g \circ H$.

2) La conjugaison des feuilletages : il existe un homéomorphisme $H : \mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}'$ transformant toute composante connexe d'une fibre de la restriction $f|_{\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}}$ en une composante connexe d'une fibre de la restriction $g|_{\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}'}$. Nous dirons alors que f et g sont *topologiquement \mathcal{F} -conjugués à l'infini*.

La classification topologique des germes de fonctions holomorphes est bien connue : un arbre pondéré est associé à tout germe f . Il se construit à partir de la donnée de la résolution de f ou bien à partir de l'entrelacs défini

(*) Une partie de ce travail a été effectuée à l'Université Complutense de Madrid et à l'Université de Valladolid. Ce séjour était financé par la DGICYT.

Mots-clés : Singularités – Résolution des singularités – Courbes algébriques planes – Nœuds et entrelacs.

Classification math. : 14B05 – 14E15 – 14Q05 – 57M25.

par la trace de $f^{-1}(0)$ sur une petite sphère. Cet arbre est un invariant topologique complet (voir [8], [21], [36]). En considérant \mathbb{C}^2 comme une carte de $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$, un voisinage de l'infini devient un voisinage d'une droite \mathbb{P}^1_∞ et la fonction holomorphe f , au voisinage de l'infini, devient une fonction méromorphe \bar{f} à pôles \mathbb{P}^1_∞ . Comme pour les germes de fonctions, il sera possible de se ramener par une succession d'éclatements à une situation localement simple mais des difficultés nouvelles apparaissent :

(a) on doit étudier une fonction holomorphe au voisinage d'un diviseur D qui n'est plus exceptionnel ;

(b) on ne peut localiser la situation au but car au voisinage de D , la fonction prend toutes ses valeurs et certaines composantes de D sont transverses aux fibres de la fonction.

Plus précisément, on peut séparer les pôles des zéros de \bar{f} par une succession d'éclatements. Nous effectuons alors une série d'éclatements supplémentaires afin d'obtenir une situation «à croisements normaux» : on a une fonction F d'une surface compacte à valeurs dans $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ dont nous explicitons les modèles locaux et que nous étudions au voisinage d'un diviseur à croisements normaux. En restriction à certaines composantes du diviseur, appelées classiquement dicritiques, F prend toutes ses valeurs. Ces composantes ne se coupent pas. Sur les autres F prend des valeurs constantes c_i dont ∞ .

Nous prouvons ici que ces valeurs c_i différentes de ∞ , auxquelles on ajoute les valeurs correspondant aux fibres multiples sont exactement celles où f n'est pas une fibration topologique «à l'infini» (dites *valeurs irrégulières à l'infini*). Des critères topologiques d'irrégularité (voir [14], [30]) ou analytiques (voir [12]) sont bien connus ; notre construction donne un algorithme algébrique permettant de calculer ces valeurs irrégulières. Pour ce faire, nous décrivons la topologie à l'infini des fibres régulières voisines des fibres $f^{-1}(c_i)$. En particulier, on compare leur caractéristique d'Euler à celle de $f^{-1}(c_i)$. On obtient un résultat qui complète (et redémontre) celui de Hà et Lê [14] et permet de déterminer, à partir de la résolution, même si $f^{-1}(c_i)$ est multiple, s'il y a ou non saut de caractéristique d'Euler. Lorsqu'on classe par la conjugaison des feuilletages, on distingue les différentes branches à l'infini d'une même fibre de f . On a ainsi une notion de *branche (feuille) irrégulière à l'infini* et des résultats similaires.

Il est alors naturel de considérer comme invariant topologique possible :

(1) la donnée des paires de Puiseux à l'infini (voir [13]) des branches à l'infini de la courbe Z constituée de toutes les fibres irrégulières à l'infini et d'une fibre régulière quelconque et la donnée de leurs exposants de coïncidence (voir [13], [21]);

(2) l'entrelacs L formé de la trace de Z sur une grande sphère de \mathbb{C}^2 . Pour la classification par conjugaison des feuilletages, Z sera constituée uniquement des branches irrégulières à l'infini et d'une branche régulière.

D'après Neumann et Rudolph [24], [26], [27], l'extérieur de L est une variété graphée. On est ainsi amené à comparer l'arbre de satellisation de L avec l'arbre A (pondéré et fléché) « dual » de la résolution à l'infini de f . Cet arbre n'est pas canonique; il dépend de la compactification choisie de \mathbb{C}^2 . Considérons sa classe d'équivalence (deux arbres sont équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie « d'éclatements et de contractions »). On obtient :

THÉORÈME 1. — Soient f et g deux polynômes de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (1) f et g sont topologiquement \mathcal{F} -conjugués à l'infini;
- (2) f et g ont mêmes paires de Puiseux à l'infini et mêmes exposants de coïncidence;
- (3) les entrelacs associés à f et g sont conjugués;
- (4) les arbres duaux des résolutions à l'infini de f et g sont équivalents.

Remarquons que l'implication (2) \Rightarrow (3) s'interprète comme un théorème de type « Zariski-Lejeune » à l'infini.

Par contre, ce système d'invariants n'est pas complet pour la classification topologique des fonctions : il est nécessaire d'enrichir l'entrelacs L ainsi que l'arbre A par un « coloriage » rendant compte des valeurs des fibres. D'autre part, la monodromie du revêtement non ramifié de l'espace des bouts des fibres régulières de f sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ induit par f est visiblement un invariant topologique. Nous l'appelons 0-monodromie à l'infini de f . Il rend compte de la restriction de F aux composantes dicritiques.

THÉORÈME 2. — Deux polynômes primitifs (i.e. dont la fibre générique est connexe) f et g de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} sont topologiquement conjugués à l'infini si et seulement si leurs arbres colorés respectifs sont équivalents et leurs 0-monodromies à l'infini sont conjuguées.

La classification globale des polynômes semble nécessiter des invariants plus riches. En effet, par les mêmes méthodes, nous obtenons dans [9] la description topologique de f sur un ouvert constitué d'un voisinage de l'infini et de voisinages de chaque fibre irrégulière (y compris dans le fini). L'obtention d'un système complet d'invariants se ramène donc à la compréhension de la monodromie géométrique de la fibration constituée de toutes les fibres régulières à partir des monodromies locales autour de chaque valeur irrégulière.

Remerciements. — Je tiens à remercier le Professeur M. Boileau qui m'a intéressée à ce sujet et les Professeurs J.-F. Mattei, F. Michel, L. Rudolph et C. Weber pour d'enrichissantes discussions. Leurs remarques et leurs critiques m'ont toujours été profitables.

1. Résolution à l'infini d'un polynôme.

Soit f un polynôme de deux variables complexes de degré d ,

$$f(x, y) = \sum_{i+j \leq d} a_{ij} x^i y^j.$$

Considérons le plongement ouvert p de \mathbb{C}^2 dans $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ donné en coordonnées homogènes $[x, y, t]$ par :

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C}^2 &\hookrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{C}, \\ (x, y) &\longmapsto [x, y, 1]. \end{aligned}$$

Il décompose $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}^2 \sqcup \mathbb{P}^1_\infty$ où \mathbb{P}^1_∞ est la droite «à l'infini» d'équation $t = 0$.

Le polynôme f induit une application méromorphe sur $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ dont le lieu des pôles est \mathbb{P}^1_∞ . Notons :

$$\bar{f} : \mathbb{P}^2\mathbb{C} \setminus \Sigma^0 \longrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C},$$

l'application holomorphe induite, $\Sigma^0 \subset \mathbb{P}^1_\infty$ désignant l'ensemble (fini) des points d'indétermination de \bar{f} (l'intersection des pôles et des zéros de \bar{f}).

On voit que :

$$\Sigma^0 = \{ [x, y, 0] \in \mathbb{P}^1_\infty ; f_d(x, y) = 0 \} \quad \text{avec} \quad f_d(x, y) = \sum_{i+j=d} a_{ij} x^i y^j.$$

Rappelons, pour préciser les notations, quelques résultats bien connus sur la réduction des fonctions méromorphes.

DÉFINITION 1. — Soit G un germe de fonction méromorphe en un point m d'une variété V de dimension 2 et $E \subset V$ un germe de courbe en m

à croisement normal. Nous disons que le couple (G, E) est réduit en m s'il existe en ce point des coordonnées analytiques (u, v) , et des entiers $p, q \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0$ ou 1 tels que :

$$(1) \quad G - G(m) = u^p v^q \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{G} = u^p v^q;$$

$$(2) \quad E = (uv^\alpha = 0).$$

PROPOSITION 1. — Soit G une fonction méromorphe au voisinage d'un diviseur compact E à croisements normaux d'une variété V de dimension 2. Il existe une application Π d'une variété holomorphe \bar{V} dans V , obtenue par composition d'éclatements de points, telle que le couple $(G \circ \Pi, \Pi^{-1}(E))$ soit réduit en chaque point m de $\Pi^{-1}(E)$.

Idee de la démonstration. — Elle peut se faire en deux étapes.

- Étape 1 : on va construire une application $\pi' : V' \rightarrow V$ par composition d'éclatements telle qu'en chaque point de $\pi'^{-1}(E)$, $G \circ \pi'$ ou $(G \circ \pi')^{-1}$ soit holomorphe. Pour cela, on considère la suite d'éclatements (π_i) , $\pi_i : V_i \rightarrow V_{i-1}$, définie de la manière suivante : $V_0 = V$, π_i est l'application d'éclatement (simultané) de l'ensemble fini $\Sigma^{i-1} \subset V_{i-1}$ constitué des points où ni $G \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{i-1}$ ni $(G \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{i-1})^{-1}$ ne sont holomorphes. Ce procédé s'arrête car la multiplicité d'intersection du lieu des pôles et des zéros de G diminue strictement après chaque éclatement. Notons π' le composé des π_i .

- Étape 2 : en chaque point m de $\pi'^{-1}(E)$, on considère le germe de courbe Γ_m formé de $\pi'^{-1}(E)$ et de la courbe d'équation $G \circ \pi' - G \circ \pi'(m) = 0$ ou $1/G \circ \pi' = 0$. On fait alors en chaque point m où le couple $(G, \pi'^{-1}(E))$ n'est pas réduit la succession d'éclatements minimale nécessaire à la réduction de Γ_m (voir [3]). □

En appliquant cette proposition, on «résout» le couple $(\bar{f}, \mathbb{P}_\infty^1)$. Ce procédé de réduction est unique et bien défini.

DÉFINITION 2. — Nous appelons *élimination des indéterminations de f* associée à la compactification p de \mathbb{C}^2 la donnée du couple $(\pi', \bar{F} = \bar{f} \circ \pi')$ où $\pi' : X' \rightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ est exactement obtenu par la construction de la première étape de la démonstration ci-dessus.

Nous appelons *résolution à l'infini de f* associée à la compactification p de \mathbb{C}^2 la donnée du couple $(\Pi, F = \bar{f} \circ \Pi)$ où $\Pi : \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ est le composé des éclatements utilisés dans les deux étapes de la proposition 1.

Nous allons donner maintenant une autre construction de π' par « création de chaînes », inspirée de [6], qui nous sera utile par la suite. Cette construction se fait par récurrence.

Pas 0 :

(i)₀ on éclate simultanément tous les points de $\Sigma^0 : \pi_0^0 : X_0^0 \rightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{C}$;

(ii)₀ on effectue la suite d'éclatements de points $\pi_i^0 : X_i^0 \rightarrow X_{i-1}^0$ pour $1 \leq i \leq r_0$, définie par : π_i^0 est le morphisme d'éclatement de centre Σ_{i-1}^0 en prenant pour $\Sigma_{i-1}^0 \subset X_{i-1}^0$ l'ensemble des points singuliers du diviseur $(\pi_0^0 \circ \dots \circ \pi_{i-1}^0)^{-1}(\mathbb{P}_\infty^1)$ qui sont des points d'indétermination de $\bar{f} \circ \pi_0^0 \circ \dots \circ \pi_{i-1}^0$.

Ainsi tous les points d'indétermination de $\bar{f} \circ \pi_0^0 \circ \dots \circ \pi_{r_0}^0 = \bar{f} \circ \Pi^0$ sont des points réguliers de $(\Pi^0)^{-1}(\mathbb{P}_\infty^1)$.

Pas k :

(i)_k on éclate simultanément tous les points d'indétermination de $\bar{f} \circ \Pi^0 \circ \dots \circ \Pi^{k-1}$ sur $(\Pi^0 \circ \dots \circ \Pi^{k-1})^{-1}(\mathbb{P}_\infty^1)$ où, pour $j = 1, \dots, k-1$, Π^j désigne le composé des morphismes d'éclatement de points du pas j . Ce sont nécessairement des points réguliers de $(\Pi^0 \circ \dots \circ \Pi^{k-1})^{-1}(\mathbb{P}_\infty^1)$;

(ii)_k cette étape est identique à l'étape (ii)₀ du pas 0 : on effectue la suite d'éclatements des points singuliers des diviseurs qui sont aussi points d'indétermination.

Remarque 1. — À chaque pas k , le diviseur exceptionnel de Π^k est une union de chaînes : chaque composante irréductible intersecte au plus en deux points les autres composantes du diviseur exceptionnel de $\Pi^0 \circ \dots \circ \Pi^k$.

Remarque 2. — En tout point m du diviseur $D = \Pi^{-1}(\mathbb{P}_\infty^1) \subset \bar{X}$, la fonction $F_m = F - F(m)$ ou $1/F$ si $F(m) = \infty$ s'écrit, dans des coordonnées appropriées (u, v) centrées en m , sous l'une des cinq formes de la figure 1.

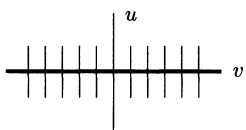
Considérons maintenant la fonction holomorphe F en restriction à une composante irréductible E_i de D . Deux cas de figure se présentent :

(i) soit $F(E_i) = \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ et on dit alors que E_i est une *composante dicritique* de D (modèles 1 et 2),

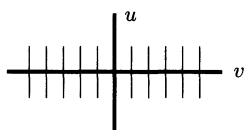
(ii) soit $F|_{E_i}$ prend une valeur constante finie ou infinie (modèles 3, 4, 5).

Ainsi le diviseur D se décompose naturellement en :

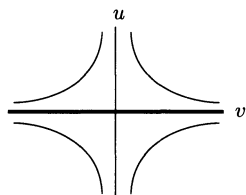
(a) $D_\infty = F^{-1}(\infty)$,



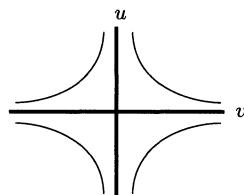
1) D a pour équation $u = 0$
et $F_m(u, v) = v^q, q \in \mathbb{N}^*$,



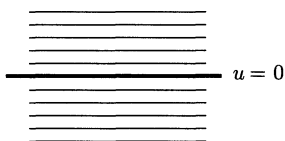
2) D a pour équation $uv = 0$
et $F_m(u, v) = v^q, q \in \mathbb{N}^*$,



3) D a pour équation $u = 0$
et $F_m(u, v) = u^p v^q, p, q \in \mathbb{N}^*$,



4) D a pour équation $uv = 0$
et $F_m(u, v) = u^p v^q, p, q \in \mathbb{N}^*$,



5) D a pour équation $u = 0$
et $F_m(u, v) = u^p, p \in \mathbb{N}^*$.

Figure 1 : les cinq formes de la fonction F_m de la remarque 2.

(b) D_{dic} , l'union (disjointe) des composantes dicritiques de F ,

(c) D_{crit} , l'union des composantes de D sur lesquelles la fonction F prend des valeurs finies c_1, \dots, c_r .

DÉFINITION 3. — Nous appelons valeur irrégulière à l'infini du polynôme f les «valeurs critiques finies» (c_1, \dots, c_p) de la restriction de F à $D : D \rightarrow \mathbb{P}_{\infty}^1$, c'est-à-dire (d'après la remarque 2) :

- (i) les éléments c_1, \dots, c_r de $F(D_{\text{crit}})$;
- (ii) les valeurs critiques de la restriction de F à $D_{\text{dic}} \setminus D_{\infty}$.

Une valeur qui n'est pas irrégulière à l'infini est dite régulière à l'infini.

Les fibres $f^{-1}(c_1), \dots, f^{-1}(c_p)$ sont dites fibres irrégulières à l'infini.

Les autres fibres sont appelées fibres régulières à l'infini.

Nous noterons dans la suite Λ_f^∞ l'ensemble (fini) des valeurs irrégulières à l'infini de f .

DÉFINITION 4. — Nous appelons transformées strictes à l'infini associée à une fibre $f^{-1}(\lambda)$ de f toute composante irréductible du germe de courbe le long de D défini par $\overline{F^{-1}(\lambda)} \setminus \overline{D}$. Nous dirons qu'une composante irréductible E du diviseur D porte une transformée stricte s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{F^{-1}(\lambda)} \setminus \overline{D} \cap E \neq \emptyset$.

LEMME 1.

(i) les composantes E de D_{crit} ne portant pas de transformée stricte à l'infini d'une fibre de f ont toutes des autointersections $\langle E, E \rangle$ inférieures ou égales à -2 ,

(ii) les composantes de D_∞ ont toutes des autointersections inférieures ou égales à -2 sauf peut-être \mathbb{P}_∞^1 qui peut avoir une autointersection égale à 0 ou à -1 .

Démonstration. — Si une composante E de D autre que \mathbb{P}_∞^1 a une autointersection -1 , alors lors de sa « création » (dans le processus de réduction que l'on s'est fixé), en chacun de ses points, le couple fonction méromorphe-diviseur est réduit. En effet, l'autointersection d'une composante du diviseur baisse de 1 chaque fois qu'on éclate l'un de ses points. Ainsi si la composante E n'est pas dicritique elle correspond à un éclatement de la deuxième étape. Par minimalité de la réduction des courbes, elle porte une transformée stricte. \square

La forme particulière de la fonction méromorphe \bar{f} de $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ due au fait qu'elle est définie à partir d'un polynôme de \mathbb{C}^2 va induire des restrictions sur la forme du diviseur D .

LEMME 2.

- (a) $D_\infty \cap D_{\text{crit}} = \emptyset$;
- (b) toute composante de D_{dic} intersecte D_∞ et toute composante connexe de D_{crit} intersecte D_{dic} ;
- (c) D_∞ est connexe.

Démonstration. — Les affirmations (a) et (b) sont immédiates. Démontrons le point (c).

Soit $N(D)$ le voisinage tubulaire du diviseur D construit par plombage

(voir [23]) des fibrés normaux en disques au-dessus de chaque composante du diviseur. Notons W_∞ le plombage des fibrés en disques induit au-dessus des composantes de D_∞ . Le bord de $N(D)$ s'identifie à une sphère $S_R \subset \mathbb{C}^2$ de centre 0 et de rayon R suffisamment grand. De même W_∞ s'identifie à $F^{-1}(D(\infty, \varepsilon))$ où $D(\infty, \varepsilon)$ est un disque centré en $\infty \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ et de rayon ε assez petit. La variété $S = \partial N(D) \cap \partial W_\infty$ a pour bords des tores et ∂W_∞ s'obtient à partir de S en recollant des tores solides le long de ∂S . Ainsi la connexité de ∂W_∞ (et donc de D_∞) équivaut à celle de S . D'autre part, S est connexe d'après l'affirmation suivante de L. Rudolph citée dans la démonstration du théorème 4 de [24] :

AFFIRMATION. — *La variété $S_R \setminus F^{-1}(D(\infty, \varepsilon))$ est une réunion de tores solides dans $N(D)$.*

COROLLAIRE 1. — *Soit D' le diviseur obtenu lors de l'élimination des indéterminations de f et D'_{crit} l'union des composantes de D' sur lesquelles \bar{F} ($= \bar{f} \circ \pi'$) est constante et différente de l'infini. Alors les composantes connexes de D'_{crit} sont des chaînes. De plus l'autointersection $\langle E, E \rangle$ de chaque composante irréductible E de D'_{crit} est inférieure ou égale à -2 .*

Démonstration. — La connexité de D_∞ implique que chaque composantes de D'_{crit} , lors de sa « création », porte exactement un point d'indétermination situé en son point d'intersection avec une composante de D_∞ . □

DÉFINITION 5. — *Soit Γ une composante connexe de la partie lisse de l'union de D et des transformées strictes des fibres irrégulières à l'infini de f et soit c un point de Γ . On appelle multiplicité de $\bar{\Gamma}$ en c et on note $m_c(\bar{\Gamma}) \in \mathbb{Z}$ l'ordre de la série de Laurent de la restriction à une petite courbe lisse transverse à $\bar{\Gamma}$ en c de F si $\Gamma \subset D_\infty$, de $F - F(c)$ si $\Gamma \not\subset (D_{\text{dic}} \cup D_\infty)$ et $m_c(\bar{\Gamma}) = 0$ si $\Gamma \subset D_{\text{dic}}$.*

Il est clair que $m_c(\bar{\Gamma})$ est constante le long de Γ , nous la noterons $m_{\bar{\Gamma}}$ ou encore m_i si $\bar{\Gamma}$ désigne une composante E_i de D .

Nous allons montrer que les autointersections e_i des composantes E_i du diviseur D et les multiplicités m_i peuvent se déduire les unes des autres à partir des données de la résolution à l'infini de f .

Considérons la matrice d'intersection $A = ((a_{ij}))$ indexée par les composantes irréductibles $E_1 \dots E_n$ de D :

$$a_{ij} = \begin{cases} e_i & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } E_i \text{ intersecte } E_j, \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Remarque 3. — On voit facilement par récurrence sur le nombre d'éclatements de la résolution que $\det A = \pm 1$. La raison topologique de cette égalité est que le bord du plombage de fibrés en disques associé à D est une sphère (cf. [16]).

Pour $i = 1, \dots, n$, associons à chaque composante E_i de D l'entier ℓ_i défini par :

(i) $\ell_i = 0$ si $E_i \subset D_\infty$;

(ii) ℓ_i est égal à la somme des multiplicités des transformées strictes des fibres irrégulières à l'infini de f portées par E_i si $E_i \subset D_{\text{crit}}$;

(iii) si $E_i \subset D_{\text{dic}}$, ℓ_i est égal à $(1-p)r_i + v_i$ où p est le nombre de valeurs irrégulières à l'infini de f , v_i la somme des multiplicités des transformées strictes des fibres irrégulières à l'infini de f portées par E_i et r_i le degré de la restriction $F_i : E_i \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ de F à E_i .

PROPOSITION 2. — Notons :

(a) \vec{m} le vecteur colonne $((m_i))_{i=1\dots n}$,

(b) $\vec{\ell}$ le vecteur colonne $((\ell_i))_{i=1\dots n}$.

On a $A\vec{m} + \vec{\ell} = \vec{0}$.

Démonstration. — Remarquons que le diviseur D se construit à partir de \mathbb{P}_∞^1 et n'admet donc pas d'équation globale. On ne peut donc reprendre l'argument du corollaire 9.2, p. 78, de [16] qui est en défaut dans notre cas : l'autointersection $\langle F^*(\lambda), D \rangle$, pour λ générique appartenant à \mathbb{C} , est la somme des degrés des restrictions de F aux composantes dicritiques et est donc non nul. Par contre D_∞ , ainsi que chaque composante connexe C de D_{crit} admet une équation globale dans un voisinage de C (la restriction de $F!$) et donc $\langle F^*(\lambda), D_\infty \rangle = 0$ et $\langle F^*(\lambda), C \rangle = 0$.

(i) Considérons tout d'abord D_∞ comme le diviseur :

$$-F^*(\infty) = \sum_{E_i \subset D_\infty} m_i E_i.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ une valeur régulière finie suffisamment proche du point ∞ de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$; alors :

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \langle -F^*(\infty), E_k \rangle = \langle F^*(\lambda), E_k \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente la multiplicité d'intersection. On obtient :

$$\sum_{E_i \subset D_\infty} a_{ik} m_i = \begin{cases} 0 & \text{si } E_k \not\subset D_{\text{dic}}, \\ -r_k & \text{si } E_k \subset D_{\text{dic}}. \end{cases}$$

(ii) Considérons une valeur c_j irrégulière à l'infini pour f . Notons I_j l'union des composantes irréductibles de D incluses dans $F^{-1}(c_j)$. Formellement on a :

$$F^*(c_j) = \sum_{E_i \subset I_j} m_i E_i + \sum_{E_i \subset I_j} T_i^j + \sum_{E_\ell \subset D_{\text{dic}}} V_\ell^j$$

où T_i^j (resp. V_ℓ^j) représente la somme formelle des transformées strictes à l'infini de $f^{-1}(c_j)$ comptées avec leurs multiplicités qui sont portées par la composante E_i (resp. E_ℓ).

Soit $\mu \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ une valeur régulière finie suffisamment proche de c_j . Du système d'équations :

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \langle F^*(c_j), E_k \rangle = \langle F^*(\mu), E_k \rangle$$

nous tirons :

$$\begin{aligned} \sum_{E_i \subset I_j} a_{ik} m_i &= 0 && \text{si } E_k \not\subset I_j \cup D_{\text{dic}}, \\ \sum_{E_i \subset I_j} a_{ik} m_i + \ell_k &= 0 && \text{si } E_k \subset I_j, \\ \sum_{E_i \subset I_j} a_{ik} m_i + (v_k^j - r_k) &= 0 && \text{si } E_k \subset D_{\text{dic}}, \end{aligned}$$

où v_k^j est la somme des multiplicités des transformées strictes à l'infini de $f^{-1}(c_j)$ portées par E_k . On a $\sum_j v_k^j = v_k$.

Les équations de ce type pour toutes les valeurs irrégulières à l'infini de f ajoutées aux équations du (i) nous donnent la formule désirée. \square

2. Fibres régulières à l'infini d'un polynôme.

Nous avons vu que le diviseur $D_\infty + D_{\text{crit}}$ de la résolution à l'infini d'un polynôme f se décompose de manière naturelle en « blocs » : D_∞ et les différentes composantes connexes D_1, \dots, D_s de D_{crit} . Pour $i = 1, \dots, s, \infty$, considérons le voisinage formé de la composante connexe W_i de

$$F^{-1}(\overset{\circ}{B}_i) \cap \overline{\Pi^{-1}(\mathbb{P}^2\mathbb{C} \setminus \overset{\circ}{B}_R)}$$

qui contient D_i , où $B_i \subset \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ est un disque centré en $F(D_i)$ de rayon ε_i assez

petit et B_R la boule fermée de rayon R de \mathbb{C}^2 . Pour R suffisamment grand, le rayon ε_i de B_i peut être choisi assez petit de sorte que les fibres de F soient transverses à $\Pi^{-1}(\partial B_R)$. La restriction de F à $W_i^* = W_i \setminus F^{-1}(F(D_i))$ à valeurs dans $B_i^* = B_i \setminus F(D_i)$ est propre et transverse à ∂W_i , ainsi qu'à $W_i \cap D_{\text{dic}}$. On en déduit classiquement que la restriction de F à W_i^* est une fibration C^∞ localement triviale et qu'il existe au voisinage de tout $z_0 \in B_i^*$ une trivialisatation C^∞ de F qui préserve ∂W_i ainsi que $W_i \cap D_{\text{dic}}$. En effet, on peut construire deux champs de vecteurs C^∞ X_1 et X_2 tangents à ∂W_i et à $W_i \cap D_{\text{dic}}$ au voisinage du compact $F^{-1}(z_0) \cap W_i$ qui se projettent par TF sur deux champs de vecteurs C^∞ réguliers Z_1 et Z_2 linéairement indépendants au voisinage de z_0 (on le fait localement, puis on recolle par partition de l'unité). La composée du flot de X_1 et du flot de X_2 avec conditions initiales sur $F^{-1}(z_0)$ est reliée par F à la composée du flot de Z_1 et du flot de Z_2 avec conditions initiales z_0 , ce qui donne l'application de trivialisatation.

DÉFINITION 6. — Pour $i = 1, \dots, s, \infty$, notons F_i la fibre type de cette fibration épointée de son intersection avec D_{dic} ,

$$F_i = (F^{-1}(\lambda_0) \setminus D_{\text{dic}}) \cap W_i, \quad \lambda_0 \in B_i^*,$$

nous appelons $F_1, \dots, F_s, F_\infty$ composantes génériques à l'infini de f .

Si E_k est une composante irréductible du diviseur D , nous noterons δ_k la valence de E_k , c'est-à-dire le nombre de points d'intersection de E_k avec $D \setminus E_k$ et avec les transformées strictes de $f^{-1}(F(E_k))$.

PROPOSITION 3. — Désignons encore par m_k la multiplicité de la composante E_k du diviseur D . Pour $i = 1 \dots, s, \infty$, on a :

$$(i) \quad \chi(F_i) = \sum_{E_k \subset D_i} m_k(2 - \delta_k);$$

(ii) les composantes connexes de F_i sont deux à deux homéomorphes et leur nombre est égal au pgcd des multiplicités des composantes de D_i et des transformées strictes à l'infini de $f^{-1}(F(D_i))$ qui se branchent sur D_i .

Démonstration.

(i) Notons $N(D_i)$ un voisinage tubulaire de D_i construit par plombage. On est ramené à calculer la caractéristique d'Euler de l'intersection de F_i avec chaque composante élémentaire U du plombage de $N(D_i)$. Lorsque U est un fibré en disques de base une sphère privée de δ_k disques, $F_i \cap U$ est un revêtement à m_k feuilletés. Sa caractéristique d'Euler est $m_k(2 - \delta_k)$.

Dans les autres cas où U est un polycylindre de « coin » non dicritique ou un tore de recollement, $F_i \cap U$ est un revêtement au-dessus d'un anneau ou d'un cercle et donc $\chi(F_i \cap U) = 0$. Si U est un polycylindre de « coin » dicritique, $F_i \cap U$ est un disque époiné et de nouveau $\chi(F_i \cap U) = 0$. Par additivité, on obtient la formule désirée.

(ii) Si E est une composante de D_i de multiplicité m_E , en étudiant l'holonomie du feuilletage défini par le polynôme f , on voit que le nombre de composantes connexes de F_i en restriction à un voisinage tubulaire de E est égal au pgcd de m_E et des multiplicités de toutes les composantes de D_i adjacentes à E et des transformées strictes à l'infini de $f^{-1}(F(D_i))$ qui se branchent sur E . De plus, à partir des modèles 3 et 4 de la remarque 1, si E et E' sont deux composantes adjacentes de D_i et V et V' des voisinages tubulaires de E et E' en restriction auxquels F_i a respectivement p et q composantes connexes, on montre que le nombre de composantes connexes de $F_i \cap (V \cup V')$ est égal à $\text{pgcd}(p, q)$. On achève alors la preuve de (ii) en raisonnant de proche en proche. □

LEMME 3. — Pour $i = 1, \dots, s$, on a $\chi(F_i) < 0$ sauf si D_i vérifie la condition suivante :

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_i \text{ est une chaîne et ne porte qu'une transformée stricte à l'infini} \\ \text{de } f^{-1}(F(D_i)) \text{ qui se branche à l'extrémité de } D_i. \text{ En d'autres} \\ \text{termes, toutes les composantes de } D_i \text{ sont de valence 2.} \end{array} \right.$$

Démonstration. — Notons encore π' le composé des morphismes d'éclatement de l'élimination des indéterminations de f , π'' le composé des morphismes d'éclatement de la seconde étape de la résolution de f (cf. proposition 1), $\bar{F} = \bar{f} \circ \pi'$ et $D' = \pi'^{-1}(\mathbb{P}_\infty^1) = \pi''(D)$.

Distinguons les deux cas :

- (1) $\pi''(D_i)$ se réduit à un point m appartenant à une composante dicritique E de D' ;
- (2) $\pi''(D_i)$ contient au moins une composante du diviseur D' .

Dans le cas 1, m est sur une composante dicritique de D' (i.e. \bar{F} n'est pas constant sur cette composante). Il suffit de montrer que la caractéristique d'Euler d'une composante connexe X de $\pi''(F_i)$ est strictement négative. Remarquons que X est une surface ouverte et que $\bar{X} \cap E$ est l'ensemble des points qui lui manquent pour devenir compacte.

Puisque \bar{X} se rétracte sur une surface ouverte, on a :

$$\chi(X) = 1 - b_1(\bar{X}) - \#\{\bar{X} \cap E\}$$

où b_1 désigne le premier nombre de Betti.

Mais (\bar{F}, D') n'est pas réduit en m et, par suite, la transformée stricte à l'infini $Z_i = \overline{\bar{F}^{-1}(\bar{F}(m)) \setminus D'}$ n'intersecte pas D' normalement en m : ainsi le degré de la restriction de \bar{F} à E est strictement supérieur à 1 et $\#\{\bar{X} \cap D\} \geq 2$, d'où la conclusion.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas 2. Considérons la composante connexe $C = \pi''(D_i)$ de D'_{crit} . C'est une chaîne d'après le corollaire 1.

Considérons la suite d'éclatements $p_i : Y_i \rightarrow Y_{i-1}$ définie de la manière suivante : Y_0 est un voisinage de C , p_i est l'éclatement de centre S'_{i-1} . Pour définir les ensembles S'_{i-1} , notons $C^{(i-1)} = (p_1 \circ \dots \circ p_{i-1})^{-1}(C)$, $\text{Sing}(C^{(i-1)})$ le lieu singulier de $C^{(i-1)}$ et S_{i-1} l'ensemble des points où le couple $(\bar{F} \circ p_1 \circ \dots \circ p_{i-1}, C^{(i)})$ n'est pas réduit. Alors m appartient à S'_{i-1} si et seulement si

- (i) $m \in \text{Sing}(C^{(i-1)}) \cap S_{i-1}$;
- (ii) ou m est sur une composante E de $C^{(i-1)}$ qui vérifie $\#\{E \cap \text{Sing}(C^{(i-1)})\} = 1$ et $(E \cap S_{i-1}) \setminus (E \cap \text{Sing}(C^{(i-1)})) = \{m\}$.

Clairement, ce processus s'arrête, disons pour $i = h$ et $C^{(h)}$ est une chaîne. Notons E_1, \dots, E_n ses composantes ordonnées, la composante E_1 étant celle qui intersecte une composante dicritique. Par construction, l'autointersection e_n de E_n n'est égale à -1 que si $\delta_n \geq 3$. En effet, la condition $\delta_n = 1$ impliquerait que E_n était déjà une composante irréductible de C et d'après le corollaire 1, $e_n \leq -2$. D'autre part, puisque D_i ne vérifie pas la condition (*), on ne peut pas avoir $\delta_n = 2$ (sinon le processus ci-dessus ne serait pas terminé). De plus, pour $j = 1, \dots, n-1$, les autointersections e_j des composantes E_j sont inférieures ou égales à -2 sauf si $\delta_j \geq 3$ (sinon en contractant E_j on retrouverait un point à croisement normal).

La matrice d'intersection $A_{C^{(h)}}$ associée à $C^{(h)}$ est de la forme :

$$A_{C^{(h)}} = \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & e_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & e_{n-1} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & e_n \end{pmatrix}.$$

Par la même méthode qu'à la proposition 2, on obtient le système :

$$(S) \quad A_{C^{(k)}} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ t_n \end{pmatrix}$$

où, pour tout $k = 1, \dots, n$, m_k est la multiplicité de la composante E_k et t_k est la somme des multiplicités d'intersection des transformées strictes à l'infini $Z_i = \overline{F}^{-1}(\overline{F}(C)) \setminus D'$ avec la composante E_k .

Le système (S) est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1 m_1 - m_2 \\ -e_2 m_2 - m_1 - m_3 \\ \vdots \\ -e_{n-1} m_{n-1} - m_{n-2} - m_n \\ -e_n m_n - m_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Si la composante E_n porte une transformée stricte Z_i , comme $\delta_n \geq 3$, on a trivialement $\chi(F_i) < 0$. Sinon, remarquons qu'il existe $m < n$ telle que la composante E_m porte une transformée stricte Z_i . Supposons alors que pour $j = 0, \dots, k - 1$, $k \geq 1$, aucune transformée stricte Z_i n'intersecte la composante E_{n-j} et qu'une transformée stricte Z_i intersecte la composante E_{n-k} en un point régulier, alors, par un calcul récurrent à partir de la formule (S), on a : $m_{n-k} - m_{n-k+1} \geq m_n$. D'où :

$$\chi(F_i) \leq m_n(2 - \delta_n) + m_{n-k}(2 - \delta_{n-k}) \leq -m_{n-k+1} < 0.$$

Si D_i vérifie la condition (*), on voit que F_i est homéomorphe à une union de disques époinetés. L'invariant topologique que nous utiliserons alors est l'holonomie du feuilletage défini par f relative à un lacet simple γ_i tracé sur la transformée stricte Z_i et d'indice 1 au point de branchement.

LEMME 4. — Pour $i = 1, \dots, s$, si D_i vérifie la condition (*), l'application d'holonomie relative à γ_i est différente de l'identité.

Démonstration. — Numérotons de 1 à p les composantes irréductibles de D_i , la composante 1 étant celle qui intersecte une composante dicritique. Le modèle 3 de la remarque 2 donne un facteur transverse muni d'une

coordonnée z dans laquelle l'application d'holonomie φ_i relative à γ_i est de la forme $\varphi_i(z) = \lambda_i z$ avec $\lambda_i = e^{-2i\pi m_p/t_p}$ où m_p est la multiplicité de la composante p et t_p la multiplicité de la transformée stricte. Nous allons montrer que $0 < m_p/t_p < 1$. D'après le système (S) :

- si $p = 1$, alors $e_1 \leq -2$ et $t_1 \geq 2m_1$, d'où $m_1/t_1 \leq \frac{1}{2}$.
- si $p > 1$, pour $j = 2 \dots p$, on a $m_j - m_{j-1} \geq m_1$ et $-e_p m_p = m_{p-1} + t_p$ avec $e_p \leq -2$. Cela implique $m_p - t_p \leq -m_1 < 0$. \square

Ces lemmes vont permettre de démontrer un théorème qui justifie la terminologie « valeur irrégulière à l'infini » que nous avons adoptée : ce sont les seules valeurs pour lesquelles f , au voisinage de l'infini, n'est pas une fibration C^0 .

THÉORÈME. — Une valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ est régulière à l'infini si et seulement si pour tout R assez grand, il existe $\varepsilon > 0$ et un homéomorphisme φ de $B(\lambda, \varepsilon) \times (f^{-1}(\lambda) \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{B}_R))$ sur $U(\lambda, \varepsilon, R) = f^{-1}(B(\lambda, \varepsilon)) \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{B}_R)$ qui trivialise la restriction de f à $U(\lambda, \varepsilon, R)$, i.e. $f \circ \varphi$ est la seconde projection, $B(\lambda, \varepsilon)$ désignant le disque de centre λ et de rayon ε .

On peut remplacer homéomorphisme par difféomorphisme C^∞ dans l'énoncé de ce théorème.

Démonstration. — Si λ est régulière à l'infini, une trivialisation se construit facilement à partir du modèle 1 de la remarque 2. Si λ est irrégulière à l'infini, l'intersection de $f^{-1}(\lambda)$ avec $\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{B}_R$ est une union de disques époinés, pour R assez grand. En particulier sa caractéristique d'Euler est nulle. D'autre part soit $f^{-1}(c)$ une fibre régulière à l'infini suffisamment proche de λ . La fibre $f^{-1}(c) \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{B}_R)$ se décompose disons en k composantes génériques à l'infini et ℓ disques époinés. Si $k > 0$, le lemme 3 ou 4 permet de conclure. Sinon $f^{-1}(\lambda)$ a une composante connexe multiple à l'infini et on ne peut avoir fibration puisque se produit un saut de composantes connexes. \square

Remarque 4. — Lorsque le polynôme est sans fibre à composante multiple, en complétant par la même technique cette étude dans B_R , on retrouve un résultat de Hà-Lê [14] et Suzuki [30] sur le saut de caractéristique d'Euler. Dans le cas général, ce théorème et le lemme 3 déterminent exactement, en fonction de la résolution à l'infini, les fibres irrégulières (éventuellement multiples) où se produit un saut de caractéristique d'Euler.

On retrouve d'autre part :

COROLLAIRE 2. — *L'ensemble $\Lambda_f = \{c_1, \dots, c_q\}$ formé des valeurs critiques et des valeurs irrégulières à l'infini d'un polynôme f de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} est l'ensemble minimal pour lequel :*

$$f : \mathbb{C}^2 \setminus f^{-1}(\Lambda_f) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Lambda_f$$

est une fibration topologique localement triviale. De plus, la fibre type de cette fibration est F_∞ .

3. Classification topologique à l'infini des feuilletages.

3.1. Description de l'arbre réduit de résolution à l'infini associé au feuilletage.

Soient f un polynôme de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} et $p : \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ le plongement $(x, y) \mapsto [x, y, 1]$. Si K est un compact de \mathbb{C}^2 , considérons le feuilletage singulier \mathcal{F}_K de $\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}$ défini par la restriction de la 1-forme df à $\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}$.

Si V est une feuille de \mathcal{F}_K et K' un compact de \mathbb{C}^2 contenant K , nous noterons $\mathcal{W}_{K'}(V)$ l'ensemble des voisinages ouverts de $V \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}')$ dans $\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}'$ saturés par le feuilletage $\mathcal{F}_{K'}$.

DÉFINITION 7. — *Nous dirons qu'une feuille V de \mathcal{F}_K est régulière à l'infini si pour tout compact $K' \supset K$, il existe un compact K'' de \mathbb{C}^2 , un ouvert $W \in \mathcal{W}_{K''}(V)$ et un homéomorphisme h de W sur le produit $(V \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}')) \times D^2$ de $V \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}')$ par le disque unité de \mathbb{C} , qui conjugue la restriction $\mathcal{F}_{K|W}$ du feuilletage \mathcal{F}_K à W au feuilletage trivial de $(V \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}')) \times D^2$ et transforme $(V \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}')) \times D^2$ en la feuille $(V \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}')) \times 0$. Dans le cas contraire, nous dirons que la feuille V est irrégulière à l'infini.*

Considérons le morphisme de réduction Π , relatif au plongement p , construit au paragraphe 1. L'adhérence de $\Pi^{-1}(\mathbb{C}^2 \setminus B_R)$ est un voisinage $N_R(D)$ du diviseur D de la résolution et $\Pi^*(\mathcal{F}_{B_R})$, que nous identifierons à \mathcal{F}_{B_R} , est un feuilletage de $N_R(D) \setminus D$.

PROPOSITION 4. — *Une feuille V de \mathcal{F}_K est régulière à l'infini si et seulement si $\bar{V} \cap D_{\text{dic}} \neq \emptyset$.*

Démonstration. — Si $\bar{V} \cap D_{\text{dic}} \neq \emptyset$, le modèle local 1 permet trivialement de construire W et h . Réciproquement, si \bar{V} coupe D_{crit} en un point disons m , alors le germe (\bar{V}, m) est une transformée stricte à l'infini. Le saut de caractéristique d'Euler calculé au lemme 3 ou le lemme 4 interdit l'existence d'un homéomorphisme h trivialisant le feuilletage au voisinage de \bar{V} . □

Ainsi le feuilletage \mathcal{F}_K admet un nombre fini de feuilles irrégulières à l'infini que nous noterons V_1, \dots, V_σ .

Une conséquence immédiate de la proposition précédente est qu'on a une définition équivalente de feuille régulière à l'infini en se restreignant, dans la définition 7, à la famille de compacts de \mathbb{C}^2 constituée par les boules fermées B_R de rayon R . Dans la suite, on remplacera $\mathcal{W}_{B_R}(V)$ par $\mathcal{W}_R(V)$.

Soit V une feuille irrégulière à l'infini de \mathcal{F}_K , $R > 0$ assez grand et C la composante connexe de D_{crit} qui contient la composante irréductible du diviseur sur laquelle se branche \bar{V} . On voit facilement que :

$$V \cup C = \bigcap_{W \in \mathcal{W}_R(V)} \Pi^{-1}(W).$$

Le même calcul que pour la proposition 3 du paragraphe 2 montre que les feuilles voisines de V intersectent un facteur transverse à V en un nombre constant de points $\nu(V)$ que l'on appelle *multiplicité* de V et permet de le calculer.

Soient m_1, \dots, m_k les multiplicités des composantes irréductibles de C . Pour toute feuille V_j , avec $j = 0, \dots, r$, irrégulière à l'infini de \mathcal{F}_K telle que $\bar{V}_j \cap C \neq \emptyset$ et $V_0 = V$, notons t_j la multiplicité de f le long de V_j . Comme pour la proposition 3,

$$\gamma_C = \text{pgcd}\{(m_i, t_j); i = 1, \dots, k, j = 0, \dots, r\}$$

est le nombre de composantes connexes de l'intersection d'une fibre générique de f avec un voisinage de C . On a alors :

$$\nu(V) = \frac{t_0}{\gamma_C}.$$

Trivialement $\nu(V)$ est un invariant topologique de f .

Considérons maintenant le système projectif :

$$X_R = \bigcup_{B_R} \{V \text{ feuille régulière à l'infini de } \mathcal{F}_{B_R}\},$$

les morphismes étant définis par l'inclusion.

DÉFINITION 8. — *Nous appellerons ensemble des bouts réguliers et noterons X l'ensemble :*

$$X = \varinjlim_R X_R.$$

L'existence des trivialisations du feuilletage sur les voisinages $W \in \mathcal{W}_R(V)$ définit une topologie naturelle sur X .

Remarque 5. — L'ensemble X est homéomorphe à $D_{\text{dic}} \setminus (D_\infty \cup D_{\text{crit}})$. En particulier le nombre de composantes connexes de D_{dic} est un invariant topologique de f .

Soient E une composante dicritique de D et V une feuille régulière à l'infini de \mathcal{F}_{B_R} n'intersectant pas B_R . Désignons par $b_E(V) = \#(E \cap \bar{V})$ le nombre de bouts de cette feuille appartenant à la composante connexe de X qui correspond à E . On a :

LEMME 5. — *Soient m_1, \dots, m_ℓ les multiplicités des composantes irréductibles de D_∞ . Pour toute composante dicritique E et toute feuille régulière à l'infini V , on a :*

$$b_E(V) = \frac{\deg(\bar{F}|_E : E \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C})}{\text{pgcd}\{m_i; i = 1, \dots, \ell\}}.$$

Démonstration. — Elle découle directement de la proposition 3 du paragraphe 2. □

Ainsi $b_E(V)$ ne dépend pas de V et ce nombre, noté b_E , est un invariant topologique de f .

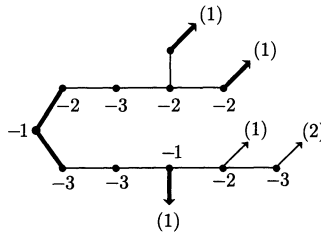
Nous sommes maintenant en mesure d'introduire la notion d'arbre réduit de résolution à l'infini qui sera un système complet d'invariants topologiques à l'infini pour la relation d'équivalence des feuilletages :

DÉFINITION 9. — *Nous appelons arbre de résolution réduit à l'infini associé au feuilletage \mathcal{F}_K et notons $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ l'arbre formé de la manière suivante :*

- *chaque sommet représente une composante irréductible de D et est pondéré par l'autointersection de cette composante;*
- *une arête joint deux sommets si les composantes correspondantes se coupent;*

- pour chaque feuille irrégulière à l'infini V_i , avec $i = 1, \dots, \sigma$, qui se branche sur une composante E du diviseur, une flèche est attachée au sommet correspondant à E ; chacune de ces flèches est pondérée par $\nu(V_i)$;
- on attache une flèche double aux sommets s correspondant aux composantes dicritiques E_s que l'on pondère par b_{E_s} .

Exemple. — Soit $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ donné par $f(x, y) = x^5y^3 - x^2y$ et p la compactification usuelle de \mathbb{C}^2 . L'arbre réduit de résolution à l'infini $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ est :



DÉFINITION 10. — Nous appelons multiplicité réduite d'une composante irréductible E du diviseur l'entier \bar{m}_E défini par :

- (1) si E est une composante dicritique, $\bar{m}_E = 0$;
- (2) si E est une composante de D_∞ , \bar{m}_E est le quotient

$$\bar{m}_E = \frac{m_E}{\text{pgcd}\{m_{E'}/E' \subset D_\infty\}}$$

de la multiplicité de E par le pgcd des multiplicités des composantes de D_∞ ;

- (3) si E appartient à une composante connexe C de D_{crit} , \bar{m}_E est le quotient

$$\bar{m}_E = \frac{m_E}{\gamma_C}$$

de la multiplicité de E par l'invariant γ_C défini au début de ce paragraphe.

LEMME 6. — Les données de l'arbre $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ permettent de calculer les multiplicités réduites de toutes les composantes irréductibles du diviseur D .

Démonstration.

- Premier cas : E est une composante de D_{crit} .

Le bord $\partial N(C)$ d'un voisinage tubulaire $N(C)$ obtenu par plombage de la composante connexe C de D_{crit} qui contient E est un espace

lenticulaire différent de $S^1 \times S^2$. En effet, si π'' désigne l'application composée des éclatements de la seconde étape de la résolution (décrite dans la démonstration de la proposition 1), $\partial N(C)$ est homéomorphe à la variété graphée définie par la composante connexe $C' = \pi''(C)$ de $\pi''(D_{\text{crit}})$. Si C' est un point $\partial N(C) \cong \pi''(\partial N(C))$ est une sphère, sinon C' est une chaîne (cf. corollaire 1). Par conséquent, la matrice d'intersection A_C correspondante est de déterminant non nul (voir [16]).

Ainsi le système suivant (analogue au système (S) du paragraphe 2)

$$A_C \begin{pmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \\ \vdots \\ \bar{m}_{n-1} \\ \bar{m}_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_{n-1} \\ \nu_n \end{pmatrix}$$

avec

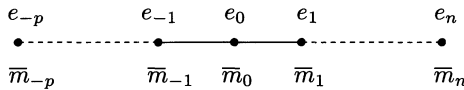
$$\nu_i = \sum_{\substack{V_j \text{ feuille irrégulière} \\ \bar{V}_j \cap E_i \neq \emptyset}} \nu(V_j), \quad i = 1, \dots, n,$$

admet une solution unique.

- *Deuxième cas ; E est une composante de D_∞ .*

Remarquons que si E intersecte une composante dicritique E' , le poids de la flèche double attachée au sommet de $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ correspondant à E' est égal à la multiplicité réduite \bar{m}_E de E . En effet, la restriction de F à E' étant un polynôme, son degré est égal à la multiplicité de $(F|_{E'})^{-1}(\infty)$.

Reprenons la construction de l'élimination des indéterminations de f par « création de chaînes » décrite au paragraphe 1 et ne considérons dans cette construction que les composantes contenues dans D_∞ . Si E est créée à la fin de la dernière étape de la récurrence, elle se branche sur D_{dic} , et d'après la remarque ci-dessus \bar{m}_E est donnée par $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$. En raisonnant par récurrence descendante, il suffit de prouver que, pour chaque chaîne C



créée dans une étape quelconque du processus, la donnée de la multiplicité réduite \bar{m}_0 d'une composante E_0 de cette chaîne permet de calculer la multiplicité réduite de toutes les autres composantes.

Comme d'habitude e_i désigne l'autointersection, pour $-p \leq i \leq n$, de la composante irréductible E_i . D'après le lemme 1, $e_i \leq -2$. La composante E_n est de valence 1 et E_{-p} s'attache à une composante E' créée à l'étape précédente du processus. Soit \bar{m}' sa multiplicité réduite.

Donnés \bar{m}_0 et les e_i , nous avons à résoudre le système (obtenu à partir du système (S) du paragraphe 2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -e_n \bar{m}_n = \bar{m}_{n-1}, \\ -e_{n-1} \bar{m}_{n-1} = \bar{m}_n + \bar{m}_{n-2}, \\ \vdots \\ -e_2 \bar{m}_2 = \bar{m}_3 + \bar{m}_1, \\ -e_1 \bar{m}_1 = \bar{m}_2 + \bar{m}_0, \\ -e_0 \bar{m}_0 = \bar{m}_1 + \bar{m}_{-1}, \\ \vdots \\ -e_{-(p-1)} \bar{m}_{-(p-1)} = \bar{m}_{-p} + \bar{m}_{-(p-2)}, \\ -e_{-p} \bar{m}_{-p} = \bar{m}_{-(p-1)} + \bar{m}' . \end{array} \right.$$

Il suffit de résoudre le système extrait formé des n premières équations, les solutions dans les autres équations s'en déduisant trivialement.

On voit que pour tout $k = 1, \dots, n - 1$, on a

$$[e_k, \dots, e_1] \bar{m}_k = -\bar{m}_{k+1} + C_k$$

où

$$[e_k, \dots, e_1] = -e_k - \frac{1}{-e_{k-1} - \frac{1}{\dots - \frac{1}{-e_1}}}$$

les C_k ne dépendant que de \bar{m}_0 et de e_1, \dots, e_{k-1} . En particulier, on a :

$$[e_{n-1}, \dots, e_1] \bar{m}_{n-1} = -\bar{m}_n + C_{n-1}.$$

La première équation nous donne alors :

$$[e_n, \dots, e_1] \bar{m}_n = -C_{n-1}.$$

Or $[e_n, \dots, e_1]$ est non nul dès que chaque e_i est inférieure ou égale à -2 .

La dernière équation du système donne \bar{m}' , ce qui permet de continuer la récurrence. □

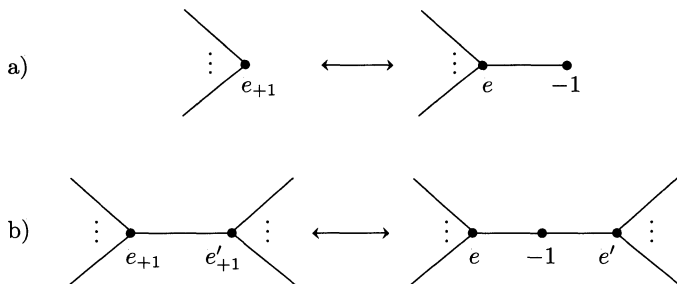
3.2. Équivalence d'arbres réduits.

Les arbres réduits de résolution à l'infini sont des arbres pondérés et fléchés. On a une notion d'isomorphisme de tels arbres.

DÉFINITION 11. — Deux arbres Γ_1 et Γ_2 sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme d'arbres (abstrait) envoyant Γ_1 sur Γ_2 qui respecte les poids et les flèches.

Les arbres de résolution réduits à l'infini ne sont pas canoniques : un automorphisme algébrique de \mathbb{C}^2 modifie la résolution à l'infini d'un polynôme. Pour retrouver une situation canonique on considère la relation d'équivalence suivante :

DÉFINITION 12. — Soient f et g deux polynômes de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} et $p : \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ le plongement $(x, y) \mapsto [x, y, 1]$. Nous dirons que $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ et $A_\infty(\mathcal{G}_{K'}, p)$ sont équivalents si ces deux arbres sont isomorphes après une suite finie de transformations de type « éclatements et contractions », c'est-à-dire les transformations :



(a) correspond à l'éclatement d'un point régulier sur une composante irréductible du diviseur ne portant pas de transformée stricte à l'infini et

(b) correspond à l'éclatement d'un point singulier du diviseur.

Remarque 6. — Ainsi, à chaque arbre A' équivalent à $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ est associée une variété $V_{A'}$, un diviseur $D_{A'} \subset V_{A'}$ et une fonction $F_{A'} : V_{A'} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ telle que $(F_{A'}, D_{A'})$ soit réduit en tout point de $D_{A'}$. On a encore une décomposition de $D_{A'}$ en composantes infinies, critiques et dicritiques et on définit de la même manière les invariants \bar{m}_E et b_E des composantes de $D_{A'}$. Ils satisfont les mêmes propriétés que pour D . En particulier, la donnée de A' permet de calculer les \bar{m}_E .

3.3. Classification topologique des feuilletages.

Rappelons que les feuilletages \mathcal{F}_K et $\mathcal{G}_{K'}$ définis par deux polynômes de \mathbb{C}^2 dans le complémentaire de compacts K et K' sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme $H : \mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K'}$ qui envoie feuille sur feuille. On dira alors que f et g sont *topologiquement \mathcal{F} -conjugués*.

THÉORÈME I. — *Les polynômes f et g sont topologiquement \mathcal{F} -conjugués si et seulement si leurs arbres réduits de résolution $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ et $A_\infty(\mathcal{G}_{K'}, p)$ sont équivalents.*

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration de ce théorème.

3.3.1 *Preuve de la suffisance.* — Quitte à effectuer des éclatements supplémentaires, on se ramène facilement à deux arbres isomorphes que nous notons $A_\infty(\mathcal{F}_K)$ et $A_\infty(\mathcal{G}_{K'})$. Nous désignerons par D et D' les diviseurs correspondants. D'après la remarque 6, les composantes de D et D' ont mêmes multiplicités réduites.

Nous allons maintenant construire l'homéomorphisme H de conjugaison. On construit aisément un homéomorphisme $h_1 : (D \setminus D_{\text{dic}}) \rightarrow (D' \setminus D'_{\text{dic}})$, respectant les points d'intersection avec les composantes dicritiques et l'isomorphisme des arbres. Ainsi deux composantes irréductibles conjuguées par h_1 sont de même multiplicité réduite. La construction de H va se faire en trois étapes :

(i) On étendra h_1 à des voisinages de D_∞ et D'_∞ . Cette construction se fera de proche en proche en suivant la filtration de D_∞ :

$$X_0 = \{E_0\}, \quad X_i = \{E \subset D_\infty; \exists E' \in X_{i-1}, E \cap E' \neq \emptyset\} \text{ pour } i \geq 1,$$

E_0 désignant une composante de D_∞ arbitrairement choisie.

(ii) On prolongera l'extension à des voisinages de chaque composante dicritique. Pour cela, on calculera l'obstruction à cette extension et on montrera qu'elle est nulle.

(iii) On achèvera la preuve en étendant l'homéomorphisme obtenu à un voisinage de D_{crit} .

Étape (i).

Pour chaque composante E_i de D_∞ , où $i = 0, \dots, n$, fixons un voisinage tubulaire holomorphe $p_{S_i} : N(S_i) \rightarrow S_i$ du fermé S_i obtenu en

ôtant à E_i des petits disques centrés aux points d'intersection de E_i avec les autres composantes de D_∞ . Les composantes $E'_i = h_1(E_i)$ de D'_∞ sont munies de voisinages tubulaires $p_{S'_i} : N(S'_i) \rightarrow S'_i$ de base les images $S'_i = h_1(S_i)$. On exigera de plus que lorsque E_i intersecte une composante dicritique, celle-ci soit au voisinage de E_i une fibre de p_{S_i} (et de même pour D'_∞).

Fixons un point s_0 sur E_0 et posons $s'_0 = h_1(s_0)$.

LEMME 7. — *Quitte à restreindre les voisinages tubulaires, l'homéomorphisme h_1 s'étend en une conjugaison $h_{S_0} : N(S_0) \rightarrow N(S'_0)$ telle que $p'_{S'_0} \circ h_{S_0} = h_1 \circ p_{S_0}$.*

Démonstration. — D'après la proposition 3, les feuilles du feuilletage $\bar{\mathcal{F}}_K$ au voisinage de D_∞ sont les fibres de la fonction $F' = F^{1/\gamma_\infty}$, où $\gamma_\infty = \text{pgcd}(m_0, \dots, m_n)$ est le nombre de composantes connexes de F_∞ . En restriction au disque fibre $p_{S_0}^{-1}(s_0)$, elle s'écrit $F'|_{p_{S_0}^{-1}(s_0)} = z^{\bar{m}_0}$ dans une coordonnée holomorphe appropriée $z : p_{S_0}^{-1}(s_0) \rightarrow \mathbb{C}$. De même, le feuilletage $\bar{\mathcal{G}}_{K'}$ est donné, au voisinage de D'_∞ par une fonction G' qui en restriction à $p'_{S'_0}^{-1}(s'_0)$ s'écrit $z'^{\bar{m}'_0}$ dans une bonne coordonnée $z' : p'_{S'_0}^{-1}(s'_0) \rightarrow \mathbb{C}$. En effet, E_0 et E'_0 ont mêmes multiplicités réduites.

Calculons le morphisme d'holonomie : $\rho : \pi_1(S_0, s_0) \rightarrow \text{Diff}(D^2, 0)$ obtenu en relevant les chemins de S_0 dans les feuilles par la fibration transverse p_{S_0} . Notons P_1, \dots, P_δ les points singuliers de $\bar{\mathcal{F}}_K$ sur E_0 et $\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_\delta$ les multiplicités réduites des composantes passant par P_1, \dots, P_δ respectivement. Choisissons des points $s_i \in S_0$ sur le bord de disques D_i de centres P_i . Relions-les à s_0 par des chemins simples α_i , avec $\alpha_i \cap \alpha_j = \{s_0\}$ si $i \neq j$. Les lacets $\alpha_i \vee \partial D_i \vee \alpha_i^{-1}$ engendrent $\pi_1(S_0, s_0)$. En la coordonnée holomorphe z , le difféomorphisme $\varphi_i = \rho(\alpha_i \vee \partial D_i \vee \alpha_i^{-1})$ est de la forme $\varphi_i(z) = \lambda_i z$ avec $\lambda_i = e^{-2i\pi \text{pgcd}(\bar{m}_0, \bar{n}_i)/\bar{m}_0}$. En effet, au voisinage de P_i , dans des coordonnées appropriées (u_i, v_i) , F' s'écrit $u_i^{\bar{m}'_0} v_i^{\bar{n}_i}$ avec E_0 donné par $u_i = 0$. Ainsi, l'holonomie ρ est linéaire dans la coordonnée z et entièrement déterminée par les multiplicités réduites. Il en est de même pour l'holonomie du lacet $h_1(\alpha_i \vee \partial D_i \vee \alpha_i^{-1})$ qui s'écrit $\lambda_i z'$ dans la coordonnée z' . Ainsi l'application $z' \circ z^{-1} : p^{-1}(s_0) \rightarrow p'^{-1}(s'_0)$ et $h_1\# : \pi_1(S_0, s_0) \rightarrow \pi_1(S'_0, s'_0)$ conjuguent les représentations ρ et ρ' . Une construction classique d'extension par relèvement de chemins dans les feuilles suivant les fibrations (cf. [20]) étend h_1 en une conjugaison $h_{S_0} : N(S_0) \rightarrow N(S'_0)$ satisfaisant le lemme 7. □

LEMME 8. — *La conjugaison h_{S_0} du lemme 7 se prolonge à tout un voisinage de la composante E_0 en une conjugaison h_{E_0} qui respecte les fibrations induites par les diviseurs adjacents.*

Démonstration. — Plaçons-nous dans un voisinage W d'un point d'intersection P de E_0 et d'une composante E_1 de multiplicité réduite \bar{m}_1 . Supposons que :

$$W = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2; |u| \leq \alpha, |v| \leq \beta\}$$

et que

$$W \cap N(S_0) = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2; |u| \leq \eta, \beta - \varepsilon \leq |v| \leq \beta\} \text{ avec } \eta < \alpha,$$

où (u, v) sont des coordonnées appropriées dans lesquelles E_0 est donné par $u = 0$, E_1 par $v = 0$ et $\bar{\mathcal{F}}_K$ est donné par la fonction $F'|_W = u^{\bar{m}_0} v^{\bar{m}_1}$, i.e. les traces sur W des feuilles de $\bar{\mathcal{F}}_K$ sont données par $F'|_W = \mathbb{C}^{\text{te}}$. De même, dans un voisinage W' de $P' = h_1(P)$, $\bar{\mathcal{G}}_{K'}$ est donné par $G'|_{W'} = u'^{\bar{m}_0} v'^{\bar{m}_1}$, E'_0 par $u' = 0$ et E'_1 par $v' = 0$.

Quitte à modifier de manière C^∞ les fibrations p_{S_0} et $p'_{S'_0}$ au voisinage de ∂S_0 et $\partial S'_0$ respectivement, on peut supposer que dans $W \cap N(S_0)$ (resp. $W' \cap N(S'_0)$), on a $p_{S_0}(u, v) = v$ (resp. $p'_{S'_0}(u', v') = v'$). Toute application $h_P : W \rightarrow W'$ de la forme $h_P(u, v) = (u, \lambda v) = (u', v')$ avec $\lambda^{\bar{m}_1} = 1$ conjugue $F'|_W$ à $G'|_{W'}$. On choisit λ de sorte que l'automorphisme $\Psi_0 = h_P^{-1} \circ h_{S_0}$ laisse invariante chaque composante connexe des fibres de la restriction $F'|_{W \cap N(S_0)}$. Notons maintenant T le tore plein défini par :

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2; |u| \leq \eta, |v| = \beta\}.$$

Sous-LEMME. — *Il existe une isotopie $\varphi : T \times I \rightarrow T$, $(z, t) \mapsto \varphi_t(z)$ telle que $\varphi_0 = \Psi_0$, $\varphi_1 = \text{Id}$ et que pour tout t appartenant à I , φ_t laisse invariante chaque composante connexe des fibres de $F'|_T$.*

L'isotopie φ permet alors de construire une extension de Ψ_0 en un automorphisme $\bar{\Psi}_0$ de tout un voisinage de E_0 dans W qui vaut l'identité au voisinage de P , Ψ_0 sur T et qui, de plus, laisse invariante chaque composante connexe des fibres de la restriction de F' à ce voisinage. Clairement, quitte à restreindre les voisinages tubulaires, $h_P \circ \bar{\Psi}_0$ et h_{S_0} se recollent sur T . \square

Preuve du sous-lemme. — Pour $i = 0, 1$, notons $\mu_i = \frac{\bar{m}_i}{(\bar{m}_0, \bar{m}_1)}$.

Considérons sur le tore ∂T le nœud de type (μ_1, μ_0) et la fibration de Seifert de T associée. Cette fibration est induite sur T par les fibres de la fonction $u^{\mu_0}v^{\mu_1}$ que l'on notera F'' . L'homéomorphisme φ_0 est donné par :

$$\begin{aligned} \varphi_0 : T = D^2 \times S^1 &\longrightarrow T = D^2 \times S^1, \\ (z, e^{i\theta}) &\longmapsto (\tau_0(z, e^{i\theta}), \sigma_0(e^{i\theta})). \end{aligned}$$

Puisque φ_0 laisse invariante chaque composante connexe des fibres de la restriction $F'|_{W \cap N(S_0)}$, on a $F'' \circ \varphi_0 = F''$.

L'application σ_0 préservant l'orientation, il existe une isotopie σ_t de σ_0 à l'identité sur S^1 . Nous allons construire une isotopie

$$\begin{aligned} k_t : D^2 \times S^1 &\longrightarrow D^2 \times S^1 \\ (z, e^{i\theta}) &\longmapsto (\tau_t(z, e^{i\theta}), \sigma_t(z, e^{i\theta})) \end{aligned}$$

telle que :

$$(**) \quad F'' \circ k_t = F'', \quad k_0 = \varphi_0.$$

Pour cela, posons

$$\tau_t(z, e^{i\theta}) = U_t(e^{i\theta}) \tau_0(z, e^{i\theta}).$$

Ainsi, la relation $(**)$ donne :

$$(U_t(e^{i\theta}))^{\mu_0} = \left(\frac{\sigma_0(e^{i\theta})}{\sigma_t(e^{i\theta})} \right)^{\mu_1}, \quad U_0(e^{i\theta}) = 1.$$

Comme l'application de S^1 dans S^1 , $e^{i\theta} \mapsto (\sigma_0/\sigma_t)$ est de degré nul, U_t est définie sans ambiguïté en posant

$$U_t = \left(\frac{\sigma_0(e^{i\theta})}{\sigma_t(e^{i\theta})} \right)^{\bar{m}_1/\bar{m}_0}, \quad U_0(1) = 1.$$

Considérons maintenant l'application $k_1 : T \rightarrow T$. On a, par $(**)$:

$$\tau_1(z, e^{i\theta}) = e^{2i\pi\ell_0/\mu_0} z \quad \text{avec} \quad \ell_0 \in \mathbb{Z}.$$

D'après l'identité de Bézout il existe $\ell_1 \equiv \ell_0 \pmod{\mu_0}$ tel que ℓ_1 est un multiple de μ_1 . Définissons l'isotopie

$$\begin{aligned} j : D^2 \times S^1 \times J &\longrightarrow D^2 \times S^1, \\ (z, e^{i\theta}, s) &\longmapsto j_s(z, e^{i\theta}) = (z e^{2i\pi s \ell_1/\mu_0}, e^{i\theta} e^{2i\pi s \ell_1/\mu_1}). \end{aligned}$$

On obtient l'isotopie (φ_t) cherchée en posant :

$$\begin{cases} \varphi_t = \tau_{2t} & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \varphi_t = j_{2t-1} \circ \tau_1 & \text{pour } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad \square$$

En conservant les notations de la démonstration du lemme précédent, on obtient :

LEMME 9. — L'homéomorphisme h_{E_0} s'étend dans $N(S_1)$ en un homéomorphisme h_{S_1} qui respecte la fibration p_{S_1} du voisinage tubulaire de S_1 et conjugue $\overline{\mathcal{F}}_K$ à $\overline{\mathcal{G}}_{K'}$.

Démonstration. — Conservons les notations de la démonstration précédente. Considérons les disques transverses à E_1 et E'_1 définis par :

$$\begin{aligned} U &= \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 ; u = \alpha, |v| \leq \beta - \varepsilon\}, \\ U' &= \{(u', v') \in \mathbb{C}^2 ; u' = \alpha, |v'| \leq \beta - \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Sur ces disques, dans les coordonnées holomorphes suivantes :

$$z = \alpha^{\overline{m}_0/\overline{m}_1} v : U \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad z' = \alpha^{\overline{m}_0/\overline{m}_1} v' : U' \rightarrow \mathbb{C},$$

les traces des feuilles de $\overline{\mathcal{F}}_K$ (resp. $\overline{\mathcal{G}}_{K'}$) sur U (resp. U') sont les ensembles $z^{\overline{m}_1} = \mathbb{C}^{\text{te}}$ (resp. $z'^{\overline{m}_1} = \mathbb{C}^{\text{te}}$). Donc les représentations d'holonomie sont linéaires dans ces mêmes coordonnées. Ainsi la restriction de h_{E_0} à ces disques transverses, qui est aussi linéaire, commute aux représentations d'holonomie. Comme précédemment, la construction classique par relèvement de chemins suivant p_{S_1} permet de prolonger h_{E_0} (de manière unique) en un homéomorphisme de conjugaison h_{S_1} qui, de plus, respecte la fibration p_{S_1} . \square

Nous sommes maintenant en mesure de construire l'homéomorphisme de l'étape (i). Considérons la filtration suivante :

$$X_0 = \{E_0\}, \quad X_i = \{E \subset D_\infty ; \exists E' \in X_{i-1}, E \cap E' \neq \emptyset\} \text{ pour } i \geq 1.$$

Le dernier ensemble de cette filtration est $X_n = D_\infty$. La construction de l'homéomorphisme de conjugaison h_2 se fait d'abord au voisinage de X_0 (lemmes 7 et 8) puis de proche en proche au voisinage de X_i pour $i = 1, \dots, n$, en utilisant successivement les arguments du lemme 9 puis du lemme 8.

Étape (ii).

Soit E une composante dicritique de D . Notons E_∞ la seule composante de D_∞ qui intersecte E , $\{P\} = E \cap E_\infty$ et désignons par E' la composante dicritique de D' telle que $E' \cap h_2(E_\infty) = h_2(P)$; E' est l'image de E par l'isomorphisme d'arbres. Notons \bar{m}_∞ la multiplicité réduite de E_∞ — ainsi que de $h_2(E_\infty)$. Étendons la restriction de h_2 à E en un homéomorphisme global d'un voisinage de E dans un voisinage de E' respectant les intersections avec D_{crit} et D'_{crit} .

Au voisinage de P (resp. $h_2(P)$), dans des coordonnées locales appropriées (u, v) (resp. $(u' = u \circ h_2^{-1}, v' = v \circ h_2^{-1})$), centrées, la composante E (resp. E') est d'équation $u = 0$ (resp. $u' = 0$) et les traces des feuilles de $\bar{\mathcal{F}}_K$ (resp. $\bar{\mathcal{G}}_{K'}$) sur le voisinage $U = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2; |u| \leq \alpha, |v| \leq \varepsilon\}$ (resp. $U' = \{(u', v') \in \mathbb{C}^2; |u'| \leq \alpha, |v'| \leq \varepsilon\}$) sont exactement les fibres de la fonction $F'(u, v) = v^{\bar{m}_\infty}$ (resp. $G'(u, v) = v'^{\bar{m}_\infty}$). Les nombres α et ε sont choisis assez petits pour que h_2 soit défini sur U . On peut aussi supposer que le voisinage tubulaire $p_{S_\infty} : N(S_\infty) \rightarrow S_\infty$ est donné par $p_{S_\infty} = u$.

En restriction à un voisinage W du disque V complémentaire dans E du disque centré en P de rayon ε , le feuilletage $\bar{\mathcal{F}}_{K|W}$ est une fibration triviale de fibre type le disque standard D^2 . Il en est de même pour le feuilletage $\bar{\mathcal{G}}_{K'|W'}$ sur un voisinage W' de $h_2(V) = V'$. Dans des coordonnées trivialisant ces fibrés, la restriction de h_2 à $\partial V \times D^2$ s'écrit

$$h_2 : T = \partial V \times D^2 \longrightarrow \partial V' \times D^2 = T'$$

$$(\theta, m) \longmapsto (\theta, h_2^\theta(m))$$

et définit un lacet

$$\partial V = S^1 \longrightarrow \text{Homeo}_0^+(D^2)$$

$$\theta \longmapsto h_2^\theta$$

où $\text{Homeo}_0^+(D^2)$ est le groupe des homéomorphismes du disque qui préservent l'orientation et laissent fixe l'origine.

Visiblement, pour étendre h_2 en un homéomorphisme de fibrations $V \times D^2 \rightarrow V' \times D^2$, il suffit de prouver que la classe d'homotopie $[h_2^\theta]$ dans $\pi_1(\text{Homeo}_0^+(D^2)) \cong \mathbb{Z}$ est nulle. L'interprétation géométrique de cette obstruction est donnée par le lemme suivant (dont on trouve une démonstration dans [7]) :

LEMME 10. — L'application $\pi_1(\text{Homeo}_0^+(D^2)) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui à la classe $[h_\theta]$ d'une famille continue $(h_\theta)_{\theta \in S^1}$ fait correspondre le degré de l'application $\theta \mapsto h_\theta(1)$ de S^1 dans ∂D^2 est un isomorphisme de groupes.

La trivialisaton $V \times D^2$ induit une base en homologie de ∂T donnée par le méridien $M = \{1\} \times \partial D^2$ et la longitude $L = \partial V \times \{1\}$.

De même, les coordonnées (u, v) induisent la base en homologie :

$$M_\infty = \{v = 1, |u| = 1\} = M \text{ et } L_\infty = \{u = 1, |v| = 1\}.$$

On a les bases analogues de l'homologie de $\partial T'$:

$$M' = \{1\} \times \partial D^2, \quad L' = \partial V' \times \{1\}, \\ M'_\infty = \{v' = 1, |u'| = 1\} = M', \quad L'_\infty = \{u' = 1, |v'| = 1\}.$$

L'image par h_2 de la longitude L est une courbe homotope à la courbe $\deg(\theta \mapsto h_2^\theta(1))M' + qL'$. Mais h_2 transforme les coordonnées (u, v) en (u', v') . Donc, en homotopie, on a les égalités $[h_2(M_\infty)] = [M'_\infty]$ et $[h_2(L_\infty)] = [L'_\infty]$. Comme les fibrés normaux ont mêmes classes de Chern (les arbres étant isomorphes), on en déduit que $\deg(\theta \mapsto h_2^\theta(1)) = 0$.

Étape (iii).

Celle-ci est semblable à la première étape en filtrant chaque composante connexe de D_{crit} à partir de l'unique composante irréductible qui intersecte D_{dic} .

3.3.2 *Preuve de la réciproque.* — Pour démontrer que l'arbre de résolution réduit à l'infini est un invariant topologique de \mathcal{F}_K , nous allons déterminer d'autres invariants à partir desquels nous retrouverons l'arbre. Ce seront :

(1) la paire $(S_R, L(\mathcal{F}_K))$ où S_R est une sphère de \mathbb{C}^2 de rayon R suffisamment grand, $L(\mathcal{F}_K)$ est l'intersection (transverse) de S_R avec la courbe $Z(\mathcal{F}_K)$ dont les composantes sont les feuilles irrégulières à l'infini et une feuille régulière arbitrairement fixée de \mathcal{F}_K ;

(2) les paires de Puiseux à l'infini de chaque composante irréductible de $Z(\mathcal{F}_K)$ (voir [13]) et les coefficients d'enlacement des composantes connexes de $L(\mathcal{F}_K)$;

(3) l'arbre caractéristique à l'infini de Puiseux construit à partir des paires de Puiseux à l'infini des composantes de $Z(\mathcal{F}_K)$ et des exposants de coïncidence entre ces composantes (voir [13], [21]),

(4) l'arbre de satellisation de $L(\mathcal{F}_K)$ construit à partir de la décomposition de Waldhausen-Johannson-Jaco-Shalen de l'extérieur de l'entrelacs $L(\mathcal{F}_K)$ (voir [8]).

Avant de montrer que (1)–(4) sont des invariants topologiques, rappelons la notion d'entrelacs à l'infini d'une courbe algébrique plane, introduite par L. Rudolph [27] et développée par Neumann-Rudolph dans [26] et par Neumann dans [24].

Soit V une courbe algébrique plane donnée par une équation polynomiale ($f = 0$). Comme précédemment, nous notons $F = f \circ \Pi$ de \bar{X} dans $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ la fonction holomorphe obtenue en résolvant f à l'infini, $D = \Pi^{-1}(\mathbb{P}_\infty^1)$ et $N(D)$ un voisinage tubulaire de D .

DÉFINITION 13. — *On appelle entrelacs à l'infini de V la paire $(\partial N(D), L_\infty(V))$ où $L_\infty(V)$ est l'intersection transverse :*

$$L_\infty(V) = \partial N(D) \cap V.$$

Remarque 7. — L'entrelacs $L_\infty(V)$ est un entrelacs torique itéré.

Remarque 8. — On peut identifier $\partial N(D)$ au bord S_R^3 d'une grande boule de centre 0 et de rayon R suffisamment grand dans \mathbb{C}^2 et la paire $(\partial N(D), L_\infty(V))$ est homéomorphe à la paire $(S_R^3, S_R^3 \cap V)$. Le plongement de $S_R^3 \cap V$ dans S_R^3 ne dépend pas de R suffisamment grand.

Pour étendre cette notion au feuilletage \mathcal{F}_K de $\mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}$ associé à un polynôme f de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} , considérons ses feuilles irrégulières à l'infini V_1, \dots, V_σ et une feuille régulière à l'infini V_0 . Notons $Z(\mathcal{F}_K) = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_\sigma$. À cette courbe est associé l'arbre caractéristique de Puiseux à l'infini (voir [13], [21]) construit à partir des :

- (i) paires caractéristiques de Puiseux à l'infini de chaque composante de $Z(\mathcal{F}_K)$;
- (ii) exposants de coïncidence entre les différentes composantes.

DÉFINITION 14. — *Nous appelons entrelacs complet à l'infini associé au feuilletage \mathcal{F}_K la donnée de l'entrelacs $L(\mathcal{F}_K) = Z(\mathcal{F}_K) \cap S_R^3$ où S_R^3 est une sphère de \mathbb{C}^2 de rayon R suffisamment grand (tel que toutes les sphères de rayon supérieur soient transverses à $Z(\mathcal{F}_K)$).*

À un tel entrelacs, on peut associer l'arbre de satellisation lié à la décomposition de Waldhausen-Johannson-Jaco-Shalen de l'extérieur de l'entrelacs décrit dans [8].

THÉORÈME I. — *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1) *deux polynômes f et g de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} sont topologiquement \mathcal{F} -conjugués à l'infini ;*
- (2) *les paires de Puiseux à l'infini des feuilles de $Z(\mathcal{F}_K)$ et $Z(\mathcal{G}_{K'})$ sont les mêmes et les coefficients d'enlacement des composantes de $L(\mathcal{F}_K)$ et $L(\mathcal{G}_{K'})$ sont les mêmes ;*
- (3) *les arbres caractéristiques de Puiseux à l'infini de $L(\mathcal{F}_K)$ et $L(\mathcal{G}_{K'})$ sont isomorphes ;*
- (4) *les arbres de satellisation de $L(\mathcal{F}_K)$ et $L(\mathcal{G}_{K'})$ sont isomorphes ;*
- (5) *les arbres de résolution $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ et $A_\infty(\mathcal{G}_{K'}, p)$ sont équivalents.*

Démonstration.

(a) Partie (1) \Rightarrow (2) : considérons une sphère $S_R^3 \subset \mathbb{C}^2$ de centre 0 et de rayon R telle que $K \subset \overset{\circ}{B}_R$ où $S_R^3 = \partial B_R$. D'après la démonstration de la proposition 4, l'homéomorphisme de conjugaison H entre \mathcal{F}_K et $\mathcal{G}_{K'}$ envoie toute composante de $Z(\mathcal{F}_K)$ sur une composante de $Z(\mathcal{G}_{K'})$. Choisissons une composante connexe L de $L(\mathcal{F}_K)$ correspondant à une composante V de $Z(\mathcal{F}_K)$ et soit L' la composante de $L(\mathcal{G}_{K'})$ correspondant à la composante $V' = H(V)$ de $Z(\mathcal{G}_{K'})$. Notons $N(L)$ (resp. $N(L')$) un voisinage tubulaire de L (resp. L') dans S_R^3 .

LEMME 11. — *Avec ces notations, on a :*

$$\pi_1(S_R^3 \setminus \overset{\circ}{N}(L)) \cong \pi_1(S_R^3 \setminus \overset{\circ}{N}(L')).$$

Démonstration. — Choisissons quatre boules fermées B_i , $i = 1, \dots, 4$, dans \mathbb{C}^2 de rayons respectifs R_i , $i = 1, \dots, 4$, de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) $R_1 < R_2$, $K \subset \overset{\circ}{B}_1$;
- (ii) $R_3 < R_4$, $K' \subset \overset{\circ}{B}_3$;
- (iii) $H(\partial B_1) \subset \overset{\circ}{B}_3 \setminus K'$ et $H(\partial B_2) \subset \overset{\circ}{B}_4 \setminus B_3$;
- (iv) pour $r > \inf(R_1, R_3)$, les sphères de rayon r sont transverses à V et à V' .

La condition (iv) implique classiquement qu'il existe un homéomorphisme du complémentaire de B_1 (resp. B_3) qui laisse invariante chaque

sphère de rayon plus grand et transforme $V \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_1)$ (resp. $V' \cap (\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_3)$) en $(V \cap \partial B_1) \times [0, \infty]$ (resp. $(V' \cap \partial B_3) \times [0, \infty]$). Ainsi les inclusions naturelles :

$$I : ((\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_2) \setminus (\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_2) \cap V) \hookrightarrow ((\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_1) \setminus (\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_1) \cap V)$$

$$J : ((\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_4) \setminus (\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_4) \cap V') \hookrightarrow ((\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_3) \setminus (\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_3) \cap V')$$

induisent des isomorphismes I_* et J_* sur les groupes fondamentaux.

Considérons les inclusions :

$$((\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_4) \setminus (\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_4) \cap V') \xrightarrow{i} ((\mathbb{C}^2 \setminus H(\mathring{B}_2)) \setminus (\mathbb{C}^2 \setminus H(\mathring{B}_2)) \cap V'),$$

$$\xrightarrow{j} ((\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_3) \setminus (\mathbb{C}^2 \setminus \mathring{B}_3) \cap V'),$$

$$\xrightarrow{k} ((\mathbb{C}^2 \setminus H(\mathring{B}_1)) \setminus (\mathbb{C}^2 \setminus H(\mathring{B}_1)) \cap V').$$

Visiblement, au niveau des groupes fondamentaux, on a :

$$j \circ i = J \quad \text{et} \quad k \circ j = H \circ I \circ H^{-1}.$$

Ainsi $j_* \circ i_*$ et $k_* \circ j_*$ sont des isomorphismes, ce qui montre que j_* est un isomorphisme. □

Comme pour les nœuds toriques itérés, le groupe fondamental de l'extérieur du nœud détermine le type topologique de la branche (cf. [35]), on déduit de la remarque 7 que (S_R^3, L) et (S_R^3, L') sont homéomorphes. En particulier, V et V' ont mêmes paires de Puiseux à l'infini (cf. [13]).

LEMME 12. — *Les coefficients d'enlacement de deux composantes de $L(\mathcal{F}_K)$ et de deux composantes de $L(\mathcal{G}_{K'})$ sont égaux si ces paires correspondent à des paires de branches de $Z(\mathcal{F}_K)$ et de $Z(\mathcal{G}_{K'})$ topologiquement conjuguées.*

Démonstration. — Ce lemme découle directement de la définition du coefficient d'enlacement de deux nœuds dans le bord d'une boule de dimension 4 de \mathbb{C}^2 comme intersection algébrique de deux surfaces en position transverse dans la boule et que bordent ces nœuds. □

(b) Partie (2) \Rightarrow (3) : de manière analogue à la démonstration de Michel-Weber [21], qui reste valable pour les entrelacs toriques itérés que nous considérons, on peut montrer que les coefficients d'enlacement des composantes de l'entrelacs $L(\mathcal{F}_K)$ permettent de calculer les exposants de coïncidence entre les composantes de $Z(\mathcal{F}_K)$ (et réciproquement).

(c) Partie (3) \Rightarrow (4) : cette implication est donnée par la proposition suivante due à Hà [13] :

PROPOSITION 5. — *L'arbre caractéristique de Puiseux à l'infini de l'entrelacs d'une courbe algébrique est isomorphe à son arbre de satellisation.*

Remarquons que l'implication (2) \Rightarrow (3) jointe à la proposition 5 permet d'obtenir la proposition suivante du type « Zariski-Lejeune » :

PROPOSITION 6. — *L'entrelacs complet à l'infini associé au feuilletage \mathcal{F}_K est déterminé par le type topologique à l'infini de ses branches et leurs coefficients d'enlacement.*

(d) Partie (4) \Rightarrow (5) : cette implication repose sur la théorie des variétés graphées (cf. [33], [23]). En effet :

PROPOSITION 7. — *Le plongement de $L(\mathcal{F}_K)$ dans S_R^3 détermine la classe d'équivalence de $A_\infty(\mathcal{F}_K)$.*

Démonstration. — À partir de l'arbre de satellisation de l'entrelacs $L(\mathcal{F}_K)$, on construit (cf. [8]) un arbre de plombage qui décrit l'extérieur de $L(\mathcal{F}_K)$ en tant que variété graphée. Comme l'arbre $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ donne aussi une description de $L(\mathcal{F}_K)$ comme variété graphée, d'après Neumann [23], l'arbre de plombage obtenu et l'arbre $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ sont dans la même classe d'équivalence au sens des variétés graphées. D'après le lemme 1, tous les sommets sans flèche de $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ ont des poids strictement inférieurs à -1 sauf éventuellement le sommet correspondant à la droite à l'infini \mathbb{P}_∞^1 . Si cette éventualité ne se produit pas, l'arbre $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ est sous forme normale (telle que l'a définie Neumann dans [23]). Sinon, on peut effectuer sur $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ les mouvements de la définition 12 correspondant à la contraction d'une composante d'autointersection -1 . Remarquons que si durant ce procédé apparaît un sommet de poids 0, par les mêmes arguments que dans la démonstration de la proposition 2, tous les sommets voisins portent des flèches doubles et l'algorithme s'arrête (ainsi il n'apparaît pas de sommet de poids $+1$). Ce procédé nous permet donc d'arriver soit à un arbre sous forme normale, soit à l'arbre dual d'un diviseur D dont la partie D_∞ se réduit à une unique composante d'autointersection 0. Cela implique que deux arbres de résolution réduits à l'infini équivalents au sens des variétés graphées le sont au sens de la définition 12. \square

(e) La partie (5) \Rightarrow (1) a été démontrée au paragraphe 3.3.1. CQFD.

COROLLAIRE 3. — Deux polynômes f et g de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} sont topologiquement \mathcal{F} -conjugués à l'infini si et seulement si les entrelacs $L(\mathcal{F}_K)$ et $L(\mathcal{G}_{K'})$ sont conjugués.

4. Classification topologique des polynômes primitifs.

Le but de ce paragraphe est de classifier topologiquement au voisinage de l'infini les polynômes primitifs (*i.e.* dont la fibre régulière est connexe) pour la relation de conjugaison. Pour cela, nous allons associer à tout polynôme de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} un arbre « plus complet » que l'arbre de résolution réduit à l'infini associé au feuilletage.

Remarque 9 (voir [30]). — Si f n'est pas un polynôme primitif alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et un polynôme primitif f' de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} tels que $f = P(f')$.

4.1. Arbre de résolution à l'infini d'un polynôme associé à une compactification de \mathbb{C}^2 .

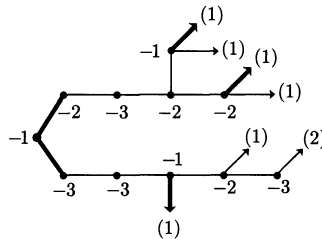
Soient f un polynôme de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} et (Π, F) sa résolution à l'infini, décrite au paragraphe 1, associée à la compactification p de \mathbb{C}^2 (p est le plongement de \mathbb{C}^2 dans $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ donné en coordonnées par $(x, y) \mapsto [x, y, 1]$). La relation de conjugaison des feuilletages « oublie » les composantes communes à l'infini d'une même fibre de f . Nous allons enrichir l'arbre $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ de données supplémentaires relatives à l'application elle-même. Ainsi les éléments c_1, \dots, c_p de l'ensemble Λ_f^∞ des valeurs irrégulières à l'infini serviront à colorier les flèches associées aux transformées strictes à l'infini. Nous prendrons aussi en compte leurs multiplicités.

DÉFINITION 15. — Nous appelons arbre de résolution à l'infini de (f, p) et notons $A_\infty(f, p)$ l'arbre formé de la manière suivante :

- chaque sommet représente une composante irréductible de D , est pondéré par l'autointersection de cette composante et une arête joint deux sommets si les composantes correspondantes se coupent ;
- pour chaque transformée stricte associée à $f^{-1}(c_i)$ pour $i = 1, \dots, p$, qui intersecte une composante E du diviseur, une flèche est attachée au sommet correspondant à E ; cette flèche est colorée par la valeur irrégulière c_i et pondérée par la multiplicité de cette transformée stricte ;

• on attache une flèche double aux sommets s correspondant aux composantes dicritiques; on la pondère par le degré $d(s)$ de la restriction de F à cette composante.

Exemple. — Soient $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ donné par $f(x, y) = x^5y^3 - x^2y$ et p la compactification usuelle de \mathbb{C}^2 . L'arbre de résolution à l'infini de f associé à p est :



Les flèches non doubles sont toutes de couleur 0. Cet exemple simple montre que les arbres $A_\infty(\mathcal{F}_K, p)$ et $A_\infty(f, p)$ sont différents.

4.2. 0-monodromie à l'infini.

Désignons par $\mathcal{A}(D_{\text{dic}})$ l'ensemble des composantes dicritiques du diviseur D , notons $\bar{\Lambda}_f^\infty = \Lambda_f^\infty \cup \{\infty\}$ et fixons un point $*$ $\in \mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda}_f^\infty$.

DÉFINITION 16. — Nous appelons donnée dicritique de f la restriction F_{dic} de F à D_{dic} .

L'application F_{dic} est composée d'une famille d'applications

$$(F_E : E \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}), \quad E \in \mathcal{A}(D_{\text{dic}})$$

formée des restrictions de F à chaque composante irréductible de D_{dic} . L'application F_{dic} est un revêtement ramifié de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$.

DÉFINITION 17. — Nous appelons 0-monodromie de f à l'infini la représentation

$$(R) \quad \mathcal{M}_\infty(f) : \pi_1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda}_f^\infty) \longrightarrow \text{Aut}(F_{\text{dic}}^{-1}(*)) = \prod_{E \in \mathcal{A}(D_{\text{dic}})} \text{Aut}(F_E^{-1}(*)).$$

DÉFINITION 18. — Nous appelons classe de 0-monodromie à l'infini et noterons $[\mathcal{M}_\infty(f)]$ la classe de (R) par l'action des automorphismes intérieurs de $\text{Aut}(F^{-1}(*))$ qui préservent la décomposition ci-dessus.

En pratique, on identifie $F_E^{-1}(\ast)$ à $\{1, \dots, d_E\}$ (d_E étant le degré du revêtement F_E) et on choisit une base e_i de $\pi_1(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda}_f^\infty)$. Alors, \mathcal{S}_{d_E} désignant le groupe symétrique, (R) s'identifie à :

$$(R') \quad \ast_i \mathbb{Z}e_i \longrightarrow \prod_{E \in \mathcal{A}(D_{\text{dic}})} \mathcal{S}_{d_E}.$$

La classe de 0-monodromie à l'infini $[\mathcal{M}_\infty(f)]$ est alors la classe de (R') par « l'action naturelle » du groupe des tresses pures sur $\ast_i \mathbb{Z}e_i$ et par l'action des automorphismes intérieurs de \mathcal{S}_{d_E} , $E \in \mathcal{A}(D_{\text{dic}})$.

4.3. Équivalence des arbres de résolution à l'infini.

Comme précédemment, les arbres de résolution à l'infini de polynômes ne sont pas canoniques. Pour pallier cela, nous allons définir une relation d'équivalence analogue à celle de la définition 12 mais qui tient compte du coloriage de ces arbres.

DÉFINITION 19. — Soient f et g deux polynômes de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} et $p : \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ le plongement $(x, y) \mapsto [x, y, 1]$. Nous dirons que $A_\infty(f, p)$ et $A_\infty(g, p)$ sont équivalents s'il existe :

- (i) une bijection τ de l'ensemble des couleurs de $A_\infty(f, p)$ sur l'ensemble des couleurs de $A_\infty(g, p)$;
- (ii) des suites finies « d'éclatements et de contractions » pour $A_\infty(f, p)$ et $A_\infty(g, p)$ (i.e. de mouvements (a) et (b) de la définition 12) aboutissant à des arbres fléchés et pondérés isomorphes, par un isomorphisme compatible avec le coloriage via τ .

4.4. Théorème de classification topologique.

THÉORÈME 2. — Soient f et g deux polynômes primitifs de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} et $p : \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{C}$ le plongement $(x, y) \mapsto [x, y, 1]$. Les polynômes f et g sont topologiquement conjugués à l'infini si et seulement si ils ont même classe de 0-monodromie à l'infini et si leurs arbres de résolution à l'infini sont équivalents.

Rappelons que deux polynômes f et g sont topologiquement conjugués à l'infini lorsqu'il existe deux compacts K et K' de \mathbb{C}^2 et deux homéomorphismes $H : \mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}'$ et $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui rendent

commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K} & \xrightarrow{H} & \mathbb{C}^2 \setminus \overset{\circ}{K}' \\
 \downarrow f & & \downarrow g \\
 \mathbb{C} & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}.
 \end{array}$$

Démonstration. — Soient H et h des homéomorphismes faisant commuter le diagramme ci-dessus. Visiblement H induit un homéomorphisme $H' : X_f \rightarrow X_g$ entre les espaces des bouts réguliers de f et de g munis de la topologie naturelle induite par les feuilletages. On a vu que X_f (resp. X_g) est homéomorphe à $D_{\text{dic}} \setminus (D_\infty \cup D_{\text{crit}})$ (resp. $D'_{\text{dic}} \setminus (D'_\infty \cup D'_{\text{crit}})$). La restriction à ces espaces de F (resp. G) est un revêtement de monodromie $\mathcal{M}_\infty(f)$ (resp. $\mathcal{M}_\infty(g)$) et (H', h) est un morphisme de revêtement. D'où $[\mathcal{M}_\infty(f)] = [\mathcal{M}_\infty(g)]$.

La démonstration de la nécessité des conditions (i) et (ii) de la définition 19 se fait de manière identique à la démonstration du paragraphe 3.3.2, après avoir changé la définition d'entrelacs complet à l'infini associé au feuilletage par la définition d'entrelacs complet à l'infini d'un polynôme ci-dessous. Nous en laissons les détails au lecteur.

DÉFINITION 20. — Soit f un polynôme de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} . Nous appelons entrelacs complet à l'infini de f la donnée de l'entrelacs coloré marqué $L_f = f^{-1}(\Lambda'_f{}^\infty) \cap S_R^3$ avec $\Lambda'_f{}^\infty = \Lambda_f^\infty \cup \{\lambda_0\}$, λ_0 désignant une valeur régulière arbitraire fixée; la coloration se fait par l'application d'évaluation $\varepsilon_f : \pi_0(L_f) \rightarrow \Lambda'_f{}^\infty$ et le marquage consiste à distinguer la couleur λ_0 .

Précisons que dans cette preuve, on remplace la courbe $Z(\mathcal{F}_K)$ par la courbe $Z(f) = f^{-1}(\Lambda'_f{}^\infty)$.

Avant de commencer la preuve de la réciproque, remarquons que l'on obtient, à la place du corollaire 3, le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4. — Si deux polynômes primitifs f et g sont topologiquement conjugués à l'infini alors leurs entrelacs colorés marqués L_f et L_g sont conjugués : il existe une bijection $\kappa : \Lambda'_f{}^\infty \rightarrow \Lambda'_g{}^\infty$ respectant le marquage et un homéomorphisme φ de S_R^3 tel que $\varphi(L_f) = L_g$ et $\varepsilon_g \circ \varphi_* = \kappa \circ \varepsilon_f$.

Il nous reste à démontrer la réciproque. Notons $A_\infty(f)$ et $A_\infty(g)$ les arbres de résolution à l'infini de f et de g , que nous supposons isomorphes

$\psi : A_\infty(f) \xrightarrow{\sim} A_\infty(g)$. Décomposons les diviseurs de résolution à l'infini de f et de g en

$$D = D_\infty \cup D_{\text{dic}} \cup D_{\text{crit}} \quad \text{et} \quad D' = D'_\infty \cup D'_{\text{dic}} \cup D'_{\text{crit}}.$$

LEMME 13. — *Il existe un homéomorphisme $H_1 : D \rightarrow D'$ compatible avec les couleurs qui transforme les points d'attache des transformées strictes de F sur D en ceux de G sur D' .*

Démonstration. — Puisque f et g ont même classe de 0-monodromie, d'après le théorème de classification d'Hurwitz (cf. [1]), il existe deux homéomorphismes $H_0 : D_{\text{dic}} \rightarrow D'_{\text{dic}}$ et $h : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} D_{\text{dic}} & \xrightarrow{H_0} & D'_{\text{dic}} \\ F \downarrow & & \downarrow G \\ \mathbb{P}^1\mathbb{C} & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}^1\mathbb{C}. \end{array}$$

L'homéomorphisme H_0 se prolonge aisément en un homéomorphisme H_1 vérifiant les conditions du lemme. □

Trivialement H_1 s'étend en un homéomorphisme H_2 au voisinage de D_{dic} . L'extension de H_2 en un homéomorphisme H_3 au voisinage de D_{crit} se construit de manière identique à celle décrite à l'étape (iii) du paragraphe 3.3.1 en utilisant les lemmes 8 et 9 et en remarquant que, d'après la proposition 2, deux composantes de D et D' associées à des sommets qui se correspondent par l'isomorphisme d'arbres ψ ont des multiplicités égales.

D'un autre côté, on construit un homéomorphisme H_4 qui conjugue F à G dans un voisinage de D_∞ , par la méthode décrite à l'étape (i) du paragraphe 3.3.1.

Il nous reste à recoller les homéomorphismes de conjugaison H_3 et H_4 . Pour ce faire, nous allons faire appel à la théorie des multi-entrelacs fibrés (cf. [8]) et à la théorie de Waldhausen sur les variétés de dimension 3.

Soit $N(D)$ un voisinage tubulaire du diviseur D et $N(D_\infty)$ un voisinage tubulaire de D_∞ . Nous avons vu lors de la démonstration du

lemme 2 que la variété $M = \overline{\partial N(D) \setminus \partial N(D_\infty)}$ est une union de tores solides :

$$M = \bigcup_{i=1}^n D_i^2 \times S_i^1$$

où n est le nombre de composantes dicritiques de D . Comme $\partial N(D_\infty)$ est homéomorphe à $f^{-1}(\partial D(\infty, \varepsilon))$, où $D(\infty, \varepsilon)$ est un disque centré en $\infty \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$, considérons la surface Γ définie comme « l'intersection » $f^{-1}(z) \cap (\partial N(D) \setminus \overset{\circ}{M})$ pour un z fixé appartenant à $\partial D(\infty, \varepsilon)$. Soit $L_0(f)$ l'entrelacs dans $\partial N(D)$ dont les composantes sont les âmes des tores $D_i^2 \times S_i^1$ pour $i = 1, \dots, n$. Rappelons

THÉOREME (Neumann [24]). — *L'entrelacs $L_0(f)$ est un multi-entrelacs fibré de fibre Γ .*

Rappelons aussi (voir [8]) qu'un multi-entrelacs \mathcal{L} dans S^3 consiste en un entrelacs orienté $\mathcal{L} = (S^3, L)$ où chaque composante K_i de L est pondérée par un entier a_i appelé *multiplicité*. Un tel multi-entrelacs détermine une application (unique à homotopie près) π de son extérieur $E(L) = S^3 \setminus \overset{\circ}{N}(L)$ à valeurs dans S^1 , $N(L)$ désignant un voisinage tubulaire de L , dont le degré sur toute courbe fermée est le coefficient d'enlacement de la courbe avec L en prenant en compte les multiplicités a_i . Inversement, toute classe d'homotopie d'applications $\pi : E(L) \rightarrow S^1$ détermine une structure de multi-entrelacs sur \mathcal{L} . Si cette classe contient une fibration, \mathcal{L} muni de cette fibration est dit *multi-entrelacs fibré*. De plus, une telle fibration est unique à isotopie près (voir [8], [29]). C'est un fait général pour les variétés de dimension trois compactes (voir [34]) et un cas particulier d'un résultat de Blank-Laudenbach [2].

Remarquons enfin que, puisque les arbres de résolution à l'infini de f et g sont isomorphes, la paire $(S^3, L_0(f))$ est conjuguée à la paire $(S^3, L_0(g))$. Nous noterons $E_f = E(L_0(f)) = \partial N(D) \setminus \overset{\circ}{M}$.

Considérons le cocycle $\Phi = H_4^{-1} \circ H_3 : \partial E_f \rightarrow \partial E_f$.

LEMME 14. — *Le cocycle Φ s'étend en un automorphisme Φ'' de E_f vérifiant $\Phi''(\Gamma) = \Gamma$ et $\Phi''|_{\partial E_f} = \Phi$.*

Démonstration. — Montrons tout d'abord que Φ est isotope à l'identité. Considérons pour cela une composante de bord T_i de E_f et désignons par (μ_i, λ_i) une base en homologie de T_i , le méridien μ_i est

défini comme le bord d'une fibre du fibré normal de la composante de D_∞ correspondant à la composante de bord T_i . Par construction, nous avons $\Phi(\mu_i) = \mu_i$ et $\Phi(\partial\Gamma \cap T_i) = \partial\Gamma \cap T_i$.

Posons $\Phi(\lambda_i) = \ell$ et $\partial\Gamma \cap T_i = p\mu_i + q\lambda_i$. On a $q \neq 0$ car $L_0(f)$ est fibré et

$$\Phi(\partial\Gamma \cap T_i) = p\mu_i + q\ell = p\mu_i + q\lambda_i.$$

Ainsi $\ell = \lambda_i$.

L'application Φ étant l'identité en homologie, il existe une isotopie de Φ à l'identité. Choisissons alors un collier $\partial E_f \times I$ pour effectuer cette isotopie et prolongeons Φ sur $E_f \setminus \overline{\partial E_f \times I}$ par l'identité. Nous avons alors un automorphisme Φ' sur E_f (mais $\Phi'(\Gamma)$ est une surface Γ' qui peut être différente de Γ). Il est clair que les fibrations de E_f données respectivement par Φ' et f sont homotopes, donc isotopes et en particulier les surfaces Γ' et Γ sont isotopes. La variété E_f étant irréductible et les surfaces Γ' et Γ étant incompressibles, nous pouvons appliquer un résultat de Waldhausen [34], corollaire 5.5, qui nous dit que Γ' est isotope à Γ par une déformation qui est constante sur ∂E_f . Il existe donc un homéomorphisme ρ de E_f tel que $\rho(\Gamma') = \Gamma$. L'automorphisme cherché est $\Phi'' = \rho \circ \Phi'$. □

Pour achever la démonstration de la condition suffisante du théorème 2, il suffit d'étendre radialement l'automorphisme Φ'' à l'intérieur du voisinage du diviseur de bord E_f privé du diviseur. □

Nota Bene. — Le théorème 2 de cet article précise et corrige l'énoncé du théorème 1 de [9] dans lequel la condition de conjugaison des «0-monomies à l'infini» ne figurait pas. Cette condition retranscrite en termes d'entrelacs doit aussi être rajoutée au critère de conjugaison des entrelacs complets à l'infini de deux polynômes énoncé dans le théorème 2 de [9].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. BERSTEIN et A.L. EDMONDS, On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds, Transactions of the AMS, 247 (1979), 87-124.
- [2] S. BLANK et F. LAUDENBACH, Isotopie des formes fermées en dimension 3, Inv. Math., 54 (1979), 103-177.
- [3] E. BRIESKORN et H. KNÖRRER, Plane algebraic curves, Birkhäuser, 1986.
- [4] S. BROUGHTON, On the topology of polynomial hypersurfaces, Proc. Symp. Pure Math., 40, AMS Pub. (1983), 165-178.

- [5] S. BROUGHTON, Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces, *Invent. Math.*, 92 (1988), 217–241.
- [6] C. CAMACHO and P. SAD, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, *Annals of Math.*, 115 (1982), 579–595.
- [7] D. CERVEAU et J.-F. MATTEI, Formes intégrables holomorphes singulières, *Astérisque*, 97, 1982.
- [8] D. EISENBUD and W.D. NEUMANN, Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities, *Ann. Math. Stud.* 101, Princeton University Press, 1985.
- [9] L. FOURRIER, Classification topologique à l'infini des polynômes de deux variables complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 318 (1994), 461–466.
- [10] P. GRIFFITHS and J. HARRIS, Principles of algebraic geometry Pure and applied Mathematics, Wiley-Interscience series of texts, monographs and tracts, 1978.
- [11] H.V. HA, Sur la fibration globale des polynômes de deux variables complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 309 (1989), 231–234.
- [12] H.V. HA, Nombres de Lojasiewicz et singularités à l'infini des polynômes de deux variables complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 311 (1990), 429–432.
- [13] H.V. HA, Sur l'irrégularité du diagramme sp'ice pour l'entrelacs à l'infini des courbes planes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 313, 5 (1991), 277–280.
- [14] H.V. HA et D.T. LE, Sur la topologie des polynômes complexes, *Acta Math. Viet.*, 9 numéro 1 (1984), 21–32.
- [15] H.V. HA et L.A. NGUYEN, Le comportement géométrique à l'infini des polynômes de deux variables complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 309 (1989), 183–186.
- [16] F. HIRZEBRUCH, W.D. NEUMANN and S.S. KOH, Differentiable manifolds and quadratic forms, *Lecture Notes in pure and appl. Math.* 4, Marcel Dekker, Inc. New York, 1971.
- [17] W.H. JACO, Lectures on three-manifold topology, *C.B.M.S.* vol. 43, 1980.
- [18] W.H. JACO and P.B. SHALEN, Seifert fibered spaces in 3-manifolds, *Memoirs of the A.M.S.* 220, 1979.
- [19] K. JOHANNSON, Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundaries, *Lect. Notes Math.* vol 761, 1979, New York–Berlin–Heidelberg, Springer.
- [20] J.-F. MATTEI et R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, *Ann. Scient. École Norm. Sup.*, 4^{ième} série, 13 (1980), 469–523.
- [21] F. MICHEL et C. WEBER, Topologie des germes de courbes planes à plusieurs branches, Université de Genève, 1985, à paraître.
- [22] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, *Ann. of Math. Studies* 61, Princeton Univ. Press, 1968.
- [23] W.D. NEUMANN, A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves, *Trans. of the A. M. S.*, 268 numéro 2 (1981), 299–344.
- [24] W.D. NEUMANN, Complex algebraic plane curves via their links at infinity, *Invent. Math.*, 98 (1989), 445–489.
- [25] W.D. NEUMANN, On the topology of curves in complex surfaces, *Topological methods in algebraic transformation groups* (New Brunswick, NJ, 1988), 117–133, *Prog. Math.*, 80, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1989.

- [26] W.D. NEUMANN and L. RUDOLPH, Unfoldings in Knot Theory, *Math. Ann.*, 278 (1987), 409–439, *Math. Ann.*, 282 (1988), 49–351.
- [27] L. RUDOLPH, Embeddings of the line in the plane, *J. reine angew. Math.*, 337 (1982), 113–118.
- [28] A. SEIDENBERG, Reduction of singularities of the differentiable equation $A dY = B dX$, *Amer. J. of Math.*, 90 (1968), 248–269.
- [29] J. STALLINGS, On fibering certain 3-manifolds, *Topology of 3-manifolds and related topics* (Ed. par M.K. Fort, Jr.), Prentice-Hall, N.J., 1962, 95–100.
- [30] M. SUZUKI, Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes et automorphismes algébriques de l'espace \mathbb{C}^2 , *J. Math. Soc. Japan*, 26, numéro 2 (1974), 241–257.
- [31] M. SUZUKI, Sur les opérations holomorphes du groupe additif complexe sur l'espace de deux variables complexes, *Ann. Scient. Ecole Norm. Sup.*, 4^{ième} série, 10 (1977), 517–546.
- [32] R. THOM, Ensembles et morphismes stratifiés, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969), 240–284.
- [33] F. WALDHAUSEN, Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Invent. Math.*, 3 (1967), 308–333, *Invent. Math.*, 4 (1967), 87–117.
- [34] F. WALDHAUSEN, On irreducible 3-manifolds that are sufficiently large, *Ann. of Math.*, 87 (1968), 56–88.
- [35] W. WHITTEN, Knot complements and groups, *Topology*, 26, n° 1 (1987), 41–44.
- [36] O. ZARISKI, Studies in equisingularity II : Equisingularity in codimension 1 (and characteristic 0), *Am. J. of Math.*, 87 (1965), 972–1006.

Manuscrit reçu le 20 novembre 1995,
accepté le 8 mars 1996.

Laurence FOURRIER,
Université Paul Sabatier
UFR MIG
Laboratoire Émile Picard
UMR 5580
118 route de Narbonne
31062 Toulouse cedex (France).